

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

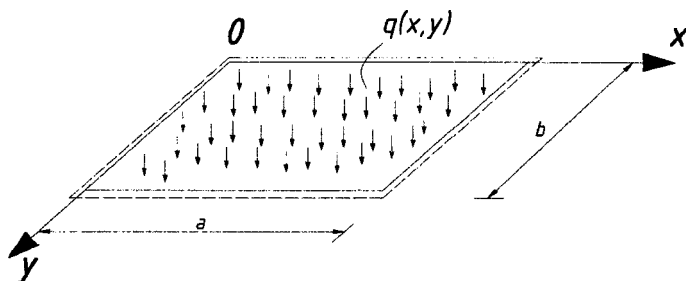
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Методические указания и задания
к выполнению контрольной работы
для студентов специальности

1-70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство”
факультета инновационной деятельности и финансов
заочной формы обучения



Брест 2014

Настоящие методические указания направлены на приобретение студентами навыков самостоятельной работы при изучении курса «Теория упругости и пластичности». В них приведены краткие теоретические сведения, примеры расчета и индивидуальные задания для трех типов задач теории упругости: исследование напряженно-деформированного состояния в точке тела, плоская задача теории упругости, расчет тонких пластин.

Составители: Веремейчик А.И., доцент
Хвисевич В.М., доцент

Рецензент: директор филиала РУП «Институт БелНИИС» – «Научно-технический центр», д-р техн. наук А.Я. Найчук.

СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения.....	3
Требования к оформлению контрольной работы	3
Краткие теоретические сведения	4
Примеры решения задач	22
Задания для выполнения контрольной работы	57
Литература.....	67

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Методические указания соответствуют базовым учебным планам специальности 1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство” и включают в себя краткие теоретические сведения, условия задания и примеры расчетов по исследованию напряженно-деформированного состояния в точке тела, решению плоской задачи теории упругости, расчету тонких пластин.

Каждый студент-заочник по теории упругости и пластичности должен выполнить одну контрольную работу. При защите контрольной работы необходимо ответить на вопросы по теме работы и уметь решать тестовые задачи по ее тематике. Зачет по курсу принимается после того, как зачтена контрольная работа.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа выполняется на отдельных листах формата А4 с рамкой для текстовых документов.

2. Порядок оформления: титульный лист; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; перечень литературы.

3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов согласно стандарту УО «БрГТУ».

4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Страницы нумеруются. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до сотых долей.

5. Эпюры необходимо строить на одном листе с расчетной схемой, на эпюрах указывать числовые значения характерных ординат и единицы расчетных величин.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Исследование напряженно-деформированного состояния в точке тела

В твердом теле, нагруженном системой уравновешенных сил, происходит взаимное перемещение точек, возникают линейные и угловые упругие деформации, что вызывает изменение сил взаимодействия между частицами тела. Эти изменения в силах взаимодействия называют внутренними силами, а их интенсивность на бесконечно малых площадках, проведенных внутри тела в той или иной точке, — напряжениями.

Если внутри нагруженного тела вблизи некоторой точки вырезать бесконечно малых размеров параллелепипед (рисунок 1, а), то на его гранях можно показать 9 компонент напряжений (рисунок 1 б, в). Совокупность этих 9 компонент полностью характеризует напряженное состояние в данной точке тела и образует тензор T_σ , который записывается в виде такой матрицы :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Нормальные напряжения σ считаются положительными, если они вызывают растяжение. Касательное напряжение τ считается положительным, если на площадке, внешняя нормаль к которой совпадает с направлением параллельной ей координатной оси, оно направлено в сторону соответствующей этому направлению положительной координатной оси. Если внешняя нормаль противоположна направлению параллельной ей координатной оси, то положительное касательное напряжение направлено противоположно координатной оси.

Зная компоненты напряжений на трех взаимно ортогональных площадках в некоторой точке тела, можно найти нормальную и касательную составляющие на любой другой площадке, проведенной через данную точку тела (σ_ν , τ_ν) (рисунок 1, в).

Известно, что в любой точке тела всегда существуют по крайней мере три такие взаимно ортогональные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения достигают экстремума. Эти площадки и напряжения называют главными (рисунок 1, г). Главные напряжения обозначают индексами 1, 2, 3, которые ставят в соответствии с неравенством $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Площадки, равнонаклоненные к главным, и напряжения, действующие на них, называются октаэдрическими $\sigma_{окт}$, $\tau_{окт}$ (рисунок 2).

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклонных под углом 45° к каждой паре главных площадок и равных полуразности соответствующих главных напряжений. Их обозначают τ_{12} , τ_{23} , τ_{31} (рисунок 2).

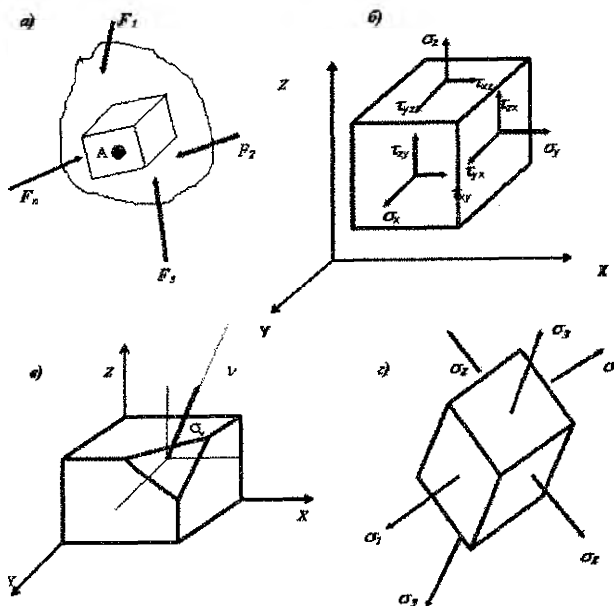


Рисунок 1

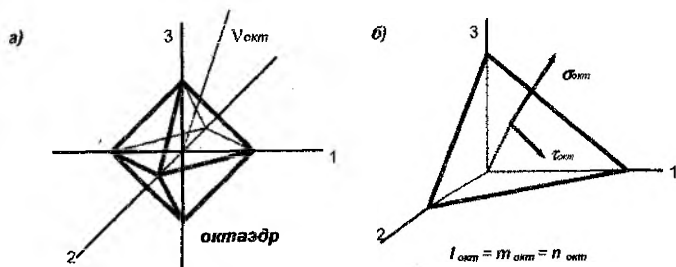


Рисунок 2

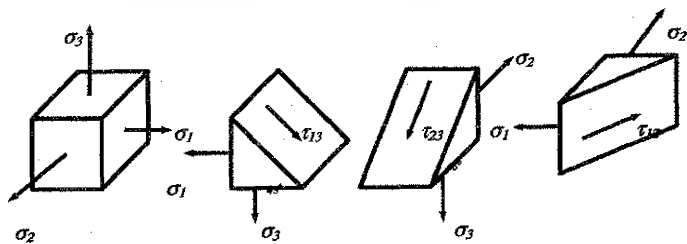


Рисунок 3

Основные уравнения теории упругости:

I. Группа статических уравнений:

Дифференциальные уравнения равновесия (Навье-Коши):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ – объемные силы.

II. Группа геометрических уравнений:

Формулы Коши:

– линейные деформации: $\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$ (2)

– угловые деформации: $\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}; \gamma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z};$

где U, V, W – перемещения вдоль осей x, y, z соответственно.

Уравнения неразрывности (Сен-Венана):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

III. Группа физических уравнений:

Обобщённый закон Гука:

– прямая форма:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (4)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$,

– обратная форма:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx};\end{aligned}\quad (5)$$

где $\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$; $\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ – коэффициенты Ляме.

Решение уравнений групп I, II, III должно быть при выполнении условий на поверхности (3).

Система 15 уравнений (1), (2), (4) или (5) используется для определения 15 неизвестных ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, U, V, W$).

Способы решения:

- 1) решение в перемещениях;
- 2) решение в напряжениях;
- 3) решение в системной форме.

Методы решения:

1. Прямой метод. Интегрируется система 15-ти уравнений при выполнении условий на поверхности.

2. Обратный метод. Задаются функции напряжений или перемещений, удовлетворяющих системе уравнений. А затем из граничных условий определяются нагрузки, соответствующие такому решению.

3. Полуобратный метод Сен-Венана. Часть неизвестных задаётся и представляется в систему уравнений, из которых определяются остальные неизвестные.

Формулы и уравнения, по которым можно вычислить σ_x, τ_{xy} , главные напряжения и их направление, $\tau_{окт}, \sigma_{окт}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$, а также другие необходимые зависимости, будут приведены ниже в примерах решения задач.

Плоская задача теории упругости

В теории упругости различают две плоские задачи (рассматривается плоскость xOy):

1. Плоское деформированное состояние, при котором деформации из плоскости, т.е. в направлении оси z , равны нулю: $\varepsilon_z = 0, \gamma_{zx} = 0, \gamma_{zy} = 0$. К этой задаче относится расчет тел, вытянутых вдоль оси z , под действием нагрузки, перпендикулярной оси z и постоянной вдоль нее (длинные пластины, подпорные стенки, плотины).

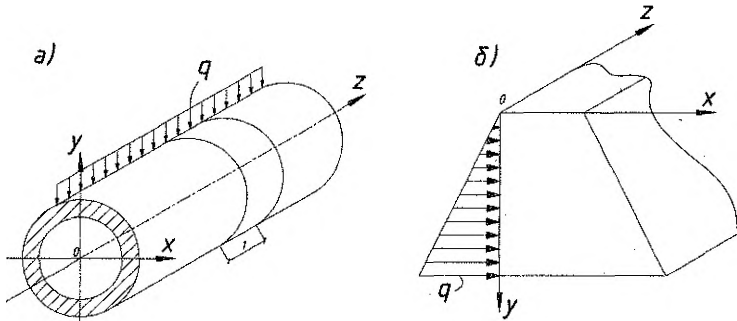


Рисунок 4 – Примеры плоского деформированного состояния

2. Обобщенное плоское напряженное состояние, при котором напряжения из плоскости $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zy}$ равны нулю. К этой задаче относится расчет тонких пластин, нагруженных по боковым граням силами, параллельными плоскости пластин (рисунок 5).

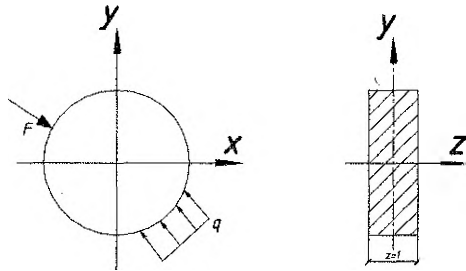


Рисунок 5 – Пример плоского напряженного состояния

Суть обобщения: для пластин конечной толщины δ принимается то, что выполняется в бесконечно тонкой пластине:

- а) равенство нулю напряжений из плоскости;
- б) равномерное распределение неизвестных напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ по толщине пластин.

Основные уравнения для плоской деформации.

1. Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Условия на поверхности:

$$\begin{aligned} P_{xv} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m, \\ P_{yv} &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Формулы Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (9)$$

3. Закон Гука:

а) в прямой форме

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \quad (10)$$

б) в обратной форме

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu_1 \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}; \quad (11)$$

$$\text{где } E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (12)$$

При плоском напряженном состоянии плоскости свободны от нагрузки:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0; \quad (13)$$

а другие напряжения не зависят от координаты Z:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

Из закона Гука:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y), \quad (14)$$

$$\text{а } \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy};$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}.$$

Таким образом, плоское напряженное состояние и плоская деформация отличаются лишь постоянными E , E_1 и ν , ν_1 при использовании закона Гука, и обе задачи можно объединить в одну: плоскую задачу теории упругости.

