

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Методические указания  
по дисциплине «Строительная механика»  
для студентов строительных специальностей  
заочной формы обучения

Часть 1

Статически определимые системы

Брест 2008

В методических указаниях изложены методика определения внутренних сил (изгибающих моментов, поперечных и продольных сил) и построения их эпюр в плоских статически определимых рамах, балках и трехшарнирных арках от статического действия внешних нагрузок, методика определения перемещений в таких системах, а также принципы построения линий влияния усилий в статически определимых простых и многопролетных балках и определения с их помощью усилий от действия неподвижных нагрузок. Приведены примеры расчетов. Содержатся задачи для самостоятельного решения с контролем результатов.

Методические указания предназначены для студентов специальностей 70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций», 70 03 01 «Автомобильные дороги», 70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов» заочной формы обучения. Могут использоваться при самостоятельном изучении курса «Строительная механика» и при выполнении контрольных работ по строительной механике. Издаются в 3 частях. Часть 1.

Составители: В.И. ИГНАТЮК, доцент, к. т. н.,  
С.В. ЗАГУЛЯЕВ, ст. преподаватель,  
В.В. МОЛОШ, ст. преподаватель

## Введение

В методических указаниях изложены разделы дисциплины «Строительная механика», изучение и знание которых позволит студентам заочной формы обучения самостоятельно выполнить контрольные работы и подготовиться к сдаче экзамена по дисциплине. Представленные примеры расчета и задачи для самостоятельного решения (с ответами) дают возможность приобрести необходимый опыт решения подобных задач.

Разделы 1–5, 7.1–7.3 написаны Игнатуком В.И., разделы 6 и 8 – Молошом В.В., разделы 7.4 и 9 – Загуляевым С.В. Общая редакция – Игнатука В.И.

### 1. Усилия в плоских стержневых статически определимых системах

При действии на плоскую статически определимую стержневую систему внешней нагрузки в каждом поперечном сечении ее может возникать три вида внутренних сил (усилий) (рис. 1.1):

- изгибающий момент  $M$ , действующий в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению элемента (стержня) системы;
- поперечная сила  $Q$ , действующая в плоскости поперечного сечения и проходящая через его центр тяжести;
- продольная сила  $N$ , действующая перпендикулярно к сечению (вдоль оси стержня) и приложения в центре тяжести сечения.

Определение усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  в сечениях статически определимых стержневых систем выполняется на основе метода сечений, согласно которому в заданной точке оси элемента проводится сечение, разделяющее систему на две части. Затем рассматривается равновесие одной (любой) из частей системы. При этом действие отброшенной части на рассматриваемую часть системы заменяется силами, равными внутренним силам в сечении, которые на рассматриваемую часть действуют как обычные внешние силы. Из уравнений равновесия, число которых равно трем (что соответствует количеству неизвестных внутренних сил), определяются усилия в рассматриваемом сечении системы. Метод сечений позволяет сформулировать следующие правила определения внутренних сил в поперечных сечениях плоских стержневых систем:

❗ Изгибающий момент в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил (включая и опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, относительно центра тяжести сечения.

❗ Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (включая опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось, перпендикулярную к оси стержня.

❗ Продольная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (включая опорные реакции), приложенных к части

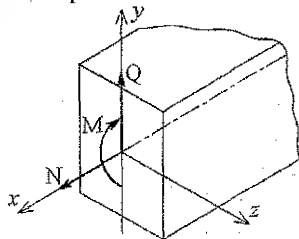
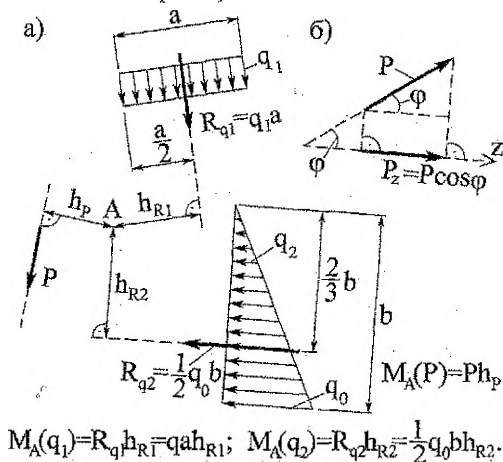


Рис. 1.1

системы с одной стороны от сечения, на ось, касательную к оси стержня (для прямолинейных стержней – на ось самого стержня).

Напомним, что **момент силы относительно точки** равен произведению величины этой силы на ее плечо относительно этой точки (например, на рис. 1.2,а –  $M_A(P) = P \cdot h_p$ ), где **плечо силы** относительно точки ( $h_p$ ) определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы. **Проекция силы** на ось равна произведению величины силы на косинус угла между линией действия силы и рассматриваемой осью (рис. 1.2,б).



$$M_A(q_1) = R_{q_1} h_{R1} = q_1 a h_{R1}; \quad M_A(q_2) = R_{q_2} h_{R2} = \frac{1}{2} q_0 b h_{R2}.$$

Рис. 1.2

По указанным правилам легко определяются момент относительно произвольной точки и проекция на любую ось нагрузки  $q$ , распределенной на участке по любому закону, если ее привести к равнодействующей силе  $R_q$ , приложенной в центре тяжести нагрузки на рассматриваемом участке. Вычисление изгибающих моментов относительно точки А для равномерно распределенной нагрузки  $q_1$  (равнодействующая  $R_{q1}$  приложена посередине участка, на который действует эта нагрузка) и нагрузки  $q_2$ , изменяющейся на участке по треугольному закону, показано на рис. 1.2,а. Заметим, что от действия сосредоточенного момента изгибающий момент относительно любой точки равен величине самого сосредоточенного момента, а его проекция на любую ось равна нулю.

Для наглядного представления об изменении усилий в сечениях систем строят эпюры усилий. **Эпюрой усилия** ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$  и др.) называется график (диаграмму), отражающий зависимость изменения этого усилия по длинам всех элементов (стержней) системы от действия постоянной нагрузки.

Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр усилий:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна оси стержня или просто совпадала с ней.
2. Ординаты эпюр откладывают от базовой оси перпендикулярно к ней.
3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базовой оси.
4. Ординаты усилий откладывают в определенном масштабе, одинаковом в пределах одной эпюры. На эпюрах проставляют также значения ординат усилий в характерных точках, а в полях эпюр обычно в кружочках ставят знаки ординат эпюр. Таким образом, **каждая из ординат эпюры усилий** представляет собой в определенном масштабе величину усилия, для которого построена эпюра, в поперечном сечении рамы, в котором эта ордината отложена.

При определении внутренних сил и построении их эпюр в строительной механике обычно принимают следующие **правила знаков**:

– **Поперечная сила** в сечении, определенная по вышеуказанному правилу, **положительна**, если при приложении ее на бесконечно малом расстоянии от сечения со стороны рассматриваемой части она стремится повернуть эту часть относительно сечения по часовой стрелке, и **отрицательна**, если стремится повернуть эту часть относительно сечения против часовой стрелки – см. рис. 1.3! Например, при рассмотрении отсеченной части на рис. 1.3, в поперечная сила в сечении  $K$  равна силе  $P$  и положительна.

– **Продольная сила** в сечении **положительна**, если она вызывает растяжение в стержне рамы (направлена от сечения), и **отрицательна**, если вызывает сжатие (направлена к сечению) – см. рис. 1.4.

Отметим, что при построении эпюр  $Q$  и  $N$  ординаты поперечных и продольных сил могут откладываться с любой стороны от базовых осей (стержней). При этом следует руководствоваться наибольшей наглядностью эпюр (исключая, по возможности, наложение эпюр друг на друга) и, конечно, на одной эпюре и на участках, являющихся продолжением друг друга по прямой, целесообразно и предпочтительно ординаты одного знака откладывать с одной стороны.

Для изгибающих моментов специального правила знаков не устанавливают, а откладывают ординаты их на растянутых волокнах (со стороны растянутых волокон). При определении величин изгибающих моментов знаки их можно принимать по собственному усмотрению. Удобно принять, например, как это сделано в данных методических указаниях, изгибающий момент в сечении положительным, если он действует относительно сечения по часовой стрелке. Растянутые волокна в сечении при этом определяются следующим образом. В той части системы, из равновесия которой в расчетном сечении определен изгибающий момент, выделяем бесконечно малый элемент стержня, прилегающий к рассматриваемому сечению (на схемах этот бесконечно малый элемент стержня для наглядности изображается в виде элемента конечной длины). Считаем затем, что в расчетном сечении указанный элемент имеет защемление, и прикладываем к нему вычисленный для этого сечения изгибающий момент. Анализируя теперь изгиб рассматриваемого элемента системы (рамы), несложно определить, с какой стороны стержня волокна будут растянуты, а с какой – сжаты. Например, для ломаного стержня, изображенного на рис. 1.5, а, изгибающий момент в сечении 1–1, вычисленный из рассмотрения равновесия

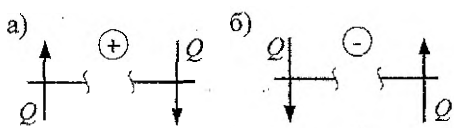


Рис. 1.3

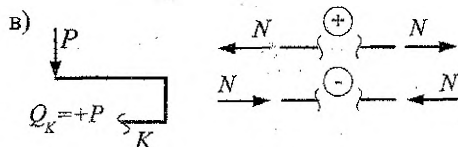


Рис. 1.4

правой части системы, будет отрицательным (все внешние силы вращают относительно сечения 1-1 против часовой стрелки). Схема изгиба элемента системы, выделенного возле сечения 1-1 с правой стороны, показана на рис. 1.5.б. Из анализа этой схемы видно, что растянутыми в сечении 1-1 будут нижние волокна (здесь и далее на схемах изгиба элементов со стороны растянутых волокон будем проводить штриховые линии).

Для системы, изображенной на рис. 1.5, которую будем считать равновесной, приведем несколько примеров вычисления (в общем виде) усилий в сечении 1-1:

$$M_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot h_{q1} - R_{q2} \cdot h_{q2} + P_3 \cdot 0 = q_1 a_1 h_{q1} - q_2 a_2 h_{q2};$$

$$M_{1-1}^{(прав)} = -P_1 \cdot h_{p1} - P_2 \cdot h_{p2} - m;$$

$$Q_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot \cos \alpha + P_3 \cdot \cos 90^\circ - R_{q2} \cdot \cos 0^\circ = q_1 a_1 \cos \alpha - q_2 a_2;$$

$$Q_{1-1}^{(прав)} = -P_1 \cdot \cos \beta + P_2 \cdot \cos 90^\circ = -P_1 \cos \beta;$$

$$N_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot \sin \alpha - P_3 \cdot \cos 0^\circ - R_{q2} \cdot \cos 90^\circ = q_1 a_1 \sin \alpha - P_3;$$

$$N_{1-1}^{(прав)} = -P_2 + P_1 \sin \beta.$$

Здесь  $M_{1-1}^{(лев)}$ ,  $Q_{1-1}^{(лев)}$ ,  $N_{1-1}^{(лев)}$  — усилия в сечении 1-1, полученные из рассмотрения левой относительно этого сечения части системы;  $M_{1-1}^{(прав)}$ ,  $Q_{1-1}^{(прав)}$ ,  $N_{1-1}^{(прав)}$  — те же усилия, полученные из рассмотрения правой части системы относительно сечения 1-1. Заметим, что для системы, находящейся в равновесии, внутренние силы в одном сечении, полученные при рассмотрении левой и правой частей, будут, естественно, равны друг другу (значения изгибающих моментов при этом при использовании рассматриваемых правил знаков будут получаться с противоположными знаками — растянутые же волокна, определенные по ним, будут расположены с одной и той же стороны). Для рассмотренной системы (рис. 1.5), будем иметь:  $M_{1-1}^{(лев)} = -M_{1-1}^{(прав)}$ ;  $Q_{1-1}^{(лев)} = Q_{1-1}^{(прав)}$ ;  $N_{1-1}^{(лев)} = N_{1-1}^{(прав)}$ . Это обстоятельство следует использовать для проверки правильности вычисления внутренних сил в сечениях систем.

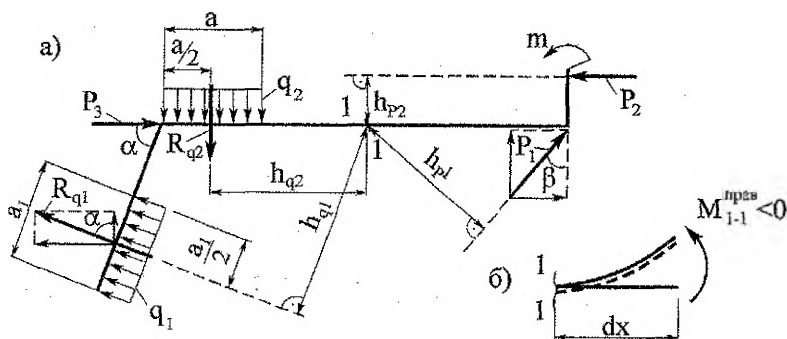


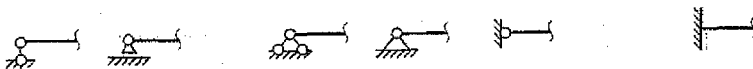
Рис. 1.5

## 2. Виды рам. Расчет простых рам

**Рамами** называют системы, состоящие из прямолинейных стержней, соединенных между собой в узлах преимущественно жестко, и опирающиеся с помощью опор на основание. Основные виды опор представлены на рис. 2.1. Рамы, как и все другие строительные сооружения, предназначены для восприятия действующих на них нагрузок и должны быть геометрически неизменяемыми. Здесь будем рассматривать только плоские статически определимые (не имеющие лишних связей) рамы. Степень свободы таких рам можно определить по формуле  $W = III - 3K$ , где  $III$  – число простых шарниров в раме, включая опорные (при этом шарнирно неподвижная опора может рассматриваться как один шарнир, а в подвижной опоре их два);  $K$  – число замкнутых контуров в системе. Для статически определимой рам  $W = 0$ . Этими требованиями определяется структура статически определимых рам, то есть принципы и характер соединения стержней между собой и с основанием. Приступая к расчету любой системы, необходимо проверить ее геометрическую неизменяемость, то есть выполнить кинематический анализ системы. В данных методических указаниях вопросы кинематического анализа не рассматриваются. Принципы и порядок выполнения кинематического анализа можно найти в литературе, указанной на странице 55. Заметим, что на расчетных схемах стержни рам заменяются их центральными линиями; поперечные сечения стержней независимо от их формы характеризуются значениями площадей и моментов инерции; реальные опорные устройства заменяются идеальными; нагрузки на стержни рам переносятся на их оси. По структуре статически определимые рамы можно разделить на простые, трехшарнирные и составные.

**Простые рамы** – это системы, состоящие из одного диска в виде ломано-разветвленного стержня, соединенного с основанием тремя связями с использованием, обычно трех основных видов опор (рис. 2.1) – шарнирно подвижной опоры (содержащей одну связь), шарнирно неподвижной (содержащей две связи) и защемления (содержащего три связи). Выделим отдельно простые рамы с защемлением, которые называют консольными (рис. 2.2а). Расчет таких рам имеет некоторые особенности, на которых остановимся позже.

**Трехшарнирные рамы** (рис. 2.3, а, б) – это системы, которые можно представить состоящими из трех дисков (ломано-разветвленных стержней), соединенных между собой последовательно тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (то есть по принципу трехдискового трехшарнирного треугольника).



а) шарнирно подвижная    б) шарнирно неподвижная    в) защемление (заделка)

Рис. 2.1. Изображение опор на расчетных схемах систем

Одним из дисков при этом может быть основание (рис. 2.3,а). Заметим, что трехшарнирные рамы относятся к классу распорных систем, в которых при наличии только вертикальных нагрузок возникают и горизонтальные составляющие реакций (распор). К трехшарнирным рамам относятся как обычные трехшарнирные рамы (рис. 2.3,а), так и рамы с одной или несколькими затяжками (рис. 2.3,б).

**Составными** называют рамы, состоящие из нескольких соединенных между собой простых и (или) трехшарнирных рам (рис. 2.3,в).

Рассмотрим **построение эпюр усилий в простых рамах**. Выполним расчет рамы, изображенной на рис. 2.4, представляющей собой ломаный стержень, соединенный с основанием тремя шарнирно подвижными опорами, реакции в которых направлены перпендикулярно опорным поверхностям (в направлениях опорных связей). Из анализа рамы видно, что при определении внутренних сил в любом ее сечении нельзя обойтись без знания величин опорных реакций. И следовательно расчет таких рам необходимо начинать с нахождения значений опорных реакций.

**Опорные реакции** определяются из уравнений равновесия рамы в целом, которые в общем случае можно составить в трех различных вариантах:

1) в виде сумм проекций сил на две произвольные не параллельные друг другу оси и суммы моментов сил относительно любой точки плоскости ( $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$ ;  $\sum M = 0$ );

2) в виде суммы проекций сил на произвольную ось и двух сумм моментов относительно любых точек плоскости, не лежащих на одном перпендикуляре к указанной оси проекции ( $\sum X = 0$ ;  $\sum M_A = 0$ ;  $\sum M_B = 0$ );

3) в виде трех сумм моментов относительно трех точек, не лежащих на одной прямой ( $\sum M_A = 0$ ;  $\sum M_B = 0$ ;  $\sum M_C = 0$ ).

Выбор того или иного варианта составления уравнений равновесия, а также выбор точек и направлений осей, используемых при составлении этих уравнений, производится в каждом конкретном случае с таким расчетом, чтобы в каждое уравнение, по возможности, входила только одна неизвестная реакция (чтобы не решать систему уравнений) и, по возможности, не входили ранее определенные реакции. После вычисления опорных реакций всегда необходимо

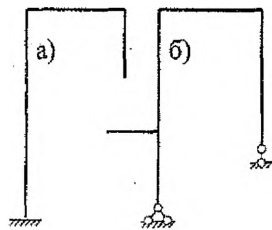


Рис. 2.2

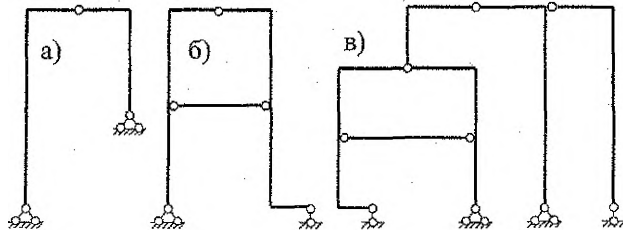


Рис. 2.3



делать проверку правильности их определения, для чего рекомендуется составить дополнительное уравнение (уравнения) равновесия, не использованное ранее, в которое (в которые) вошли бы все проверяемые опорные реакции.

Определим опорные реакции для рассматриваемой рамы (рис. 2.4). Для этого здесь используем второй вариант уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & R_A - 4 &= 0; & R_A &= 4 \text{ кН}; \\ \sum M_L &= 0; & -4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 8 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - R_C \cdot 4 &= 0; & R_C &= 5 \text{ кН}; \\ \sum M_D &= 0; & -4 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 8 - R_B \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 &= 0; & R_B &= -7 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Заметим, что все выражения (уравнения равновесия для определения опорных реакций и выражения для определения внутренних сил в сечениях) удобнее записывать в численных значениях, а не в общем виде с последующей подстановкой численных величин. Отметим также, что если величина реакции в результате ее определения получается отрицательной, это указывает на то, что мы неверно предположили направление этой реакции (в нашем примере – реакции  $R_B$ ) и оно будет противоположным. В этом случае рекомендуется сразу же исправить направление реакции на действительное.

Проверка правильности определения опорных реакций:

$$\sum M_K = 0; \quad 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 8 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = 0; \quad +64 - 64 = 0; \quad 0 = 0.$$

Опорные реакции найдены верно. Для удобства дальнейших расчетов численные значения вычисленных реакций рекомендуется показывать на расчетной схеме рамы (см. рис. 2.4).

Переходим к расчету и построению эпюр внутренних сил. Несложно заметить, что любую раму можно разбить на отдельные участки (отрезки стержней), на каждом из которых изменение того или иного усилия описывается (в пределах этого участка) одной зависимостью. Граничные точки этих участков, в которых происходит переход от одних зависимостей изменения эпюр к другим, будем называть характерными точками.

В качестве характерных точек выступают:

- точки, в которых приложены внешние сосредоточенные нагрузки (силы, моменты) либо опорные реакции;
- точки начала и конца приложения распределенных нагрузок;
- точки излома и разветвления стержней.

Для рамы, изображенной на рис. 2.4, можно выделить четыре расчетных участка: участок I → AT, участок II → TK, участок III → KB и участок IV → BC. Характерными при этом являются точки A, T, K, B, C.

