

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ”**

Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

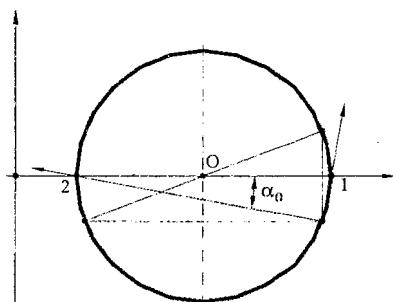
ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы по курсу

«Сопротивление материалов»

для студентов специальности

1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство”
факультета инновационной деятельности и финансов



Брест 2014

УДК 531.8

Методические указания содержат индивидуальные задания, исходные данные к выполнению контрольной работы и примеры решения задач.

Основная цель методических указаний - оказание помощи студентам строительных специальностей при изучении основных разделов сопротивления материалов, активизация самостоятельной работы.

Составители: А.И. Веремейчик, доцент
С.Р. Оньсько, ст. преподаватель
И.Г. Томашев, ассистент

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	3
2. Требования к оформлению контрольных работ.....	3
3. Примеры решения задач.....	4
4. Задания для выполнения контрольной работы.....	18
5. Список литературы	35

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При проектировании зданий и сооружений различного назначения специалисты должны обладать элементами фундаментальных знаний по общетехническим дисциплинам. К таким дисциплинам относятся и сопротивление материалов. Умение построить модели силовых нагрузений, определить реактивные силы опорных устройств элементов конструкций, а также оценить их прочностные и жесткостные характеристики, приобретает студентами после изучения основных разделов сопротивления материалов.

Типовым планом для подготовки студентов предусмотрено небольшое количество учебного времени, в течение которого можно рассмотреть только элементарные разделы сопротивления материалов. Каждый студент специальности 1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство” факультета инновационной деятельности и финансов выполняет контрольную работу по основным разделам дисциплины.

Методические указания позволяют, с учетом ссылки на литературу, изучить основные разделы курса и применить теоретический материал при выполнении контрольной работы. При защите контрольной работы необходимо ответить на вопросы по теме работы и уметь решать тестовые задачи по ее тематике. Экзамен по курсу принимается после того, как зачтена контрольная работа.

2. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Контрольная работа выполняется на отдельных листах формата А4.
2. Порядок оформления: титульный лист; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; выводы; перечень литературы.
3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов согласно стандарту УО «БрГТУ».
4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Страницы нумеруются. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до сотых долей.
5. Эпюры необходимо строить на одном листе с расчетной схемой, на эпюрах указывать числовые значения характерных ординат и единицы расчетных величин.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1

Для ступенчатого бруса, нагруженного продольными осевыми нагрузками, требуется:

- 1) построить эпюру продольных сил N ;
- 2) построить эпюру нормальных напряжений σ ;
- 3) построить эпюру перемещений δ ;
- 4) произвести проверки прочности и жесткости бруса.

Дано: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $F_1 = 50 \text{ кН}$; $F_2 = 40 \text{ кН}$; $F_3 = 60 \text{ кН}$;
 $q = 5 \text{ кН/м}$; $a = 1,5 \text{ м}$; $b = 4 \text{ м}$; $c = 5 \text{ м}$; $A_1 = 10 \text{ см}^2$; $A_2 = 20 \text{ см}^2$; $[\sigma_p] = 70 \text{ МПа}$;

$$[\sigma_c] = 90 \text{ МПа}; [\delta] = \frac{1}{500} \cdot l.$$

Решение:

Вычертим брус в масштабе с указанием необходимых нагрузок и размеров.

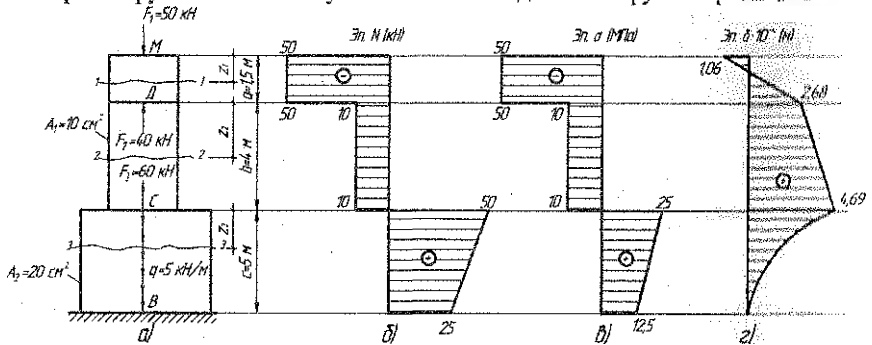


Рисунок 1.1 - Схема бруса. Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений

1. Разобьем брус на три силовых участка и запишем выражения для продольных сил и напряжений.

Участок 1 $0 \leq z_1 \leq a$,

$$N_1 = -F_1 = -50 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{50 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -50 \text{ МПа} \quad (\text{где } A_1 = 10 \text{ см}^2 \text{ - площадь сечения первого участка}).$$

Участок 2 $0 \leq z_2 \leq b$,

$$N_2 = -F_1 + F_2 = -50 + 40 = -10 \text{ кН};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = -10 \text{ МПа} \quad (\text{где } A_2 = 20 \text{ см}^2 \text{ - площадь сечения второго участка}).$$

Участок 3 $0 \leq z_3 \leq c$

$$N_3 = -F_1 + F_2 + F_3 - q \cdot z_3,$$

при $z_3 = 0$: $N_3 = -F_1 + F_2 + F_3 = -50 + 40 + 60 = 50 \text{ кН}$;

при $z_3 = c$: $N'_3 = -F_1 + F_2 + F_3 - q \cdot c = -50 + 40 + 60 - 5 \cdot 5 = 25 \text{ кН}$,

при $z_3 = 0$: $\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{50 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 25 \text{ МПа}$;

при $z_3 = c$: $\sigma'_3 = \frac{N'_3}{A_3} = \frac{25 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 12,5 \text{ МПа}$ (где $A_3 = 20 \text{ см}^2$, площадь сечения

бруса на третьем участке).

По данным расчета построены эпюры нормальных сил и напряжений (рисунок 1.1б и 1.1в).

2. Определяем абсолютное изменение длины стержня.

Участок 1: продольная сила на участке постоянна, $\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1}$, тогда

$$\Delta l_1 = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -3,75 \cdot 10^{-4} \text{ м (т.к. } \Delta l_1 < 0, \text{ участок испытывает деформацию сжатия)}.$$

Участок 2: $\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A_2}$,

$$\Delta l_2 = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 4,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -2,0 \cdot 10^{-4} \text{ м (сжатие)}.$$

Участок 3: продольная сила изменяется по длине участка, поэтому

$$\Delta l_3 = \int_0^c \frac{N_3 \cdot dz}{E \cdot A_3} = \frac{\omega_N}{E \cdot A_3}, \text{ где } \omega_N \text{ -- площадь эпюры } N,$$

$$\Delta l_3 = \frac{(50 + 25) \cdot 10^3 \cdot 5,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 4,69 \cdot 10^{-4} \text{ м (растяжение)}.$$

Абсолютное изменение длины:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = (-3,75 - 2,0 + 4,69) \cdot 10^{-4} = -1,06 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Определяем перемещения. Перемещение сечения В: $\delta_B = 0$, т.к. брус жестко закреплен.

Перемещение сечения С: $\delta_C = \Delta l_3 = 4,69 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

Перемещение сечения Д: $\delta_D = \Delta l_3 + \Delta l_2 = (4,69 - 2,0) \cdot 10^{-4} = 2,69 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

Перемещение сечения М:

$$\delta_M = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = (4,69 - 2,0 - 3,75) \cdot 10^{-4} = -1,06 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

По данным расчета построена эпюра перемещений поперечных сечений (рисунок 1.1г).

3. Проверка прочности бруса.

Анализ эпюры σ показывает, что опасными сечениями для заданного бруса являются: сечение C – в растянутой зоне и сечение D – в сжатой области бруса.

$$\sigma_D = 50 \text{ МПа} < [\sigma_r] = 90 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = 25 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 70 \text{ МПа}.$$

Условия прочности выполняются.

4. Проверка жесткости бруса.

Условие жесткости имеет вид:

$$\delta \leq [\delta];$$

$$\delta_M = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ м} < [\delta] = \frac{l}{500} = \frac{5+4+1,5}{500} = 21 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Условие жесткости выполняется.

Пример 2

Абсолютно жесткий брус, подвешенный на двух стальных стержнях и шарнирно неподвижно закрепленный, нагружен сосредоточенной силой $F = 610$ кН. Линейные размеры бруса a, b , высота h составляют соответственно 1,2 м; 1,8 м; 0,6 м. Отношение площадей $\frac{A_1}{A_2}$ поперечных сечений стержней $n=2$, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа, предел текучести материала $\sigma_T = 240$ МПа.

Требуется подобрать сечения стержней из двух равнобоких уголков, а также по величине разрушающей нагрузки определить значение коэффициента запаса прочности.

Решение:

1. Построим в масштабе расчетную схему системы стержней (рисунок 2.1):

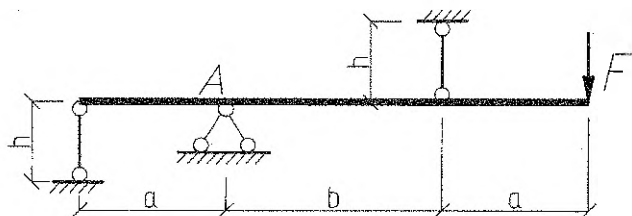


Рисунок 2.1 - Исходная схема стержневой системы

2. Установим степень статической неопределенности. Рассмотрим равновесие бруса. Брус находится в равновесии под действием силы F и четырех неизвестных реакций: N_1, N_2, R_{Ax}, R_{Ay} . Но для плоской системы сил можем составить лишь три уравнения статики. Значит, степень статической неопределенности $S = 4 - 3 = 1$. Система один раз статически неопределима.

а) В нашем случае требуется определить только N_1 и N_2 , поэтому из трех уравнений статики используем одно (моментов):

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = 0; \quad N_1 \cdot a + N_2 \cdot b - F(a+b) &= 0, \\ 1,2N_1 + 1,8N_2 &= 1830.\end{aligned}$$

б) Составим схему деформаций (рисунок 2.2).