В итоге, для решения плоских задач имеем восемь уравнений: два уравнения Навье-Коши, три уравнения Коши и три уравнения обобщенного закона Гука, с восьмью неизвестными: σ_x , σ_y , τ_{xy} , U , V , ε_x , ε_y , γ_{xy} .

При решении задачи в напряжениях основными неизвестными будут σ_x , σ_y , τ_{xy} . Если объемные силы постоянны (например, собственный вес), то уравнения для обеих плоских задач совпадают. Решение упрощается, если все неизвестные напряжения выразить через одну функцию $\varphi(x, y)$ - функцию напряжений - следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right), \quad (15)$$

где X , Y - объемные силы, параллельные осям x и y соответственно.

Функцию $\varphi(x, y)$ можно определить из решения бигармонического уравнения:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (16)$$

при граничных условиях:

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_x \ell + \tau_{xy} m; \\ Y_v &= \tau_{yx} \ell + \sigma_y m. \end{aligned}$$

При определении значения угла между нормалью и осью, поворачиваем нормаль против хода часовой стрелки до совмещения с положительным направлением взятой оси.

Во многих случаях получить точное решение бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости (16) оказывается сложным. Для приближенного решения этого уравнения применяют численные методы, и в частности метод конечных разностей (МКР).

Суть МКР состоит в том, чтобы решение плоской задачи с помощью функции напряжений φ свести к алгебраическим уравнениям. В этом методе частные производные бигармонического уравнения (16) приближенно заменяются конечными разностями, в результате чего оно превращается в алгебраическое. Это уравнение, как увидим далее, содержит значение функции напряжений в тринадцати точках, расположенных в определенном порядке на сетке вокруг центральной точки. Поэтому вместо одного бигармонического уравнения в частных производных приходится составлять и решать систему линейных алгебраических уравнений. Точность МКР прямо зависит от густоты сетки: чем гуще сетка, тем точнее будет решение задачи.

Рассмотрим некоторую функцию $\varphi(x)$, проходящую через точки 1, 2, 3 (рисунок 6). Представим приближенно эту функцию параболой $\varphi = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, тогда

$$\varphi_{лев} = a \cdot \Delta^2 x - b \cdot \Delta x + c; \quad \varphi_0 = c; \quad \varphi_{пр} = a \cdot \Delta^2 x + b \cdot \Delta x + c.$$

Находим коэффициенты a, b :

$$a = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{2\Delta^2 x}, \quad a = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x}, \quad c = \varphi_0.$$

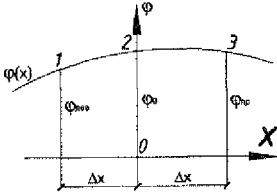


Рисунок 6

Уравнение параболы примет вид:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{2\Delta^2 x} \cdot x^2 + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x} \cdot x + c.$$

Находим производные

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{\Delta^2 x} \cdot x + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{\Delta^2 x}.$$

При $x=0$:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x}; \quad (a) \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{\Delta^2 x}. \quad (б)$$

Воспользуемся этими формулами для решения плоской задачи. Нанесём на пластину с шагом Δx и Δy (рисунок 7).

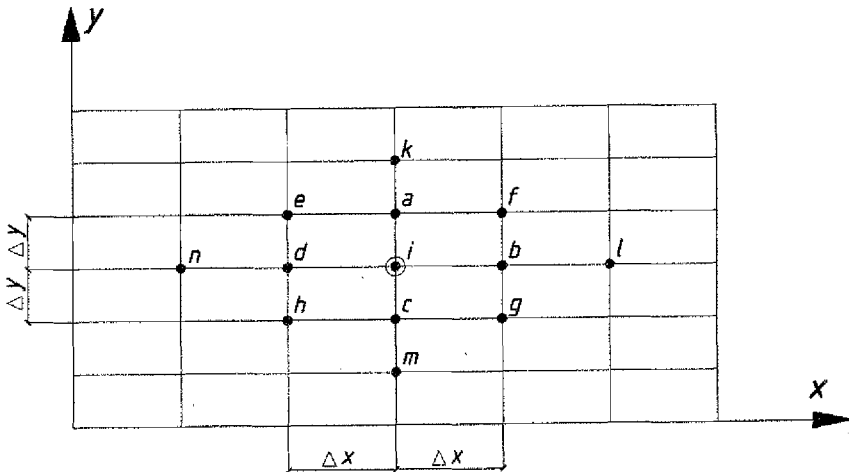


Рисунок 7

Наметим некоторую центральную точку "i". На основании формул (а) и (б) для неё:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i &= \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2 \Delta x}; & \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_i &= \frac{\varphi_b - 2\varphi_i + \varphi_d}{\Delta^2 x}; \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_i &= \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2 \Delta y}; & \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_i &= \frac{\varphi_a - 2\varphi_i + \varphi_c}{\Delta^2 y}; \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_i &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_c}{2 \Delta y} = \\ &= \frac{1}{2 \Delta y} \left(\frac{\varphi_f - \varphi_e}{2 \Delta x} - \frac{\varphi_g - \varphi_h}{2 \Delta x} \right) = \frac{\varphi_f - \varphi_e - \varphi_g + \varphi_h}{4 \Delta x \Delta y}. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (17), находим 4-ю производную:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_i &= \frac{6\varphi_i - 4(\varphi_b + \varphi_d) + (\varphi_e + \varphi_n)}{\Delta^4 x}; \\ \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_i &= \frac{6\varphi_i - 4(\varphi_a + \varphi_c) + (\varphi_k + \varphi_m)}{\Delta^4 y}; \\ \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_i &= \frac{4\varphi_i - 2(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + (\varphi_f + \varphi_e + \varphi_g + \varphi_h)}{\Delta x^2 \Delta y^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим (в) в (16) и после преобразования получим уравнение, заменяющее бигармоническое:

$$\begin{aligned} (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_i - 4(\alpha + 1)(\varphi_a + \alpha\varphi_b + \varphi_c + \alpha\varphi_d) + 2\alpha(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) + \\ + (\varphi_k + \alpha^2\varphi_l + \varphi_m + \alpha^2\varphi_n) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$.

Напряжения в точке "i" получим по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_i = \frac{\varphi_a - 2\varphi_i + \varphi_c}{\Delta^2 y}; \\ \sigma_y &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\varphi_b - 2\varphi_i + \varphi_d}{\Delta^2 x}; \\ \tau_{xy} &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_i = \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{4\Delta x \Delta y}.\end{aligned}\tag{19}$$

Уравнения (19) должны составляться для каждой внутриконтурной точки. Когда уравнения составляются для внутриконтурных точек, лежащих на ближайшей линии, параллельной контуру, то в них вынужденно входят и значения функции φ контурных и законтурных точек. Значения функции φ на контуре и вне контура находят из граничных условий (рисунок 8). Таким образом, неизвестных значений φ столько, сколько узлов внутри контура.

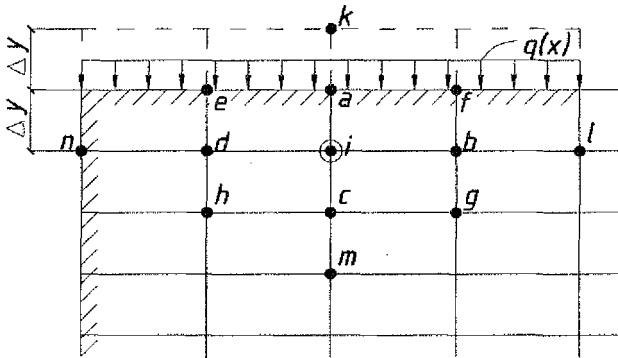


Рисунок 8

Для определения значений функции φ на контуре и вне его удобно воспользоваться так называемой рамной аналогией (идея профессоров П.Л. Пастернака, П.М. Варвака, А.П. Синицина). Если, например, на верхней грани прямоугольной области приложена нагрузка $q(x)$, направленная вниз, то для этой грани можно записать

$$\sigma_y = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -q.$$

Сравнивая это выражение с известной зависимостью

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q,$$

заключаем, что функцию напряжений φ на контуре пластинки можно принять за значение изгибающего момента в данной точке балки (рамы) с такой же нагрузкой, т.е.

$$\varphi_a = M_a,$$

или в общем виде:

$$\varphi_{кон} = M. \quad (20)$$

Для отыскания φ в законтурной точке k используется формула:

$$\varphi_{зак} = 2 \cdot \Delta \cdot N + \varphi_{он}, \quad (21)$$

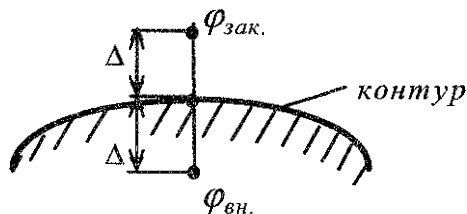


Рисунок 9

Из формул (20) и (21) следует, что для записи $\varphi_{кон}$ и $\varphi_{зак}$ нужно построить эпюры изгибающих моментов (M) и продольных сил (N) в соответствующей раме. Под соответствующей рамой будем понимать такую раму, которая повторяет контур пластинки, которая геометрически неизменяемая и, желательно, статически определимая.

На основании вышесказанного следует придерживаться следующего порядка расчета балки-стенки (пластинки) методом конечных разностей:

1. На заданную балку-стенку наносится сетка с определенным шагом и нумеруются внутренние узлы сетки (с учетом симметрии).

2. В соответствии с методом рамных аналогий выбирается соответствующая рама, и для нее строятся эпюры изгибающих моментов (M) и продольных сил (N). Эпюра (M) строится на растянутых волокнах, изгибающие моменты, отложенные внутри контура рамы считать положительными. Знак продольной силы: растяжение – плюс, сжатие – минус.

3. Выражаются значения функции φ в законтурных точках через внутриконтурные по формуле (21).

4. Записываются алгебраические уравнения по формулам (18) для каждой внутриконтурной точки.

5. Решается система уравнений и находятся значения функции φ в внутриконтурных точках.

6. Определяются напряжения в узлах сетки по формулам (19) и строятся их эпюры.

Расчет тонких пластин

Пластинкой называется тело призматической или цилиндрической формы, у которого толщина мала по сравнению с другими размерами, т.е. $h \ll a, b$ (рисунок 10).

Пластинки, которые будем рассматривать в данной работе, являются тонкими, жесткими, упругими и прямоугольными. Это значит, что толщина их h не превышает $1/5$ наименьшего размера в плане, а наибольший прогиб w не превышает $1/4$ толщины.

Задача о расчете пластинок является трехмерной, однако вследствие некоторых гипотез она сводится к двумерной. Широкое практическое применение получила техническая теория изгиба на основе гипотез, предложенных немецким физиком Г. Кирхгофом. Согласно этим допущениям, все напряжения и деформации можно выразить через функцию прогибов срединной поверхности пластинки $w(x, y)$.

Считаем, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки, т.е. нормальной к срединной плоскости, а срединная плоскость совпадает с плоскостью xOy прямоугольной системы координат. Ось z направлена по вертикали вниз (рисунок 10). Начало координат (точка O) выбирается в зависимости от конкретной задачи.