Рассмотрим вначале участок I. Проведем на нем произвольное сечение I – I. Внутренние силы в лобом сечении рамы могут быть определены из рассмотрения как левой части рамы относительно сечения, так и правой (или для сечений, расположенных на вертикальных стержнях, – нижней либо верхней частей рамы); при этом они должны получаться равными друг другу, что, как

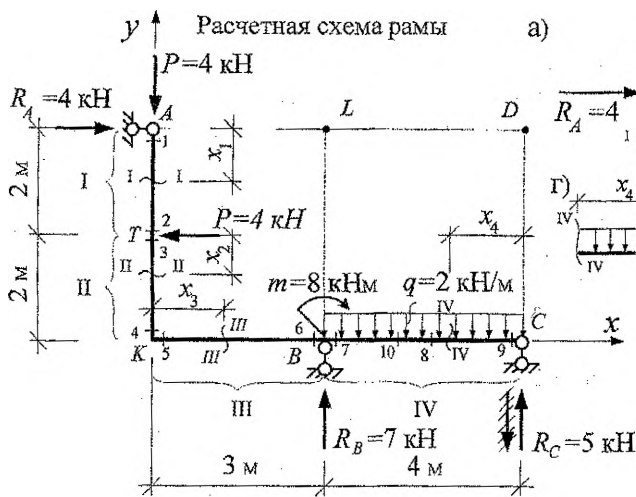


Рис. 2.4

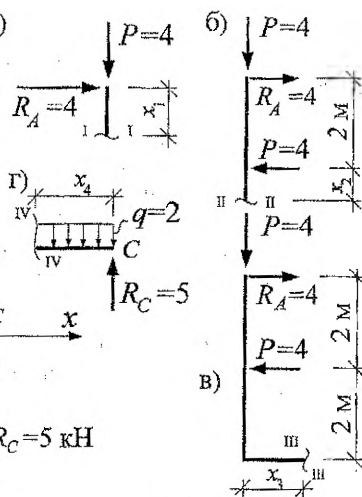


Рис. 2.5

Определение растянутых волокон

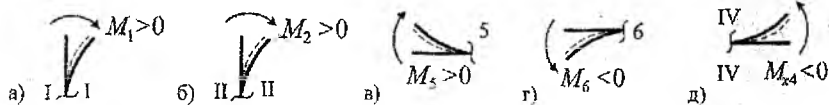


Рис. 2.6

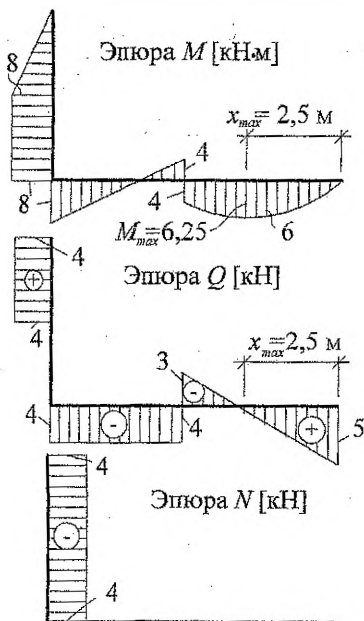


Рис. 2.7

Проверка равновесия узлов

Узел К

$$\begin{aligned} \sum M_K &= 0; & 8 - 8 &= 0; \\ \sum X &= 0; & 0 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & -4 + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Опорный узел В

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0; \\ 8 - 4 - 4 &= 0; \\ 8 - 8 &= 0. \\ \sum X &= 0; & 0 &= 0; \\ \sum Y &= 0; \\ -4 - 3 + 7 &= 0; \\ -7 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 2.8

уже указывалось (см. раздел 1), можно и нужно использовать для проверки правильности вычисления внутренних сил в сечениях. Заметим также, что определение внутренних сил в сечениях удобнее производить из рассмотрения той отсеченной части рамы, на которую действует меньшее количество сил. Для сечения I-I рассмотрим верхнюю часть рамы (для наглядности в этом примере покажем рассматриваемые части рамы отдельно – см. рис. 2.5,а). Расстояние от верхней крайней точки (точки *A*) до сечения I-I обозначим через  $x_1$ . Тогда выражения для определения внутренних сил в произвольном сечении I-I участка I ( $0 \leq x_1 \leq 2$ ), будут иметь вид:

$$M_1^{(sepx)} = R_A x_1 + P \cdot 0 = 4x_1; \quad Q_1^{(sepx)} = +R_A = 4; \quad N_1^{(sepx)} = -P = -4.$$

Изгибающий момент на участке I изменяется по линейному закону, а поперечная и продольные силы – постоянны. Подставляя в выражение изгибающего момента значения  $x_1$  для крайних сечений, найдем:  $M_1 = M_A = 4 \cdot 0 = 0$ ;  $M_2 = 4 \cdot 2 = +8$  кН·м (сечение 2 расположено на бесконечно малом расстоянии сверху от точки *T*, в которой приложена сила *P*). Растянутые волокна для сечения I-I (и в данном случае для всего участка I) определены на рис. 2.6,а.

Аналогично определим внутренние силы на участке II ( $0 \leq x_2 \leq 4$ ) (см. рис. 2.5,б и 2.6,б):

$$M_{II}^{(sepx)} = 4(2 + x_2) - 4 \cdot 0 - 4 \cdot x_2 = 8 \text{ кН (при любом значении } x_2);$$

$$Q_{II}^{(sepx)} = 4 - 4 = 0; \quad N_{II}^{(sepx)} = -4 \text{ кН}$$

и на участке III ( $0 \leq x_3 \leq 3$ ) (см. рис. 2.5,в и 2.6,в):

$$M_{III}^{(sepx)} = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot x_3 = 8 - 4 \cdot x_3$$

[при  $x_3 = 0$  (сечение 5) –  $M_5 = 8$  кН·м; при  $x_3 = 3$  (сечение 6) –  $M_6 = -4$  кН·м];

$$Q_{III}^{(sepx)} = -4 \text{ кН}; \quad N_{III}^{(sepx)} = 0.$$

Несколько сложнее определяются усилия на участке IV. Для произвольного сечения IV-IV здесь рассмотрим правую часть рамы (рис. 2.4). Выражения для определения внутренних сил на участке будут иметь вид:

$$M_{IV}^{(npas)} = -5 \cdot x_4 + 2 \cdot x_4 \cdot x_4 / 2 = x_4^2 - 5 \cdot x_4; \quad Q_{IV}^{(npas)} = -5 + 2 \cdot x_4; \quad N_{IV}^{(npas)} = 0.$$

Видно, что изгибающий момент на участке IV изменяется по криволинейной, параболической зависимости, а поперечная сила изменяется линейно (не постоянна, как на участках I, II, III). Для построения эпюры *M* на этом участке, таким образом, необходимо вычислить значения изгибающих моментов минимум в трех точках – например, по краям участка (в сечениях 7 и 9) и в его середине (в сечении 8):

$$\text{сеч. 7} - x_7 = 4 \text{ м}; \quad M_7 = 4^2 - 5 \cdot 4 = -4 \text{ кН·м};$$

$$\text{сеч. 8} - x_8 = 2 \text{ м}; \quad M_8 = 2^2 - 5 \cdot 2 = -6 \text{ кН·м}; \quad \text{сеч. 9} - x_9 = 0; \quad M_9 = 0.$$

Растянутые волокна на участке IV по полученным значениям изгибающих моментов определены на рис. 2.6,д, а сама эпюра *M* представлена на рис. 2.7.

Для построения эпюры поперечных сил на участке IV достаточно вычислить значения  $Q$  в двух сечениях (так как через две точки всегда можно провести прямую линию), обычно вычисляют эти значения в крайних сечениях участков:

$$\begin{aligned} \text{сеч. 7} - x_7 = 4 \text{ м}; & \quad Q_7 = -5 + 2 \cdot 4 = +3 \text{ кН}; \\ \text{сеч. 9} - x_9 = 0; & \quad Q_9 = -5 + 2 \cdot 0 = -5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Следует иметь в виду, что на участках действия равномерно распределенных нагрузок, на которых изгибающие моменты изменяются по параболическому закону, эпюра  $M$  может иметь экстремум (максимальное или минимальное значения), который является важной характеристикой эпюры и должен определяться дополнительно. Если выполнить анализ полученных выражений для  $M_{IV}$  и  $Q_{IV}$ , учитывая условие экстремальности функций (согласно которому экстремум функции находится в точке, для которой ее первая производная равна нулю) и известную дифференциальную зависимость  $Q = dM/dx$ , несложно заметить, что экстремальные значения изгибающие моменты принимают в сечениях, в которых поперечные силы равны нулю. Эти сечения могут быть определены из выражений для  $Q$  (в нашем примере  $-Q_{IV} = 2x_4 - 5 = 0$ ;  $x_{\max} = 2,5$  м), или по эпюрам  $Q$  из геометрических соображений ( $5/x_{\max} = 3/(4 - x_{\max})$ ;  $x_{\max} = 2,5$  м). Максимальный изгибающий момент на участке IV рассматриваемой рамы, таким образом, имеет место в сечении 10 ( $x = 2,5$  м) и равен:  $M_{10} = M_{IV\max} = 2,5^2 - 5 \cdot 2,5 = -6,25$  кН·м. Окончательные эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  в рассматриваемой раме представлены на рис. 2.7.

Все узлы рамы, включая опорные, должны находиться в равновесии. Под узлами здесь будем понимать точки излома либо разветвления стержней рамы, а также точки примыкания стержней через шарниры. Поэтому после построения в раме эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  целесообразно выполнить проверку равновесия ее узлов. Для выполнения указанной проверки узлы выделяем (вырезаем) из рамы, изображаем отдельно (для наглядности показываем и элементы примыкающих к узлам стержней) и прикладываем к ним внутренние силы, возникающие в поперечных сечениях, бесконечно близких к узлам, и внешние сосредоточенные нагрузки – силы и моменты, действующие в узлах (если они, конечно, есть). После этого составляем уравнения равновесия всех сил, приложенных к узлам, ( $\sum M_y = 0$ ;  $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$ ) и проверяем их выполнение. Для рассмотренной рамы проверка равновесия узлов показана на рис. 2.8.

ⓘ Анализ полученных эпюр внутренних сил позволяет установить ряд **общих закономерностей в изменении эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$** , которые должны всегда соблюдаться для любых рамно-стержневых и балочных систем:

1) на прямолинейном нагруженном участке эпюра изгибающих моментов всегда линейна и может быть построена по двум ординатам (обычно для крайних сечений участка), а эпюры  $Q$  и  $N$  – постоянны (во всех сечениях одинаковы);

2) на участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра  $M$  всегда изменяется по параболическому закону и должна строиться минимум по трем ординатам (обычно для крайних и среднего сечений на участке); вышуклость эпюры  $M$  при этом всегда направлена в сторону действия равномерно распределенной нагрузки; эпюра  $Q$  на таком участке изменяется линейно и может быть построена по двум ординатам (для крайних сечений);

3) в точке приложения сосредоточенной силы эпюра  $M$  всегда имеет излом, направленный в сторону действия силы, эпюра  $Q$  – разрыв («скачок») на величину произведения этой силы на косинус угла между силой и осью, нормальной к оси стержня, а эпюра  $N$  – «скачок» на величину произведения этой силы на синус угла между силой и осью, нормальной к оси стержня; если внешняя сила перпендикулярна к оси стержня, то «скачок» на эпюре  $Q$  будет равен величине самой силы, а на эпюре  $N$  «скачка» (разрыва) не будет;

4) в точке приложения сосредоточенного момента эпюра  $M$  всегда имеет разрыв («скачок») на величину этого момента;

5) в шарнире изгибающий момент всегда равен нулю (не следует путать сечение в шарнире и сечение, бесконечно близкое к шарниру; так, если в сечении, бесконечно близком к шарниру, применен сосредоточенный момент, то на эпюре  $M$  в этом сечении, согласно предыдущему положению, будет иметь место «скачок» с нуля в шарнире до значения сосредоточенного момента в точке его приложения);

6) на участке действия распределенной нагрузки в сечении, в котором поперечная сила равна нулю, изгибающий момент всегда имеет экстремум (минимум либо максимум);

7) при принятых правилах знаков знак эпюры  $Q$  можно определить (проверить) по эпюре  $M$ , используя следующее правило: эпюра  $Q$  положительна, если для совмещения оси стержня с касательной к эпюре  $M$  на участке ось стержня необходимо повернуть по кратчайшему пути по часовой стрелке; если для указанного совмещения ось стержня нужно поворачивать против часовой стрелки, то эпюра  $Q$  на участке будет иметь отрицательный знак.

Используя изложенные закономерности в изменении эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ , эти эпюры можно строить, не составляя зависимостей для изгибающих моментов, поперечных и продольных сил на участках, а ограничиваясь вычислением значений указанных усилий в характерных сечениях рамы.

Для иллюстрации такого подхода построения эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  рассмотрим раму, изображенную на рис. 2.9. Рама является консольной и при вычислении внутренних сил в любом ее сечении можно обойтись без определения опорных реакций, если рассматривать для всех сечений равновесие отсеченных консоль-

ных частей рамы. Таким образом, при построении эпюр усилий в таких рамах опорные реакции можно не определять, если это не требуется специально. С другой стороны, зная опорные реакции, мы всегда имеем возможность выполнить проверку правильности предыдущих расчетов (рассматривая равновесие отсеченной части рамы со стороны опоры и равновесие опорного узла). Заметим, что нагрузка  $q$ , действующая на наклонный стержень (рис. 2.6), задана равномерно распределенной на горизонтальную проекцию этого стержня.

Для построения эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  рассматриваемую раму следует разбить на четыре участка (рис. 2.6). При построении эпюры изгибающих моментов учтем, что на участках I, III, IV рамы эпюра  $M$  будет изменяться линейно и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков, то есть в сечениях 1, 2, 6, 7, 8, 9. На участке II, на который действует равномерно распределенная нагрузка, эпюра  $M$  будет изменяться по параболическому закону и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты в сечениях 3, 4, 5. Выполним вычисление изгибающих моментов в указанных сечениях (1–9), рассматривая равновесие консольных частей рамы (на рис. 2.10 и 2.11 показаны соответствующие части для сечений 5 и 8):

$$\begin{aligned} M_1 &= -3,5 \cdot 0 = 0; & M_2 &= -3,5 \cdot 2 = -7 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_3 &= -3,5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -7 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_4 &= -3,5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -5,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_5 &= -3,5 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = +5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_6 &= +9 - 8 \cdot 0 = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_7 &= +9 - 8 \cdot 2 = -7 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_8 &= +9 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3^2 / 2 + 2 \cdot 4 - 3,5 \cdot 6 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_9 &= +9 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 4 + 3,5 \cdot 2 = +10 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Определение растянутых волокон в сечениях 1–9 по действующим в них изгибающим моментам показано на рис. 2.12. Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме представлена на рис. 2.13, а.

Аналогично рассуждаем и при построении эпюр поперечных и продольных сил. На участках I, III, IV  $Q$  и  $N$  будут постоянны и для построения их эпюр на этих участках достаточно вычислить значения  $Q$  и  $N$  в одном (любом) сечении:

$$M_1 = N_1 = N_2 = 0; \quad N_{\text{III}} = N_6 = N_7 = 0; \quad N_{\text{IV}} = N_8 = N_9 = -8 - 4 \cdot 3 = -20 \text{ кН}.$$

На участке II и поперечные, и продольные силы будут изменяться линейно, и для построения эпюр  $Q$  и  $N$  на этом участке необходимо вычислить значения поперечных и продольных сил в двух сечениях – в сечениях 3 и 5:

$$\begin{aligned} Q_3 &= -3,5 \sin \alpha + 2 \sin \alpha = (-3,5 + 2) \cdot 0,8 = -1,2 \text{ кН}; \\ Q_5 &= (-3,5 + 2) \sin \alpha + 4 \cdot 3 \cos \alpha = -1,5 \cdot 0,8 + 12 \cdot 0,6 = +6 \text{ кН}; \\ N_3 &= +3,5 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = (3,5 - 2) \cdot 0,6 = +0,9 \text{ кН}; \\ N_5 &= 3,5 \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 4 \cdot 3 \sin \alpha = (3,5 - 2) \cdot 0,6 + 12 \cdot 0,8 = +10,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

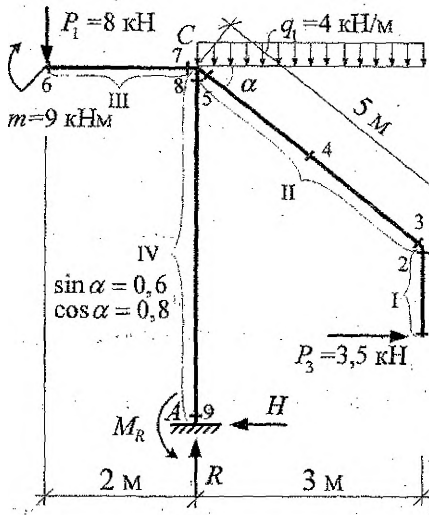


Рис. 2.9. Расчетная схема рамы

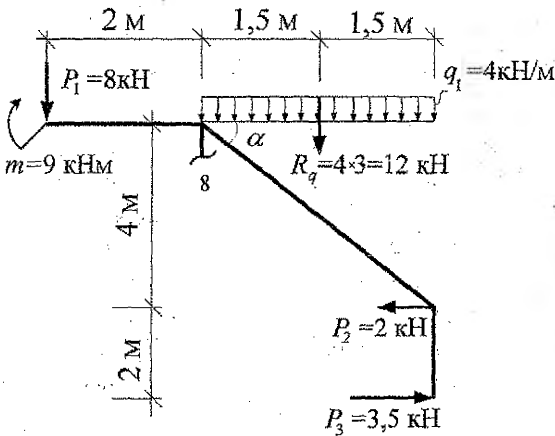


Рис. 2.11

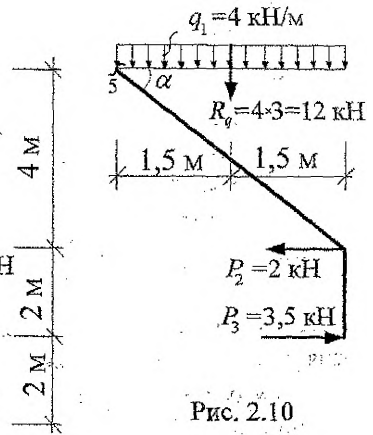


Рис. 2.10

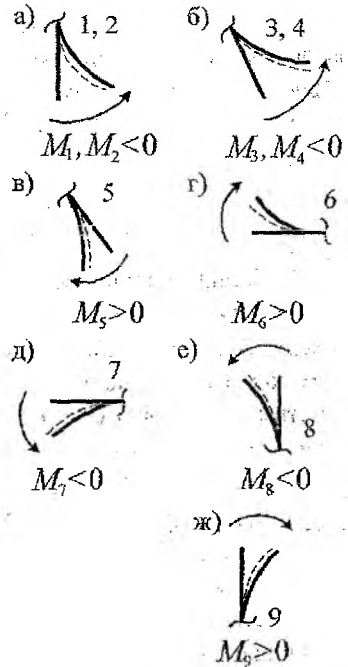


Рис. 2.12. Определение растянутых волокон

Построенные по полученным данным эпюры  $Q, N$  изображены на рис. 2.13, б, в. На эпюре поперечных сил на участке II имеется сечение, в котором попереч-

ная сила равна нулю. В этом сечении изгибающий момент на участке должен иметь экстремальное значение. Положение этого сечения вычислим из геометрических соображений:

$$\frac{1,2}{S_{\max}} = \frac{6}{5 - S_{\max}}; \quad 1,2 \cdot (5 - S_{\max}) = 6 \cdot S_{\max}; \quad S_{\max} = 0,833 \text{ м};$$

$$X_{\max} = S_{\max} \cos \alpha = 0,833 \cdot 0,6 = 0,5 \text{ м}; \quad Y_{\max} = S_{\max} \sin \alpha = 0,833 \cdot 0,8 = 0,67 \text{ м}.$$

Тогда максимальное (по абсолютной величине) значение изгибающего момента на участке II будет равно:

$$M_{\max} = -3,5 \cdot 2,67 + 2 \cdot 0,67 + 0,5 \cdot 4 \cdot 0,5^2 = -7,50 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

После построения окончательных эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  выполняем проверку равновесия узлов, которая показана на рис. 2.14.

На этом расчет консольной рамы можно и закончить, если нас не интересуют реакции в заделке.

Следует отметить, что в проектной практике расчета сооружений величины опорных реакций обычно знать необходимо (они используются в расчетах опорных узлов, нижележащих конструкций и т. д.). Поэтому здесь также выполним определение реактивных усилий в заделке, для чего рассмотрим равновесие рамы в целом:

$$\sum X = 0; \quad 3,5 - 2 - H = 0; \quad H = 1,5 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; \quad R - 8 - 4 \cdot 3 = 0; \quad R = 20 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad 9 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 4 + 3,5 \cdot 2 - M_R = 0; \quad M_R = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Несложно увидеть, анализируя окончательные эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  (рис. 2.13), что значения опорных реакций равны соответствующим внутренним усилиям в приопорном сечении 9. Это свидетельствует о том, что опорный узел А находится в равновесии (проверку его равновесия можно выполнить аналогично тому, как это сделано для узла В – рис. 2.8) и что расчет рамы выполнен верно. Заметим, что опорные реакции после построения эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  могут быть определены и из вырезания (рассмотрения равновесия) опорных узлов.

❗ Анализ примеров расчета позволяет предложить следующий **порядок построения эпюр усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$**  в рамно-стержневых и балочных системах:

1. На расчетной схеме системы показываем предполагаемые направления опорных реакций.

2. Составляем уравнения равновесия системы, решая которые, определяем значения опорных реакций.

3. Выполняем проверку правильности определения опорных реакций.

4. Систему разбиваем на расчетные участки (участки между характерными точками) и определяем сечения, в которых необходимо вычислить внутренние силы ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ) для построения их эпюр.