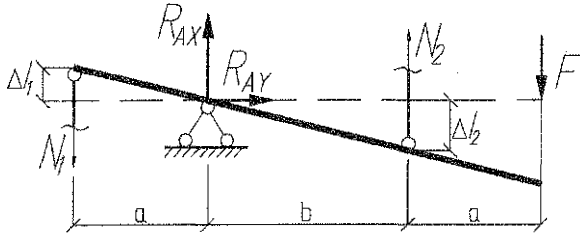


Рисунок 2.2 - Деформационная схема стержневой системы

Из схемы деформаций составим дополнительное уравнение деформаций, используя подобие треугольников:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} &= \frac{a}{b}, \\ 1,8\Delta l_1 &= 1,2\Delta l_2.\end{aligned}$$

в) Выразим Δl_1 и Δl_2 по закону Гука через усилия в стержнях, их длины и жесткости:

$$b \frac{N_1 l_1}{EA_1} = a \frac{N_2 l_2}{EA_2},$$

С учетом $l_1 = l_2 = h$ и $\frac{A_1}{A_2} = n$ уравнение деформаций примет вид:

$$N_1 = n \frac{a}{b} N_2, \text{ или } N_1 = 1,33N_2.$$

г) Составим систему уравнений, которая включает уравнение статики и уравнение деформаций:

$$\begin{cases} N_1 + 1,52N_2 = 1525, \\ N_1 - 1,33N_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}N_1 &= 718 \text{ кН} \\ N_2 &= 540 \text{ кН}\end{aligned}$$

3. Определим наиболее напряженный стержень. Для этого сравним напряжения σ_1 и σ_2 :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{n \cdot A_2},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}.$$

Составим отношение

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{N_1}{n \cdot N_2} = \frac{718 \cdot 10^3}{2 \cdot 540 \cdot 10^3} = 0,7 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2.$$

Более напряженным является второй стержень.

4. Определим площадь поперечного сечения стержня.

Так как $\sigma_2 > \sigma_1$, то определяем площадь сечения A_2 :

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{540 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,00338 \text{ м}^2 = 33,8 \text{ см}^2,$$

где $[\sigma] = 160$ МПа.

5. По ГОСТ 8509-72 подбираем сечение стержня, состоящего из двух равнобоких уголков, площадью A_2^* . Используем условие:

$$A_2^* \geq \frac{A_2}{2} = \frac{33,8}{2} = 16,9 \text{ см}^2.$$

В нашем случае $A_2^* \geq 16,9 \text{ см}^2$.

Близкой по значению является площадь уголка № 110×110×8, т.е. $A_2^* = 17,2 \text{ см}^2$. Определим процент недогрузки δ по формуле:

$$\delta = \left| \frac{\sigma_2 - [\sigma]}{[\sigma]} \right| \cdot 100\%.$$

Для этого определим напряжение σ_2 :

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A_2^*} = \frac{540 \cdot 10^3}{2 \cdot 17,2 \cdot 10^2} \approx 157 \text{ МПа}.$$

Тогда

$$\delta = \left| \frac{157 - 160}{160} \right| \approx 2\%,$$

что допустимо, так как $|\delta| = 2\% < [\delta] = 5\%$, где $[\delta] = 5\%$ - допускаемый процент перегрузки (недогрузки) стержня. Принимаем уголок № 110×110×8.

6. Найдем площадь сечения первого уголка A_1^* ,

$$A_1 = n \cdot A_2,$$

$$A_1^* \geq \frac{A_1}{2} = \frac{67,6}{2} = 33,8 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8509-72 подбираем сечение равнобокого уголка №160×160×11, для которого $A_1^* = 34,4 \text{ см}^2$.

7. Определим величину разрушающей нагрузки

$$F_p = \frac{N_1^{np} \cdot a + N_2^{np} \cdot b}{a + b}.$$

Предельные усилия в стержнях N_1^{np} и N_2^{np} рассчитаем:

$$N_1^{np} = 2 \cdot A_1^* \cdot \sigma_T = 2 \cdot 34,4 \cdot 10^{-4} \cdot 240 \cdot 10^6 = 1651,2 \text{ кН},$$

$$N_2^{np} = 2 \cdot A_2^* \cdot \sigma_T = 2 \cdot 17,2 \cdot 10^{-4} \cdot 240 \cdot 10^6 = 825,6 \text{ кН}.$$

Подставим значения N_1^{np} и N_2^{np} в формулу для расчета разрушающей нагрузки. Получим:

$$F_p = \frac{1651,2 \cdot 1,2 + 820,8 \cdot 1,8}{1,2 + 1,8} \approx 1153 \text{ кН}.$$

Найдем коэффициент запаса прочности:

$$m = \frac{F_p}{F} = \frac{1153 \cdot 10^3}{610 \cdot 10^3} \approx 1,89.$$

Пример 3

Для изображенного на рисунке 3.1 составного сечения требуется определить:

- 1) положение центра тяжести сечения относительно произвольных осей x, y ;
- 2) момент инерции сечений I_{x_c} и I_{y_c} относительно центральных осей x_c и y_c ;
- 3) положение главных центральных осей U и V ;
- 4) главные моменты инерции;
- 5) выполнить проверки $I_{x_c} + I_{y_c} = I_u + I_v$; $I_{uv} = 0$;
- 6) построить эллипс инерции.

Дано: швеллер №24; лист: $b = 2 \text{ см}$; $h = 18 \text{ см}$.

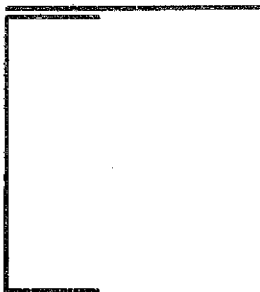
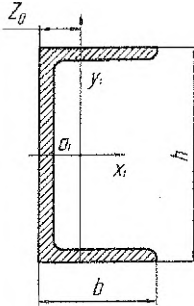


Рисунок 3.1 – Исходная схема

Решение:

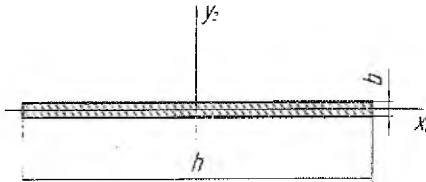
1. Из таблиц сортамента прокатных профилей выписываем все данные, которые требуются в дальнейших расчетах:

Швеллер:



$$\begin{aligned}h &= 24 \text{ см}; \\b &= 9 \text{ см}; \\A &= 30,6 \text{ см}^2; \\I_X &= 2900 \text{ см}^4; \\I_Y &= 208 \text{ см}^4; \\z_0 &= 2,42 \text{ см}; \\I_{XY} &= 0.\end{aligned}$$

Лист:



$$\begin{aligned}b &= 2 \text{ см}; \\h &= 18 \text{ см}; \\A &= b \cdot h = 2 \cdot 18 = 36 \text{ см}^2; \\I_X &= \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{18 \cdot 2^3}{12} = 12 \text{ см}^4; \\I_Y &= \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{2 \cdot 18^3}{12} = 972 \text{ см}^4; \\I_{XY} &= 0.\end{aligned}$$

Вычертим сечение в масштабе 1:2, проведем случайные оси x , y и определим координаты центра тяжести заданного сечения:

а) общая площадь сечения:

$$A = A_{шв} + A_n = 30,6 + 36 = 66,6 \text{ см}^2;$$

б) координаты центра тяжести каждого элемента сечения в осях x и y :

$$\begin{aligned}x_1 &= z_0 = 2,42 \text{ см}; \\y_1 &= \frac{h_{шв}}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ см}; \\x_2 &= \frac{h_n}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ см}; \\y_2 &= h_{шв} + \frac{b_n}{2} = 24 + \frac{2}{2} = 25 \text{ см};\end{aligned}$$

в) статические моменты сечения относительно осей x и y :

$$\begin{aligned}S_X &= A_{шв} \cdot y_1 + A_n \cdot y_2 = 30,6 \cdot 12 + 36 \cdot 25 = 1267,2 \text{ см}^3; \\S_Y &= A_{шв} \cdot x_1 + A_n \cdot x_2 = 30,6 \cdot 2,42 + 36 \cdot 9 = 398 \text{ см}^3;\end{aligned}$$

г) центр тяжести сечения:

$$x_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{398}{66,6} = 5,98 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{S_X}{A} = \frac{1267,2}{66,6} = 19 \text{ см}.$$

Через центр тяжести проводим оси x_C и y_C параллельно осям x_1, y_1 и x_2, y_2 .

2. Вычислим моменты инерции сечения относительно осей x_C, y_C :

а) положение Ц.Т. каждого элемента сечения относительно центральных осей:

$$m_1 = x_1 - x_C = 2,42 - 5,98 = -3,56 \text{ см};$$

$$n_1 = y_1 - y_C = 12 - 19 = -7 \text{ см};$$

$$m_2 = x_2 - x_C = 9 - 5,98 = 3,02 \text{ см};$$

$$n_2 = y_2 - y_C = 25 - 19 = 6 \text{ см}.$$

б) используя правило параллельного переноса осей, определим осевые и центробежные моменты инерции:

$$I_{x_C} = I_{x_{ms}} + n_1^2 \cdot A_{ms} + I_{x_n} + n_2^2 \cdot A_n = 2900 + (-7)^2 \cdot 30,6 + 12 + 6^2 \cdot 36 = 5707,4 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = I_{y_{ms}} + m_1^2 \cdot A_{ms} + I_{y_n} + m_2^2 \cdot A_n = 208 + (-3,56)^2 \cdot 30,6 + 972 + 3,02^2 \cdot 36 = 1896 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_C y_C} = I_{x_n y_n} + m_1 \cdot n_1 \cdot A_{ms} + I_{x_n y_n} + m_2 \cdot n_2 \cdot A_n = 0 + (-3,56) \cdot (-7) \cdot 30,6 + 0 + 3,02 \cdot 6 \cdot 36 = 1414,87 \text{ см}^4$$

3. Определим положение главных осей по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{x_C y_C}}{I_{x_C} - I_{y_C}} = -\frac{2 \cdot 1414,87}{5707,4 - 1896} = -0,742;$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-0,742) = -18,3^\circ.$$

Проводим главные оси $U(\max)$ и $V(\min)$.