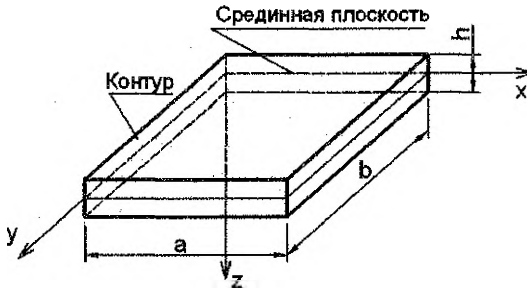


Рисунок 10 — Схема пластинки

Усилия в сечениях пластинки, нормальных к ее срединной плоскости, выраженные через функцию прогибов $w(x, y)$ (погонные, т.е. приходящиеся на единицу ширины сечения), определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
 M_{xy} = M_{yx} &= -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\
 Q_x &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); & Q_y &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

где M_x, M_y – погонные изгибающие моменты в сечениях с нормалью x и y соответственно; $M_{xy} = M_{yx}$ – погонные крутящие моменты в тех же сечениях; Q_x, Q_y – погонные перерезывающие (поперечные) силы; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость при изгибе.

Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ связаны с $M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}, Q_x, Q_y$ следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{J} z; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{J} z; \quad \tau_{zx} = \frac{Q_x \cdot S_x}{J}; \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_y}{J}; \quad (23)$$

где $J = \frac{h^3}{12}$ – погонный момент инерции сечения пластинки, $S_x = S_y = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$ –

статический момент отсеченной части площади сечения.

Эти формулы аналогичны формулам, полученным в сопротивлении материалов при изгибе балки прямоугольного сечения шириной, равной единице.

Действие силовых факторов и распределение напряжений в сечениях пластинки показаны на рисунках 11, 12, 13.

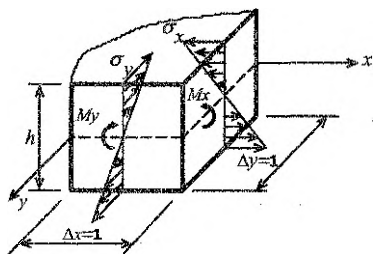


Рисунок 11 – Эпюры нормальных напряжений σ_x, σ_y

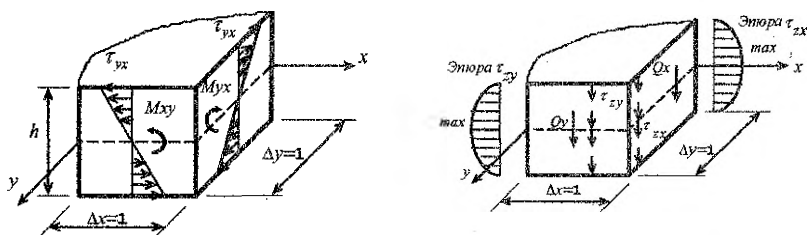


Рисунок 12 – Эпюры касательных напряжений $\tau_{yx}, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$

Примечание. На рисунках 11, 12 показаны положительные направления указанных усилий.

Из формул (22) и (23) следует, что для определения усилий и напряжений необходимо знать функцию прогибов $w(x, y)$, которая должна в каждой точке пластинки удовлетворять следующим требованиям:

а) основному дифференциальному уравнению ее изогнутой поверхности (уравнению Софи Жермен);

б) условиям на опорном контуре (граничным условиям).

Уравнение Софи Жермен имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad \text{или} \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad (24)$$

где ∇ – оператор Лапласа, $q(x, y)$ – распределенная нормально к поверхности пластинки нагрузка.

Укажем, каковы должны быть граничные условия для функции $w(x, y)$ в различных случаях закрепления пластинки (рисунок 13).

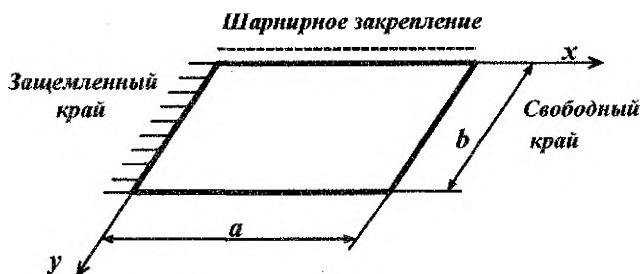


Рисунок 13 – Варианты закрепления граней пластинки

Для каждого края пластинки должно быть два граничных условия.

1. Зашемленный край:

при $x=0$: прогиб $w=0$, угол поворота $\frac{\partial w}{\partial x}=0$.

2. Шарнирно опертый край:

при $y=0$: прогиб $w=0$, изгибающий момент $M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$.

3. Свободный край:

при $x=a$: изгибающий момент $M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$, приведенная

поперечная сила $Q_x^{\text{прив}} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$.

Здесь рассмотрены три основных способа закрепления краев пластинки (зашемленный, опертый и свободный край) и показаны соответствующие граничные условия для функции w . На практике приходится встречаться и с дру-

гими способами закрепления. Например, встречается такое закрепление края пластинки, когда прогиб по краю невозможен, поворот же края возможен, но сопровождается появлением изгибающих моментов пропорциональных повороту — упруго заделанный край ($w=0, \varphi \neq 0, M \neq 0$). Иногда край пластинки опирается не на жесткий контур, а на какую-либо балку — упруго опертый край ($w \neq 0, Q \neq 0$). Возможны и другие способы закрепления. Составление граничных условий для различных случаев, на основании того, что было сделано для трех основных способов закрепления, не представит никаких трудностей.

Задача об изгибе пластинки будет решена, если будет найдена функция $w(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (24) и граничным условиям. Эта задача в некоторых случаях решается обратным методом, т. е. задается вид функции прогибов $w(x, y)$, а затем определяются нагрузки и условия закрепления, которым соответствует эта функция.

Очень часто, когда не удовлетворяется уравнение (24), расчет производится приближенным методом Бубнова-Галеркина. Он состоит в том, что для заданной нагрузки $q(x, y)$ задается вид функции $w(x, y)$, удовлетворяющей только граничным условиям. При подстановке $w(x, y)$ и $q(x, y)$ в уравнение Софи Жермен последнее может тождественно (для всех точек пластинки) не удовлетворяться. Поэтому уравнение удовлетворяют в среднем для всей площади пластинки, т. е. в интегральном смысле. Исходя из этого, получают следующее уравнение Бубнова-Галеркина:

$$\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_{SD} \frac{q}{D} w dS,$$

где S — плоская область, ограниченная контуром пластинки.

Задача об изгибе круглой пластины будет осесимметричной, если нагрузка и условия закрепления её краев не зависят от полярного угла θ . В этом случае прогибы также не зависят от угла θ , а являются функцией координаты r , т.е. $W = f(r)$. Тогда имеем:

а) дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D}; \quad (25)$$

б) внутренние силы:
изгибающие моменты

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{dw}{r dr} \right), \quad M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right),$$

поперечная сила

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right);$$

в) граничные условия:

жесткое защемление – $w = 0$; $\varphi = \frac{dw}{dr} = 0$,

шарнирное закрепление – $w = 0$; $\varphi = \frac{dw}{dr} \neq 0$; $M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr}\right) = 0$,

свободный край (в зависимости от действующих нагрузок) – $M_r = 0$ или $M_r = m$, $Q_r = 0$ или $Q_r = F$.

Уравнение (25) можно решить в общем виде $w = w_1 + w_2$, где w_1 - общее решение однородного уравнения, w_2 - частное решение неоднородного уравнения:

$$w_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 \cdot r^2 + C_4 \cdot r^2 \ln r.$$

Например, для равномерно распределённой нагрузки $q(r) = q = const$:

$$w_2 = \frac{qr^4}{64D}. \text{ Тогда } w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln r + C_3 \cdot r^2 + C_4 \cdot r^2 \ln r.$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий.

Рассмотрим сплошную пластинку, шарнирно опёртую по контуру и нагруженную равномерно распределённой нагрузкой интенсивности q .

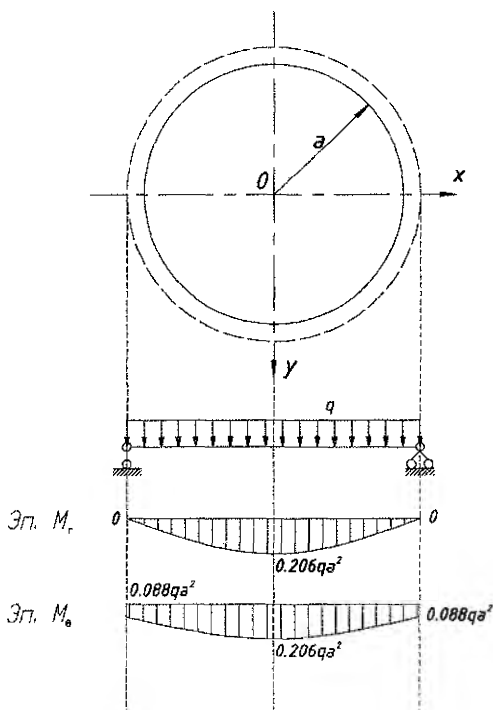


Рисунок 14

Для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 имеем следующие условия: в центре пластинки при $r=0$ прогиб w должен иметь конечное значение. Т.к. $\ln 0 = \infty$, то $C_2=C_4=0$. Решение имеет вид:

$$w(r) = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_3 r^2.$$

Определим C_1 и C_3 ; при $r=a$ должно быть $w=0$; $M_r=0$.

Из первого условия ($w=0$):

$$\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3 a^2 = 0.$$

Из второго условия ($M_r=0$):

$$2C_3 + \frac{3qa^2}{16D} + \frac{\nu}{a} \left(C_3 \cdot 2a + \frac{qa^3}{16D} \right) = 0, \text{ откуда}$$

$$C_1 = \frac{5+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{qa^4}{64D}; \quad C_3 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} + \frac{qa^2}{32D}.$$

Подставляем полученные величины в выражение для $w(r)$:

$$w(r) = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right),$$

Подставляем функцию $w(r)$ в выражения для M_r и M_θ , получим:

$$M_r = \frac{q}{16} (3+\nu)(a^2 - r^2);$$

$$M_\theta = \frac{q}{16} \left((3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2 \right).$$

Эпюры M_r и M_θ построены при $\nu=0,3$ (рисунок 14).

В случае сплошной защемленной по контуру пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки для определения постоянных C_1 и C_3 имеем следующие граничные условия: на контуре пластинки должны отсутствовать прогибы и углы поворота сечений.

$$\text{При } r=a: w=0; \frac{dw}{dr} = 0.$$

$$\text{Окончательно получим: } w(r) = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2.$$

Для кольцевой пластинки с защемленным наружным краем для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 в функции $w(r)$, имеем следующие граничные условия:

$$\text{При } r=a: w=0, \frac{dw}{dr} = 0.$$

$$\text{При } r=b: M_r = 0; Q_r = 0.$$

Подставляя в эти условия $w(r)$, получим четыре уравнения для определения постоянных. Дальнейшие вычисления не представляют трудностей.