5. Вычисляем значения внутренних сил ( $M$ ,  $Q$  и  $N$ ) в указанных сечениях (используя вышеизложенные принципы и правила) и строим эпюры усилий



(с учетом закономерностей изменения эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  на участках); на участках действия равномерно распределенных нагрузок при этом вычисляем экстремальные значения изгибающих моментов (если они, конечно, есть).

6. Выполняем проверки равновесия узлов и соблюдения общих закономерностей изменения эпюр.

Каждый из указанных этапов расчета подробно рассмотрен выше. В ряде случаев некоторые из этапов могут быть опущены. Так, например, для консольных систем расчет можно начинать сразу с пункта 4 (см. расчет рамы, представленной на рис. 2.9).

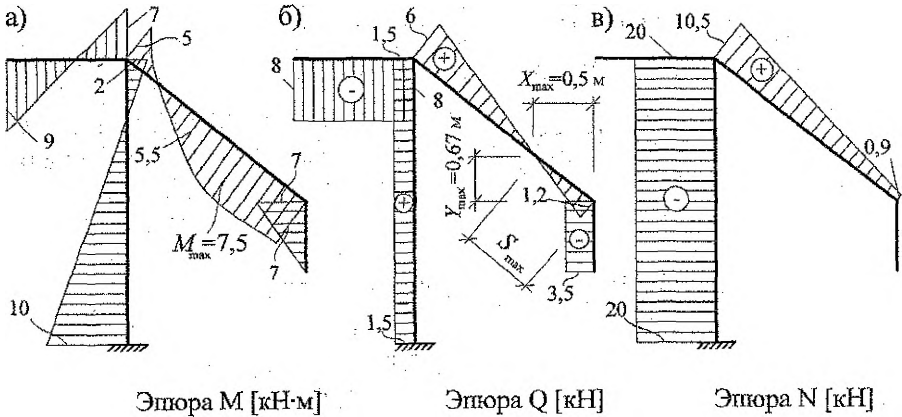


Рис. 2.13. Окончательные эпюры



$$\begin{aligned}
 \sum M_C = 0; & \quad 5 + 2 - 7 = 0; & \quad 7 - 7 = 0; & \quad \sum M_B = 0; & \quad 3 - 3 = 0; \\
 \sum X = 0; & \quad 10,5 \cos \alpha - 6 \sin \alpha - 1,5 = 0; & & \quad \sum Y = 0; & \quad 0,9 \sin \alpha - 1,2 \cos \alpha = 0; \\
 & \quad 10,5 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,8 - 1,5 = 0; & & \quad 0,9 \cdot 0,8 - 1,2 \cdot 0,6 = 0; & \quad 0,72 - 0,72 = 0; \\
 \sum Y = 0; & & & \quad \sum X = 0; & & \\
 & \quad -8 + 20 - 6 \cos \alpha - 10,5 \sin \alpha = 0; & & & & \quad 1,2 \sin \alpha - 0,9 \cos \alpha - 2 + 3,5 = 0; \\
 8 + 20 - 6 \cdot 0,6 - 10,5 \cdot 0,8 = 0; & & & & & \quad -1,2 \cdot 0,8 - 0,9 \cdot 0,6 + 1,5 = 0; & \quad -1,5 + 1,5 = 0.
 \end{aligned}$$

Рис. 2.14. Проверка равновесия узлов

### 3. Особенности расчета трехшарнирных рам

Трехшарнирные рамы (рис. 2.3) имеют либо более трех внешних опорных реакций (рис. 2.3,а), либо замкнутые контура (рис. 2.3,б), без разрезания которых нельзя полностью определить внутренние силы в таких системах. Поэтому для трехшарнирных рам кроме трех уравнений равновесия всей системы необходимо составлять и уравнения равновесия отдельных их частей. Ниже рассмотрим возможные схемы определения внешних опорных реакций и некоторых внутренних сил (в шарнирах либо затяжках – при размыкании замкнутых контуров) для ряда часто встречающихся схем рам. После определения указанных реактивных сил во внешних опорах и во внутренних связях построение эпюр усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  в этих системах выполняется по тем же принципам, что и в простых рамах, – отличий нет никаких (см. разд. 2.2.).

Ниже для нескольких типов рам представлены схемы определения внешних опорных реакций и реактивных сил во внутренних связях и шарнирах, знания которых достаточно для построения эпюр внутренних сил в этих системах как в простых рамах (внешняя нагрузка может быть любой и на схемах рам не показывается):

#### I. Трехшарнирная рама с опорами в одном уровне (рис. 3.1).

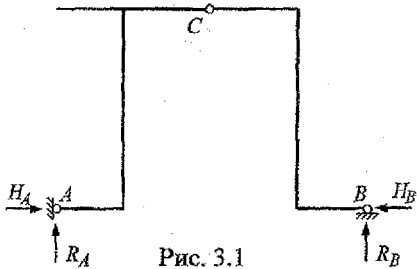


Рис. 3.1

Возможный порядок определения опорных реакций:

$$1) \sum M_A = 0; \quad R_B = \dots$$

$$2) \sum M_B = 0; \quad R_A = \dots$$

$$3) \sum M_C^{лев} = 0; \quad H_A = \dots$$

$$4) \sum X = 0; \quad H_B = \dots$$

Проверка:  $\sum M_C^{прав} = 0; \dots$

#### II. Трехшарнирная рама с опорами в разных уровнях (рис. 3.2).

Особенностью этой рамы является то, что для нее невозможно составить ни одного уравнения, в которое входило бы только одно неизвестное, и значит при ее расчете не обойтись без решения системы уравнений:

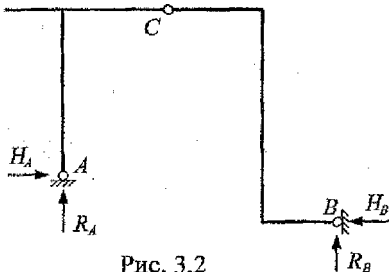


Рис. 3.2

$$1) \begin{cases} \sum M_A = 0; & (R_B, H_B) \\ \sum M_C^{прав} = 0; & (R_B, H_B) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} R_B = \dots \\ H_B = \dots \end{matrix}$$

$$3) \sum X = 0; \quad H_A = \dots$$

$$4) \sum Y = 0; \quad R_A = \dots$$

Проверка:  $\sum M_C^{лев} = 0; \dots$

**III. Трехшарнирная рама с затяжкой.** Здесь расчет следует разделить на два случая – когда затяжка не нагружена и когда она нагружена.

Отметим, что затяжкой называют прямолинейный стержень, соединяющийся с остальными частями системы по концам шарнирно и работающий при отсутствии на него нагрузки только на растяжение-сжатие.

A. Трехшарнирная рама с ненагруженной затяжкой (рис. 3.3).

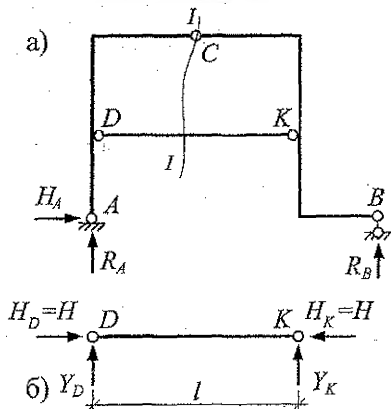


Рис. 3.3

Вырежем стержень DK, являющийся здесь затяжкой, и рассмотрим его равновесие (рис. 3.3,б):

$$\begin{aligned} \Sigma M_D = 0; & \quad Y_K l = 0; & \quad Y_K = 0; \\ \Sigma M_K = 0; & \quad Y_D l = 0; & \quad Y_D = 0; \\ \Sigma X = 0; & \quad H_D - H_K = 0; & \quad H_D = H_K = H. \end{aligned}$$

Получаем, что в этом стержне не возникает никаких усилий, кроме продольной силы, равной значению  $H$ , то есть стержень работает только на растяжение-сжатие. Величину  $H$  называют усилием в затяжке.

Тогда для рамы с ненагруженной затяжкой можно принять следующий порядок расчета:

1) определяем внешние опорные реакции, которых в рассматриваемой раме будем иметь всего три (как в обычных простых рамах), например, из уравнений:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; & \quad R_B = \dots & \quad \Sigma M_B = 0; & \quad R_A = \dots & \quad \Sigma X = 0; & \quad H_A = \dots \end{aligned}$$

Проверка:  $\Sigma Y = 0;$

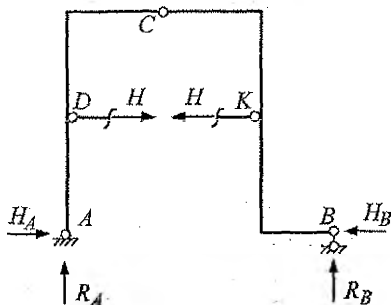


Рис. 3.4

2) разрезаем затяжку DK, обозначив усилие в ней через  $H$ , и получаем систему в виде, представленном на рис. 3.4. Для определения усилия в затяжке рассмотрим равновесие одной из полурам:

$$\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H = \dots$$

3) Проверка:  $\Sigma M_C^{нес} = 0; \dots$

B. Трехшарнирная рама с нагруженной затяжкой (рис. 3.3):

Возможная схема расчета:

1) внешние опорные реакции  $R_A$ ,  $H_A$  и  $R_B$  здесь определяются точно так же, как и для трехшарнирной рамы с ненагруженной затяжкой:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; & \quad R_B = \dots & \quad \Sigma X = 0; & \quad H_A = \dots \\ \Sigma M_B = 0; & \quad R_A = \dots & \quad \text{Проверка:} & \quad \Sigma Y = 0; \end{aligned}$$

2) вырезаем затяжку  $DK$  и рассматриваем ее равновесие (рис. 3.5).

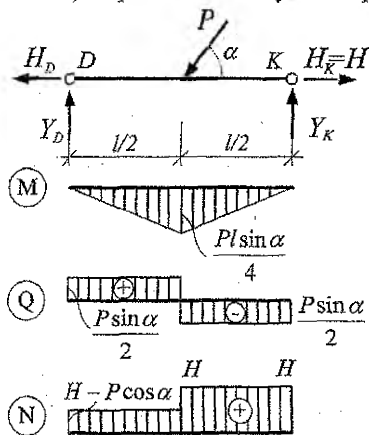


Рис. 3.5

построить в затяжке окончательные эпюры усилий  $M$  и  $Q$  и эпюру  $N$  с точностью до одного параметра – усилия в затяжке  $H$  (см. рис. 3.5);

Из уравнений равновесия  $\Sigma M_D = 0$  и  $\Sigma M_K = 0$  от действия любых нагрузок на затяжку несложно определить реактивные усилия  $Y_D$  и  $Y_K$  в шарнирах  $D$  и  $K$ , а из уравнения  $\Sigma X = 0$  найти зависимость между  $H_D$  и  $H_K$  с точностью до одного параметра  $H$ , который является пока неизвестным. Например, для нагрузки на затяжку, представленной на рис. 3.5, получим:

$$Y_D = Y_K = 0,5 \sin \alpha$$

$$H_K - P \cos \alpha = H - P \cos \alpha.$$

Имея эти реактивные усилия, можно построить в затяжке окончательные эпюры

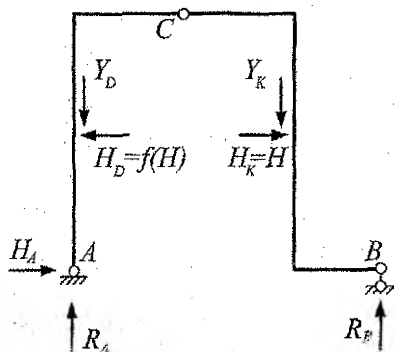


Рис. 3.6

3) рассмотрим теперь раму без затяжки, но с учетом передаваемых от нее на раму (в обратных направлениях) реактивных сил в шарнирах  $D$  и  $K$  –  $Y_D$ ,  $Y_K$ , которые уже известны, и  $H_D$ ,  $H_K$ , которые известны с точностью до одного параметра  $H$  (рис. 3.6); рассмотрев равновесие одной из полурам, определим этот параметр:

$$\Sigma M_C^{пра} = 0; \quad H = \dots$$

Усилие в затяжке  $H$  найдено.

4) Проверка:  $\Sigma M_C^{ле} = 0$ .

#### IV. Трехшарнирная рама с двумя параллельными затяжками (рис. 3.7).

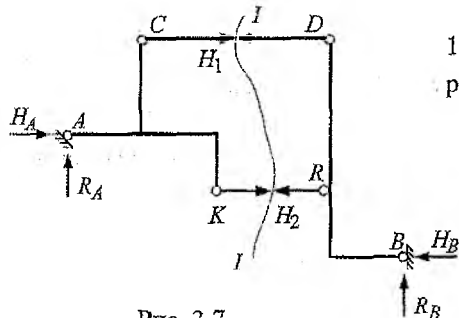


Рис. 3.7

Возможная схема расчета:

1) проводим сечение I-I и рассматриваем равновесие левой и правой частей рамы:

$$\Sigma Y^{ле} = 0; \quad R_A = \dots$$

$$\Sigma Y^{пра} = 0; \quad R_B = \dots$$

2) составляем уравнения равновесия рамы в целом:

$$\Sigma M_A = 0; \quad H_B = \dots$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad H_A = \dots$$

3) рассматривая теперь равновесие, например, левой части рамы, найдем усилия в обеих затяжках:

$$\Sigma M_K^{лев} = 0; \quad H_2 = \dots \quad \Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H_1 = \dots$$

4) выполняем проверку правильности расчета:  $\Sigma M_B^{прав} = 0; \dots$

### V. Трехшарнирная рама с двумя пересекающимися затяжками (рис. 3.8).

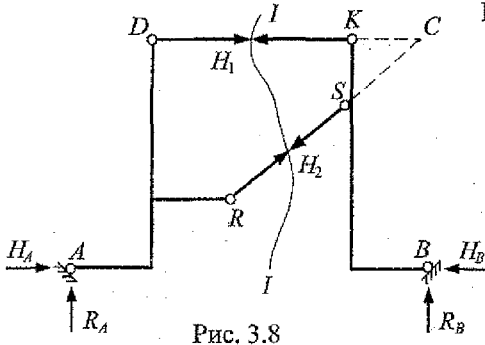


Рис. 3.8

Возможная схема (порядок) расчета:

1)  $\Sigma M_A = 0; \quad R_B = \dots$

2)  $\Sigma M_B = 0; \quad R_A = \dots$

3) проводим сечение I-I (рис. 3.8) и рассматриваем равновесие отдельных частей рамы:

$$\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H_A = \dots$$

4)  $\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad H_B = \dots$

5)  $\Sigma M_D^{лев} = 0; \quad H_2 = \dots$

6)  $\Sigma M_R^{лев} = 0; \quad H_1 = \dots$

7) Проверка:  $\Sigma X^{прав} = 0; \dots \Sigma Y^{прав} = 0; \dots$

**VI. Отметим еще одно возможное упрощение** в расчетах трехшарнирных (составных) рам, которое можно использовать, если один из дисков, образующих раму, не нагружен и соединяется с другими дисками (либо с основанием) с помощью только двух шарниров (см. диск AC на рис. 3.9). Известно, что

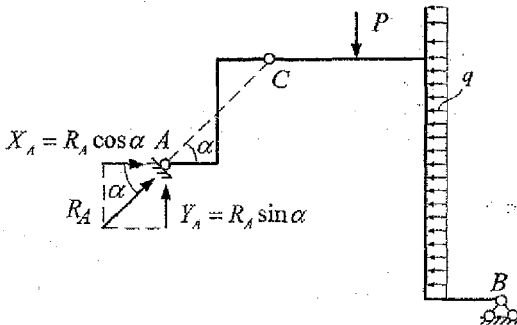


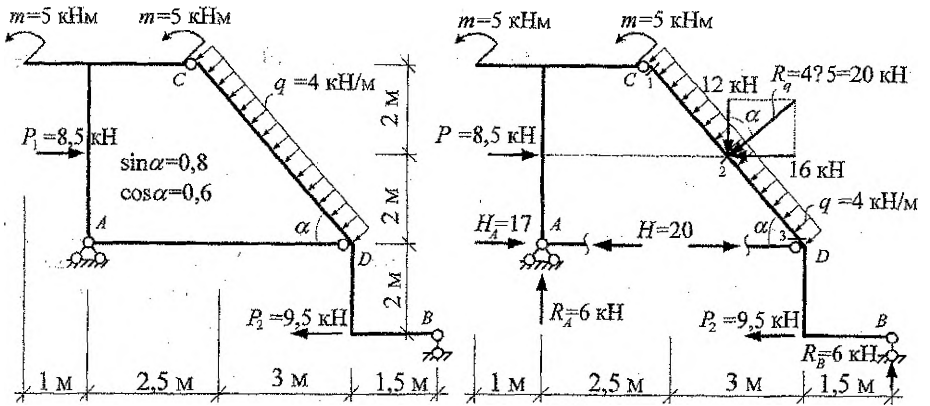
Рис. 3.9

такой диск будет находиться в равновесии только в том случае, если реактивные силы в двух указанных шарнирах будут направлены по прямой, соединяющей эти шарниры. А это означает, что мы знаем направление реакций в этих шарнирах и нет необходимости искать их в виде составляющих.

Например, для рамы на рис. 3.9

реакция в шарнирно неподвижной опоре A будет направлена по прямой AC, а в этом случае ее величину легко найти из уравнения:  $\Sigma M_B = 0$ . Несложно, как видно из рисунка, найти и составляющие этой реакции, если это необходимо.

Ниже кратко рассмотрим **пример расчета** рамы с затяжкой (см. рис. 3.10).



$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; & \quad -5 - 5 + 8,5 \cdot 2 + 12 \cdot (2,5 + 1,5) - 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 2 - R_B \cdot 7 = 0; & \quad R_B = 6 \text{ кН}; \\ \Sigma X = 0; & \quad H_A + 8,5 - 16 - 9,5 = 0; & \quad H_A = 17,0 \text{ кН}; & \quad \Sigma Y = 0; & \quad R_A - 12 + 6 = 0; & \quad R_A = 6 \text{ кН}; \\ \Sigma M_C^{прое} = 0; & \quad 12 \cdot 1,5 + 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 6 - 6 \cdot 4,5 - H \cdot 4 = 0; & \quad H = 20 \text{ кН}; \end{aligned}$$

Проверка:  $\Sigma M_C^{об} = 0; \quad 6 \cdot 2,5 + (20 - 17) \cdot 4 - 8,5 \cdot 2 - 5 - 5 = 0; \quad 27 - 27 = 0.$

Усилия в некоторых сечениях:  $M_2^{прое} = -(4 \cdot 2,5) \cdot 1,25 - 20 \cdot 2 + 9,5 \cdot 4 - 6 \cdot (1,5 + 1,5) = -7,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$   
 $M_3^{прое} = -20 \cdot 0 + 9,5 \cdot 2 - 6 \cdot 1,5 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad Q_1^{прое} = +(4 \cdot 5) - 20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = 8 \text{ кН};$   
 $Q_3^{прое} = -20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = -12 \text{ кН};$   
 $N_1^{прое} = N_3^{прое} = 20 \cos \alpha - 9,5 \cos \alpha - 6 \cos \alpha = 15 \text{ кН}.$

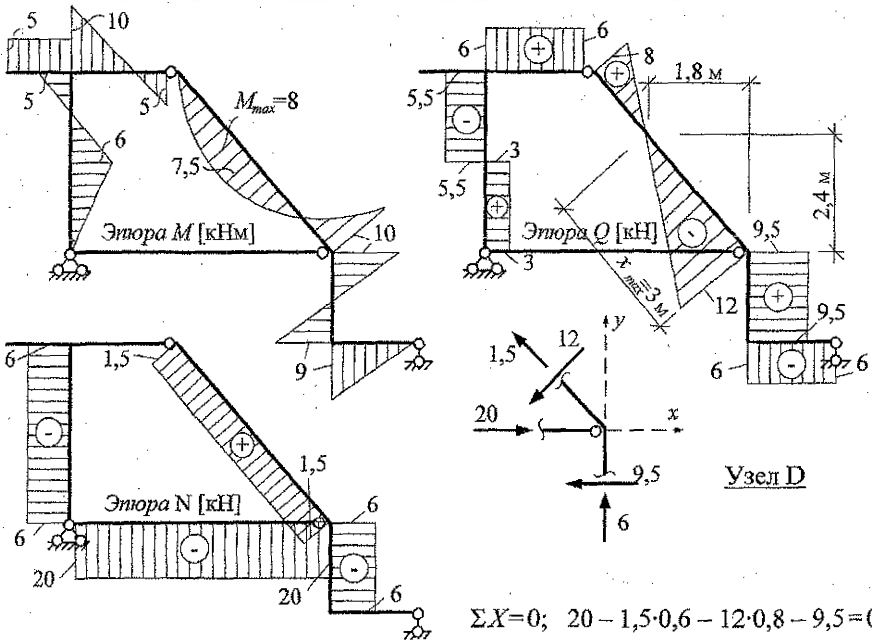


Рис. 3.10

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad 20 - 1,5 \cdot 0,6 - 12 \cdot 0,8 - 9,5 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad 6 + 1,5 \cdot 0,8 - 12 \cdot 0,6 = 0. \end{aligned}$$

#### 4. Расчет составных рам

Составные рамы состоят из нескольких трехшарнирных и (или) простых рам (см., например, рис. 2.3, в и 4.1, а).