4. Вычислим главные моменты инерции:

$$\left. \begin{matrix} I_u \\ I_v \end{matrix} \right\} = \frac{5707,4 + 1896}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(5707,4 - 1896)^2 + 4 \cdot (1414,87)^2} = 3801,7 \pm 2373,5,$$

$$I_u = 6175,2 \text{ см}^4 \quad - \text{max значение};$$

$$I_v = 1428,2 \text{ см}^4 \quad - \text{min значение}.$$

5. Выполняем проверку расчетов:

а) $I_{x_C} + I_{y_C} = I_u + I_v$:

$$5707,4 + 1896 = 6175,2 + 1428,2;$$

$$7603,4 = 7603,4;$$

б) $I_{uv} = 0$:

$$I_{uv} = \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{x_c y_c} \cdot \cos 2\alpha = \frac{5707,4 - 1896}{2} \cdot (-0,596) + 1414,87 \cdot 0,803 = 0,34 \approx 0$$

6. Строим эллипс инерции.

Вычисляем радиусы инерции:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{6175,2}{66,6}} = 9,63 \text{ см};$$

$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{1428,2}{66,6}} = 4,63 \text{ см}.$$

Откладываем полученные значения на главных осях и строим эллипс инерции.

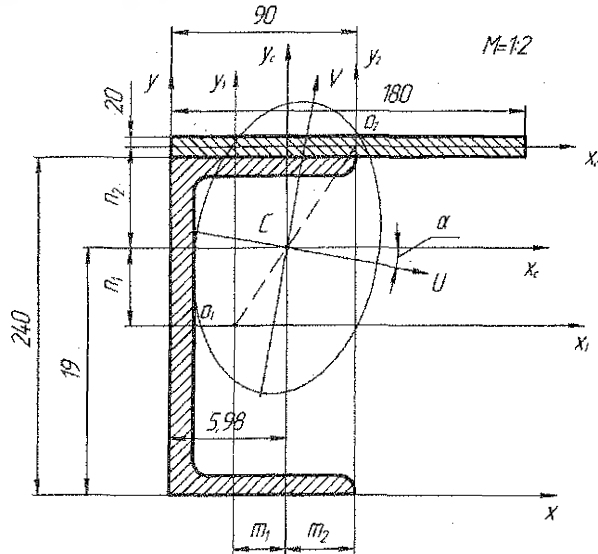


Рисунок 3.2 – Эллипс инерции

Пример 4

Для данной двухопорной балки, нагруженной сосредоточенной силой F , парой сил, создающей изгибающий момент M , и распределенной нагрузкой q , подобрать сечение балки из прокатного профиля (двутавра) и произвести ее проверку прочности; подобрать балку прямоугольного сечения и сравнить балки по материалоемкости. Материал балки - сталь Ст 3.

Дано: $M=120$ кН·м, $F=90$ кН, $q=20$ кН/м, $a=1$ м, $[\sigma]=160$ МПа, $[\tau]=100$ МПа.

Решение:

1. Построим расчетную схему балки в масштабе (рисунок 4.1).

2. Строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

а) Определим опорные реакции R_A и R_B .

Для этого используем статические уравнения равновесия (уравнения моментов сил относительно точек A и B).

$$\Sigma M_A = 0; R_B \cdot 3a + qa \cdot \frac{a}{2} + M - F \cdot 2a = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot 2a - qa \cdot \frac{a}{2} - M}{3a} = \frac{90 \cdot 2 \cdot 1 - 20 \cdot \frac{1}{2} - 120}{3 \cdot 1} = 16,7 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = 0; qa \left(3a + \frac{a}{2} \right) - 3a \cdot R_A + M + F \cdot a = 0;$$

$$R_A = \frac{qa \cdot \frac{5a}{2} + M + Fa}{3a} = \frac{20 \cdot \frac{5}{2} + 120 + 90 \cdot 1}{3 \cdot 1} = 93,3 \text{ кН.}$$

Выполним проверку, используя уравнение равновесия относительно оси Oy :

$$\Sigma F_y = 0; R_A + R_B - qa - F = 0,$$

$$93,3 + 16,7 - 20 \cdot 1 - 90 = 0,$$

$$0 = 0.$$

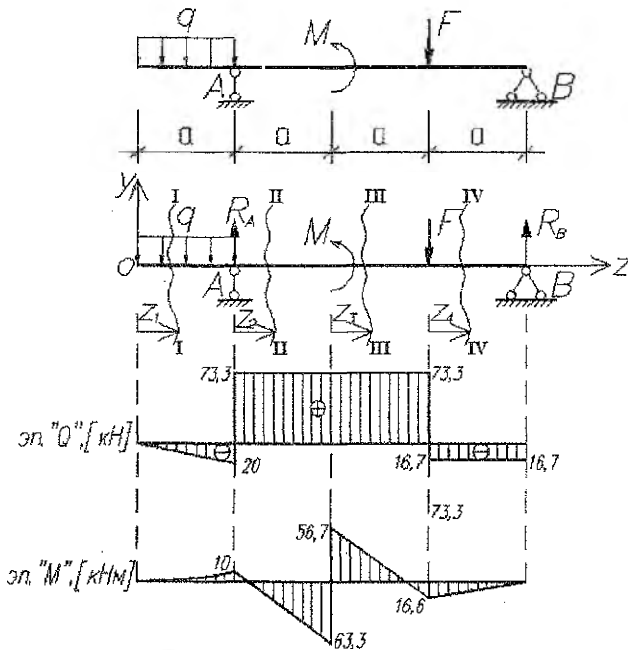


Рисунок 4.1 - Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

б) Запишем общий вид аналитических выражений $Q(z)$, $M(z)$ для отсеченной части в заданных сечениях, с учетом правила знаков.

Сечение I = I, $0 \leq z_1 \leq a$

$$Q(z_1) = -qz_1, \quad M(z_1) = -\frac{qz_1^2}{2}$$

Сечение II = II, $0 \leq z_2 \leq a$

$$Q(z_2) = -qa + R_A; \quad M(z_2) = -qa\left(z_2 + \frac{a}{2}\right) + R_A z_2,$$

Сечение III = III, $0 \leq z_3 \leq a$,

$$Q(z_3) = -qa + R_A; \quad M(z_3) = -qa\left(z_3 + \frac{3a}{2}\right) + R_A(a + z_3) - M,$$

Сечение IV = IV, $0 \leq z_4 \leq a$,

$$Q(z_4) = -qa + R_A - F; \quad M(z_4) = -qa\left(z_4 + \frac{5a}{2}\right) + R_A(2a + z_4) - M - F \cdot z_4$$

в) Вычислим значения поперечной силы Q и изгибающего момента M на границах силовых участков.

I-I

$$Q(Z_1=0) = -20 \cdot 0 = 0; \quad Q(Z_1=a) = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кН},$$

$$M(Z_2=0) = -\frac{20 \cdot 0}{2} = 0, \quad M(Z_1=a) = -\frac{20 \cdot 1}{2} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

II-II

$$Q(Z_2=0) = Q(Z_2=a) = -20 \cdot 1 + 93,3 = 73,3 \text{ кН},$$

$$M(Z_2=0) = -20 \cdot 1 \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) + 93,3 \cdot 0 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(Z_2=a) = -20 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) + 93,3 \cdot 1 = 63,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

III-III

$$Q(Z_3=0) = Q(Z_3=a) = -20 \cdot 1 + 93,3 = 73,3 \text{ кН},$$

$$M(Z_3=0) = -20 \cdot 1 \cdot \left(0 + \frac{3}{2}\right) + 93,3 \cdot (0+1) - 120 = -56,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(Z_3=a) = -20 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\right) + 93,3 \cdot (1+1) - 120 = 16,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

IV-IV

$$Q(Z_4=0) = Q(Z_4=a) = -20 \cdot 1 + 93,3 - 90 = -16,7 \text{ кН},$$

$$M(Z_4=0) = -20 \cdot 1 \cdot \left(0 + \frac{5}{2}\right) + 93,3 \cdot (0+2) - 120 - 90 \cdot 0 = 16,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(Z_4=a) = -20 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{5}{2}\right) + 93,3 \cdot (1+2) - 120 - 90 \cdot 1 = 0,1 \approx 0.$$

г) По полученным значениям построим в масштабе эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (рисунок 4.1).

3. По эпюре изгибающих моментов определим опасное сечение балки. Таким участком является сечение, в котором максимальный момент $M_{\max} = 63,3$ кН·м. Чтобы подобрать сечение балки, рассмотрим два варианта сечений – из прокатного двутавра и прямоугольное.

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Отсюда определим момент сопротивления W_x :

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

В первом случае получим

$$W_x \geq \frac{63,3 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 396 \text{ см}^3.$$

Из таблицы прокатных профилей выбираем двутавр № 27а. Выпишем геометрические характеристики и вес погонного метра для принятого двутавра:

$$h=27 \text{ см}, b=13,5 \text{ см}, S_x = 229 \text{ см}^3, I_x = 5500 \text{ см}^4,$$

$$W_x = 407 \text{ см}^3, d = 0,6 \text{ см}, M_0 = 33,9 \text{ кг}.$$

4. Выполним проверку балки на прочность по касательным напряжениям. Проверим балку по касательным напряжениям в точке A сечения $II-II$ справа, где $Q_{\max} = 73,3$ кН.

Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{I_x \cdot a} \leq [\tau].$$

Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{73,3 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^{-6}}{5500 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 0,51 \cdot 10^8 = 51 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется. Окончательно принимаем сечение балки двутавр № 27а.

5. Подбираем балку прямоугольного сечения с соотношением $h=2b$, h – высота, b – ширина сечения. Учтем, что осевой момент сопротивления прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Отсюда

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_{\max}}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 63,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 8,4 \text{ см.}$$

Тогда $h = 2b = 16,8 \text{ см.}$

Рассчитаем вес балки стандартного (двутаврового) сечения и балки прямоугольного сечения ($\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$):

$$P_1 = M_0 \cdot 4a = 33,9 \cdot 4 \cdot 1 = 135,6 \text{ кг,}$$

где M_0 – масса 1 м.п. профиля;

$$P_2 = hb \cdot \rho \cdot 4a = 0,084 \cdot 0,168 \cdot 7800 \cdot 4 \cdot 1 = 440,3 \text{ кг,}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{135,6}{440,3} \approx 0,31.$$

Очевидно, что применение прокатного двутаврового сечения позволяет значительно экономить материал при обеспечении необходимой прочности.

Пример 5

Построить эпюры Q , M и N для плоской рамы, изображенной на рисунке 5.1.