Вопросы для самопроверки

1. Тензор напряжений T_{σ} , его компоненты.
2. Определение полного P_{ν} , нормального σ_{ν} и касательного τ_{ν} напряжения. Условия на поверхности.
3. Определение величины главных напряжений и положения главных площадок.
4. Проверка ортогональности главных площадок.
5. Максимальные касательные напряжения τ_{\max} .
6. Октаэдрические площадки и напряжения $\sigma_{\text{окт}}$, $\tau_{\text{окт}}$.
7. Построение круга Мора.
8. Тензор деформации T_{ϵ} , Относительное изменение объема θ .
9. Обобщенный закон Гука.
10. Разложение тензора напряжений на составляющие T_{σ}^0 и D_{σ} (аналитическое и графическое изображение).
11. Удельная потенциальная энергия деформации.
12. Определение расчетных напряжений по теориям прочности.
13. В чем сущность метода конечных разностей?
14. Какая разница между плоской деформацией и обобщенным плоским состоянием?
15. Напишите основное уравнение плоской задачи теории упругости.
16. Какие вы знаете методы решения плоской задачи теории упругости?
17. Какая функция называется бигармонической?
18. Дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи.
19. Условия на контуре для плоской задачи.
20. Как определяются напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} через функцию напряжений?
21. Каким требованиям должны удовлетворять напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} и функциям напряжений φ ?
22. Какой вид имеет уравнение, которое записывается для внутриконтурных точек?
23. Что такое Δx , Δy , α ?
24. Как определить напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} в любой точке сетки МКР?
25. Для чего строятся эпюры изгибающих моментов и продольных сил?
26. Что такое соответствующая рама и требования, предъявляемые к ней?
27. Как определить значения функции напряжений на контуре балки-стенки?
28. Как выразить значения функции напряжений в законтурных точках?
29. Сколько необходимо составить уравнений МКР для решения плоской задачи теории упругости?
30. От чего зависит точность решения задачи МКР?
31. Что называется пластинкой?
32. Гипотезы теории изгиба тонких пластинок.
33. Какая пластинка называется тонкой?
34. Вид основного дифференциального уравнения изгиба пластинок?
35. Как выражаются внутренние силы в пластинке через функцию прогибов?
36. Формулы для напряжений в пластинке через внутренние условия?
37. Типы закрепления пластинок и граничные условия, которые соответствуют им.
38. Сущность метода Бубнова-Галеркина.
39. Условие прочности для определения толщины пластинки.
40. Сколько нужно граничных условий для каждого края пластинки и почему?
41. Что такое цилиндрическая жесткость пластинки?
42. Какую аналогию можно установить между уравнением изогнутой поверхности пластинки и бигармоническим уравнением плоской задачи?
43. В чем заключается сущность методов расчета пластинок Навье и Мориса Леви?
44. Какие внутренние усилия возникают в пластинке при изгибе?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.

Заданы компоненты напряжения на гранях элемента, вырезанного в некоторой точке нагруженного тела. Стрелки на рисунке соответствуют положительным направлениям компонент в выбранной системе координат.

$$\sigma_x = 100 \text{ МПа}; \sigma_y = -45 \text{ МПа}; \sigma_z = 50 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = 20 \text{ МПа}; \tau_{yz} = -30 \text{ МПа}; \tau_{zx} = 40 \text{ МПа}.$$

Элементарный параллелепипед с заданными компонентами напряжения представлен на рисунке 15.

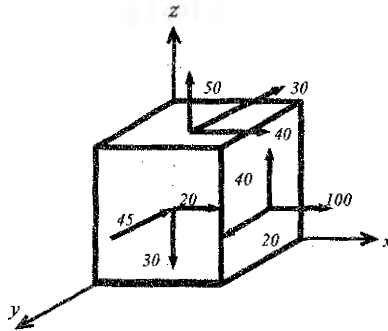


Рисунок 15 – Исходное напряженное состояние в точке

Тело изотропно, материал подчиняется закону Гука. Модуль продольной упругости $E = 200 \text{ ГПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Положение некоторой площадки, наклоненной к осям x , y , z и отсекающей от элементарного параллелепипеда тетраэдр (см. рисунок 1, в), задано направляющими косинусами нормали к этой площадке $l = \cos \alpha = 1/\sqrt{2} = 0,707$; $m = \cos \beta = 1/\sqrt{3} = 0,577$; $n = \cos \gamma = 1/\sqrt{6} = 0,408$. Как известно из математики, направляющие косинусы должны удовлетворять условию $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Требуется:

- 1) найти нормальную и касательную составляющие напряжений на площадке с заданной ориентацией (с заданными направляющими косинусами l , m , n);
- 2) определить величину и направление главных напряжений;
- 3) найти величину наибольших касательных напряжений в данной точке тела и указать площадки, по которым они действуют;
- 4) найти нормальные и касательные напряжения на октаэдрических площадках и указать их расположение;

5) построить для заданного напряженного состояния круги Мора и указать на них точки, изображающие напряженное состояние на площадках, на которых напряженное состояние задано или определилось в процессе выполнения работы (площадках с нормальными x, y, z ; площадке с нормалью V_n , заданной направляющими косинусами l, m, n ; октаэдрической площадке; площадках с максимальными касательными напряжениями; главных площадок);

6) определить компоненты деформаций в заданных и главных осях;

7) определить интенсивность напряжений и деформаций в рассматриваемой точке;

8) разложить заданный тензор напряжения на шаровой и дивiator;

9) найти удельную потенциальную энергию деформации (полную, изменения объема, изменения формы);

10) определить расчетные напряжения по четырем классическим критериям прочности и пластичности.

Решение:

1. *Определение нормальной и касательной составляющих напряжения на площадке с заданной ориентацией.*

Напряжения на площадке, нормаль к которой V имеет направляющие косинусы l, m, n , определяются из условий равновесия тетраэдра, отсекаемого этой площадкой с нормалью от элементарного параллелепипеда с гранями, нагруженными заданными компонентами напряжения (рисунок 16).

Составляющие вдоль осей x, y, z полного напряжения на площадке с нормалью V определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} p_{xv_n} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n; \\ p_{yv_n} &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n; \\ p_{zv_n} &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \quad (26)$$

Полное напряжение на площадке с нормалью V :

$$p_{V_n} = \sqrt{p_{xv_n}^2 + p_{yv_n}^2 + p_{zv_n}^2}. \quad (27)$$

Нормальное и касательное напряжение на площадке с нормалью V :

$$\sigma_{V_n} = p_{xv_n} l + p_{yv_n} m + p_{zv_n} n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl; \quad (28)$$

$$p_{V_n}^2 = \sigma_{V_n}^2 + \tau_{V_n}^2; \quad \tau_{V_n} = \sqrt{p_{V_n}^2 - \sigma_{V_n}^2}. \quad (29)$$

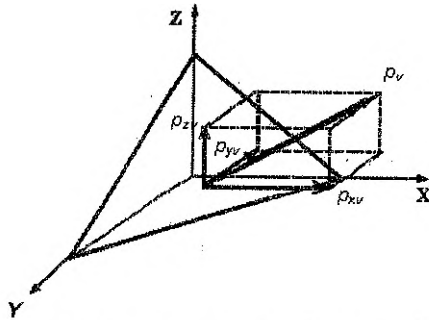


Рисунок 16 – Напряжения на наклонной площадке

Подставляя в зависимости (26) - (29) исходные данные, получаем составляющие вдоль осей x, y, z полного напряжения на площадке с нормалью v_n :

$$p_{xv} = 100 \cdot 0,707 + 20 \cdot 0,577 + 40 \cdot 0,408 = 98,56 \text{ МПа};$$

$$p_{yv} = 20 \cdot 0,707 + 45 \cdot 0,577 + 30 \cdot 0,408 = -24,07 \text{ МПа};$$

$$p_{zv} = 40 \cdot 0,707 - 30 \cdot 0,577 + 50 \cdot 0,408 = 31,37 \text{ МПа}.$$

Полное напряжение на той же площадке :

$$p_v = \sqrt{98,56^2 + (-24,07)^2 + 31,37^2} = 106,2 \text{ МПа}.$$

Нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью v :

$$\sigma_v = 100 \cdot (1/\sqrt{2})^2 + (-45) \cdot (1/\sqrt{3})^2 + 50 \cdot (1/\sqrt{6})^2 + 20 \cdot 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{3} + (-30) \cdot 1/\sqrt{3} \cdot 1/\sqrt{6} + 40 \cdot 1/\sqrt{6} \cdot 1/\sqrt{2} = 68,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_v = \sqrt{106,2^2 - 68,6^2} = 81,07 \text{ МПа}.$$

2. Определение величины и направления главных напряжений.

Для отыскания величины главных напряжений необходимо решить кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0. \quad (30)$$

Для отыскания величин главных напряжений вычисляем инварианты напряженного состояния:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 100 + 45 + 50 = 195 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 100 \cdot (-45) + (-45) \cdot 50 + 50 \cdot 100 - 20^2 - (-30)^2 - 40^2 = -4650 \text{ (МПа)}^2, \quad (31)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 =$$

$$= 100 \cdot (-45) \cdot 50 + 2 \cdot 20 \cdot (-30) \cdot 40 - 100 \cdot (-30)^2 + 45 \cdot 40^2 - 50 \cdot 20^2 = -311000 \text{ (МПа)}^3.$$

Кубическое уравнение (5) принимает вид :

$$\sigma^3 - 105\sigma^2 - 4650\sigma + 311000 = 0.$$

Кубическое уравнение (30) решаем с помощью формулы Кардано, относящейся к уравнению вида:

$$x^3 + cx + q = 0. \quad (32)$$

Это кубическое уравнение имеет три действительных корня, если выполняется неравенство :

$$D = (c/3)^3 + (q/2)^2 < 0. \quad (33)$$

Тогда решение кубического уравнения (32) запишется в виде :

$$x_1 = -2R \cos(\varphi/3),$$

$$x_2 = -2R \cos(\varphi/3 + 2\pi/3), \quad (34)$$

$$x_3 = -2R \cos(\varphi/3 + 4\pi/3),$$

$$\text{где } \cos \varphi = \frac{q}{2R^3}, \quad R = \pm \sqrt{\frac{|c|}{3}}, \quad (35)$$

при этом знак R должен совпадать со знаком q , а $c \leq 0$.