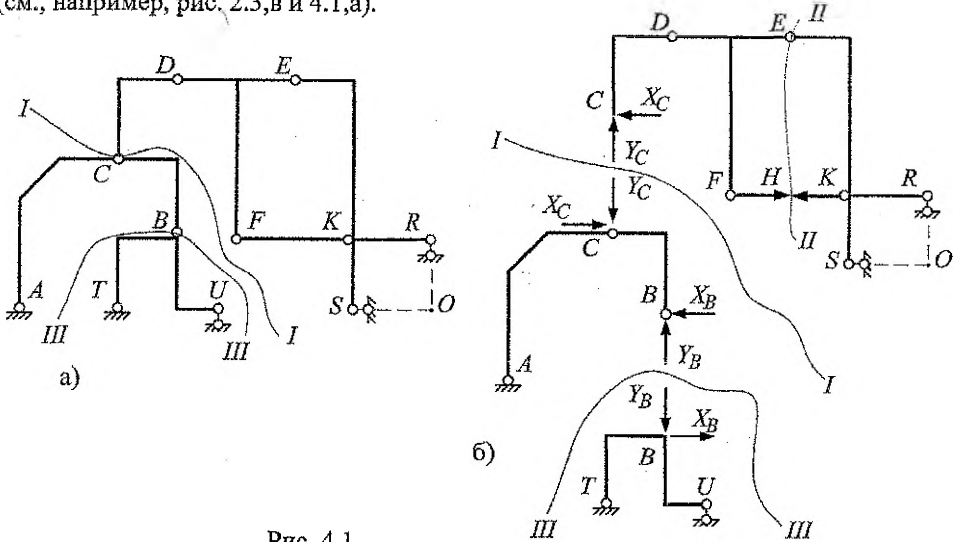


Рис. 4.1

При расчете таких рам, по аналогии с многопролетными балками, их целесообразно разделять (по шарнирам) на отдельные трехшарнирные и (или) простые рамы, одни из которых будут опираться на другие, и расчет которых мы знаем как выполнять; таким образом, здесь также можно говорить о главных и второстепенных рамах, составляющих составную. Расчет естественно надо начинать с самой второстепенной рамы (самой верхней), постепенно переходя к расчету нижерасположенных рам и передавая на них реакции (в обратных направлениях) от вышерасположенных рам. Полные эпюры усилий для составной рамы получим путем составления соответствующих эпюр для отдельных рам.

Например, расчет составной рамы, представленной на рис. 4.1, а, следует выполнять в следующей последовательности:

1. Сечением I-I отрезаем верхнюю часть, которая представляет собой трехшарнирную раму  $CDO$  с опорами в разных уровнях (в шарнире  $C$  и в фиктивном шарнире  $O$ ), и определяем реакции в шарнире  $C$  и в опорах  $S$  и  $R$ .

2. Правая полурама  $DO$  рассмотренной выше рамы  $CDO$  в свою очередь здесь представляет трехшарнирную раму с затяжкой. Поэтому для размыкания замкнутого контура нужно провести сечение II-II (рис. 4.1, б) и найти усилие  $H$  в затяжке  $FK$ , рассмотрев равновесие левой либо правой частей рамы.

3. Проводим сечение III-III, выделяя и рассматривая отдельно раму ABC, которая является трехшарнирной рамой с опорами в разных уровнях (A и B).

4. Последней рассматриваем простую раму TBU.

Ниже рассмотрим два примера расчета составных рам.

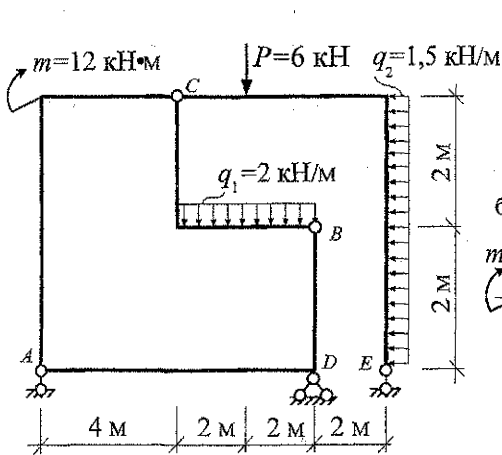


Рис. 4.2

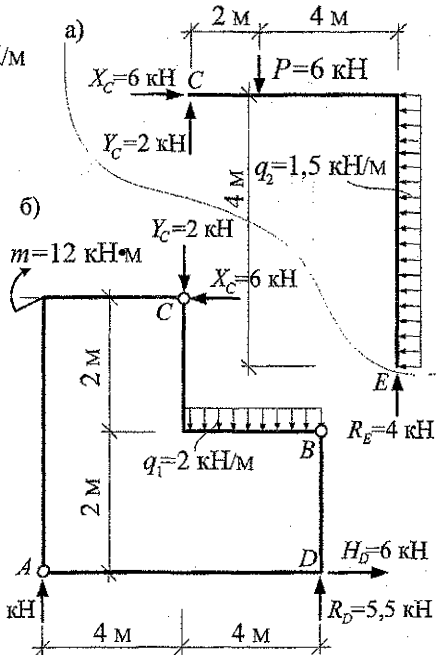


Рис. 4.3

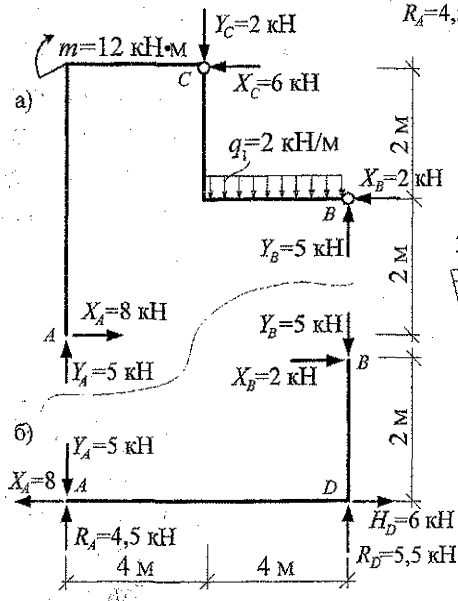


Рис. 4.4

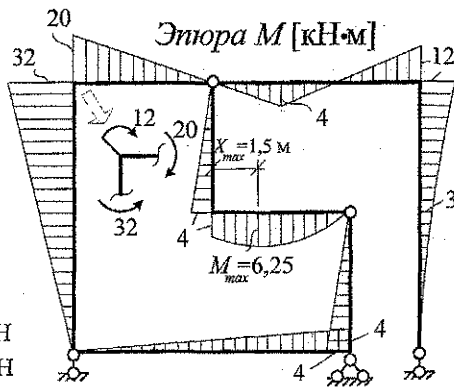


Рис. 4.5



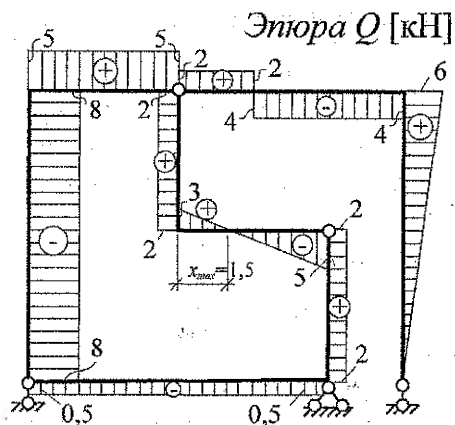


Рис. 4.6

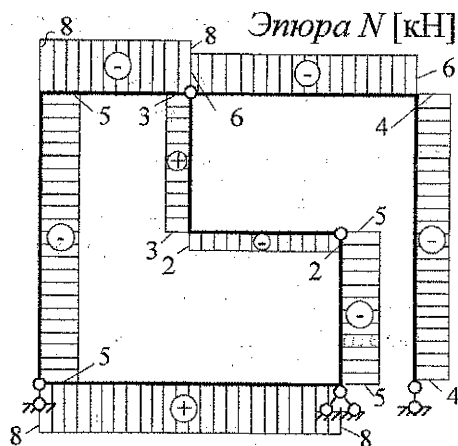


Рис. 4.7

В раме, представленной на рис. 4.2, возникает четыре неизвестные опорные реакции и, как несложно заметить, из равновесия рамы в целом значения этих опорных реакций найти нельзя. Для их определения необходимо рассмотреть равновесие отдельных частей рамы. При этом, исходя из наглядности и удобства расчета, можно идти разными путями. Здесь вначале разделим данную раму по шарниру  $C$  на две части так, как показано на рис. 4.3, и определим в первую очередь опорную реакцию  $R_E$  и внутренние реактивные силы между полученными частями рамы в шарнире  $C$ , рассмотрев равновесие правой части составной рамы — простой рамы  $CE$  (рис. 4.3,а):

$$\begin{aligned} \sum X_{np} = 0; & \quad X_C - 1,5 \cdot 4 = 0; & \quad X_C = 6 \text{ кН}; \\ \sum M_C^{np} = 0; & \quad 1,5 \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 - R_E \cdot 6 = 0; & \quad R_E = 4 \text{ кН}; \\ \sum Y_C^{np} = 0; & \quad -6 + 4 + Y_C = 0; & \quad Y_C = 2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

После этого рассмотрим равновесие левой части рамы (рис. 4.3,б) и определим остальные опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad H_D - 6 = 0; & \quad H_D = 6 \text{ кН}; \\ \sum M_A = 0; & \quad 12 + 2 \cdot 4 - 6 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 6 - R_D \cdot 8 = 0; & \quad R_D = 5,5 \text{ кН}; \\ \sum Y = 0; & \quad -2 - 2 \cdot 4 + 5,5 + R_A = 0; & \quad R_A = 4,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Левая часть рамы  $ACBD$  (рис. 4.3,б) представляет собой замкнутый контур, и определение внутренних сил в любом ее сечении невозможно без ее разделения на отдельные части. Разделим эту часть рамы на две части по шарнирам  $A$  и  $B$  так, как показано на рис. 4.4. Внутренние реактивные усилия в шарнирах

$A$  и  $B$  определим из рассмотрения верхней части  $ABC$ , представляющей собой трехшарнирную раму с опорами в разных уровнях (см. разд. 3), составляя при этом уравнения равновесия как этой части в целом, так и составляющих ее частей  $AC$  и  $CB$ . Так как в рассматриваемом случае для части рамы  $ABC$  нельзя составить ни одного уравнения, в которое входила бы только одна неизвестная реакция, то для определения реакций  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$  здесь необходимо составить систему уравнений, например, вида:

$$\begin{cases} \sum M_C^{np} = 0; & -Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ \sum M_A^{сверху} = 0; & 12 + 2 \cdot 4 - 6 \cdot 4 - X_B \cdot 2 - Y_B \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 6 = 0, \end{cases}$$

решив которую, найдем:  $X_B = 2$  кН;  $Y_B = 5$  кН.

После этого можно определить  $X_A$  и  $Y_A$ :

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad X_A - 6 - 2 = 0; & \quad X_A = 8 \text{ кН}; \\ \sum Y = 0; \quad Y_A + 5 - 2 - 2 \cdot 4 = 0; & \quad Y_A = 5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Таким образом, все необходимые для расчетов внутренних сил в сечениях рамы опорные реакции и внутренние реакции в шарнирах (усилия взаимодействия между отдельными частями рамы) определены. Для проверки правильности их вычисления рассмотрим равновесие нижней части рамы  $ADB$  (рис. 4.4,б):

$$\begin{aligned} \sum X^{\text{нижн}} = 0; & \quad -8 + 6 + 2 = 0; & \quad +8 - 8 = 0; \\ \sum Y^{\text{нижн}} = 0; & \quad 4,5 + 5,5 - 5 - 5 = 0; & \quad 10 - 10 = 0; \\ \sum M_B^{\text{нижн}} = 0; & \quad 2 \cdot 2 - 5 \cdot 8 + 4,5 \cdot 8 = 0; & \quad 40 - 40 = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что реакции взаимодействия частей  $AC$  и  $CB$  в шарнире  $C$  здесь не определялись. Это можно не делать, так как усилия в любом сечении рамы можно найти и не зная их, а используя найденные реакции в опорах и шарнирах.

Построение эпюр внутренних сил в заданной раме теперь не представляет большой сложности. Для этого надо построить эти эпюры отдельно в частях рамы  $CE$  (рис. 4.3,а),  $ACB$  (рис. 4.4,а) и  $ADB$  (рис. 4.4,б), как в простых рамах, то есть аналогично тому, как это описано в разделе 2, и затем эти эпюры объединить на общей схеме рамы (рис. 4.2). Окончательные эпюры  $M, Q$  и  $N$  для рассматриваемой рамы, построенные таким образом, представлены на рис. 4.5 – 4.7.

Приведем еще один пример. Рассмотрим сложную составную раму, изображенную на рис. 4.8. Рама опирается на основание (землю) с помощью двух шарнирно неподвижных опор ( $A$  и  $B$ ) и одной шарнирно подвижной опоры ( $D$ ). В опоре  $D$  возникает одна опорная реакция ( $R_D$ ), направленная вдоль опорного

стержня (перпендикулярно к опорной поверхности). В шарнирно неподвижных опорах ( $A, B$ ) тоже возникает по одной реакции, но в связи с тем, что чаще всего неизвестно их направление, такие реакции раскладывают обычно на две составляющие (например, по осям  $X$  и  $Y$ ; хотя можно раскладывать их на две любые другие взаимно перпендикулярные оси, если это удобно). Эти составляющие при этом часто называют просто реакциями в шарнирно неподвижных опорах. Бывают случаи, когда можно узнать направление полной опорной реакции в шарнирно неподвижной опоре (см. п. VI в разделе 3). Такой случай имеет место и в рассматриваемой раме, для которой легко определяется направление полной реакции в опоре  $A$ . Структура рамы (рис. 3.5) такова, что ее диск  $AF$  соединяется с остальной частью рамы и основанием с помощью только двух шарниров в точках  $A$  и  $F$ , и при этом этот диск ненагружен внешними нагрузками. А это значит, что часть рамы (диск)  $AF$  будет находиться под действием только двух сил – опорной реакции  $R_A$  и реактивного усилия в шарнире  $F$ . Но любое плоское тело при действии на него двух сил будет находиться в равновесии только тогда, когда эти силы направлены навстречу друг другу (рис. 4.9). Следовательно полная опорная реакция в опоре  $A$  должна быть направлена по прямой, соединяющей точки  $A$  и  $F$  (рис. 4.10). Направление же полной опорной реакции в опоре  $B$  здесь пока неизвестно, поэтому эту реакцию будем искать в виде двух составляющих  $V_B$  и  $H_B$ . Опорную реакцию в опоре  $A$  ( $R_A$ ) при ее определении тоже можно разложить на две составляющие, при этом вследствие известного ее направления (известен угол  $\alpha$ ) неизвестной все равно будет только одна величина –  $R_A$ .

При определении опорных реакций в рассматриваемой раме не удастся составить ни одного уравнения, в которое входило бы только одно неизвестное, поэтому придется решать систему уравнений. Здесь удобно использовать следующую систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \sum M_B = 0; & 0,6 \cdot R_A \cdot 11 + 0,8 \cdot R_A \cdot 3 + 1 \cdot R_D - (4 \cdot 5) \cdot 2,5 - 10 \cdot 1 + 10 = 0; \\ \sum M_C^{зад} = 0; & 0,6 \cdot R_A \cdot 6 - 0,8 \cdot R_A \cdot 2 - 4 \cdot R_D + 10 = 0, \end{cases}$$

решая которую, найдем:  $R_A = 5$  кН;  $R_D = 5$  кН. Заметим, что момент реакции  $R_A$  относительно точек  $B$  и  $C$  в уравнениях равновесия можно вычислять, если это удобно, и непосредственно в виде произведения этой реакции на ее плечи относительно этих точек ( $B$  и  $C$ ).

Далее теперь не составляет труда определить все остальные опорные реакции в раме (см. рис. 4.10) и построить в ней эпюры усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$  (см. рис. 4.11 – 4.13).