Решение:

Рамы – это системы, состоящие из жестко соединенных прямолинейных стержней. Каждый прямолинейный участок удобно рассматривать как балку, однако в раме, кроме изгибающих моментов M и поперечных сил Q , действуют еще и продольные силы N . Правила знаков для N и Q сохраняются ранее принятые. Для изгибающих моментов M правило знаков обычно не устанавливают, и при построении эпюр M ординаты откладывают в сторону растянутых волокон. Эпюры N, Q, M можно строить по методу сечений, применяя приведенные ранее для балок правила. Возможно построение эпюр N, Q, M по точкам, вычисляя значения в характерных сечениях.

Примечание. Некоторые авторы считают удобным строить эпюры M со стороны сжатого волокна.

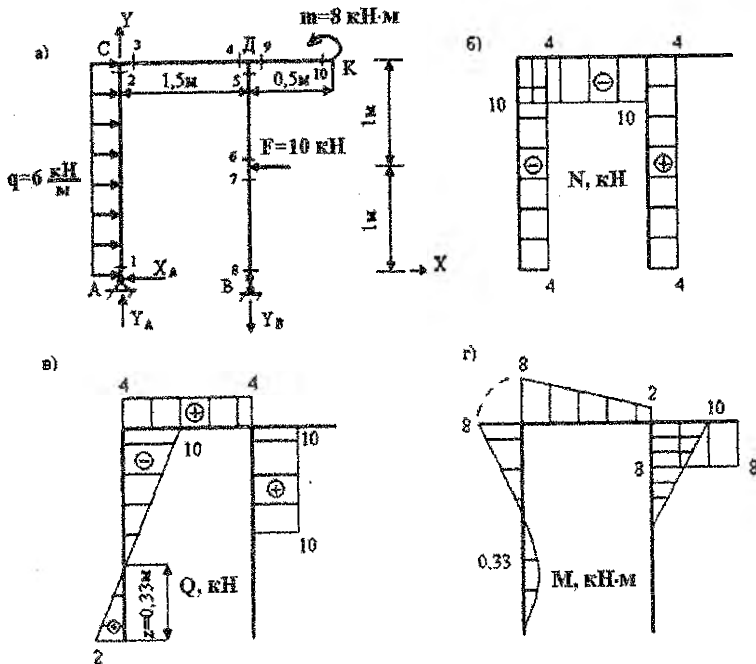


Рисунок 5.1 – Эпюры Q, M, N

Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - m - F \cdot 1 + Y_B \cdot 1,5 = 0;$$

$$Y_B = \frac{-q \cdot 2 \cdot 1 + m + F \cdot 1}{1,5} = \frac{-6 \cdot 2 \cdot 1 + 8 + 10 \cdot 1}{1,5} = 4 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - m - F \cdot 1 + Y_A \cdot 1,5 = 0;$$

$$Y_A = \frac{-q \cdot 2 \cdot 1 + m + F \cdot 1}{1,5} = \frac{-6 \cdot 2 \cdot 1 + 8 + 10 \cdot 1}{1,5} = 4 \text{ кН}.$$

$$\sum X = 0; \quad -X_A - F + q \cdot 2 = 0; \quad X_A = -F + q \cdot 2 = -10 + 6 \cdot 2 = 2 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum M_K = 0; \quad Y_A \cdot 2 - Y_B \cdot 0,5 - q \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - m + X_A \cdot 2 + F \cdot 1 = 0;$
 $4 \cdot 2 - 4 \cdot 0,5 - 6 \cdot 2 \cdot 1 - 8 + 2 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 0.$

Реакции найдены верно.

Выбираем характерные сечения у границ участков и определяем в них величину N , Q , M :

$$N_1 = -Y_A = -4 \text{ кН}; \quad N_2 = -Y_A = -4 \text{ кН}; \quad N_3 = N_4 = X_A - q \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = Y_B = 4 \text{ кН}; \quad N_9 = N_{10} = 0.$$

Строим эпюру N (рисунок 5.16).

$$Q_1 = X_A = 2 \text{ кН}; \quad Q_2 = X_A - q \cdot 2 = 2 - 6 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_4 = Y_A = 4 \text{ кН}; \quad Q_5 = Q_6 = F = 10 \text{ кН}; \quad Q_7 = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = 0.$$

Строим эпюру Q (рисунок 5.1в). На участке 1–2 эпюра пересекает ось.

Определим координату точки пересечения: $z_0 = \frac{Q}{q} = \frac{2}{6} = 0,33 \text{ м}$.

$$M_1 = 0; \quad M_2 = X_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{экстр}} = X_A \cdot z_0 - q \cdot \frac{z_0^2}{2} = 2 \cdot 0,33 - 6 \cdot \frac{0,33^2}{2} = 0,33 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = X_A \cdot 2 - q \cdot \frac{2^2}{2} + Y_A \cdot 1,5 = 2 \cdot 2 - 6 \cdot \frac{2^2}{2} + 4 \cdot 1,5 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = -F \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6 = M_7 = M_8 = 0;$$

$$M_9 = M_{10} = m = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру M (рисунок 5.1г).

При правильном построении эпюр должно соблюдаться статическое равновесие каждого узла. Проверим равновесие узлов C и D (рисунок 5.2):

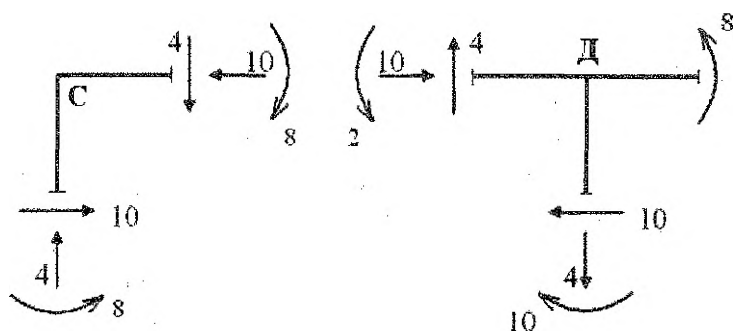


Рисунок 5.2 – Узловая проверка

Равновесие узлов соблюдается.

4. ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа включает задачи 1-5. Номера схем в каждой задаче выбираются согласно двум последним цифрам шифра. Числовые данные принимаются по таблицам в соответствии с шифром (см. пример в задаче 1).

ЗАДАЧА 1

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОГО СТУПЕНЧАТОГО БРУСА

Для вертикального или горизонтального стержня, имеющего жесткую заделку на одном из концов, необходимо:

- 1) вычертить схему в произвольном масштабе;
- 2) определить значения нормальной силы на каждом участке стержня, построить эпюру нормальной силы;
- 3) построить эпюру напряжений;
- 3) построить эпюру перемещений;
- 4) проверить прочность и жесткость бруса.

Схемы стержней приведены на рисунке 6. Длины участков стержня и нагрузки, приложенные к нему, приведены в таблице 1, площадь поперечного сечения узкого участка $A = 0,2 \text{ м}^2$, широкого участка $2A$. При расчетах принять: допускаемые напряжения на растяжение $[\sigma_p] = 20 \text{ МПа}$; на сжатие $[\sigma_c] = 80 \text{ МПа}$;

допускаемая деформация $[\delta] = \frac{l}{500}$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Числовые данные для выполнения задачи следует выбрать из таблицы 1 согласно шести последним цифрам шифра и шести буквам русского алфавита.

Например, записав шифр и под каждой цифрой его буквы:

шифр — 1 0 1 7 2 3

буква — а б в г д е,

выбирают из указанной таблицы число, которое находится на пересечении соответствующих строки и столбца. Причем, вначале берется буква, а затем по ней определяется цифра.

ПРИМЕР. Шифр — 101723. В таблице 1 по горизонтали в последней строке первая буква "г". На пересечении этого столбца со строчкой, соответствующей цифре шифра, т.е. цифре 2, находится $a = 1 \text{ м}$. Затем по следующей букве "д" и соответствующей цифре шифра 3, пересечении столбца "д" и строки "3", получаем величину $q_1 = q_3 = 15 \text{ кН/м}$ и т.д.

Таблица 1 — Числовые данные к расчету ступенчатых брусьев

Номер строки	a, м	$q_1 = q_3$, кН/м	q_2 , кН/м	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН
1	0,8	5	30	10	35	10
2	1	10	25	15	30	20
3	1,2	15	20	20	25	30
4	1,4	20	15	25	20	40
5	1,6	25	10	30	15	10
6	1,8	30	5	35	10	20
7	2	5	30	40	5	30
8	0,8	10	25	10	35	40
9	1	15	20	15	30	10
0	1,2	20	15	20	25	20
	г	д	е	в	д	е