Кубическое уравнение (30) можно привести к виду (32) посредством замены переменной

$$\sigma = x + I_1/3. \quad (36)$$

Тогда

$$c = -I_1^2/3 + I_2, \quad q = -(2I_1^3)/27 + I_1 I_2/3 - I_3. \quad (37)$$

Подставляя в (37) подсчитанные выше значения инвариантов напряжения I_1, I_2, I_3 , находим

$$c = -\frac{105^2}{3} - 4650 = -8325 \text{ (МПа)}^2,$$

$$q = -\frac{2}{27} \cdot 105^3 + \frac{105 \cdot (-4650)}{3} + 311000 = 62500 \text{ (МПа)}^3.$$

Проверяем условия (10) и (12) :

$$D = \left(\frac{-8325}{3} \right)^3 + \left(\frac{62500}{2} \right)^2 = -2,039 \cdot 10^{10} < 0,$$

$$C = -8325 < 0.$$

Оба условия выполнены. Следовательно, в данном случае можно воспользоваться решением Кардано:

$$R = + \sqrt{\frac{8325}{3}} = 52,678 \text{ МПа},$$

$$\cos\varphi = 62500 / (2 \cdot 52,678)^3 = 0,214, \text{ откуда } \varphi = 1,355 \text{ рад.}$$

По формулам (34) находим корни уравнения кубического уравнения (32):

$$x_1 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355}{3}\right) = -94,791 \text{ МПа},$$

$$x_2 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355 + 2\pi}{3}\right) = +87,219 \text{ МПа},$$

$$x_3 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355 + 4\pi}{3}\right) = +7,572 \text{ МПа}.$$

По формуле (36) найдем три корня уравнения (32), т.е. искомые значения главных напряжений:

$$\sigma_1 = x_1 + \frac{I_1}{3} = -94,791 + \frac{105}{3} = -59,791 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{II} = x_2 + \frac{I_1}{3} = 87,219 + \frac{105}{3} = 122,219 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{III} = x_3 + \frac{I_1}{3} = 7,572 + \frac{105}{3} = 42,572 \text{ МПа}.$$

В соответствии с правилом $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ наибольшему по алгебраической величине из этих напряжений присвоим индекс 1 и т. д. Тогда

$$\sigma_1 = \sigma_{II} = 122,219 \text{ МПа}, \sigma_2 = \sigma_{III} = 42,572 \text{ МПа}, \sigma_3 = \sigma_I = -59,791 \text{ МПа}.$$

Для проверки правильности полученного решения найдем инварианты напряженного состояния, выразив их через главные напряжения. Они должны быть такими же, как и вычисленные выше по заданным компонентам напряжений (31):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 122,219 + 42,572 - 59,791 = 105 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = 122,219 \cdot 42,572 + 42,572 \cdot (-59,791) + (-59,791) \cdot 122,219 = -4649,91 \text{ (МПа)}^2,$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = 122,219 \cdot 42,572 \cdot (-59,791) = -311099 \text{ (МПа)}^3.$$

Положение главных площадок определяется направляющими косинусами нормалей к главным площадкам. Для отыскания направляющих косинусов нормали к i -й главной площадке ($i=1,2,3$) используем систему уравнений, подставив в нее $\sigma = \sigma_i$. Тогда направляющие косинусы принимают значение l_i, m_i, n_i .

$$(\sigma_x - \sigma_i) l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{xz} n_i = 0,$$

$$\tau_{yx} l_i + (\sigma_y - \sigma_i) m_i + \tau_{yz} n_i = 0, \quad (38)$$

$$\tau_{zx} l_i + \tau_{zy} m_i + (\sigma_z - \sigma_i) n_i = 0,$$

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1. \quad (39)$$

Из трех уравнений (38) выберем любые два, например первое и второе. Делим эти уравнения на n_i и вводим обозначения

$$a_i = l_i / n_i; \quad b_i = m_i / n_i. \quad (40)$$

Получаем

$$(\sigma_x - \sigma_i) a_i + \tau_{xy} b_i = -\tau_{xz},$$

$$\tau_{yx} a_i + (\sigma_y - \sigma_i) b_i = -\tau_{yz},$$

отсюда

$$a_i = [\tau_{xz} \tau_{zy} - \tau_{zx} (\sigma_y - \sigma_i)] / [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2],$$

$$b_i = [\tau_{xy} \tau_{zx} - \tau_{zy} (\sigma_x - \sigma_i)] / [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2]. \quad (41)$$

Тогда из (39) и (40)

$$n_i = \sqrt{\frac{1}{1 + a_i^2 + b_i^2}}, \quad l_i = a_i \cdot n_i, \quad m_i = b_i \cdot n_i, \quad (42)$$

Примем сначала: $\sigma_i = \sigma_1 = 122,22$ МПа, и из (41) и (42) найдем :

$$a_1 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 - 122,22)] / [(100 - 122,22) \cdot (-45 - 122,22) - 20^2] = 1,836,$$

$$b_1 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 - 122,22)] / [(100 - 122,22) \cdot (-45 - 122,22) - 20^2] = 0,040,$$

$$n_1 = \sqrt{\frac{1}{1 + 1,836^2 + 0,040^2}} = \pm 0,478,$$

$$l_1 = a_1 \cdot n_1 = 1,836 \cdot (\pm 0,478) = \pm 0,878,$$

$$m_1 = b_1 \cdot n_1 = 0,040 \cdot (\pm 0,478) = \pm 0,019.$$

Проверка:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad 0,878^2 + 0,019^2 + 0,478^2 = 1,000.$$

Равенство выполнено.

Теперь подставляем в (41) и (42) $\sigma_2 = 42,57$ МПа и находим

$$a_2 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 - 42,57)] / [(100 - 42,57) \cdot (-45 - 42,57) - 20^2] = -0,535,$$

$$b_2 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 - 42,57)] / [(100 - 42,57) \cdot (-45 - 42,57) - 20^2] = -0,465,$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{1}{1 + (-0,535)^2 + (-0,465)^2}} = \pm 0,816,$$

$$l_2 = a_2 \cdot n_2 = -0,535 \cdot (\pm 0,816) = \mp 0,437,$$

$$m_2 = b_2 \cdot n_2 = -0,465 \cdot (\pm 0,816) = \mp 0,379.$$

Проверка:

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \quad (-0,437)^2 + 0,816^2 + (-0,379)^2 = 1,000.$$

Равенство удовлетворено.

Подставив в (41) и (42) $\sigma_3 = -59,79$ МПа, получаем:

$$a_3 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 + 59,79)] / [(100 + 59,79) \cdot (-45 + 59,79) - 20^2] = -0,607,$$

$$b_3 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 + 59,79)] / [(100 + 59,79) \cdot (-45 + 59,79) - 20^2] = 2,849,$$

$$n_3 = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,607^2 + 2,849^2}} = \pm 0,325,$$

$$l_3 = a_3 \cdot n_3 = -0,607 \cdot (\pm 0,325) = \mp 0,197,$$

$$m_3 = b_3 \cdot n_3 = 2,849 \cdot (\pm 0,325) = \pm 0,926.$$

Проверка:

$$l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \quad (-0,197)^2 + 0,926^2 + 0,325^2 = 1,002 \approx 1.$$

Сведем найденные значения в таблицу 1.

Таблица 1 – Направляющие косинусы нормалей к главным площадкам

i	1	2	3
l_i	$\pm 0,878$	$\mp 0,437$	$\mp 0,297$
m_i	$\pm 0,019$	$\mp 0,379$	$\pm 0,926$
n_i	$\pm 0,478$	$\pm 0,816$	$\pm 0,345$

Сделаем следующие три проверки, подтверждающие взаимную ортогональность главных площадок:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

$$0,878 \cdot (-0,437) + 0,019 \cdot (-0,379) + 0,478 \cdot 0,816 = -8,39 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0;$$

$$(-0,437) \cdot (-0,197) + (-0,379) \cdot 0,926 + 0,816 \cdot 0,325 = 3,35 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

$$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0;$$

$$0,878 \cdot (-0,197) + 0,019 \cdot 0,926 + 0,478 \cdot 0,325 = 2,20 \cdot 10^{-4} \approx 0.$$

Можно сделать вывод, что взаимная ортогональность нормалей к главным площадкам этими проверками подтверждается.

Чтобы изобразить графически положение в пространстве параллелепипеда, гранями которого являются главные площадки, надо произвести следующее построение.

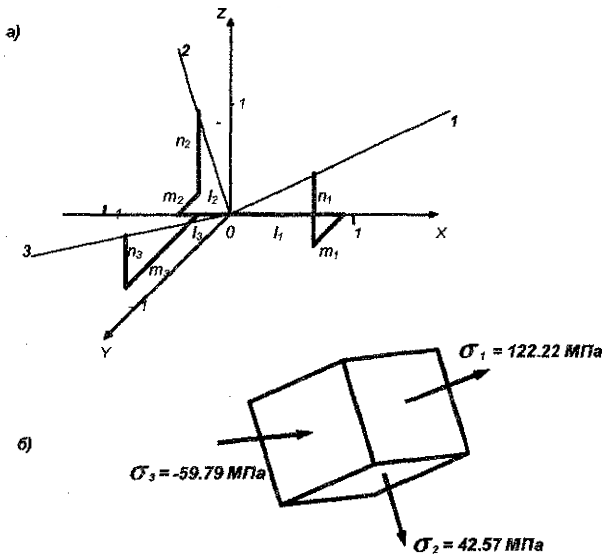


Рисунок 17 – Графическое построение главных площадок

В осях x, y, z по заданным направляющим косинусам (таблица 1) строим нормали к главным площадкам, взяв за исходную точку начало координат. Для построения i -й нормали достаточно вдоль осей x, y, z отложить в некотором масштабе отрезки, равные направляющим косинусам l_i, m_i, n_i , и точку с такими координатами соединить с центром O (рисунок 17, а). Его грани и будут главными площадками с напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

3. Определение максимальных касательных напряжений.

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклоненным под углом 45° между каждой парой главных площадок (рисунок 3). Величины наибольших касательных напряжений определяются по формулам:

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad (43)$$

$$\tau_{13} = [122,22 - (-59,79)] / 2 = 91,01 \text{ МПа}; \quad \tau_{12} = [122,22 - 42,57] / 2 = 39,83 \text{ МПа};$$

$$\tau_{23} = [42,57 - (-59,79)] / 2 = 51,18 \text{ МПа}; \quad \tau_{\max} = \tau_{13} = 91,01 \text{ МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение действует по площадке, наклоненной под углом 45° к первой и третьей главным площадкам.

4. Определение октаэдрических площадок.

Площадки, равнонаклоненные к трем главным площадкам $l=m=n=1/\sqrt{3}$, называются октаэдрическими (рисунок 2). Нормальное и касательное напряжения на этих площадках определяются по формулам:

$$\sigma_{\text{окт}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3; \quad (44)$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1},$$

$$\text{или } \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}.$$

В данном случае:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (122,22 + 42,57 - 59,79) = 35 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{39,83^2 + 52,18^2 + 91,01^2} = 74,50 \text{ МПа}.$$

5. Построение кругов Мора.

В координатах σ и τ построим круги Мора для исследуемого объёмного напряжённого состояния. Отложим в осях σ и τ точки, изображающие напряжённое состояние на главных площадках: $K_1(\sigma_1, 0) = K_1(122, 22; 0)$; $K_2(\sigma_2, 0) = K_2(42, 57; 0)$; $K_3(\sigma_3, 0) = K_3(-59, 79; 0)$ (рисунок 18).

На отрезках $\overline{K_1K_3}$, $\overline{K_1K_2}$, $\overline{K_2K_3}$, как на диаметрах строим окружности – это и есть круги Мора для заданного напряжённого состояния.

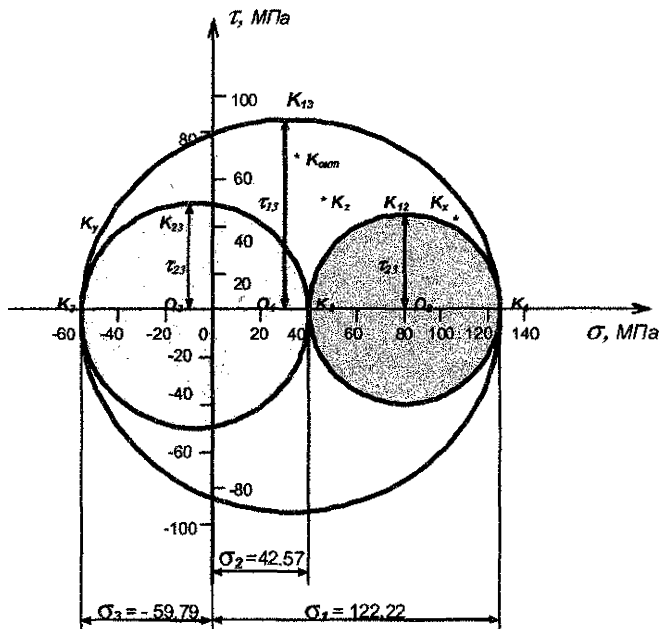


Рисунок 18 – Круги Мора

Нанесем на круги Мора точки Напряженное состояние на любой площадке, проходящей через заданную точку тела, изображается точками, которые лежат внутри заштрихованной области.