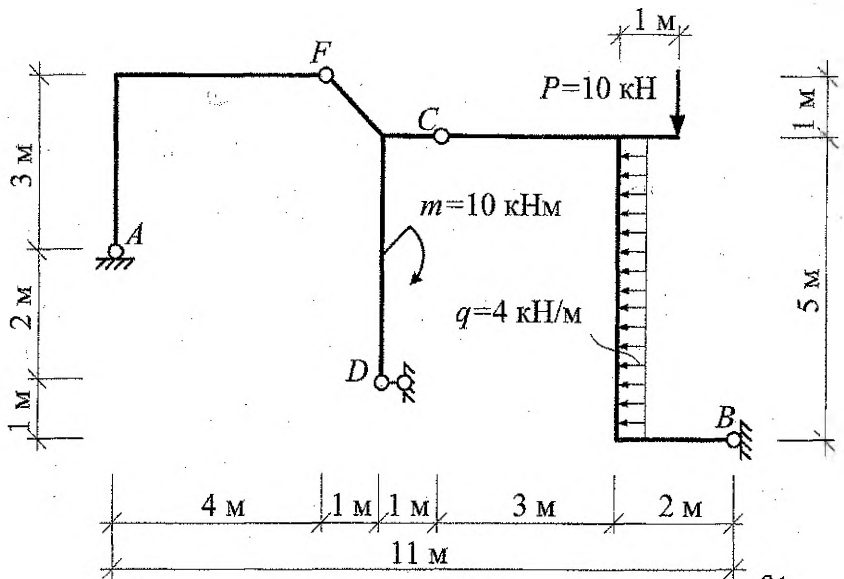


Рис. 4.8

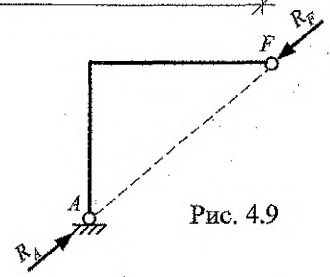


Рис. 4.9

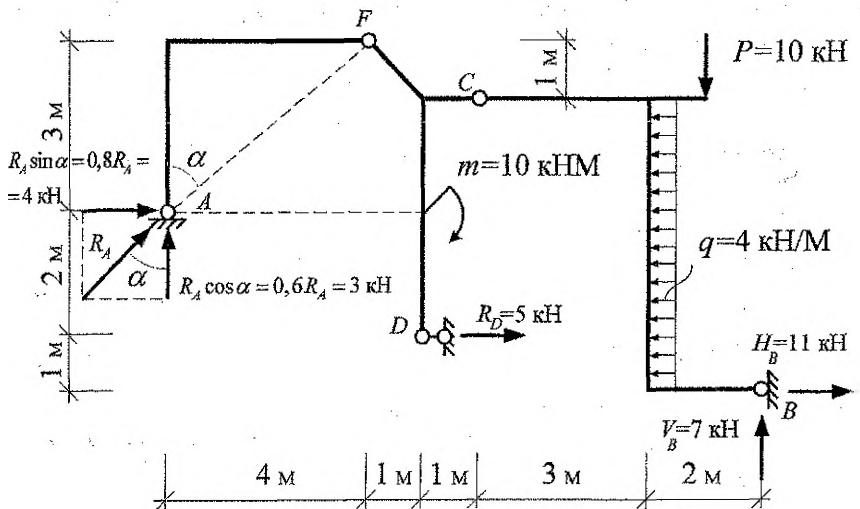
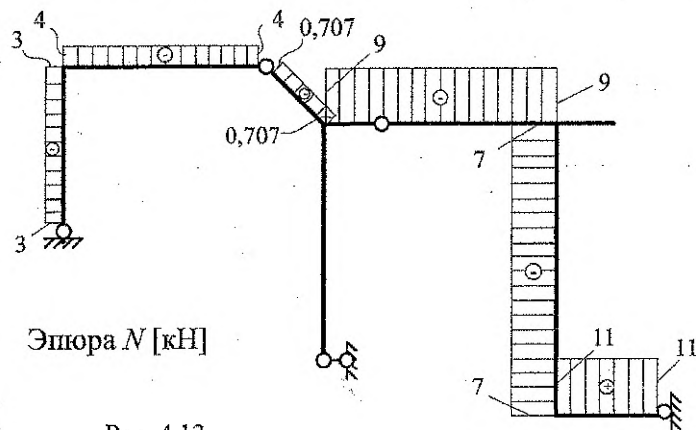
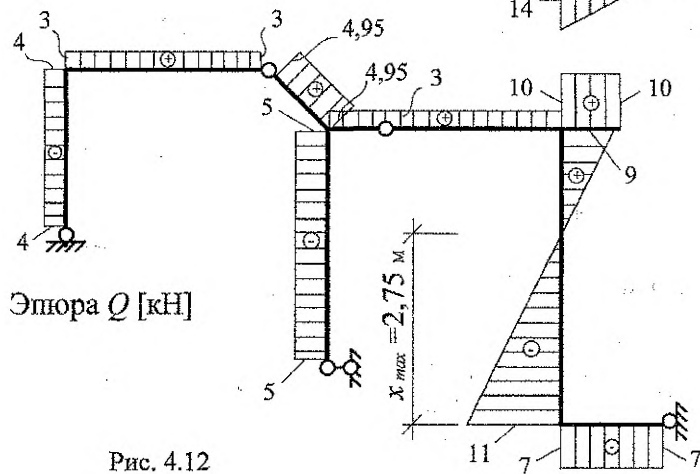
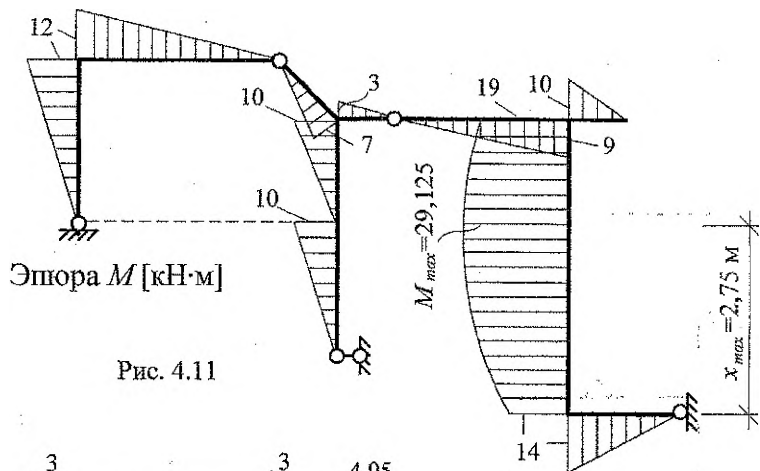
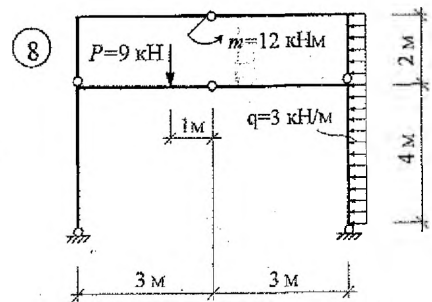
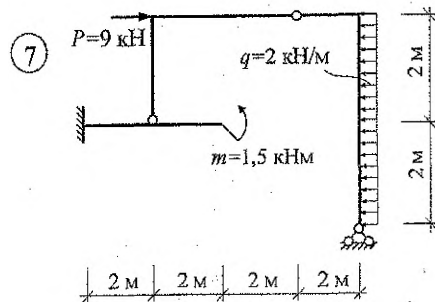
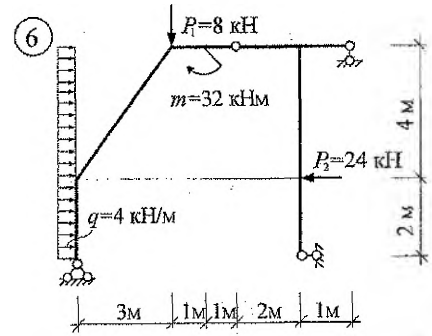
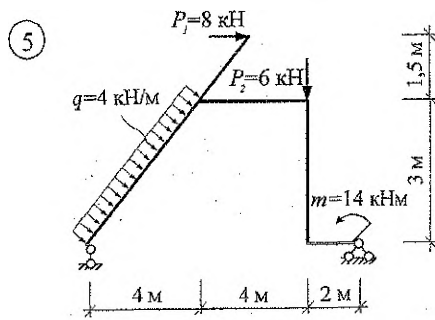
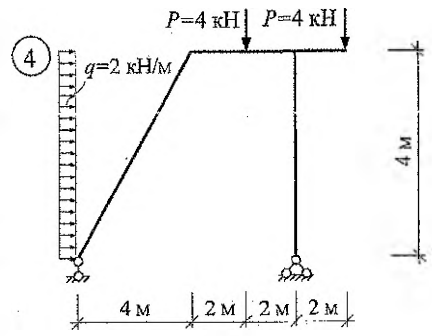
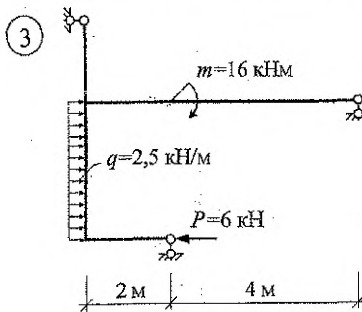
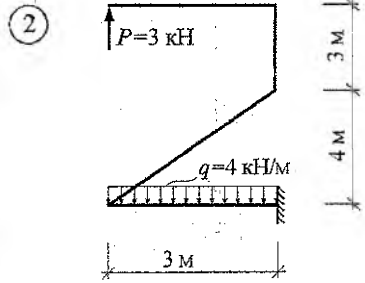
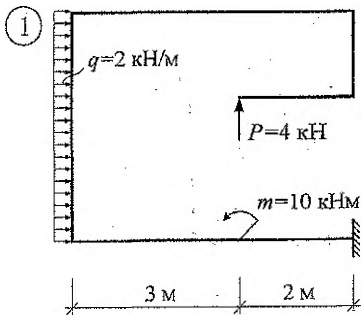


Рис. 4.10



### 5. Примеры рам для самостоятельного расчета\*



\* Ответы (эпюры усилий) для этих рам представлены на с. 53–54.

## 6. Особенности расчета многопролетных статически определимых балок

Многопролетные статически определимые балки – это балки, состоящие из нескольких простых балок, соединенных между собой по концам шарнирами, как правило, не совпадающими с опорами.

Кинематический анализ таких систем удобно выполнять с использованием формулы  $L = -(3D - 2Ш - C_0)$ , где  $D$  – число дисков в системе, в качестве которых здесь выступают простые балки;  $Ш$  – число одиночных (простых) шарниров, соединяющих эти балки;  $C_0$  – число опорных связей в системе.

Анализ структуры многопролетных балок позволяет ввести для них понятие **поэтажной схемы балки**. Поэтажная схема многопролетной статически определимой балки представляет собой схему соединения и взаимодействия отдельных простых балок, составляющих многопролетную (см. рис. 6.1). Среди указанных простых балок можно выделить главные и второстепенные балки.

**Главными** называют простые балки, которые после разрезания многопролетной балки по шарнирам, соединяющим простые балки, могут существовать самостоятельно (будут неизменяемы).

Учитывая, что балка – это диск, имеющий три степени свободы, главные балки должны иметь три опорные связи, то есть главными будут двухопорные балки и балки с заделкой. Главными в системе многопролетных будут и простые балки, имеющие две вертикальные опорные связи, учитывая, что третья связь для них – горизонтальная – спрятана и действует вдоль оси балки (что подтверждается геометрическим анализом соответствующей системы).

**Второстепенными** называют балки, которые после указанного разрезания по шарнирам самостоятельно существовать не могут, так как будут изменяемы.

Эти балки в системе многопролетных балок опираются на рядом расположенные балки с помощью связей в шарнирах. При этом одни второстепенные балки могут опираться на другие второстепенные балки, и значит среди них имеется определенная иерархия и уровень второстепенности может быть разным. Самыми второстепенными будут самые верхние на поэтажной схеме балки.

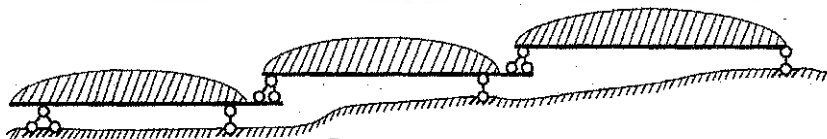
Анализ работы многопролетных статически определимых балок позволяет выявить ряд **закономерностей** в их работе и сформулировать их возможный **порядок расчета**:

- усилия по поэтажной схеме передаются только вниз и не передаются вверх, то есть нагрузка, действующая на одну из простых балок, составляющих многопролетную, передается только на нижележащие (на поэтажной схеме) простые балки;
- расчет многопролетных статически определимых балок удобно выполнять посредством расчета отдельно простых балок, составляющих многопролетные;
- при этом расчет необходимо начинать с самых второстепенных балок (самых верхних на поэтажных схемах), постепенно переходя к расчету все нижерасположенных на поэтажных схемах балках и передавая на них опорные реакции от вышерасположенных балок в обратных направлениях (эти уже известные усилия в шарнирах будут выступать для нижерасположенных балок в качестве внешних нагрузок); последними рассчитываются главные балки;

- расчет простых балок выполняется аналогично расчету простых рам;
- при действии на многопролетную статически определимую балку только вертикальных нагрузок продольные силы в ней будут отсутствовать;
- окончательные эпюры усилий в многопролетной балке получаем путем составления эпюр этих усилий, полученных при расчетах простых балок.

Выполним расчет многопролетной балки, представленной на рис. 6.1.

Кинематический анализ системы:  $W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$ .



Система статически определима и неизменяема.

Определение опорных реакций и построение эпюр внутренних усилий:

1) Расчет начинаем с балки  $EF$ , самой верхней на поэтажной схеме:

$$\sum M_E = 0; \quad -R_F \cdot 6,6 + 2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 + 5 \cdot 8,8 = 0; \quad R_F = 9,6 \text{ кН};$$

$$\sum M_F = 0; \quad R_E \cdot 6,6 - 2 \cdot 4,4 \cdot 4,4 + 5 \cdot 2,2 = 0; \quad R_E = 4,2 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка:} \quad \sum Y = 0; \quad 4,2 - 2 \cdot 4,4 + 9,6 - 5 = 0; \quad 0 = 0.$$

Расчет ординат эпюры  $M$ :  $M_1^{лев} = 0$ ;  $M_2^{лев} = 4,2 \cdot 2,2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 1,1 = 4,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

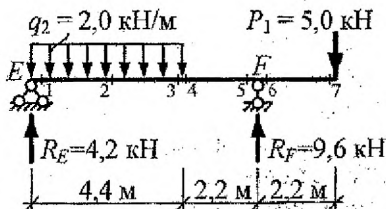
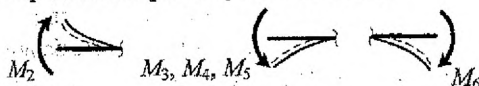
$$M_3^{лев} = 4,2 \cdot 4,4 - 2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 = -0,88 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4^{лев} = -0,88 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_5^{лев} = 4,2 \cdot 6,6 - 2 \cdot 4,4 \cdot 4,4 = -11 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_6^{лев} = 5 \cdot 2,2 = 11 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_7^{лев} = 5 \cdot 0 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определение растянутых волокон:



Расчет ординат эпюры  $Q$ :  $Q_1^{лев} = 4,2 \text{ кН}$ ;  $Q_2^{лев} = Q_4^{лев} = 4,2 - 2 \cdot 4,4 = -4,6 \text{ кН}$ ;

$$Q_5^{прав} = -9,4 + 5 = -4,6 \text{ кН}; \quad Q_6^{прав} = Q_7^{прав} = 5 \text{ кН}.$$

Расчет экстремального значения изгибающего момента на участке 1-2:

$$\frac{x_1}{4,2} = \frac{4,4 - x_1}{4,6} \Rightarrow x_1 = 2,1 \text{ м}; \quad M_{\max} = 4,2 \cdot 2,1 - 2 \cdot 2,1 \cdot 1,05 = 4,41 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры  $M$  и  $Q$  в балке изображаем на общей схеме многопролетной балки (рис. 6.1).

2) Второй рассчитываем балку  $CDE$ :

$$\sum M_C = 0; \quad 9,4 \cdot 1,55 + 9,4 \cdot 3,1 - R_D \cdot 4,65 + 4,2 \cdot 6,85 = 0; \quad R_D = 15,587 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; \quad 4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0; \quad R_C = 7,413 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 0; \quad 4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0; \quad R_C = 7,413 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка:} \quad \sum Y = 0; \quad 7,413 - 9,4 - 9,4 + 15,587 - 4,2 = 0; \quad 0 = 0.$$

Расчет ординат эпюры изгибающих моментов:

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = 7,413 \cdot 1,55 = 11,49 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3^{лев} = 11,49 \text{ кН}\cdot\text{м};$$



$$M_4^{лев} = 7,413 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 = 8,41 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_5^{лев} = 8,41; M_6^{лев} = -4,2 \cdot 2,2 = -9,24 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7^{лев} = 9,42 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_8^{лев} = 0.$$

Определение растянутых волокон:

$$M_2, M_3, M_4; M_5 \quad \left( \curvearrowright \quad \curvearrowleft \right) \quad M_6, M_7$$

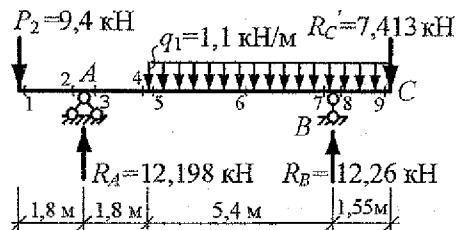
Расчет ординат эпюры  $Q$ :

$$Q_1^{лев} = 7,413 \text{ кН}; \quad Q_2^{лев} = 7,413 \text{ кН}; \quad Q_3^{лев} = Q_4^{лев} = 7,413 - 9,4 = -1,987 \text{ кН};$$

$$Q_5^{прав} = Q_6^{прав} = -15,587 + 4,2 = -11,387 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = Q_8^{прав} = 4,2 \text{ кН}.$$

Эпюры  $M$  и  $Q$  в балке изображаем на общей схеме многопролетной балки (рис. 6.1).

3) Последней рассчитываем главную балку  $ABC$ :



$$\Sigma M_A = 0;$$

$$-9,4 \cdot 1,8 + 1,1 \cdot 6,95 \cdot 5,275 - R_B \cdot 7,2 + 7,413 \cdot 8,75 = 0; \quad R_B = 12,26 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-9,4 \cdot 9 + R_A \cdot 7,2 - 1,1 \cdot 6,95 \cdot 1,925 + 7,413 \cdot 1,55 = 0; \quad R_A = 12,198 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\Sigma Y = 0;$   $-9,4 + 12,198 - 1,1 \cdot 6,95 + 12,26 - 7,413 = 0; \quad 0 = 0.$

Расчет ординат эпюры изгибающих моментов  $M$ :

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = -9,4 \cdot 1,8 = -16,92 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3^{лев} = -16,92 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4^{лев} = -9,4 \cdot 3,6 + 12,198 \cdot 1,8 = -11,884 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_5^{лев} = -11,884 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7^{лев} = M_8^{лев} = 7,413 \cdot 1,55 - 1,1 \cdot 1,55 \cdot 0,775 = 12,812 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_9^{лев} = 0.$$

Определение растянутых волокон:

$$M_2, M_3, M_4, M_5 \quad \left( \curvearrowright \quad \curvearrowleft \right) \quad M_7, M_8$$

Расчет ординат эпюры поперечных сил  $Q$ :

$$Q_1^{лев} = Q_2^{лев} = -9,4 \text{ кН}; \quad Q_3^{лев} = -9,4 + 12,198 = 2,798 \text{ кН}; \quad Q_4^{лев} = 2,798 \text{ кН};$$

$$Q_5^{лев} = 2,798 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 - 12,26 = -3,142 \text{ кН};$$

$$Q_8^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 = 9,118 \text{ кН}; \quad Q_9^{прав} = 7,413 \text{ кН}.$$

Расчет экстремального значения изгибающих моментов на участке 5-B:

$$\frac{x_2}{2,798} = \frac{5,4 - x_2}{3,142} \Rightarrow x_2 = 2,544 \text{ м};$$

$$M_{\max} = -9,4 \cdot 6,144 + 12,198 \cdot 4,344 - 2,544 \cdot 1,1 \cdot 2,544/2 = -8,325 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры  $M$  и  $Q$  в балке  $ABC$  и объединенные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил представлены на рис. 6.1.

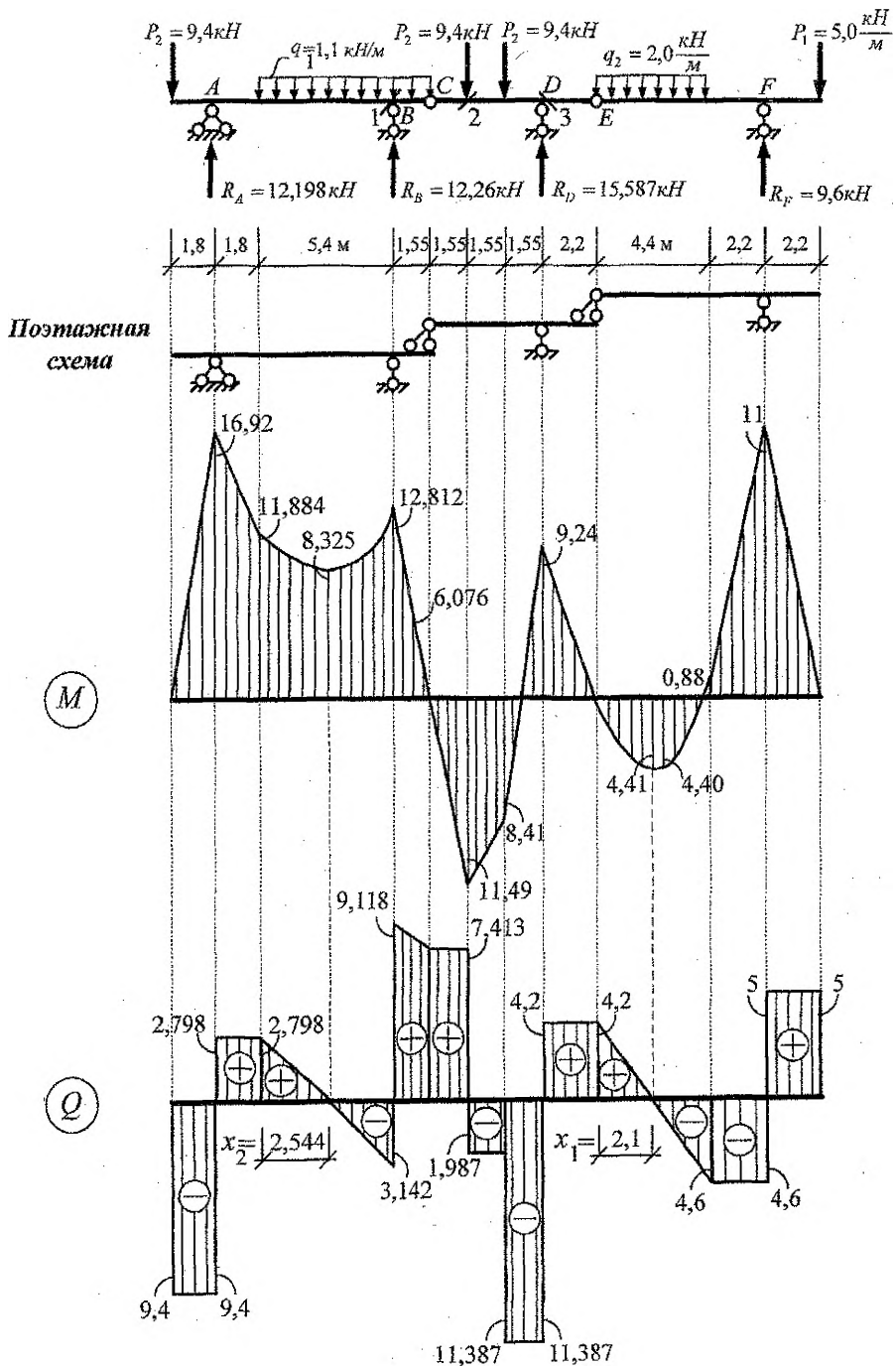


Рис. 6.1

## 7. Линии влияния усилий в балочных системах

### 7.1. Понятие о линиях влияния усилий

Линия влияния усилия (реакции) – это график изменения этого усилия (реакции) в определенном элементе (сечении) сооружения при перемещении по сооружению единичного груза (силы) постоянного направления.

При построении линии влияния усилия (реакции) рассматривается произвольное положение единичного груза на сооружении. Для этого состояния составляются уравнения равновесия, из которых выводится функциональная зависимость рассматриваемого усилия (реакции) от абсциссы положения груза. График этой зависимости и представляет искомую линию влияния.

Единичный груз при построении линий влияния принимается безразмерным. Поэтому размерности линий влияния усилий определяются выражением:

$$[\text{размерность линий влияния усилия}] = \frac{[\text{размерность усилия}]}{[\text{размерность силы}]}$$

Соответственно ординаты линий влияния опорных реакций, поперечных и продольных сил будут безразмерными (Н/Н), а размерность ординат линий влияния изгибающих моментов будет равна размерности длины (Н·м/Н = м).

Отметим отличия линий влияния усилий от эпюр усилий.

Эпура усилия представляет собой график, показывающий значения усилия (изгибающего момента, поперечной силы, продольной силы и др.) во всех сечениях рассматриваемого сооружения от действия определенной совокупности заданных неподвижных нагрузок (сосредоточенных сил, моментов, распределенных нагрузок). **Ординаты эпюры усилия** показывают значение усилия в том месте сооружения, где они отложены. При любом изменении положения и значений нагрузок, появления (снятия) нагрузок, усилия изменяются, и эпюры усилий необходимо строить (рассчитывать) заново.

Линия влияния усилия представляет собой график, характеризующий изменение указанного конкретного усилия в одном строго определенном сечении сооружения в зависимости от положения единичной сосредоточенной безразмерной силы, перемещающейся по сооружению. **Ордината линии влияния** показывает значение усилия в одном определенном сечении сооружения при положении единичной силы в том месте, где рассматриваемая ордината отложена. При построении линии влияния ордината откладывается под точкой приложения единичной силы. По данной линии влияния нельзя ничего сказать об изменении усилия в других сечениях сооружения.

Для линии влияния  $M$  и  $Q$  в балках используются следующие правила знаков: ординаты линий влияния  $M$  считают положительными, если растягиваются нижние волокна балок, а для ординат линий влияния  $Q$  применяется то же правило знаков, что и для эпюр  $Q$  (см. с. 5, рис. 1.3).