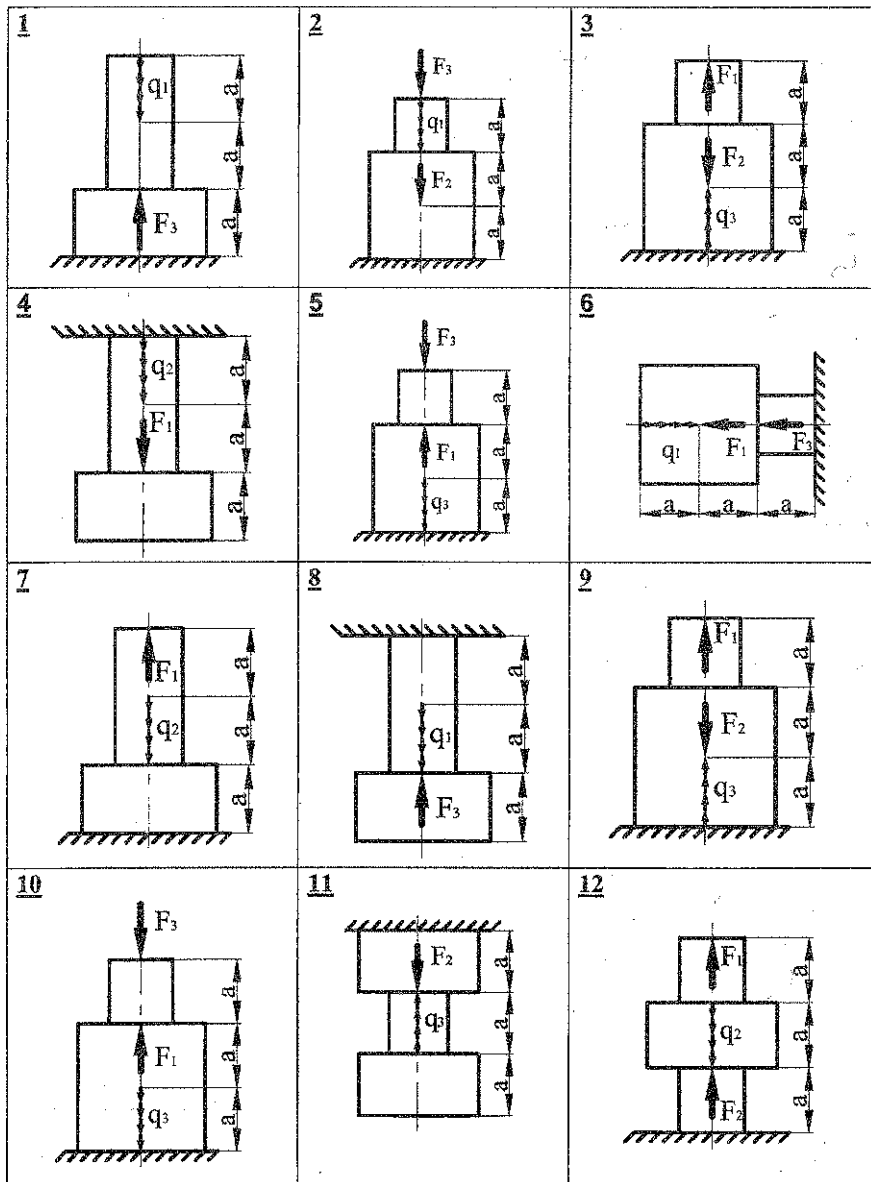
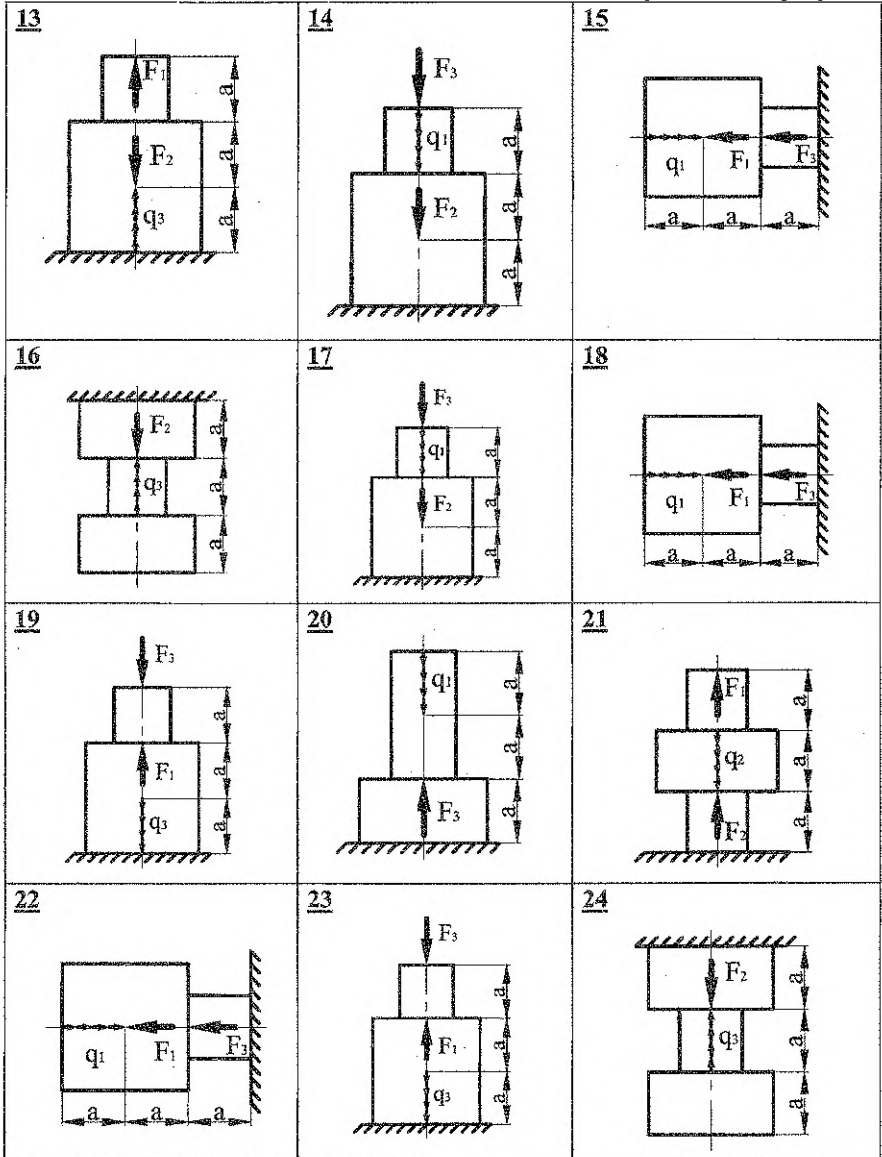
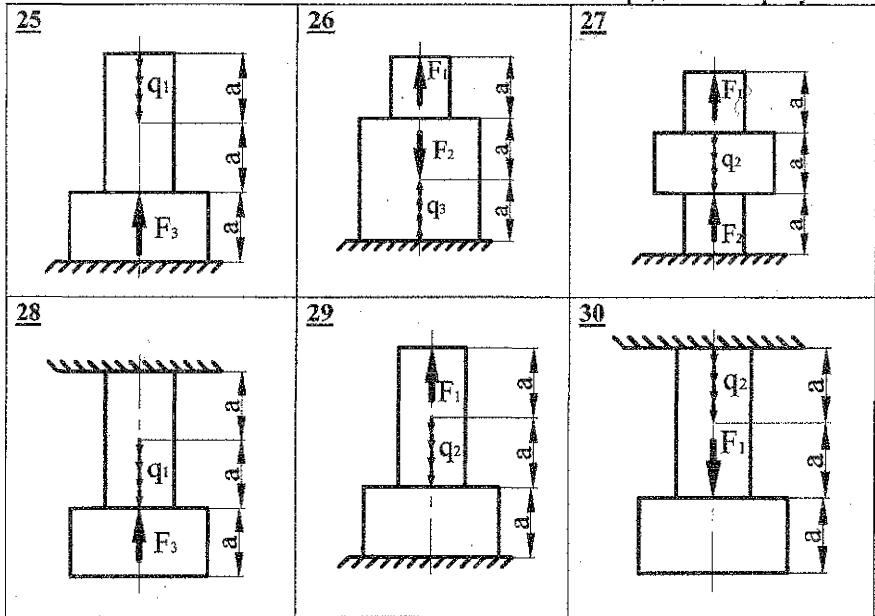


Рисунок 6 – Схемы ступенчатых брусьев





ЗАДАЧА 2 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Абсолютно жесткий брус, подвешенный на 2-х стальных стержнях и шарнирно неподвижно закрепленный, загружен сосредоточенной силой F .

Требуется:

1. Раскрыть статическую неопределимость системы, для чего:
 - а) установить степень статической неопределимости;
 - б) записать необходимые уравнения статического равновесия;
 - в) составить план деформаций;
 - г) из плана деформаций составить дополнительное уравнение деформаций;
 - д) решить совместно уравнение статики с уравнением деформаций и определить усилия в стержнях N_1 и N_2 .

2. По ГОСТ 8509-72 подобрать сечения стержней из двух уголков, для чего:

- а) определить напряжения в стержнях и установить наиболее напряженный стержень;

б) из условия прочности более напряженного стержня определить необходимую площадь поперечного сечения его и выбрать по ГОСТ номер профиля;

в) проверить процент недогрузки или перегрузки более напряженного стержня;

г) из соотношения $\frac{A_1}{A_2} = n$ найти площадь поперечного сечения менее загруженного стержня и выбрать профиль по ГОСТ 8509-72.

3. Определить величину разрушающей нагрузки $F_{\text{раз}}$ и сравнить ее с заданной нагрузкой F .

Исходные данные принять согласно схемам (рисунок 7) и таблице 2.

Таблица 2 – Числовые данные к расчету стержневых систем

№ строки	a , м	b , м	h , м	α , град.	A_1/A_2	F , кН
1	2	1,2	1,5	20	2	200
2	2,1	1,4	1	40	4	300
3	2,2	1,6	2	50	1,5	400
4	2,3	1,8	1,5	60	3	500
5	2,4	2,0	1	70	2	600
6	2,5	1,2	2	20	4	200
7	2,6	1,4	1,5	40	1,5	300
8	2,7	1,6	1	50	3	400
9	2,8	1,8	2	60	2	500
0	2,9	2,0	1,5	70	4	600
	е	в	г	д	е	в

