в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta)\to 0, \delta,\beta\to 0$ и $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta^p\right)$, где $d>1,\ p\in(0,1)$, то $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m-x\|=0$, т.е. итерационный метод (3) с правилом останова (5) сходится к точному решению операторного уравнения.

Список цитированных источников

1. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
2. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.

УДК 519.6+517.983

ПРАВИЛО ОСТАНОВА ПО НЕВЯЗКЕ В НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Дерачиц Н.А.

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Научный руководитель – Матысик О.В., к. ф.- м. н., доцент

В действительном гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax=y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Для решения уравнения (1) предлагается неявная итерационная процедура

$$(E+\alpha A^3)x_{n+1}=x_n+\alpha A^2 y,\ \ x_0=0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части y_δ, $\|y-y_\delta\|\le\delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$(E+\alpha A^3)x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}+\alpha A^2 y_\delta,\ \ x_{0,\delta}=0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению *x* уравнения (1) при подходящем выборе *n* и достаточно малых δ, т.е. $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n\|x-x_{n,\delta}\|\right)=0$.

Этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [1–2]. Зададим уровень останова $\varepsilon>0$ и определим момент *m* останова условиями:

$$\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon,\ (n<m),\ \|Ax_{m,\delta}-y_\delta\|\le\varepsilon,\ \varepsilon=b\delta,\ b>1. \tag{4}$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\|Ax_{0,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon.$

Ниже метод итерации (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{m}\left\|x-x_{m,\delta}\right\|\right)=0$.

Справедливы

Лемма 1. *Пусть* $A=A^{*}\geq 0$, $\|A\|\leq M$. *Тогда для любого* $\omega\in H$ $\left(E-Ag_{n}(A)\right)\omega\to 0, n\to\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $A=A^{*}\geq 0$, $\|A\|\leq M$. *Тогда для* $\forall\,\upsilon\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{s/3}\left\|A^{s}(E-Ag_{n}(A))v\right\|\to 0,\ n\to\infty,\ 0\leq s<\infty.$

Лемма 3. *Пусть* $A=A^{*}\geq 0$, $\|A\|\leq M$. *Если для некоторой последовательности* $n_{p}<\overline{n}=const$ *и* $v_{0}\in\overline{R(A)}$ *при* $p\to\infty$ *имеем* $\omega_{p}=A\left(E-Ag_{n_{p}}(A)\right)\upsilon_{0}\to 0$, *то* $\upsilon_{p}=\left(E-Ag_{n_{p}}(A)\right)\upsilon_{0}\to 0.$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A=A^{*}\geq 0$, $\|A\|\leq M$ *и пусть момент останова* $m=m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4). *Тогда метод* (3) *сходится.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x=A^{s}z$, $s>0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta)\leq 1+\dfrac{s+1}{6\alpha}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{3}{s+1}}$.

$$\left\|x_{m(\delta),\delta}-x\right\|\leq\left[(b+1)\delta\right]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}+3\alpha^{1/3}\left\{1+\frac{s+1}{6\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{3}{s+1}}\right\}^{1/3}\delta. \quad (5)$$

Замечание 1. *Порядок оценки* (5) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ *и, как следует из* [2], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями*.

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы* 2 *предположение порядка* $s>0$ *истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова* (4). *И тем не менее в теореме* 2 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (4), *как показывает теорема* 1, *обеспечивает сходимость итерационного метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

Список цитированных источников

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест: изд-во БрГУ им. А.С. Пушкина, 2008. – 196 с.
2. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.