, изображающие напряженное состояние на площадках с нормальными x, y, z . Для этого на этих площадках найдем полные касательные напряжения :

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44,72 \text{ МПа};$$

$$\tau_y = \sqrt{\tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{20^2 + (-30)^2} = 36,06 \text{ МПа};$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{40^2 + (-30)^2} = 50,00 \text{ МПа}.$$

Координаты точек, изображающих напряженное состояние на площадках, перпендикулярных осям x, y, z :

$$K_x(\sigma_x, \tau_x) = K_x(100; 44, 72), \quad K_y(\sigma_y, \tau_y) = K_y(-45; 36, 06),$$

$$K_z(\sigma_z, \tau_z) = K_z(50; 50).$$

Координаты точки, изображающей напряженное состояние на октаэдрической площадке:

$$K_{\text{окт}}(\sigma_{\text{окт}}, \tau_{\text{окт}}) = K_{\text{окт}}(35; 74, 5).$$

Точки, изображающие напряженное состояние на площадках с наибольшими касательными напряжениями K_{12}, K_{23}, K_{13} , расположены на концах вертикальных диаметров кругов Мора. Все нанесенные в масштабе точки, изображающие напряженное состояние на всех рассмотренных площадках, действительно расположились внутри заштрихованной области (рисунок 18).

6. *Определение компонент тензора деформации в заданных и главных осях и относительного изменения объема.*

Тензор деформации в заданных осях имеет вид:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Его компоненты находим по формулам обобщенного закона Гука в произвольных осях:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \quad (46)$$

где G – модуль упругости при сдвиге;

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot (1 + 0,3)} = 7,69 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

В нашем случае:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [100 - 0,3 \cdot (-45 + 50)] = 49,25 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-45 - 0,3 \cdot (50 + 100)] = -45 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [50 - 0,3 \cdot (100 - 45)] = 16,75 \cdot 10^{-5};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{20}{7,69 \cdot 10^4} = 26 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_{yz} = \frac{-30}{7,69 \cdot 10^4} = -39 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_{zx} = \frac{40}{7,69 \cdot 10^4} = 52 \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 49,25 & 13 & 26 \\ 13 & -45 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 16,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

Тензор деформации в главных осях:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные деформации, определяемые по формулам:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \quad (48)$$

В нашем случае:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [122,22 - 0,3 \cdot (42,57 - 59,79)] = 63,69 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [42,57 - 0,3 \cdot (-59,79 + 122,22)] = 11,92 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-59,79 - 0,3 \cdot (122,52 + 42,52)] = -54,61 \cdot 10^{-5}.$$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 63,69 & 0 & 0 \\ 0 & 11,92 & 0 \\ 0 & 0 & -54,61 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

Проверка: $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ — первый инвариант деформированного состояния.

$$(49,25 - 45 + 16,75) \cdot 10^{-5} = (63,69 + 11,92 - 54,61) \cdot 10^{-5};$$

$$21 \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}.$$

Относительное изменение объема определяется по формуле

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (49)$$

В данном примере

$$\theta = (63,19 + 11,92 - 54,61) \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}.$$

Примечание: От деформаций по направлению осей x, y, z можно перейти к главным деформациям и определить их величины из кубического уравнения:

$$\varepsilon^3 - E_1 \varepsilon^2 + E_2 \varepsilon - E_3 = 0,$$

где инварианты тензора деформаций: $E_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$;

$$E_2 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2;$$

$$E_3 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z - \frac{1}{4} \gamma_{xy} \cdot \gamma_{yz} \cdot \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \cdot \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \cdot \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \cdot \gamma_{xy}^2.$$

Решение данного уравнения проводится аналогично методике, изложенной в п. 2 примера.

7. Определение интенсивности напряжений и деформаций.

Интенсивность касательных напряжений определяем по формуле:

$$\tau_H = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(100 - (-45))^2 + (-45 - 50)^2 + (50 - 100)^2 + 6(20^2 + (-30)^2 + 40^2)} =$$

$$= 91,241 \text{ МПа}.$$

Интенсивность нормальных напряжений определяем по формуле:

$$\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sqrt{3} \cdot \tau_H =$$

$$= 158,035 \text{ МПа}.$$

Интенсивность деформаций сдвига:

$$\gamma_H = \sqrt{\frac{2}{3} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]} = 9,033 \cdot 10^{-4}.$$

Интенсивность продольных деформаций:

$$\varepsilon_H = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_H = \frac{9,033 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{3}} = 5,215 \cdot 10^{-4}.$$

Строим направляющий тензор деформаций: $\bar{D}_\varepsilon = \frac{2}{\gamma_H} D_\varepsilon$, где D_ε — девиатор деформаций:

тор деформаций:

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix},$$

где средняя деформация: $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{(49,25 - 45 + 16,75) \cdot 10^{-5}}{3} = 7 \cdot 10^{-5}$,

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} 42,25 & 13 & 26 \\ 13 & -52 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 9,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5},$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_\varepsilon &= \frac{2}{\gamma_H} D_\varepsilon = \frac{2}{9,033 \cdot 10^{-4}} \cdot \begin{pmatrix} 42,25 & 13 & 26 \\ 13 & -52 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 9,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} = \\ &= \begin{pmatrix} 9,355 & 2,878 & 5,756 \\ 2,878 & -11,513 & -4,318 \\ 5,756 & -4,318 & 2,159 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8. Разложение заданного тензора напряжения на шаровой и девиатор.

Компоненты напряжённого состояния, действующие по граням элементарного параллелепипеда, выделенного в некоторой точке тела, вызывают изменение объёма и формы этого параллелепипеда. Относительное изменение объёма определяется зависимостью: $\theta = \frac{\sigma_0}{K}$, где $\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ — среднее

гидростатическое напряжение, $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ — модуль объёмной упругости,

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K}. \quad (50)$$

Изменение формы параллелепипеда характеризуется наличием относительных деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, которые выражаются через компоненты напряжения по закону Гука (46).

Тензор напряжений T_σ можно представить в виде двух составляющих тензоров, один из которых — шаровой T_σ^0 — связан с изменением только объёма, а другой — D_σ — вызывает изменение только формы:

$$T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma. \quad (51)$$

Эти тензоры имеют вид:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}; T_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}; D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}$$

В нашем случае $\sigma_0 = \frac{100 - 45 + 50}{3} = 35$ МПа, и следовательно,

$$\begin{pmatrix} 100 & 20 & 40 \\ 20 & -45 & -30 \\ 40 & -30 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 65 & 20 & 40 \\ 2 & -80 & -30 \\ 40 & -30 & 15 \end{pmatrix}$$

$T_{\sigma} \qquad \qquad \qquad T_{\sigma}^0 \qquad \qquad \qquad D_{\sigma}$

1) объем изменяется

$$\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K} = \frac{\sigma_0}{K};$$

2) по формулам (49):

$$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z,$$

$\gamma_{xy} \neq 0; \gamma_{yz} \neq 0; \gamma_{zx} \neq 0$,
следовательно, форма
элемента изменяется.

1) объем изменяется

$$\theta' = \frac{3\sigma_0}{3K} = \frac{\sigma_0}{K} = \theta;$$

2) по формулам (49):

$$\varepsilon'_x = \varepsilon'_y = \varepsilon'_z = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_0,$$

$$\gamma'_{xy} = \gamma'_{yz} = \gamma'_{zx} = 0,$$

следовательно, форма
элемента не изменяется.

1) объем не изменяется

$$\theta'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - \sigma_0}{3K} = \frac{\theta_0}{K} = 0;$$

2) по формулам (49):

$$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$$

$\gamma'_{xy} = \gamma_{xy}; \gamma'_{yz} = \gamma_{yz}; \gamma'_{zx} = \gamma_{zx}$,
следовательно, форма элемента
изменяется.

Графическое разложение на шаровой и девиатор представлено на рисунке 19.

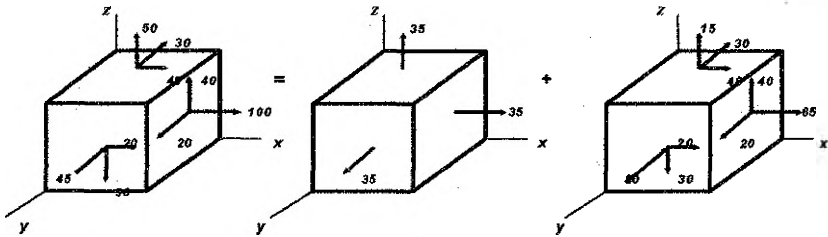


Рисунок 19 – Графическое разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор

Примечание. Тензор деформаций также можно разложить на составляющие:

$$T_{\varepsilon} = T_{\varepsilon}^0 + D_{\varepsilon}; \text{ где } T_{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}, D_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$$

9. Определение удельной потенциальной энергии деформации (полной, изменения объема, изменения формы).

Полная удельная потенциальная энергия деформации определяется по формулам:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \quad (52)$$

$$\text{или } u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)].$$

Полную удельную потенциальную энергию u можно представить в виде двух составляющих, одна из которой связана с изменением объема u_0 , а другая с изменением формы u_ϕ в окрестности некоторой точки тела:

$$u = u_0 + u_\phi. \quad (53)$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема и изменения формы выражается зависимостями:

$$u_0 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (54)$$

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1). \quad (55)$$

В нашем случае из (52):

$$u = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \{ 122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot [122,22 \cdot 42,57 + 42,57 \cdot (-59,79) + (-59,79) \cdot 122,22] \} = 5,779 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

Из (54):

$$u_0 = \frac{(1-2 \cdot 0,3)}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot (122,22 + 42,57 - 59,79)^2 = 3,68 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3},$$

из (55):

$$u_\phi = \frac{(1+0,3)}{3 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot [122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 122,22 \cdot 42,57 - 42,57 \cdot (-59,79) - (-59,79) \cdot 122,22] = 5,411 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3};$$

$$u = u_0 + u_\phi = 0,368 \cdot 10^{-2} + 5,411 \cdot 10^{-2} = 5,779 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

Сравниваем полученные значения для u :

$$5,779 \cdot 10^{-2} = 5,779 \cdot 10^{-2}.$$

10. Определение расчётных напряжений по четырём классическим критериям прочности и пластичности.

Первый критерий (прочности) — критерий наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma_p^I = \sigma_1 = 122,22 \text{ МПа.} \quad (56)$$

Второй критерий (прочности) — критерий наибольших удлинений:

$$\sigma_p^II = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 122,22 - 0,3 \cdot (42,57 - 59,79) = 127,39 \text{ МПа.} \quad (57)$$

Третий критерий (пластичности) — критерий наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 122,22 - (-59,79) = 182,01 \text{ МПа.} \quad (58)$$

Четвёртый критерий (пластичности) — энергетический:

$$\begin{aligned} \sigma_p^{IV} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \sqrt{122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 122,22 \cdot 42,57 - 42,57 \cdot (-59,79) - (-59,79) \cdot 122,22} = \\ &= 158,03 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Сравнение результатов определения σ_{pi} показывает, что при заданном напряжённом состоянии наиболее неблагоприятные результаты получены при применении критерия пластичности (энергетической теории).