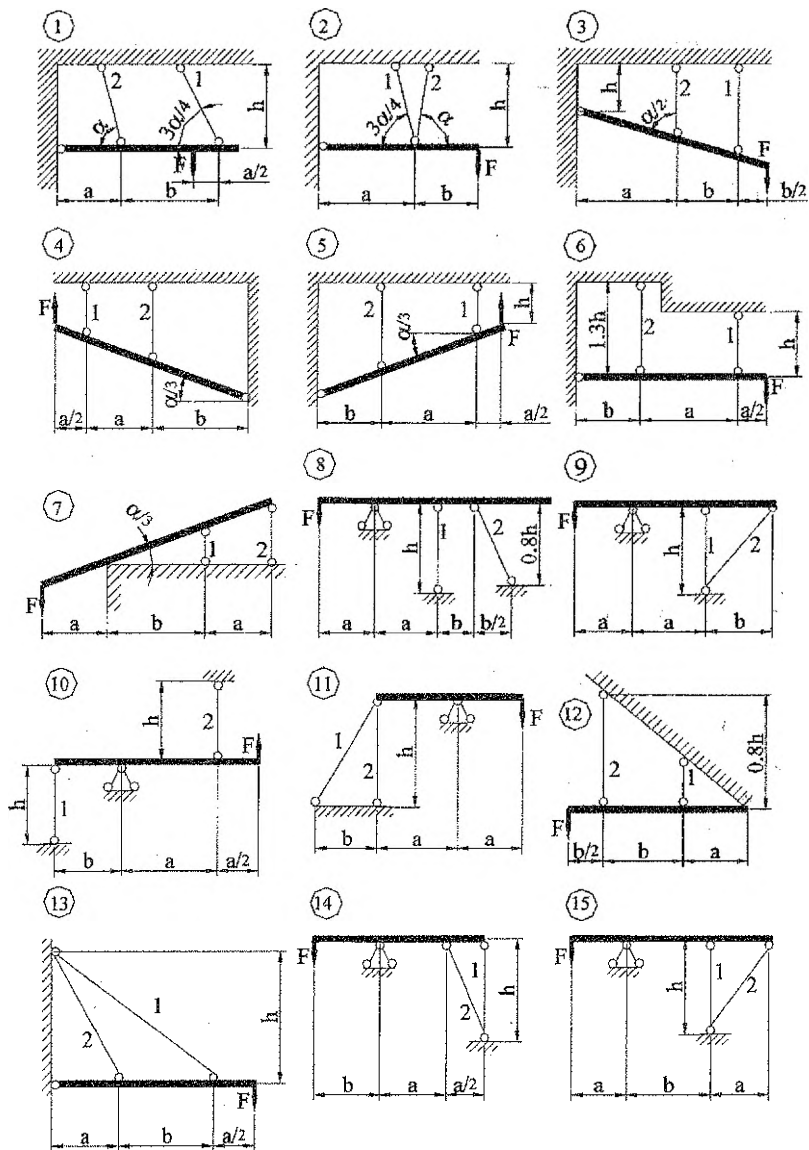
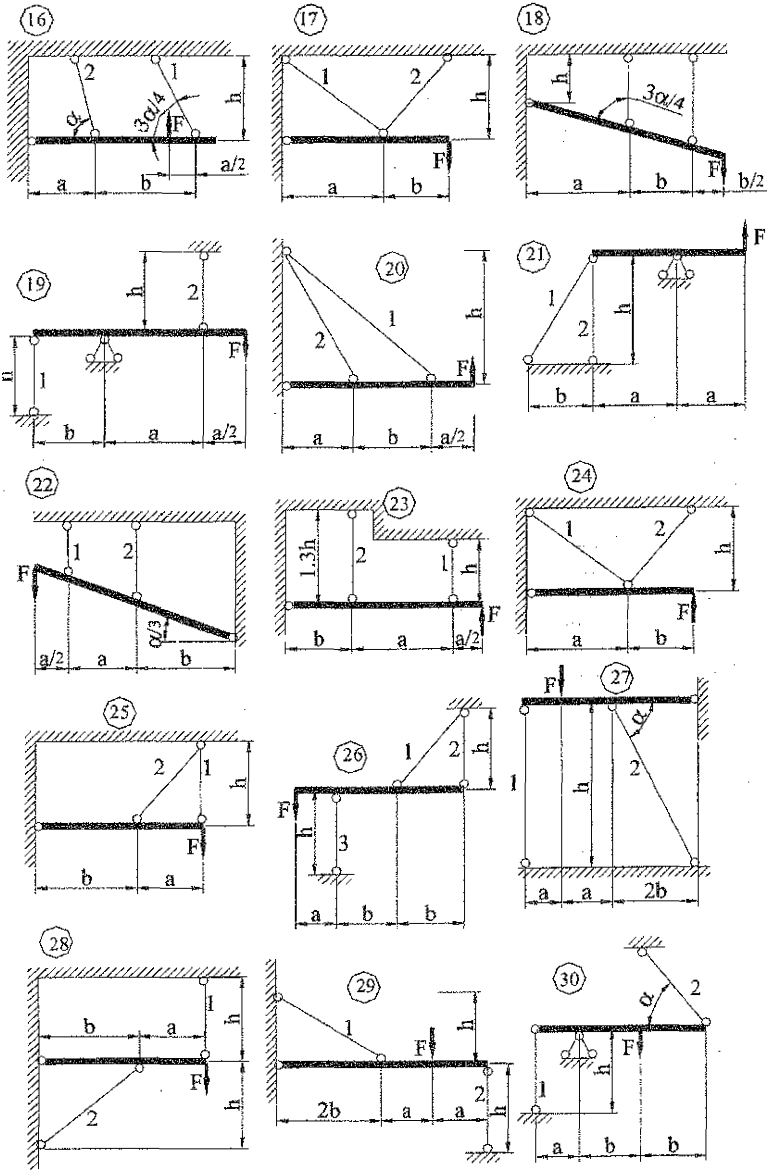


Рисунок 7 – Схемы статически неопределимых стержневых систем



ЗАДАЧА 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Дано: составное сечение (принять по номеру схемы), состоящее из трех простых элементов определенных геометрических размеров (числовые параметры принять по номеру варианта).

Требуется определить:

- 1) положение центра тяжести составного сечения;
- 2) моменты инерции сечения относительно центральных осей;
- 3) положение главных центральных осей инерции;
- 4) величину главных центральных моментов инерции;
- 5) величину главных радиусов инерции;
- 6) построить эллипс инерции.

Схемы составных сечений приведены на рисунке 8, числовые данные – в таблице 3.

Таблица 3 – Числовые параметры к составным сечениям

№ строки	Двутавр	Швеллер	Уголок равнобокий, мм	Уголок неравнобокий, мм	Лист	
					h, см	b, см
1	24	14а		125x80x12	20	2.2
2	27	24а	80x80x8		26	1.8
3	30	16а		100x63x64	22	1.8
4	16	20а	100x100x16		24	2.4
5	22	18а		110x70x7	18	2.0
6	20	16	90x90x9		19	2.6
7	30	22а		160x100x10	20	1.8
8	27а	18	110x110x8		22	2.0
9	33	24		100x63x10	24	2.6
0	36	20	100x100x16		20	1.8
	г	д	е	в	г	б

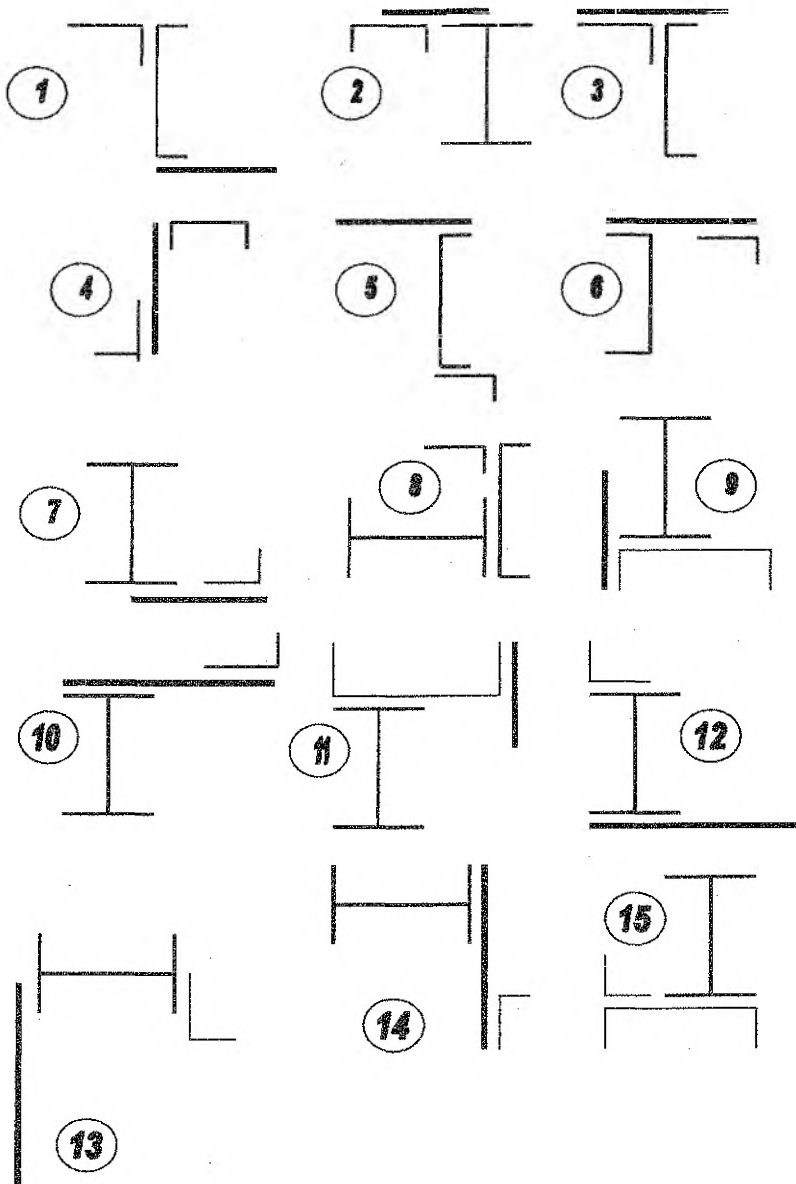
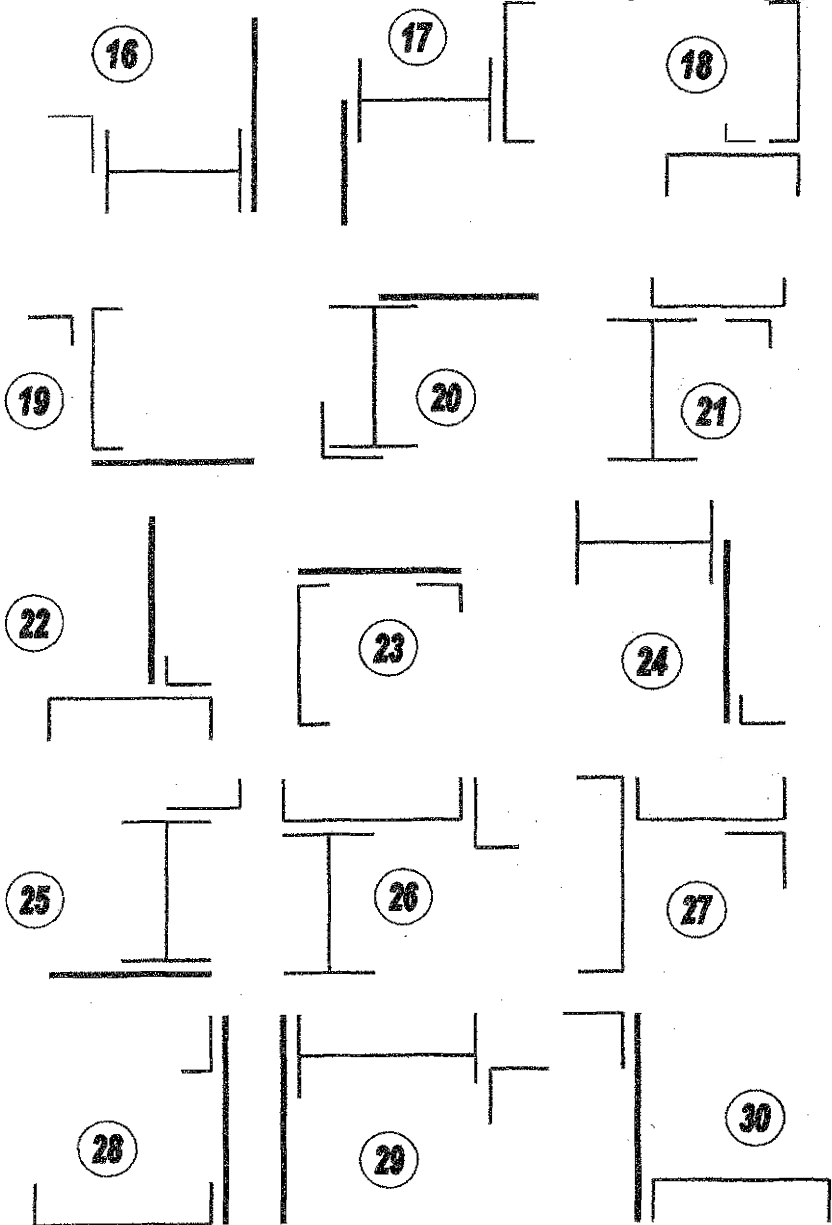