Линии влияния усилий позволяют:

- определять значения усилий от систем подвижных грузов;

– находить наиболее невыгодные положения систем подвижных грузов и временных нагрузок с целью определения в том или ином элементе сооружения экстремальных (максимальных и минимальных) усилий;

– определять усилия от неподвижных нагрузок, что особенно важно при многовариантном нагружении сооружения.

## 7.2. Построение линий влияния усилий в простых балках

Рассмотрим статический способ построения линий влияния опорных реакций и усилий в одном из сечений вначале для наиболее простой из балок – для консольной балки (рис. 7.1).

Зависимости для определения опорных реакций при перемещении единичной силы по балке получим из уравнений равновесия балки.

Горизонтальную реакцию можно найти из условия равенства проекций сил, действующих на балку, на горизонтальную ось ( $\sum X=0$ ). Учитывая, что вертикальная единичная подвижная сила при перемещении по балке не меняет своего направления, получим, что  $H_A = 0$ . Линия влияния горизонтальной реакции в консольной балке, таким образом, будет иметь нулевые ординаты.

Вертикальную реакцию определим из уравнения  $\sum Y=0$ . Откуда следует, что независимо от положения груза  $R_A=1$ , то есть вертикальная реакция в консольной балке будет величиной постоянной, равной единице на всем участке движения груза. График линии влияния  $R_A$  представлен на рис. 7.1,б.

Реактивный момент в заделке определим из условия равенства нулю суммы моментов относительно точки  $A$ :

$$\sum M_A = 0; \quad -M_{RA} + 1 \cdot x_{FA} = 0; \quad M_{RA} = x_{FA}.$$

Опорный момент изменяется по линейному закону. Для построения графика прямой линии достаточно вычислить ее ординаты в двух точках: в начале и в конце балки: при  $x_{FA} = 0$

$M_{RA} = 0$ ; при  $x_{FA} = l$   $M_{RA} = l$ .

Соединив эти точки прямой, получим линию влияния опорного момента в виде, представленном на рис. 7.1,в.

Изгибающий момент и поперечную силу в сечении  $K$  определим из уравнений равновесия правой части балки.

Если груз  $F=1$  расположен справа от сечения  $K$ :

$$M_K^{сп} = -1 \cdot x_{FK}$$

$$\text{(при } x_{FK} = 0 \quad M_K = 0;$$

$$\text{при } x_{FK} = c \quad M_K = -c);$$

$$Q_K^{сп} = +1.$$

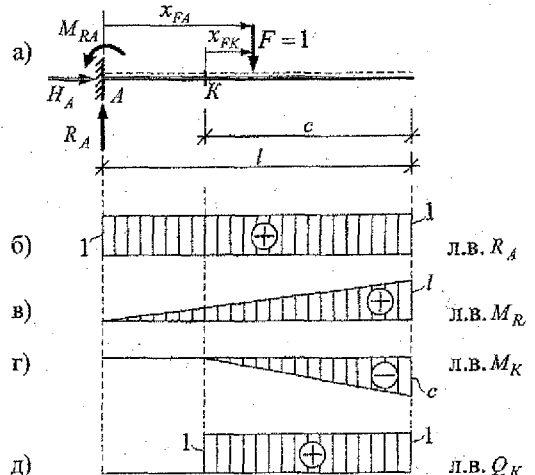


Рис. 7.1

При движении груза слева от сечения  $K$  из уравнений  $\sum M_K^{np} = 0$  и  $\sum Q_K^{np} = 0$  следует, что  $M_K = 0$ ,  $Q_K = 0$ . Линии влияния  $M_K$  и  $Q_K$  показаны на рис. 7.1, г, д.

Наибольшее по модулю значение изгибающего момента в сечении  $K$  возникает при положении груза на конце консоли. При положениях груза правее сечения  $K$  растянутыми в этом сечении будут верхние волокна балки, поэтому ординаты изгибающего момента отрицательны. Поперечная сила в сечении  $K$  при том же положении груза положительна (вращает элемент балки по часовой стрелке) и равна единице. В сечении  $K$  линия влияния изгибающего момента имеет излом, а линия влияния поперечной силы — разрыв (скачок) на единицу.

Построим линии влияния опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  для двухопорной балки с консолями (рис. 7.2, а). Из уравнений равновесия балки следует:

$$\sum M_B = 0; \quad 1 \cdot x - R_B l = 0; \quad R_B = x/l; \quad (7.1)$$

$$\sum M_A = 0; \quad -1 \cdot (l - x) + R_A l = 0; \quad R_A = (l - x)/l. \quad (7.2)$$

Эти зависимости представляют собой уравнения прямых, которые построим по двум ординатам:

$$\text{при } x = 0 \quad R_A = 1, \text{ а } R_B = 0; \quad \text{при } x = l \quad R_A = 0, \text{ а } R_B = 1.$$

Дополнительно вычислим значения реакций при положении груза в характерных точках:

$$\text{а) на конце левой консоли — при } x = -l_{k1} \quad R_A = (l - l_{k1})/l; \quad R_B = l_{k1}/l;$$

$$\text{б) в сечении } K \text{ между опорами — при } x = a \quad R_A = (l - a)/l; \quad R_B = a/l;$$

$$\text{в) на конце правой консоли — при } x = l + l_{k2} \quad R_A = -l_{k2}/l; \quad R_B = (l + l_{k2})/l.$$

Линии влияния опорных реакций, построенные согласно полученным зависимостям и ординатам, представлены на рис. 7.2, б, в.

Усилия в сечении  $K$ , расположенном в пролете балки (между опорами), можно определить из рассмотрения равновесия как левой, так и правой частей балки относительно сечения  $K$ . При этом целесообразно рассматривать ту часть, на которой нет груза. В этом случае для определения усилий получим более простые уравнения.

При движении груза слева от сечения  $K$  изгибающий момент  $M_K$  получим из уравнения равновесия правой части балки

$$M_K^{np} = R_B b. \quad (7.3)$$

С учетом (7.1) это выражение приводит к линейной зависимости (левая прямая)

$$M_K = \frac{xb}{l}, \quad (7.4)$$

справедливой для левой части балки, на которой находится единичный груз.

Из (7.3) следует, что левая прямая линии влияния  $M_K$  может быть построена умножением всех ординат линии влияния  $R_B$  на величину  $b$

$$\text{л.в. } M_K = (\text{л. в. } R_B) \cdot b.$$

Аналогично, при движении груза справа от сечения  $K$ , рассмотрев левую

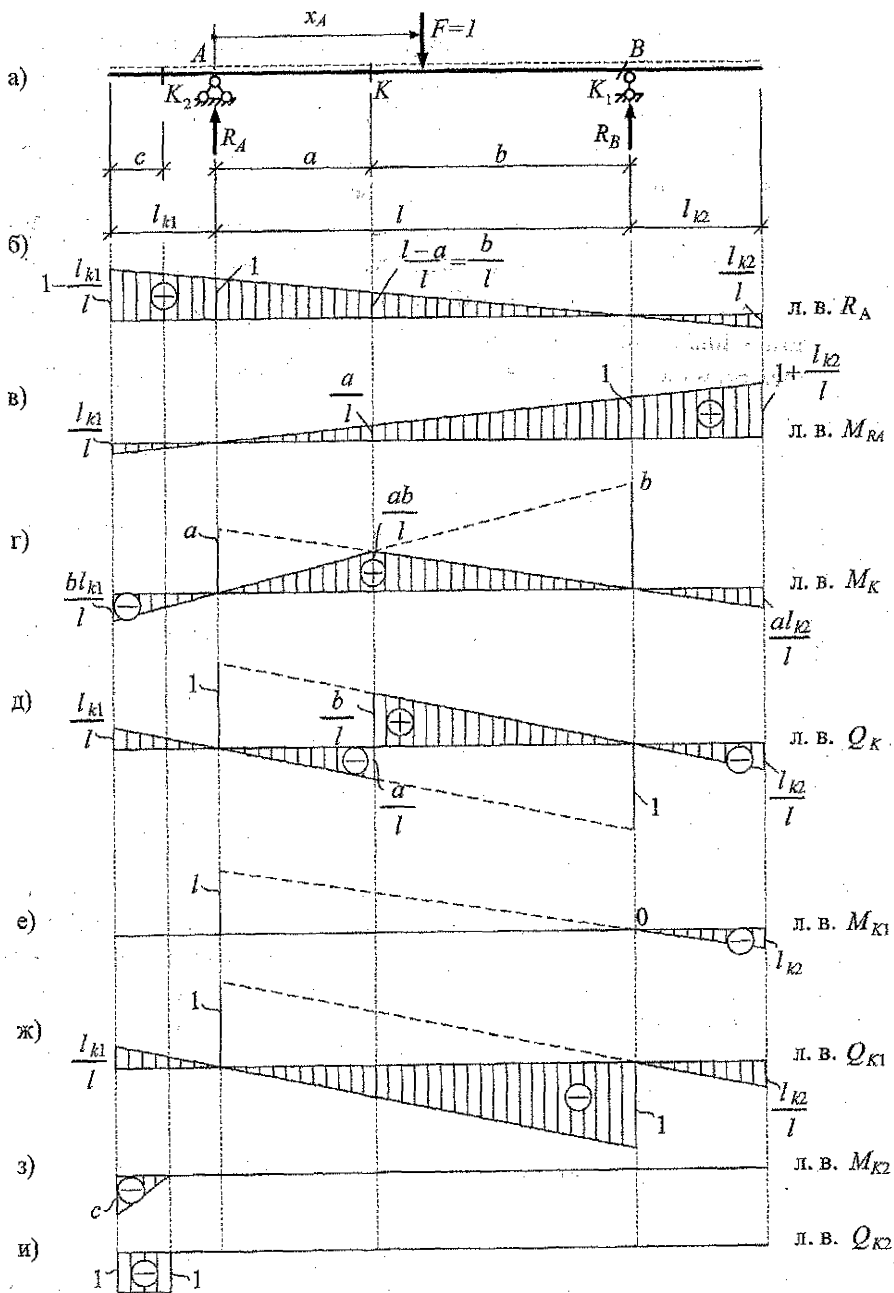


Рис. 7.2

часть балки, будем иметь

$$M_K = R_A a \quad \text{или} \quad \text{л. в. } M_K = (\text{л. в. } R_A) a.$$

То есть правую прямую линии влияния  $M_K$  можно построить, увеличив ординаты л. в.  $R_A$  в  $a$  раз (рис. 7.2, г).

Полученные прямые (левая и правая ветви линии влияния  $M_K$ ) пересекаются под сечением  $K$ .

Линия влияния поперечной силы в сечении  $K$  строится аналогично. При движении груза слева от сечения рассмотрим правую часть балки. Из уравнения  $\sum Y^{np} = 0$  получим (левая прямая):

$$Q_K = -R_B \quad \text{или} \quad \text{л. в. } Q_K = -(\text{л. в. } R_B).$$

При движении груза справа от сечения, рассматривая левую часть балки, будем иметь (правая прямая):

$$Q_K = R_A \quad \text{или} \quad \text{л. в. } Q_K = \text{л. в. } R_A.$$

Линия влияния  $Q_K$ , построенная согласно этим зависимостям, показана на рис. 7.2, д. Под сечением  $K$  она имеет разрыв на величину, равную единице ( $a/l + b/l = 1$ ). На рис. 7.2, е, ж показаны построенные по тем же принципам линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении  $K_1$ , бесконечно близком к опоре  $B$ .

Линии влияния усилий в сечениях на консолях двухопорной балки строятся так же (рис. 7.2, з, и), как и в сечениях консольной балки (рис. 7.1, г, д).

Заметим, что линии влияния усилий в балках, как и в других статически определимых системах, имеют линейное или кусочно-линейное очертание.

### 7.3. Построение линий влияния усилий в многопролетных балках

Построение линий влияния усилий в многопролетных балках, учитывая, что в этом случае на них действует только одна перемещающаяся по системе сила (груз), начинается с движения груза по той простой балке, к которой относится искомое усилие. Построение линий влияния усилий в простых балках рассмотрено выше. Для движения груза по остальным балкам можно использовать условия взаимодействия работы простых балок в системе многопролетных балок, которые несложно выявить из анализа работы таких систем:

– при переходе груза через шарнир, соединяющий простые балки, все усилия в многопролетной балке остаются неизменными (одинаковыми), так как действие груза не изменяется;

– при положении груза над опорой груз полностью воспринимается этой опорой (реакция ее будет равна величине груза), и все остальные усилия во всей многопролетной балке будут отсутствовать (равны нулю);

– при движении груза по балкам, которые передают действие этого груза на нижерасположенные по поэтажной схеме балки, линии влияния усилий в этих (нижерасположенных) балках будут изменяться линейно (связано это с тем, что передача действия груза осуществляется через реакции в шарнирах, которые являются опорными реакциями для вышележащих балок и которые при движении по ним груза изменяются линейно (7.1, б, в), (7.2, б, в);

– при движении груза по простым балкам, расположенным на поэтажной схеме ниже балки, к которой относится рассматриваемое усилие, груз

не передается на эту балку (груз по поэтажной схеме не передается вверх) и рассматриваемое усилие будет нулевым.

Таким образом, для построения линии влияния усилия в многопролетной балке необходимо сначала построить линию влияния усилия в простой балке, к которой относится рассматриваемое усилие, а затем, в соответствии с указанными условиями взаимодействия и работы простых балок в системе многопролетной, простроить линии влияния усилия при движении груза по остальным простым балкам многопролетной балки.

Рассмотрим статически определимую многопролетную балку, представленную на рис. 7.3,а. Поэтажная схема этой балки показана на рис. 7.3,б.

Опорная реакция  $R_C$  относится к балке  $BCD$ , поэтому построение линий влияния реакции начинаем с движения груза по этой балке. И строится линия влияния  $R_C$  так же, как в простой двухопорной балке по зависимостям (7.1), (7.2) (см. л. в.  $R_B$  на рис. 7.2). После этого рассматриваем движение единичного груза, например, на балке  $DST$ . При переходе через шарнир  $D$  ордината линии влияния  $1 + I_{K_2} / I_2$  остается неизменной. При расположении груза над опорой  $S$  он полностью воспринимается этой опорой, и все остальные усилия во всей многопролетной балке, включая реакцию  $R_C$ , равны нулю (нулевая ордината под опорой  $B$ ). Учитывая теперь, что при движении груза по балке  $DST$  линия влияния реакции  $R_C$ , которая относится к нижерасположенной по поэтажной схеме балки, должна изменяться линейно, соединяем точки, полученные при откладывании ординаты под опорами  $D$  и  $S$  этой балки, прямой линией и продолжаем эту линию на консоль балки  $ST$  (рис. 7.3, в). При движении груза по балке  $TU$  процедура построения линии влияния  $R_C$  такая же, как и при движении груза по балке  $DST$ . Осталось рассмотреть движение груза по балке  $AB$ , которая является главной и расположена по поэтажной схеме ниже балки  $BCD$ , к которой относится искомое усилие. Так как усилие от нагрузки на нижерасположенных балках вверх (на верхние балки) не передается, то линия влияния  $R_C$  на этом участке будет нулевой (рис. 7.3,в).

Линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечениях  $K_1$  и  $K_2$  в балке  $BCD$  строятся аналогично (рис. 7.3,г,е,ж). При построении линий влияния усилий в сечении  $K_2$  (рис. 7.3,е, ж) необходимо учитывать, что это сечение находится на консоли балки  $BCD$  и при движении груза по этой балке линии влияния усилий строятся как для сечений в консольных балках (рис. 7.1). Построение линий влияния усилий в сечении  $K_3$  должно начинаться с рассмотрения движения груза по балке  $DST$ , и так как сечение находится в пролете этой балки, процедура построения линий влияния усилий в сечении  $K_3$  такова же, как для сечений  $K_1$  в двухопорной балке на рис. 7.2. При движении груза по вышерасположенной балке  $TU$  линии влияния усилий в сечении  $K_3$  строятся на основе условий взаимодействия и работы простых балок в многопролетной,



рассмотренных выше. При движении груза по нижерасположенным балкам  $AB$  и  $BSCD$  усилиях в сечении  $K_3$  будут отсутствовать. На рис. 7.3,з представлена линия влияния поперечной силы в сечении  $K_3$ .

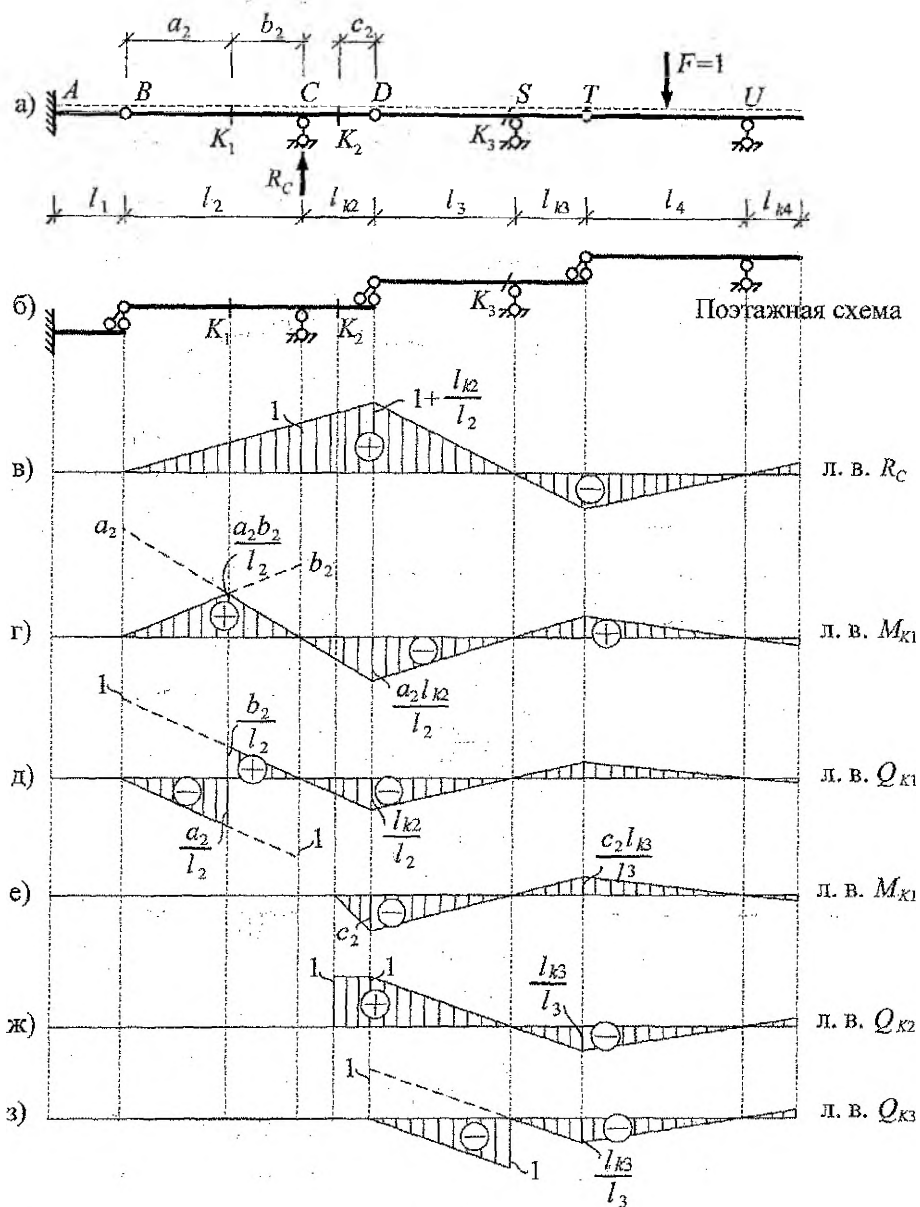


Рис. 7.3

Аналогично построены линии влияния двух опорных реакций и усилий в двух сечениях для балки с конкретными размерами, представленной на рис. 7.4.