Пример 2.

Балка-стенка толщиной $\delta = 1$ м нагружена на верхней кромке и частично на нижней распределённой нагрузкой q и сверху сосредоточенной силой P . Пролёт балки-стенки l , а высота её h .

Требуется определить напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} в балке-стенке и построить их эпюры в сечениях А-А и В-В; для сечения А-А построить эпюру σ_x методом сопротивления материалов.

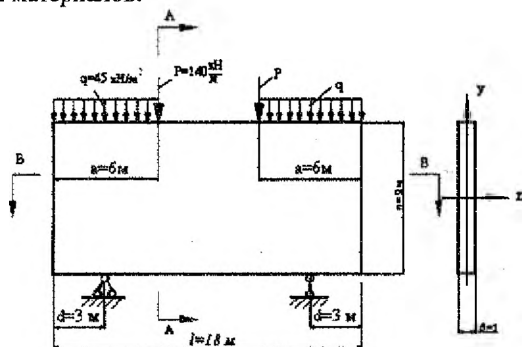


Рисунок 20 – Схема балки-стенки

Решение:

1. Нанесём на балку-стенку сетку (3x3) с шагом $\Delta x = 6\text{ м}$, $\Delta y = 3\text{ м}$. Затем пронумеруем внутренние точки (узлы сетки), соблюдая при этом симметрию системы (рисунок 21).

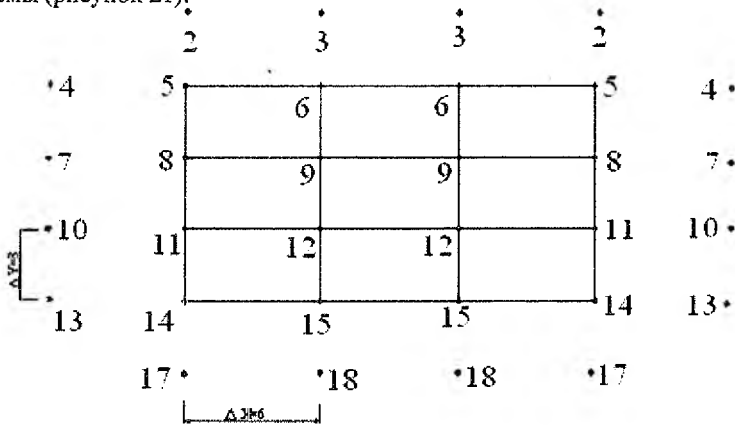


Рисунок 21 – Расположение узлов сетки

2. Выбираем статически определимую раму с учётом симметрии. Для этого разрежем нижний ригель (рисунок 22).

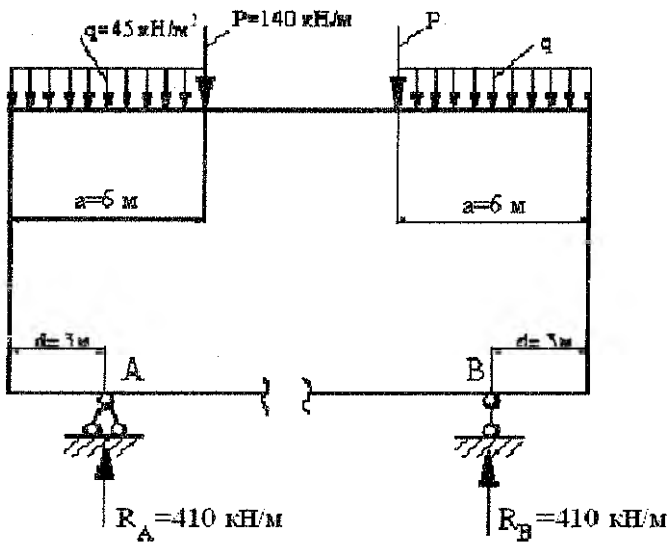


Рисунок 22 – Модель соответствующей рамы

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0, \quad q \cdot a \cdot \left(l - d - \frac{a}{2} \right) + P \cdot (l - d - a) + P \cdot \frac{a}{2} - R_A \cdot (l - 2d) = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot a \cdot \left(l - d - \frac{a}{2} \right) + P \cdot (l - d - a) + P \cdot \frac{a}{2}}{(l - 2d)} =$$

$$= \frac{45 \cdot 6 \cdot (18 - 3 - 3) + 140 \cdot (18 - 3 - 6) + 140 \cdot 3}{18 - 6} = 410 \text{ кН/м};$$

аналогично определяем: $R_B = 410 \text{ кН/м}$.

Строим эпюры изгибающих моментов M и продольных сил N (рисунок 23).

$$M_{14} = R_A \cdot d = 410 \cdot 3 = 1230 \text{ кН};$$

$$M_{11} = M_8 = M_5 = 1230 \text{ кН};$$

$$M_6 = -R_A \cdot \frac{a}{2} + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -410 \cdot 3 + 45 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = -420 \text{ кН}.$$

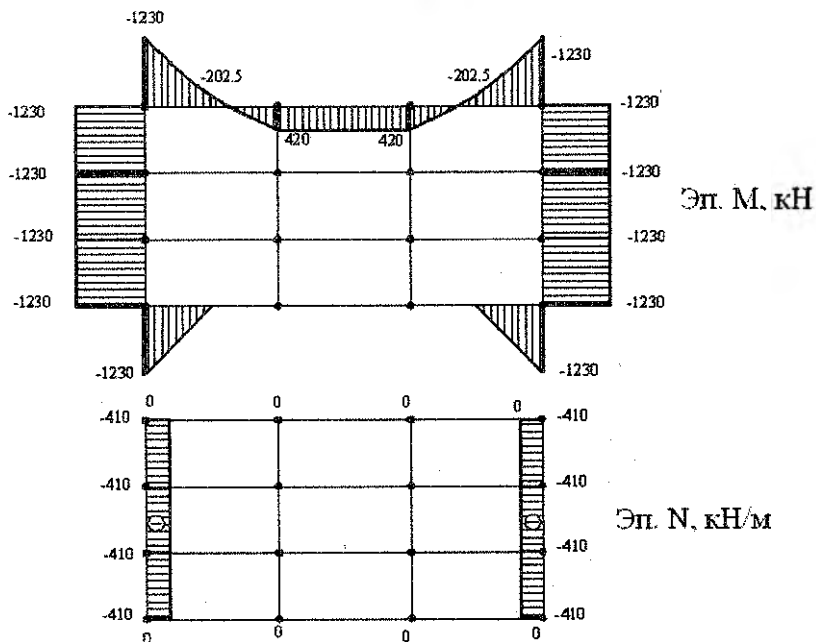


Рисунок 23 – Эпюры M и N для соответствующей рамы

3. По формуле (20) находим функцию φ на контуре балки-стенки.

$$\varphi_{14} = \varphi_{11} = \varphi_8 = \varphi_5 = -1230 \text{ кН}; \quad \varphi_6 = 420 \text{ кН}; \quad \varphi_{15} = 0.$$

4. По формуле (21) выразим функцию φ в законтурных точках через внутриконтурные.

$$\varphi_2 = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_8 = \varphi_8 = -1230 \text{ кН}, \quad \varphi_3 = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_9 = \varphi_9,$$

$$\varphi_4 = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_6 = 420 - 4920 = -4500 \text{ кН},$$

$$\varphi_7 = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_9 = \varphi_9 - 4920, \quad \varphi_{10} = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_{12} = \varphi_{12} - 4920,$$

$$\varphi_{13} = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_{15} = -4920 \text{ кН}, \quad \varphi_{17} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_{11} = \varphi_{11} = -1230 \text{ кН},$$

$$\varphi_{18} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_{12} = \varphi_{12}.$$

5. Запишем уравнения для каждой внутриконтурной точки:

$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_9 - 4(\alpha + 1)(\varphi_6 + \alpha\varphi_9 + \varphi_{12} + \alpha\varphi_8) + 2\alpha(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_{12} + \varphi_{11}) + (\varphi_3 + \alpha^2\varphi_8 + \varphi_{15} + \alpha^2\varphi_7) = 0,$$

$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_{12} - 4(\alpha + 1)(\varphi_9 + \alpha\varphi_{12} + \varphi_{15} + \alpha\varphi_{11}) + 2\alpha(\varphi_8 + \varphi_9 + \varphi_{15} + \varphi_{14}) + (\varphi_6 + \alpha^2\varphi_{11} + \varphi_{18} + \alpha^2\varphi_{10}) = 0,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \frac{9}{36} = 0,25,$$

$$8,375\varphi_9 - 5(420 + 0,25\varphi_9 + \varphi_{12} - 0,25 \cdot 1230) + 0,5(-1230 + 420 + \varphi_{12} - 1230) + (\varphi_3 - 0,0625 \cdot 1230 + 0 + 0,0625(\varphi_9 - 4920)) = 0,$$

$$8,375\varphi_{12} - 5(\varphi_9 + 0,25\varphi_{12} + 0 - 0,25 \cdot 1230) + 0,5(-1230 + \varphi_9 + 0 - 1230) + (420 - 0,0625 \cdot 1230 + \varphi_{12} + 0,0625(\varphi_{12} - 4920)) = 0.$$

Приведём подобные слагаемые и получим:

$$\begin{cases} 8,1875\varphi_9 - 4,5\varphi_{12} = 1966,875, \\ -4,5\varphi_9 + 8,1875\varphi_{12} = -343,125. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим:

$$\varphi_9 = 311,204 \text{ кН},$$

$$\varphi_{12} = 129,135 \text{ кН}.$$

6. Напряжения в i -й точке получим по формулам (19).

Сечение А-А:

$$(\sigma_x)_6 = \frac{\varphi_0 - 2\varphi_6 + \varphi_1}{9} = \frac{311,204 - 2 \cdot 420 + 129,135}{9} = -24,17 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_9 = \frac{\varphi_{12} - 2\varphi_9 + \varphi_6}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 311,204 + 420}{9} = -8,14 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_{12} = \frac{\varphi_{15} - 2\varphi_{12} + \varphi_9}{9} = \frac{0 - 2 \cdot 129,135 + 311,204}{9} = 5,88 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_{15} = \frac{\varphi_{18} - 2\varphi_{15} + \varphi_{12}}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 0 + 129,135}{9} = 28,7 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_6 = \frac{\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_8}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 420 + 420}{36} = -45,83 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_9 = \frac{\varphi_8 - 2\varphi_9 + \varphi_6}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 311,204 + 311,204}{36} = -42,81 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_{12} = \frac{\varphi_{11} - 2\varphi_{12} + \varphi_{12}}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 129,135 + 129,135}{36} = -37,75 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_{15} = \frac{\varphi_{14} - 2\varphi_{15} + \varphi_{15}}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 0 + 0}{36} = -34,17 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_6 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_9 - \varphi_8}{72} = \frac{-1230 - 311,204 + 311,204 + 1230}{72} = 0,$$

$$(\tau_{xy})_9 = \frac{\varphi_5 - \varphi_6 + \varphi_{12} - \varphi_{11}}{72} = \frac{-1230 - 420 + 129,135 + 1230}{72} = -4,04 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_{12} = \frac{\varphi_8 - \varphi_9 + \varphi_{15} - \varphi_{14}}{72} = \frac{-1230 - 311,204 + 0 + 1230}{72} = -4,32 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_{15} = \frac{\varphi_{11} - \varphi_{12} + \varphi_{15} - \varphi_{17}}{72} = \frac{-1230 - 129,135 + 129,135 + 1230}{72} = 0.$$