Рисунок 8 – Схемы составных сечений

Продолжение рисунка 8



ЗАДАЧА 4 ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Балки, закрепленные различным образом, загружены внешними нагрузками. Требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .
2. Указать положение опасного сечения балок.
3. Для деревянной балки (а) подобрать размеры квадратного поперечного сечения из условия прочности, если $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$.
4. Для стальной двутавровой балки (б) подобрать номер прокатного профиля из условия прочности, а также произвести проверку прочности по касательным напряжениям. При расчетах принять для стали: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 100 \text{ МПа}$.

Исходные данные принять согласно схемам (рисунок 9) и таблице 4.

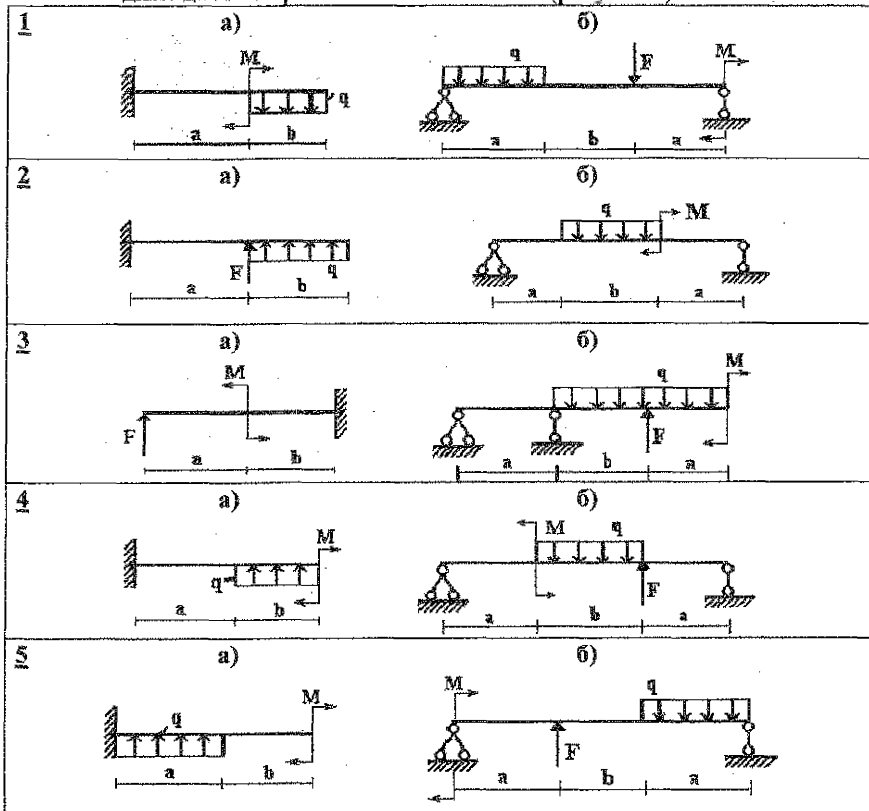
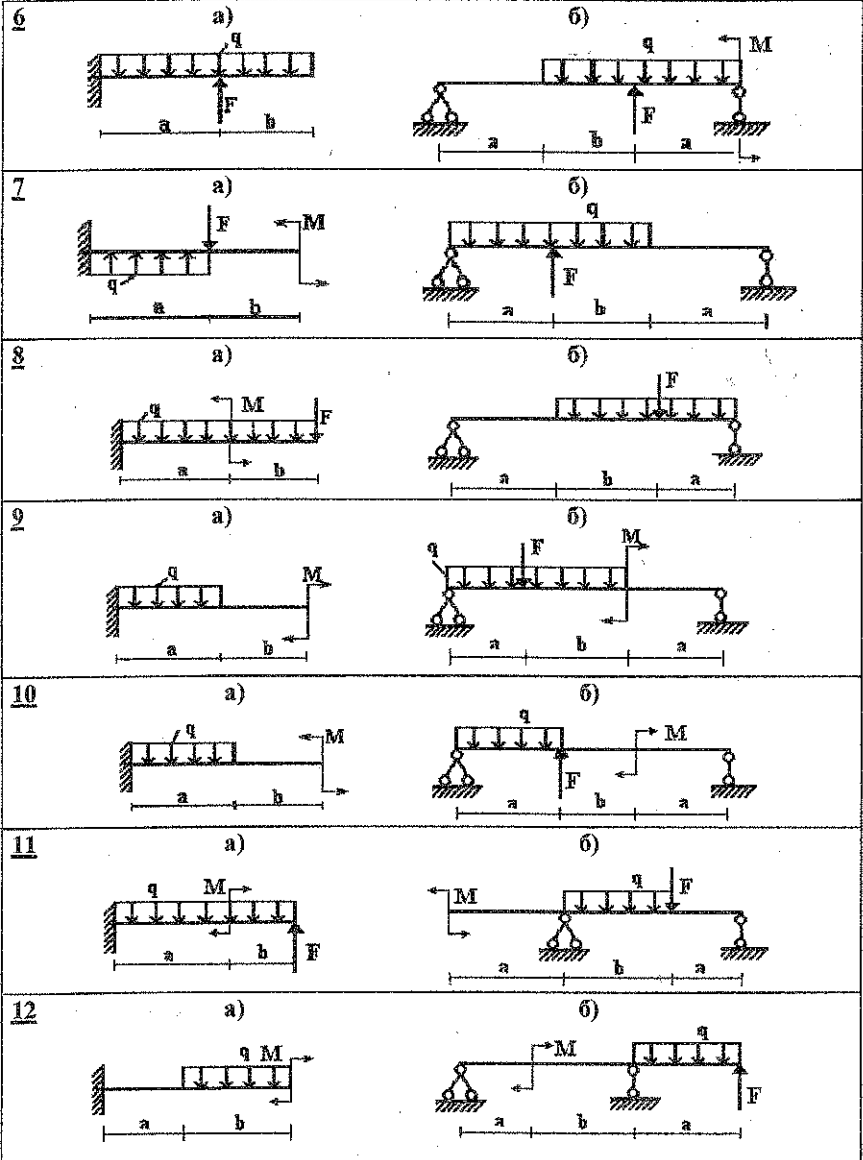
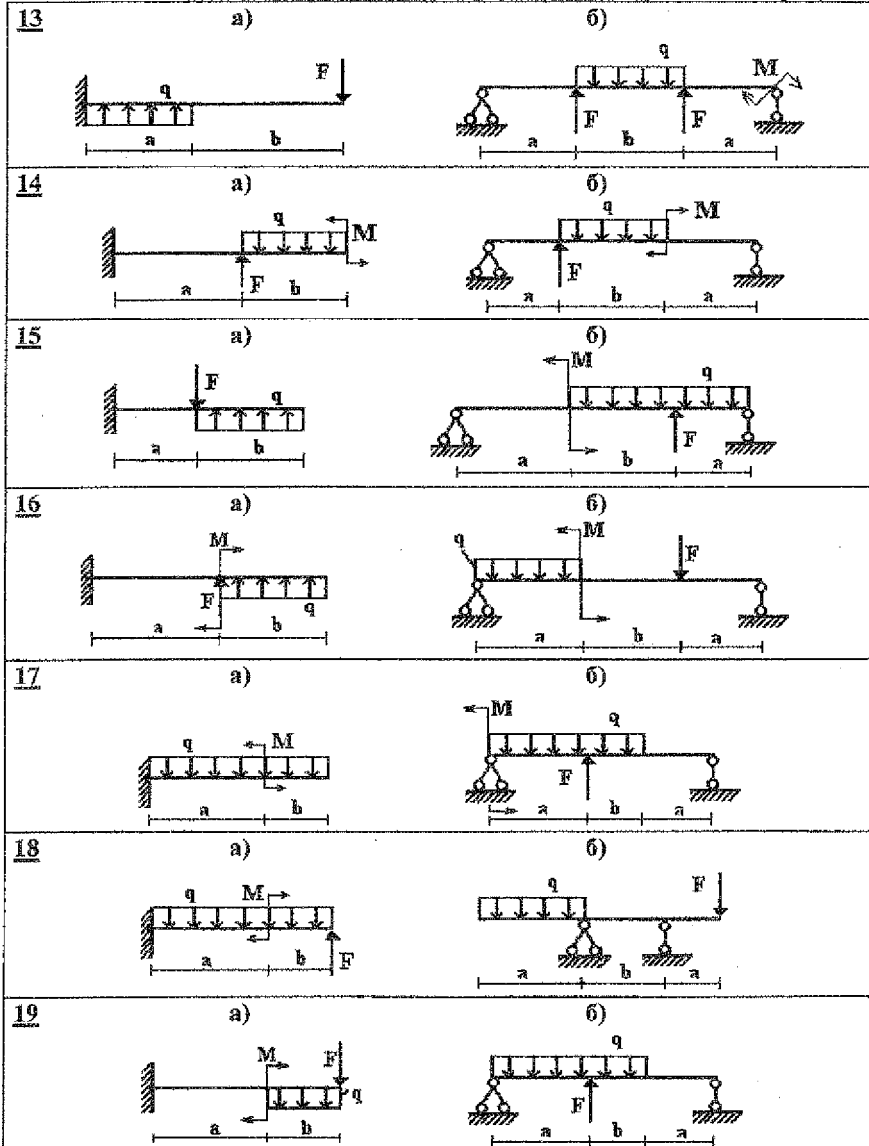
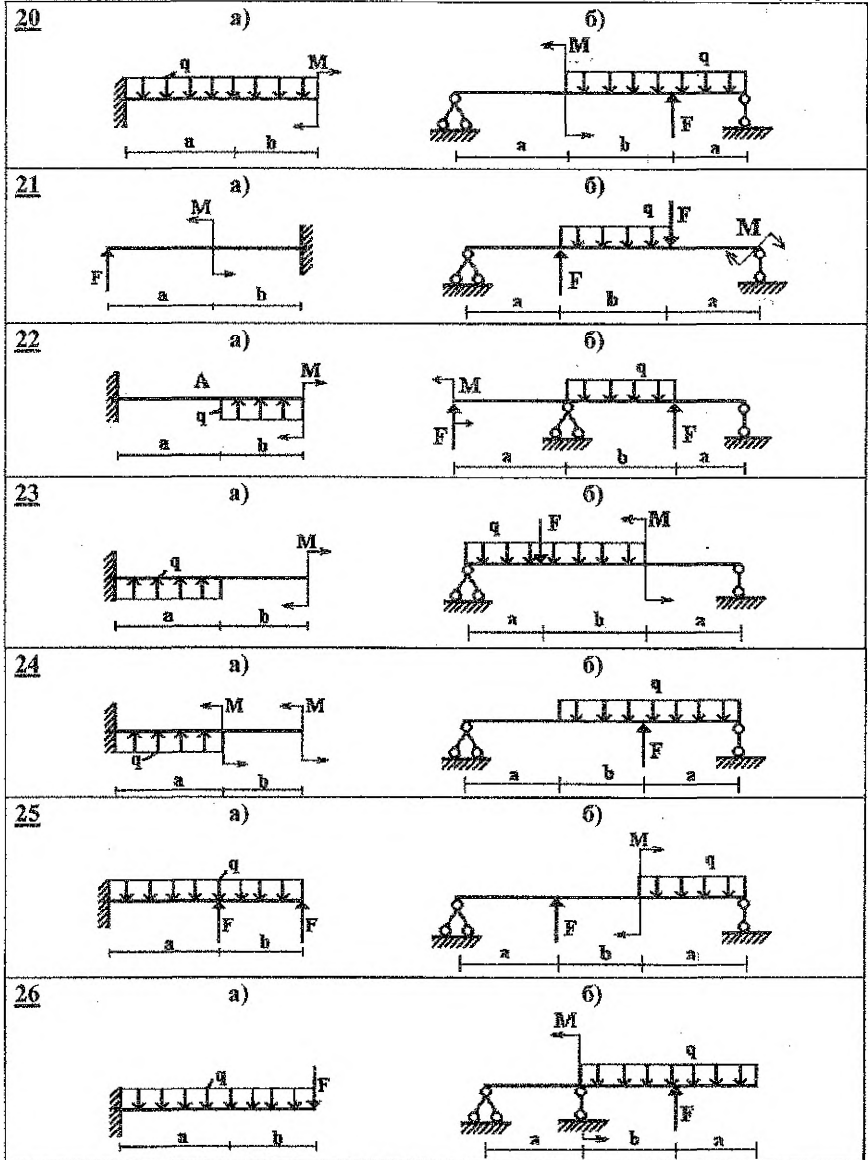