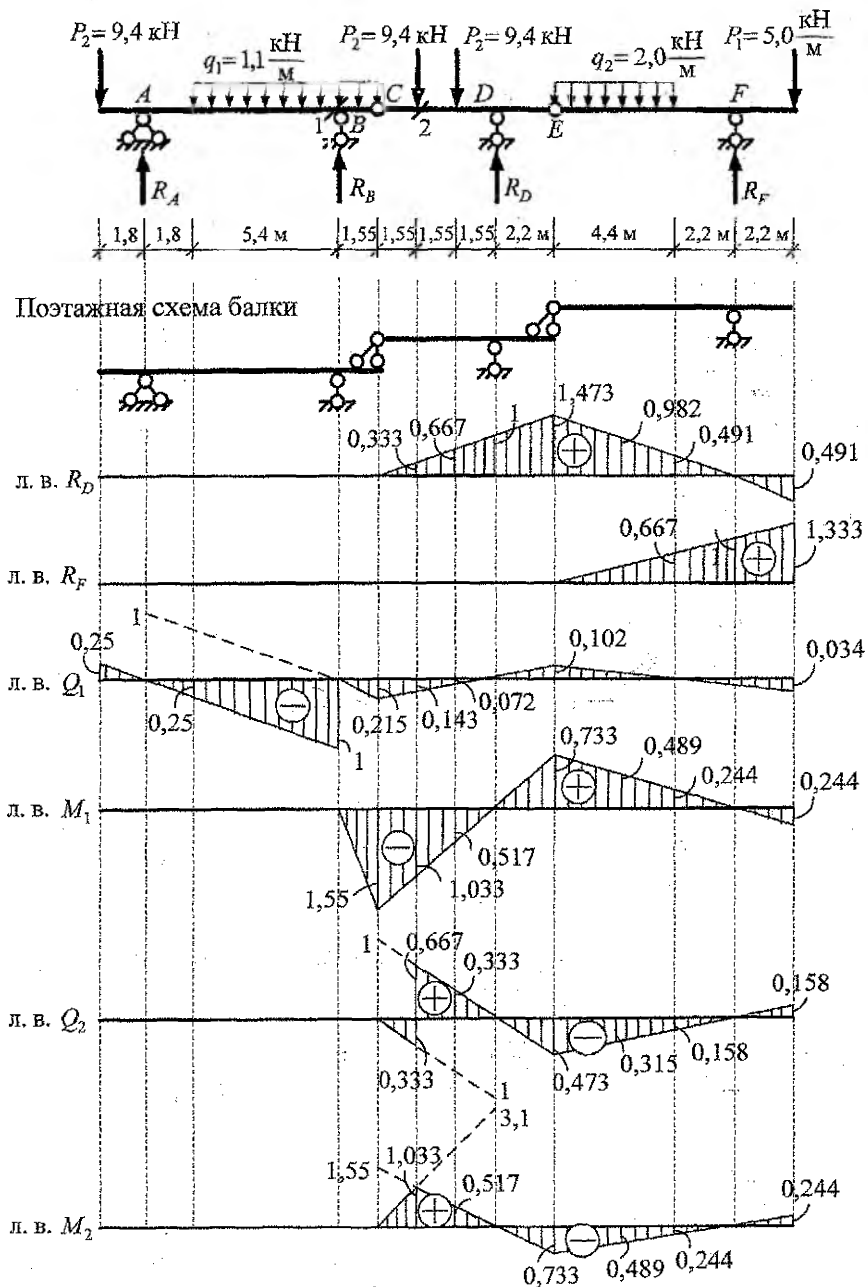


Рис. 7.4

#### 7.4. Определение усилий по линиям влияния от внешних нагрузок

Для статически определимых систем, у которых линии влияния имеют кусочно-линейный характер изменения, общее выражение для определения усилий по их линиям влияния от действия сосредоточенных сил, равномерно распределённых нагрузок и сосредоточенных моментов имеет вид

$$S = \sum_{i=1}^n F_i y_i + \sum_{j=1}^s q_j \Omega_j + \sum_{k=1}^t m_k \operatorname{tg} \alpha_k, \quad (7.5)$$

где  $n, s, t$  – число соответственно сосредоточенных сил  $F_i$ , равномерно распределённых нагрузок  $q_j$  и сосредоточенных моментов  $m_k$ ;  $y_i$  – ордината линии влияния усилия под сосредоточенной силой;  $\Omega_j$  – площадь линии влияния усилия под равномерно распределённой нагрузкой;  $\operatorname{tg} \alpha_k$  – тангенс угла наклона участка линии влияния усилия под сосредоточенным моментом по отношению к базовой оси.

Сосредоточенные силы  $F_i$  и равномерно распределённые нагрузки  $q_j$  здесь принимаются положительными, если они действуют вниз, а сосредоточенные моменты  $m_k$  положительны, если они действуют по часовой стрелке;

ординаты  $y_i$  и площади  $\Omega_j$  линий влияния усилий берутся со знаками линий влияния соответственно под силами и равномерно распределёнными нагрузками, а  $\operatorname{tg} \alpha_k$  положителен для возрастающей функции линии влияния (см., например, участки  $BCD$  и  $TU$  для линии влияния  $R_c$ , представленной на рис. 7.3,в) и отрицателен для убывающей функции (участок  $DST$  на той же линии влияния).

Важным при определении усилий от внешних нагрузок является следующее свойство прямолинейного участка линии влияния:

на прямолинейном участке линии влияния усилие от системы сил может быть определено произведением равнодействующей этой системы сил на ординату линии влияния под равнодействующей

$$S = R y_R. \quad (7.6)$$

Рассматриваемое свойство упрощает определение усилий от действия любых нагрузок, действующих на прямолинейных участках линий влияния, при условии, что можно легко найти равнодействующие этих нагрузок и точки их приложения. Так, в случае равномерно распределённой нагрузки её равнодействующая равна произведению интенсивности нагрузки на длину участка и приложена в середине этого участка. Достаточно просто определяются усилия на линейных участках линий влияния и от нагрузок, распределённых по треугольной и по трапецидальной зависимостям. Нагрузку, распределённую по трапецидальной зависимости, следует разбивать на равномерно распределённую

ную и треугольную либо на две треугольные нагрузки.

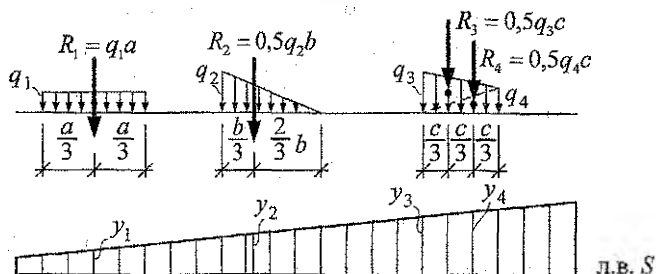


Рис. 7.5

Например, усилие  $S$  от нагрузок, представленных на рис. 7.5, можно вычислить по выражению

$$S = (q_1 a)y_1 + (0,5q_2 b)y_2 + (0,5q_3 c)y_3 + (0,5q_4 c)y_4 .$$

Вычислим по линиям влияния усилия, для которых построены линии влияния в балке на рис. 7.4, от внешней нагрузки, представленной там же, и сравним их со значениями, взятыми из эпюр усилий, построенных для этой же балки от действия той же нагрузки на рис. 6.1:

$$R_D = 9,4 \cdot 0,333 + 9,4 \cdot 0,667 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,982 - 5 \cdot 0,491 = 15,587 \text{ кН};$$

$$R_F = 2 \cdot 4,4 \cdot 0,333 + 5 \cdot 1,333 = 9,595 \text{ кН};$$

$$M_1 = -1,1 \cdot 1,55 \cdot 1,55/2 - 9,4 \cdot 0,517 - 9,4 \cdot 1,033 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,489 - 5 \cdot 0,244 = -12,808 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_1 = 9,4 \cdot 0,25 - 5,4 \cdot 1,1 \cdot 0,625 - 1,1 \cdot 1,55 \cdot 0,108 - 9,4 \cdot 0,072 - 9,4 \cdot 0,143 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,068 - 5 \cdot 0,034 = -3,139 \text{ кН};$$

$$M_2 = 9,4 \cdot 1,033 + 9,4 \cdot 0,517 - 2 \cdot 4,4 \cdot 0,489 + 5 \cdot 0,244 = 11,487 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_2 = -9,4 \cdot 0,333 - 2 \cdot 0,4 \cdot 4 \cdot 0,315 + 5 \cdot 0,158 = 7,427 \text{ кН}.$$

Сравнение значений усилий, полученных по линиям влияния и взятых из эпюр:

Обозначение усилий	Значения усилий, полученные		Расхождение результатов	
	по эпюрам	по л. в.	абсолютное	относительное, в %
$R_D$	15,587	15,587	0	0
$R_F$	9,595	9,6	0,005	0,052
$M_1$	12,812	12,808	0,004	0,030
$M_2$	11,49	11,487	0,003	0,026
$Q_1$	3,142	3,139	0,003	0,088
$Q_2$	7,413	7,427	0,014	0,194

## 8. Особенности расчета трехшарнирных арок на вертикальные нагрузки

Трехшарнирная система, в которой два диска, шарнирно соединенных друг с другом, представляют собой криволинейные стержни, называется трехшарнирной аркой. В трехшарнирных арках, как и в трехшарнирных рамах, возникает четыре составляющие опорных реакций, которые определяются из четырех уравнений равновесия арки в целом и отдельных ее частей (рис. 8.1,а):

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C^{пр} = 0; \quad \sum X = 0.$$

При этом при действии на трехшарнирные арки только вертикальных нагрузок горизонтальные реакции (распор) слева и справа равны друг другу, а вертикальные реакции определяются аналогично опорным реакциям в простой двухопорной балке, нагруженной той же нагрузкой (рис. 8.1,б).

Внутренние силы в сечениях арок определяются на основе тех же подходов, которые используются в рамах и которые изложены в разделах 1–4.

Можно усилия в сечениях трехшарнирных арок определять и по формулам:

$$M_k = M_k^0 - H y_k; \quad Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k; \\ N_k = -(Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k), \quad (8.1)$$

где  $M_k^0$ ,  $Q_k^0$  – изгибающий момент и поперечная сила в сечении  $k$  простой двухшарнирной балки (см. рис. 8.1,б), имеющей тот же пролет и нагруженной той же нагрузкой, что и арка;  $H$  – величина горизонтальных реакций арки (распор);  $\varphi_k$  – угол наклона касательной к оси арки в сечении  $k$  по отношению к горизонтальной оси  $x$ ;  $y_k$  – ордината центра сечения  $k$  относительно оси  $x$ , проходящей через опоры (см. рис. 8.1,а).

Заметим, что при заданной системе координат с началом в левой опоре арки (рис. 8.1,а)  $\sin \varphi_k$  для левой полуарки положительны, а для правой – отрицательны;  $\cos \varphi_k$  для обеих полуарок положительны.

В качестве примера рассмотрим арку параболического очертания, представленную на рис. 8.1. Вычислим усилия в сечениях  $K_1$  и  $K_2$  арки.

Вначале определим опорные реакции от заданной внешней нагрузки:

$$\sum M_A = 0; \quad 12 \cdot 2 + (3 \cdot 8) \cdot 6 + 10 \cdot 12 + 8 \cdot 17 + (4 \cdot 3) \cdot 18,5 - R_B \cdot 20 = 0; \quad R_B = 32,3 \text{ кН}; \\ \sum M_B = 0; \quad -12 \cdot 18 - (3 \cdot 8) \cdot 14 - 10 \cdot 8 - 8 \cdot 3 - (4 \cdot 3) \cdot 1,5 + R_A \cdot 20 = 0; \quad R_A = 33,7 \text{ кН}; \\ \sum M_C^{пр} = 0; \quad 33,7 \cdot 10 - 12 \cdot 8 - (3 \cdot 8) \cdot 4 + H \cdot 4 = 0; \quad H = 36,25 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность нахождения опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \quad 33,7 + 32,3 - 12 - 3 \cdot 8 - 10 - 8 - 3 \cdot 4 = 0; \quad 66 - 66 = 0; \\ \sum M_C^{пр} = 0; \quad 10 \cdot 2 + 8 \cdot 7 + (4 \cdot 3) \cdot 8,5 + 36,25 \cdot 4 - 32,3 \cdot 10 = 0; \quad 323 - 323 = 0.$$

Определяем ординаты и параметры углов наклона касательных к горизонтали для сечений:

$$\text{Сечение } K_1: \quad x_{K1} = 4 \text{ м}; \quad y_{K1} = \frac{4f}{l^2} x_{K1}(l - x_{K1}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot 4 \cdot (20 - 4) = 2,56 \text{ м};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{K1} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_{K1}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} (20 - 2 \cdot 4) = 0,48; \quad \sin \varphi_{K1} = 0,4327; \quad \cos \varphi_{K1} = 0,9015;$$

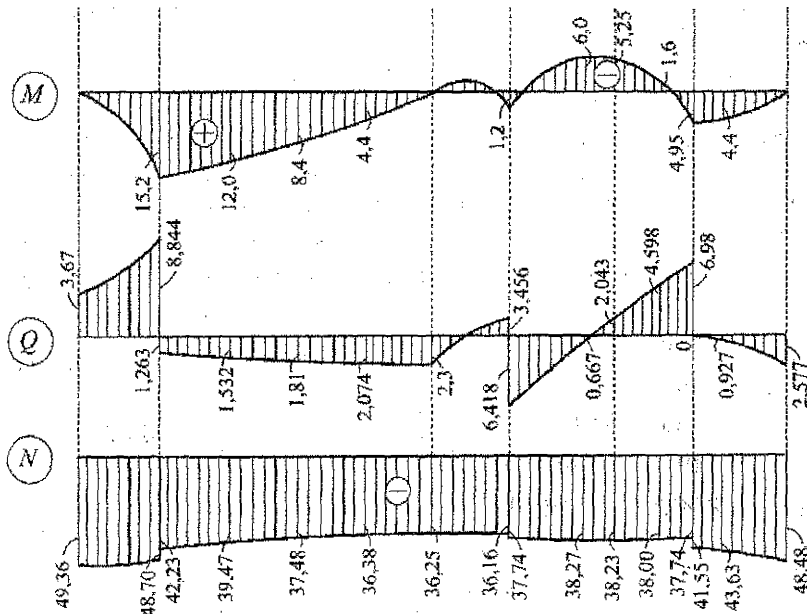
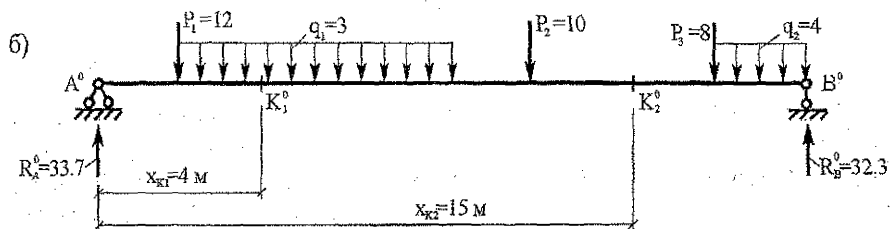
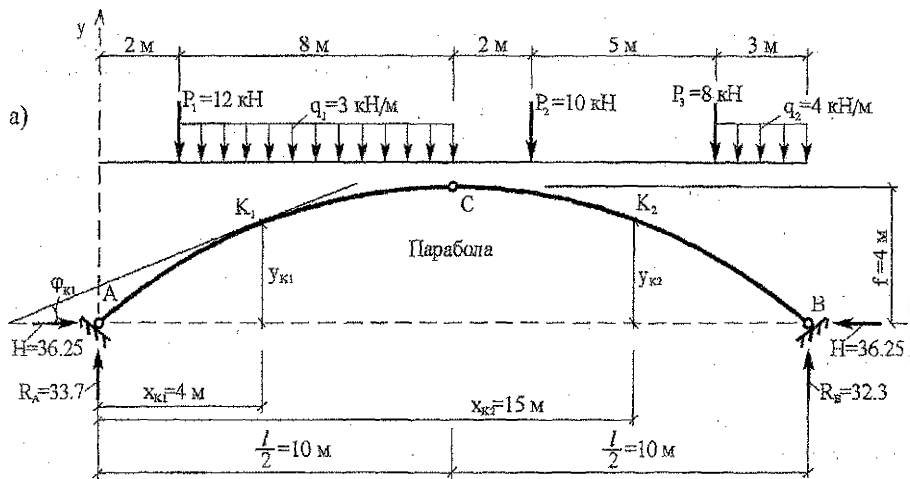


Рис. 8.1.

Сечение  $K_2$ :  $x_{K_2} = 15$  м;  $y_{K_2} = \frac{4f}{l^2} x_{K_2}(l - x_{K_2}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot 15 \cdot (20 - 15) = 3$  м;

$\operatorname{tg} \varphi_{K_2} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_{K_2}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} (20 - 2 \cdot 15) = -0,4$ ;  $\sin \varphi_{K_2} = -0,3714$ ;  $\cos \varphi_{K_2} = 0,9285$ .

3) Определяем усилия в сечениях по формулам (8.1):

Сеч.  $K_1$ :  $M_{K_1}^0 = 33,7 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 104,8$  кН·м;  $Q_{K_1}^0 = 33,7 - 12 - 3 \cdot 2 = 15,7$  кН;

$M_{K_1} = 104,8 - 36,25 \cdot 2,56 = 12$  кН·м; – растянутые волокна – снизу;

$Q_{K_1} = 15,7 \cdot 0,9015 - 36,25 \cdot 0,4327 = -1,532$  кН;

$N_{K_1} = -(15,7 \cdot 0,4327 + 36,25 \cdot 0,9015) = -39,473$  кН;

Сечение  $K_2$ :

$M_{K_2} = (32,3 \cdot 5 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 3,5) - 36,25 \cdot 3 = -5,25$  кН·м; – растяг. волокна – сверху;

$Q_{K_2} = (-32,3 + 8 + 4 \cdot 3) \cdot 0,9285 - 36,25 \cdot (-0,3714) = 2,043$  кН;

$N_{K_2} = -[(-32,3 + 8 + 4 \cdot 3) \cdot (-0,3714) + 36,25 \cdot 0,9285] = -38,226$  кН.

Учитывая, что оси арок криволинейны, эпюры усилий в арках также изменяются по криволинейным зависимостям, и точное представление их формы достаточно сложно. Эпюры усилий в арках обычно строят по некоторому числу ординат, разбивая пролет арки на определенное число (чаще всего равных) частей и вычисляя ординаты эпюр в граничных сечениях, соединяя их затем плавными кривыми. При этом обязательно нужно вычислять ординаты эпюр усилий и в характерных сечениях – под сосредоточенными силами и моментами. Чем больше будет расчетных ординат, тем точнее можно отобразить форму эпюры усилий. Для арки, изображенной на рис. 8.1, при разбивке ее пролета на десять равных частей эпюры усилий имеют вид, показанный на том же рисунке. Представленные значения усилий в расчетных и характерных сечениях можно использовать для самостоятельного их вычисления и изучения, таким образом, процедуры расчета арок, учитывая, что результаты расчета (ответы) известны.

## 9. Определение перемещений в статически определимых изгибаемых системах

Определение перемещений в стержневых системах от действия внешних нагрузок удобно выполнять по формуле Мора. Для изгибаемых систем (рам, балок) при этом обычно учитывают только изгибающие моменты (ввиду незначительности влияния на величины перемещений в таких системах поперечных и продольных сил). Формула Мора в этом случае принимает вид:

$$\Delta_{iF} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_p dx}{EJ}; \quad (9.1)$$

где  $\overline{M}_i$  – изгибающие моменты в системе от действия единичной «силы», приложенной в сечении (точке), для которого определяется перемещение, в направлении искомого ( $i$ -го) перемещения;  $M_p$  – изгибающие моменты в системе от действия внешних нагрузок;  $EJ$  – изгибная жесткость стержней (участков) системы;  $n$  – число участков, на которые разбивается система для вычисления интегралов Мора;  $l$  – длины этих участков.

Порядок определения перемещений по формуле Мора:

1. Определяются изгибающие моменты в системе от действия внешних нагрузок  $M_p$  (находятся зависимости их изменения или строится эпюра  $M_p$ ).

2. В сечении (точке), для которого определяется перемещение, в направлении искомого перемещения прикладывается единичная «сила»; при этом в зависимости от вида определяемого перемещения эта «сила» может быть разной:

а) если определяется линейное (горизонтальное, вертикальное, в произвольном направлении) перемещение, то прикладывается единичная сосредоточенная сила  $F = 1$  (рис. 9.1,а);

б) если определяется взаимное сближение (расхождение) двух точек, то к этим точкам прикладываются две единичные силы, направленные по прямой, соединяющей указанные точки, навстречу друг другу (друг от друга) (рис. 9.1,б);

в) если определяется угол поворота сечения, то прикладывается единичный сосредоточенный момент  $m = 1$  (рис. 9.1,в);

г) если определяется взаимный угол поворота двух сечений (изменение величины угла между сечениями), то к этим сечениям прикладываются два единичных момента, действующих навстречу друг другу (рис. 9.1,г).

3. Определяются изгибающие моменты в системе от действия единичной «силы», приложенной согласно пункту 2 (находятся зависимости их изменения или строится эпюра  $\bar{M}_1$ ).

4. Вычисляется искомое перемещение по формуле Мора (9.1). При этом вычисление интегралов Мора может производиться:

а) непосредственным интегрированием;

б) по правилу Верещагина;

в) по формулам трапеций, Симпсона;

д) численным способом, когда интегрирование заменяется суммированием по малым конечным участкам, и другими способами.

Заметим, что вычисление интегралов Мора по правилу Верещагина и по формулам трапеций и Симпсона часто условно называют «перемножением» эпюр, входящих в формулу Мора.

Способ непосредственного интегрирования достаточно трудоемок и сложен и в расчетах рамно-стержневых систем практически не применяется. Используется в случаях, когда нельзя применить правило Верещагина, формулы Симпсона и трапеций – например, в системах, состоящих из криволинейных стержней (в арках).

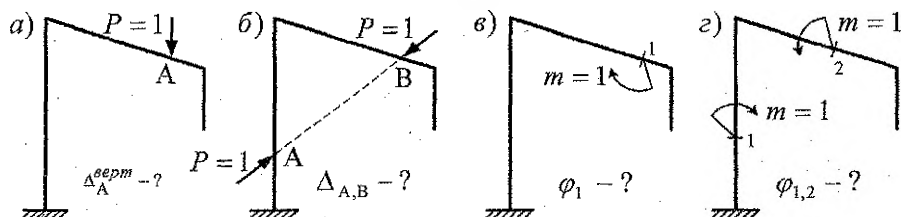


Рис. 9.1



**Правило Верещагина.** Для вычисления интеграла Мора вида  $\int_0^l \bar{M}_i M_p dx$

на участке постоянной жесткости, на котором эюры  $\bar{M}_i$  и  $M_p$  непрерывны, необходимо площадь  $\Omega$  одной из эюр умножить на ординату, взятую под центром тяжести этой площади из другой эюры (если одна из эюр криволинейна, то площадь берется обязательно криволинейной эюры)

$$\frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_p dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_1 M_2 dx = \frac{1}{EJ} \Omega \cdot y_c. \quad (9.2)$$

При использовании правила Верещагина, таким образом, для эюры, площадь которой берется, необходимо уметь вычислять эту площадь и уметь находить (знать) положение ее центра тяжести.

Знак результата «перемножения» по правилу Верещагина получается автоматически при учете знаков эюр, для которой вычисляется площадь  $\Omega$  и из которой берется ордината  $y_c$ . Для эюр изгибающих моментов результат «перемножения» принимается со знаком «плюс», если растянутые волокна для ординат обеих эюр совпадают, и со знаком «минус», если они противоположны.

Приведем несколько примеров применения правила Верещагина.

Для эюр, представленных на рис. 9.2, вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина может быть выполнено четырьмя разными способами, которые будут давать один и тот же результат:

а) при вычислении площади эюры  $M_1$  и разбивке ее (для быстрого и удобного определения положения центров тяжести) на прямоугольник  $a \times b$  и треугольник  $(b-a) \times l$  (рис. 9.2,а) будем иметь:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[ (a \cdot l) \cdot \frac{c}{2} + \frac{1}{2} (b-a) l \cdot \frac{1}{3} c \right];$$

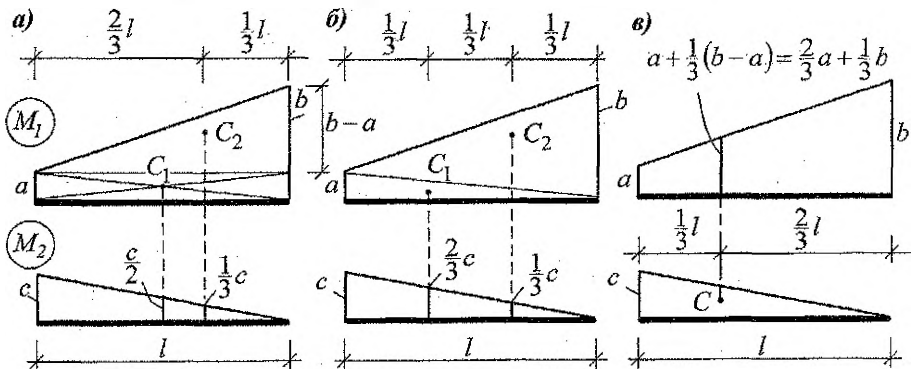


Рис. 9.2

б) при вычислении площади эпюры  $M_1$  и разбивке ее на два треугольника  $a \times l$  и  $b \times l$  (рис. 9.2,б) получим:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[ \left( \frac{a \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} c + \left( \frac{b \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} c \right];$$

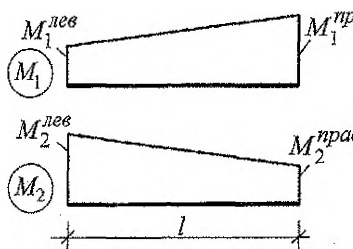
в) при вычислении площади эпюры  $M_2$  (так как обе эпюры  $M_1$  и  $M_2$  линейны, то не имеет значения площадь какой из них брать) (рис 9.2,в) можно записать:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{c \cdot l}{2} \right) \cdot \left[ a + \frac{1}{3}(b-a) \right], \quad \text{или} \quad \int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{c \cdot l}{2} \right) \cdot \left( \frac{2}{3} a + \frac{1}{3} b \right).$$

если эпюру  $M_1$  разобьем на  
прямоугольник и треугольник;

если эпюру  $M_1$  разобьем на  
два треугольника.

**Формула трапеций** — применяется для «перемножения» согласно интегралам Мора только линейных эпюр (рис. 9.3):



$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{l}{6EJ} \left( 2M_1^{лев} \cdot M_2^{лев} + M_1^{лев} \cdot M_2^{прав} + M_1^{прав} \cdot M_2^{лев} + 2M_1^{прав} \cdot M_2^{прав} \right). \quad (9.3)$$

Рис. 9.3

**Формула Симпсона** может применяться для вычисления интегралов Мора путем соответствующего «перемножения» как линейных эпюр, так и эпюр, одна из которых криволинейна (изменяется по параболическому закону) (рис. 9.4). Формула Симпсона имеет вид:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = - \frac{l}{6EJ} \left( M_1^{лев} \cdot M_2^{лев} + 4 M_1^{сп} \cdot M_2^{сп} + M_1^{прав} \cdot M_2^{прав} \right). \quad (9.4)$$

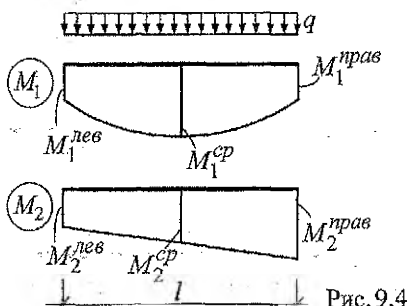


Рис. 9.4

**Правило знаков.** В формулах Симпсона и трапеций знаки результатов перемножения ординат получаются автоматически при учете знаков ординат эпюр. Для эпюр изгибающих моментов результат «перемножения» принимается со знаком «плюс», если растянутые волокна для ординат обеих эпюр совпадают, и со знаком «минус», если они противоположны.

Рекомендации к вычислению интегралов Мора в рамно-балочных системах:

– для эпюр усилий (изгибающих моментов), имеющих линейный характер изменения и простую форму (прямоугольную, треугольную), предлагается использовать правило Верещагина;

– для эпюр усилий, имеющих линейный характер изменения, но более сложную форму (трапециевидную), рекомендуется использовать формулу трапеций;

– для эпюр усилий (изгибающих моментов), одна из которых криволинейна, необходимо использовать формулу Симпсона.

При этом отметим, что формула Симпсона универсальна и ее можно применять и для всех случаев обоих линейных эпюр усилий.

Вычисление перемещений от действия внешних нагрузок по формуле Мора (9.1) производится путем суммирования результатов вычисления интегралов Мора рассмотренными способами по всем участкам одновременной непрерывности эпюр системы, которые должны удовлетворять следующим требованиям:

– жесткость стержня на участке должна быть постоянной;

– обе эпюры на участке должны быть непрерывными, то есть зависимости их изменения в пределах участка не должны меняться, или, по-другому, – в пределах участка «перемножения» эпюры не должны иметь изломов, разрывов (скачков) и переходов к другим зависимостям изменения усилий.

Если одно из этих требований на участке не соблюдается, то его следует разбить на более мелкие участки, и сделать это надо таким образом, чтобы указанные требования выполнялись. Границами рассматриваемых участков интегрирования в рамно-стержневых системах будут точки (сечения) излома и разветвления стержней, приложения сосредоточенных внешних нагрузок (сил, моментов), действия опорных реакций, начала и конца распределенных нагрузок.

Рассмотрим определение вертикального перемещения точки С от действия внешней нагрузки в трехшарнирной раме, представленной на рис. 9.5,а.

Вычисление опорных реакций и построение эпюры изгибающих моментов в раме выполняем на основе подходов, изложенных в разделах 1–4. Рама является трехшарнирной с опорами в одном уровне. Эпюру изгибающих моментов от действия внешней нагрузки получим в виде, представленном на рис. 9.5,б.

Так как определяется вертикальное перемещение точки С, то в этой точке в вертикальном направлении прикладываем единичную сосредоточенную силу и направляем ее вниз, предполагая, что точка С будет смещаться вниз.

От действия этой силы строим единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  (рис. 9.5,в). После этого выделяем в раме участки одновременной непрерывности эпюр, в пределах которых жесткость стержней постоянна и обе эпюры изменяются непрерывно (рис. 9.5,г), и вычисляем искомое перемещение по формуле Мора (9.1)

$$\Delta_C^{верт} = \Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \left( \frac{2,5 \cdot 2,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} + 0 +$$

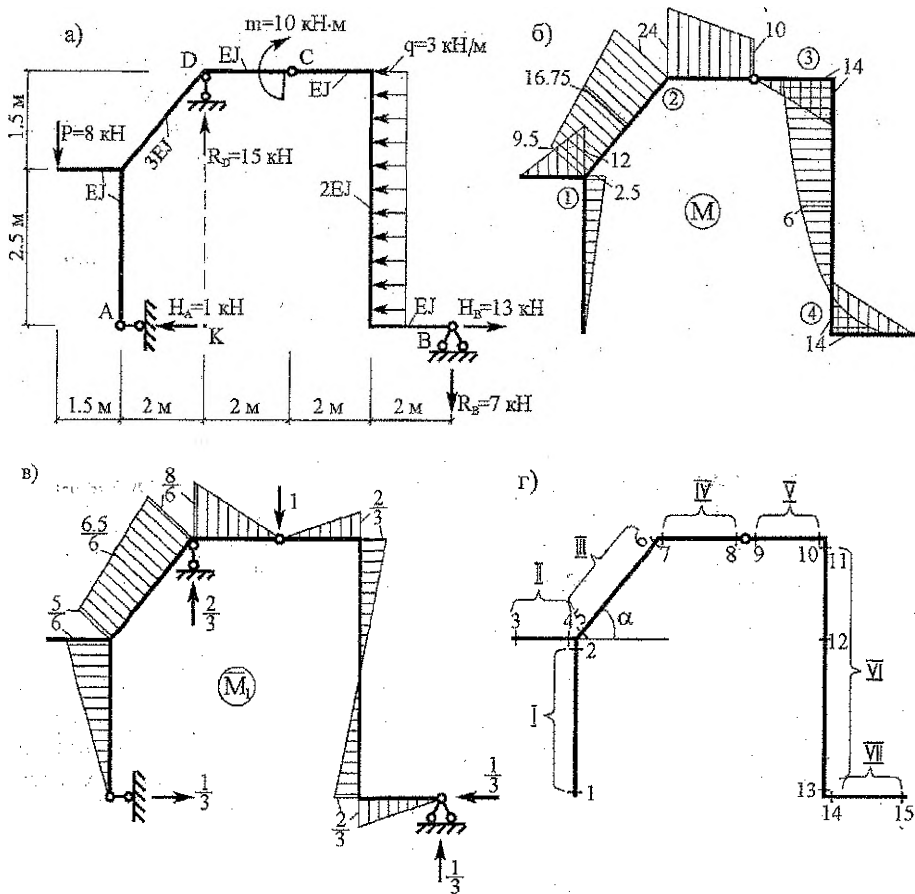


Рис. 9.5

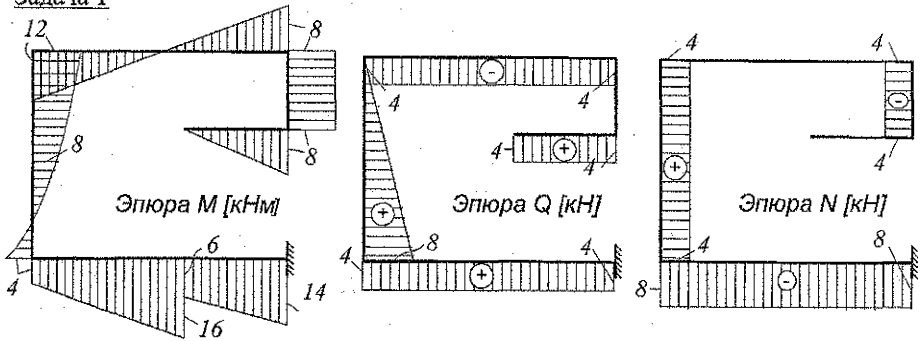
$$\begin{aligned}
 & + \frac{2,5}{6 \cdot 3EJ} \left( 9,5 \cdot \frac{5}{6} + 4 \cdot \frac{6,5}{6} \cdot 16,75 + 24 \cdot \frac{8}{6} \right) + \frac{2}{6EJ} \left( 2 \cdot 24 \cdot \frac{8}{6} + \frac{8}{6} \cdot 10 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 10 \cdot 0 \right) - \\
 & - \frac{1}{EJ} \left( \frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6 \cdot 2EJ} \left( -14 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 0 \cdot 6 - 14 \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{EJ} \left( \frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10,333}{EJ}
 \end{aligned}$$

Отметим, что на участках I, V и VII вычисление производилось по правилу Верещагина (9.2), на участке IV – по формуле трапеций (9.3), а на участках III и VI – по формуле Симпсона (9.4). На участке II единичная эпюра изгибающих моментов (рис. 9.5,в) нулевая, поэтому и результат вычисления интеграла Мора – ноль.

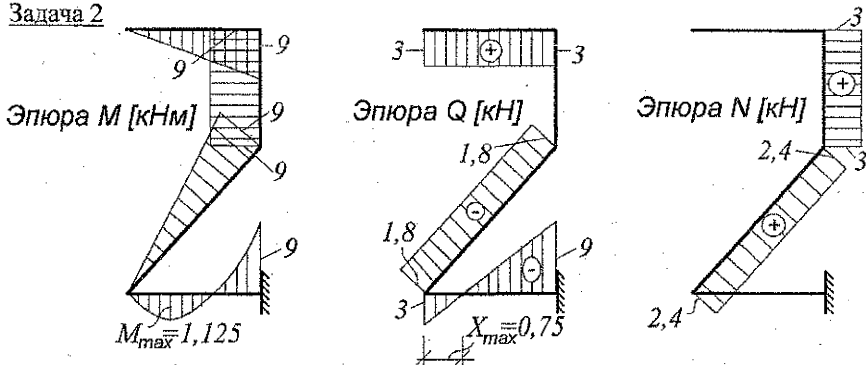
Значение перемещения положительно, и значит точка C действительно перемещается вниз.

# Ответы на задачи для самостоятельной работы

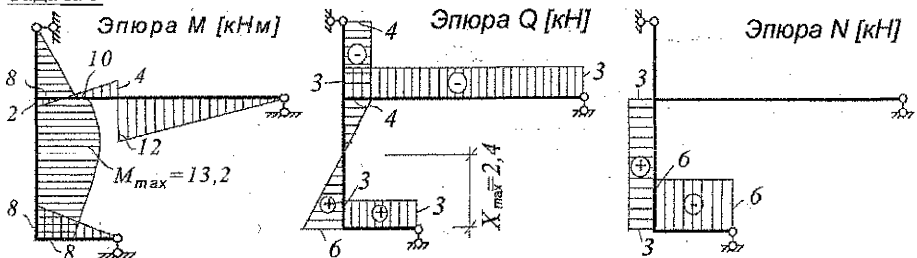
## Задача 1



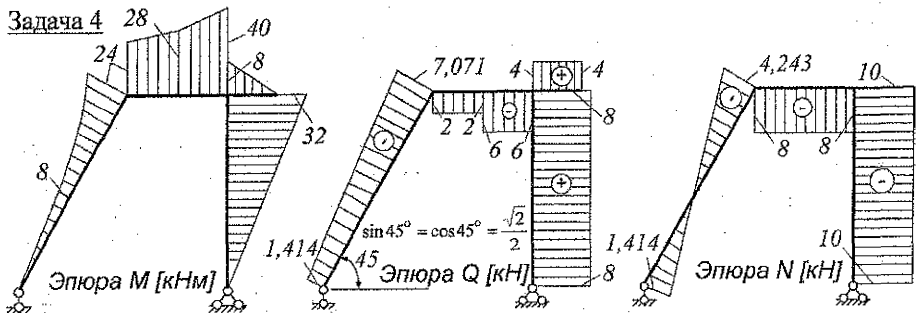
## Задача 2



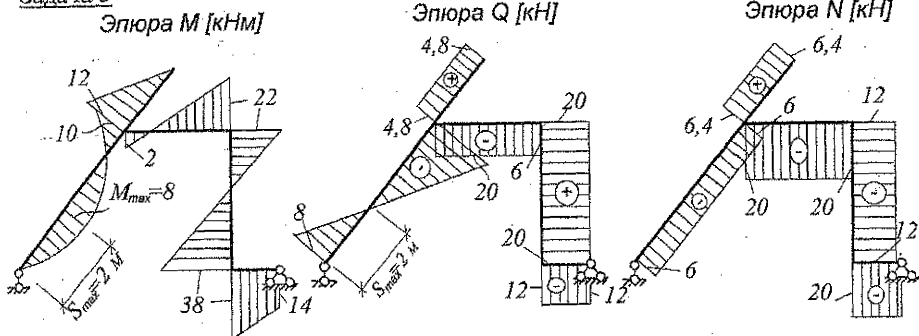
## Задача 3



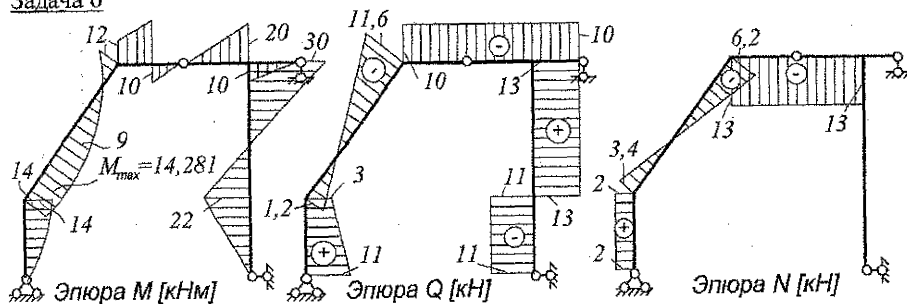
## Задача 4



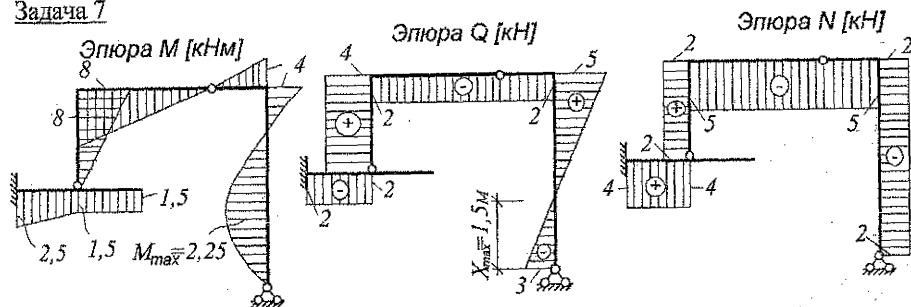
**Задача 5**



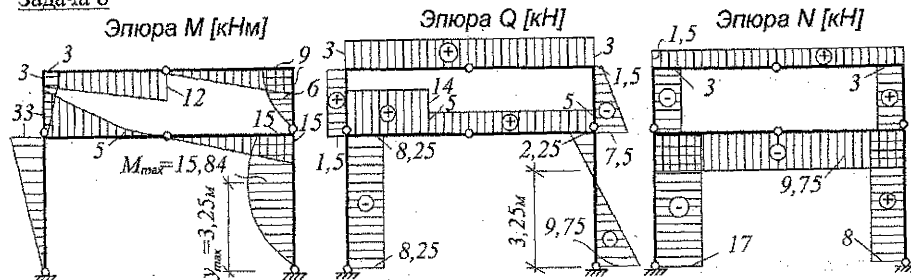
**Задача 6**



**Задача 7**



**Задача 8**



**Список литературы,  
рекомендуемой для изучения дисциплины «Строительная механика»**

1. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Мн.: БНТУ, 2007. – 821 с.
2. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 8-е изд. – М.: Высш. школа, 1986. – 607 с.
3. Строительная механика: учебник для вузов / А.В. Дарков [и др.]; под ред А.В. Даркова. – 7-е изд. – М.: Высш. школа, 1976. – 600 с.
4. Киселев, В.А. Строительная механика. Общий курс: учебник для вузов / В. А. Киселев. – 4-е изд. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
5. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем: учебник / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.

**Содержание**

Введение .....	3
1. Усилия в плоских стержневых статически определимых системах .....	3
2. Виды рам. Расчет простых рам .....	7
3. Особенности расчета трехшарнирных рам .....	18
4. Расчет составных рам .....	23
5. Примеры рам для самостоятельного расчета (построения эпюр $M$ , $Q$ , $N$ ) ..	30
6. Особенности расчета многопролетных статически определимых балок ...	31
7. Линии влияния усилий в балочных системах .....	35
7.1. Понятие о линиях влияния усилий .....	35
7.2. Построение линий влияния усилий в простых балках .....	36
7.3. Построение линий влияния усилий в многопролетных балках .....	39
7.4. Определение усилий по линиям влияния от внешних нагрузок .....	43
8. Особенности расчета трехшарнирных арок на вертикальные нагрузки .....	45
9. Определение перемещений в статически определимых изгибаемых системах ..	47
Ответы на задачи для самостоятельной работы .....	53
Список литературы, рекомендуемой для изучения дисциплины .....	55

Учебное издание

Составители: Игнатюк Валерий Иванович  
Загуляев Станислав Валерьевич  
Молош Виктор Викторович

Методические указания  
по дисциплине «Строительная механика»  
для студентов строительных специальностей  
заочной формы обучения

Часть 1: Статически определимые системы

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.  
Редактор Стрекач Т.В.  
Компьютерный набор и верстка Девентейчик А.А.  
Корректор Никитчак Е.В.

---

Подписано к печати 28.02.2008 г. Формат 60×84/16. Бумага Снегурочка.  
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 3,27. Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 300 экз. Заказ № 295.  
Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный  
технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.