Рисунок 9 – Схемы балок







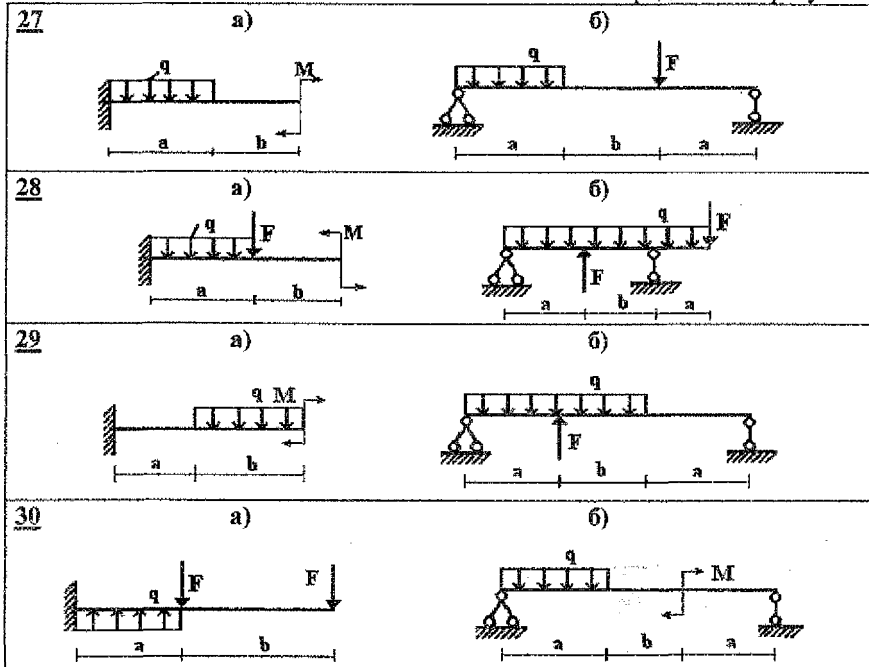


Таблица 4 – Числовые данные к расчету балок и рам (задачи 4, 5)

№ строки	F , кН	M , кН·м	q , кН/м	a , м	b , м
1	40	40	10	1	2
2	50	60	15	2	2
3	60	80	20	3	2
4	70	100	25	2	3
5	80	40	10	1	3
6	70	60	15	3	1
7	60	80	20	2	2
8	50	100	25	1	2
9	40	40	10	2	1
0	50	60	15	1	3
	г	д	е	г	е

ЗАДАЧА 5

Построение эюр Q, M, N в рамах

Для заданной рамы построить эюры внутренних силовых факторов. Числовые данные принять по таблице 4, схемы приведены на рисунке 10.

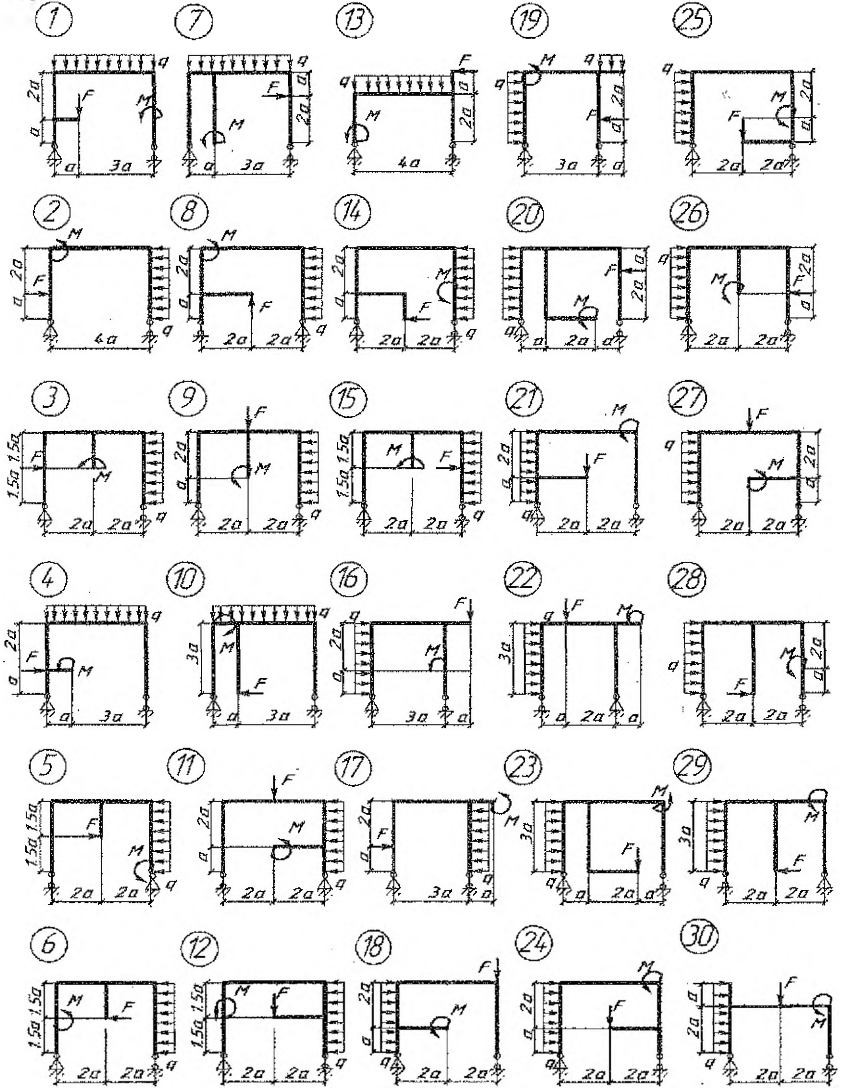


Рисунок 10 - Схемы рам

5 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: учебник для вузов / А.В. Дарков, Г.С. Широ. – Изд. 4-е. – М.: Высш. школа, 1975.
2. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1972. – 544 с.
3. Сопротивление материалов / Под ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко. – 5-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 775 с.
4. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1976. – 608 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

Веремейчик Андрей Иванович

Онысько Сергей Романович

Томашев Игорь Геннадьевич

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы по курсу

«Сопротивление материалов»

для студентов специальности

1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство” факультета
инновационной деятельности и финансов

Ответственный за выпуск: Онысько С.Р.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.

Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 22.05.2014 г. Бумага «Снегурочка». Формат 60x84 ¹/₁₆.

Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 2,1. Уч. изд. л. 2,25.

Заказ № 401. Тираж 55 экз. Отпечатано на ризографе Учреждения
образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.