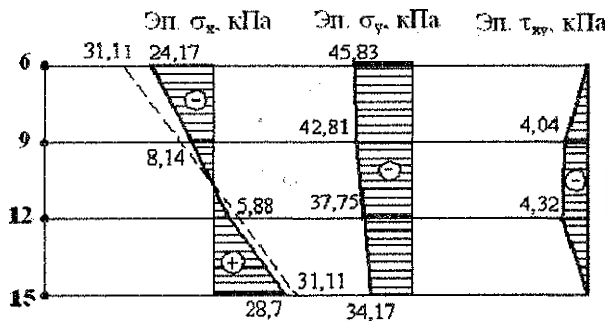


Рисунок 24 – Эпюры напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в сечении А-А

Сечение В-В:

$$(\sigma_x)_8 = \frac{\varphi_{11} - 2\varphi_8 + \varphi_3}{9} = \frac{-1230 - 2 \cdot (-1230) - 1230}{9} = 0,$$

$$(\sigma_x)_9 = \frac{\varphi_{12} - 2\varphi_9 + \varphi_6}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 311,204 + 420}{9} = -8,14 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_8 = \frac{\varphi_7 - 2\varphi_8 + \varphi_9}{36} = \frac{-4608,796 - 2 \cdot (-1230) + 311,204}{36} = -51,04 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_9 = \frac{\varphi_8 - 2\varphi_9 + \varphi_6}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 311,204 + 311,204}{36} = -42,81 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_8 = \frac{\varphi_4 - \varphi_6 + \varphi_{12} - \varphi_{10}}{72} = \frac{-4500 - 420 + 129,135 + 4790,865}{72} = 0,$$

$$(\tau_{xy})_9 = \frac{\varphi_5 - \varphi_6 + \varphi_{12} - \varphi_{11}}{72} = \frac{-1230 - 420 + 129,135 + 1230}{72} = -4,04 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_9 = \frac{\varphi_6 - \varphi_5 + \varphi_{11} - \varphi_{12}}{72} = \frac{420 + 1230 - 1230 - 129,135}{72} = 4,04 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_8 = \frac{\varphi_6 - \varphi_4 + \varphi_{10} - \varphi_{12}}{72} = \frac{420 + 4500 - 4790,865 - 129,135}{72} = 0.$$

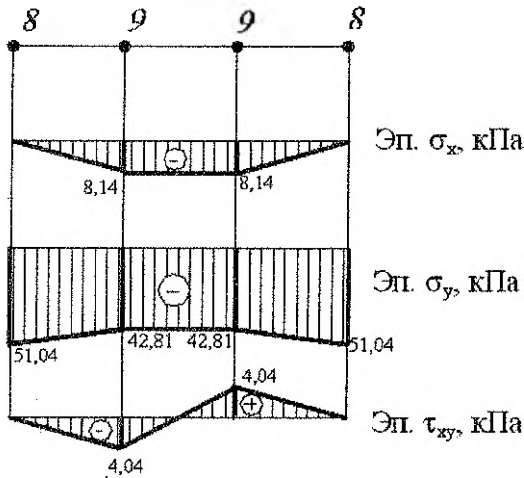


Рисунок 25 – Эпюры напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в сечении В-В

Построим эпюру σ_x в сечении А-А методом сопротивления материалов. Представим балку-стенку в виде обычной балки (рисунок 26).

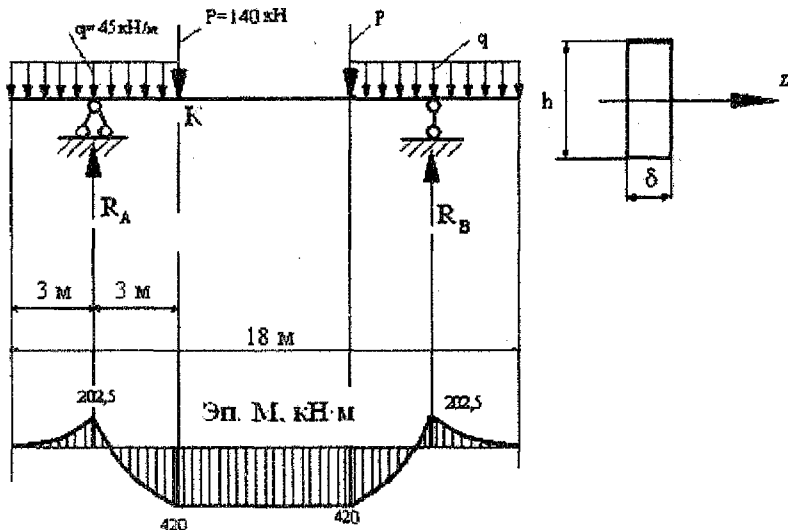


Рисунок 26 – К расчету балки-стенки по балочной схеме (метод сопротивления материалов)

$$\sigma_x = \frac{M_K}{W_z};$$

$$M_K = R_A \cdot 3 - q \cdot 6 \cdot 3 = 420 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$W_z = \frac{\delta \cdot a^2}{6} = \frac{1 \cdot 9^2}{6} = 13,5 \text{ м}^3;$$

$$\sigma_x = \frac{420}{13,5} = 31,11 \text{ кПа}.$$

Эпюра σ_x показана на рисунке 24 пунктирной линией.

Пример 3.

Дана прямоугольная полоса-балка длиной l , высотой h и толщиной, равной 1 (рисунок 27). Начало координат O принято в середине торцового сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси Oy и Oz . Продольная ось Ox проходит по середине полосы-балки. Выражение для функции φ : $\varphi(x, y) = 2x^4 - 9x^2y^2 + y^4$.

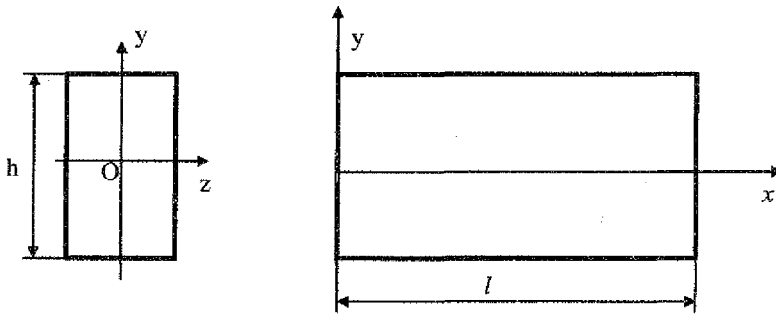


Рисунок 27 -- Схема полосы-балки

Объемными силами пренебречь. Требуется:

- 1) проверить, можно ли предложенную функцию $\varphi(x,y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости;
- 2) найти выражения для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$;
- 3) построить эпюры напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ для одного сечения: либо перпендикулярного оси x , либо перпендикулярного оси y ;
- 4) определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырём граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры.

Дано: $l=6$ м, $h=1$ м, $x=1$ м, $y=0,3$ м.

Решение:

1. Проверим, можно ли предложенную функцию $\varphi(x,y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости. В этих целях используем бигармоническое уравнение:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Находим производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 8x^3 - 18xy^2, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 24x^2 - 18y^2, & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} &= 48x, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= 48, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -18x^2y + 4y^3, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -18x^2 + 12y^2, & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} &= 24y, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} &= 24, \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} &= -36y, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= -36. \end{aligned}$$

Подставляем найденные производные в бигармоническое уравнение:

$$48 + (-36) \cdot 2 + 24 = 0, \quad 0 = 0.$$

Следовательно, заданное $\varphi(x,y)$ тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению плоской задачи теории упругости и может быть принято для решения этой задачи.

2. Находим выражения для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -18x^2 + 12y^2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 24x^2 - 18y^2,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -36xy, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 36xy.$$

Выполняем проверку выполнения уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Для этого находим соответствующие производные:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -36x, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 36x, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -36y, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 36y,$$

$$\begin{cases} -36x + 36x = 0, \\ 36y - 36y = 0. \end{cases}$$

3. Строим эпюры напряжений в сечении $x = 1$ м. В данном случае:

$$\sigma_x = -18 + 12y^2, \quad \sigma_y = 24 - 18y^2, \quad \tau_{xy} = 36y.$$

По указанным выражениям для напряжений, изменяя y от $-\frac{h}{2} = -0,5$ м до

$\frac{h}{2} = 0,5$ м, строим их эпюры.

Таблица 2 – Расчет значений напряжений в сечении $x = 1$ м

	-0,5	0	0,5
σ_x	-69	-72	-69
σ_y	31,5	96	91,5
τ_{xy}	-36	0	36

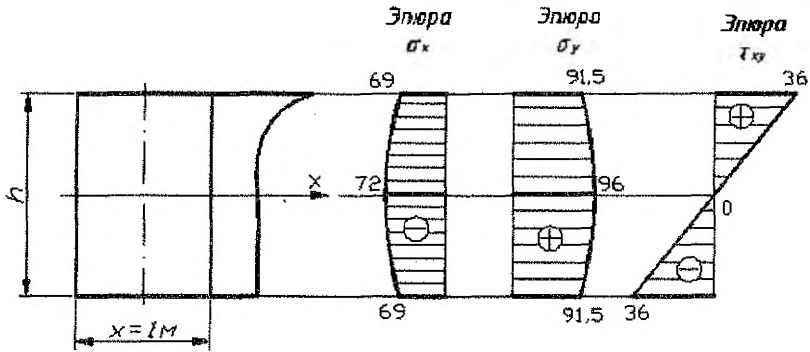


Рисунок 28 – Эпюры напряжений в сечении $x = 1$ м

4. Определяем внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки. Для этого воспользуемся условиями на поверхности тела (условиями на контуре или статическими граничными условиями):

$$p_{xv} = \sigma_x \cos(x, \nu) + \tau_{xy} \cos(y, \nu), \quad p_{yv} = \tau_{yx} \cos(x, \nu) + \sigma_y \cos(y, \nu),$$

где p_{xv} , p_{yv} – проекции на оси Ox и Oy внешних сил, действующих на гранях полосы-балки; ν – нормаль к грани; $\cos(x, \nu)$, $\cos(y, \nu)$ – направляющие косинусы нормали ν .

$$\text{Верхняя грань: } y = \frac{h}{2} = 0,5 \text{ м;}$$

$$\sigma_x = -18x^2 + 12 \cdot 0,5^2 = -18x^2 + 3, \quad \sigma_y = 24x^2 - 18 \cdot 0,5^2 = 24x^2 - 4,5,$$

$$\tau_{xy} = 36x \cdot 0,5 = 18x.$$

$$l = \cos(x, \nu) = \cos(x, y) = 0,$$

$$m = \cos(y, \nu) = \cos(y, y) = 1,$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 = \tau_{xy} = -18x,$$

$$p_{yv} = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1 = \sigma_y = 24x^2 - 4,5.$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 = \tau_{xy} = 18x,$$

$$p_{yv} = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1 = \sigma_y = 24x^2 - 4,5.$$

Для сил нормальных p_{yv} и касательных p_{xv} строим их эпюры, изменяя x от 0 до $l = 6$ м.

Таблица 3 – Расчет нормальных и касательных сил для верхней грани

	0	3	6
p_{xv}	0	54	108
p_{yv}	-4,5	211,5	859,5

Нижняя грань: $y = -\frac{h}{2} = -0,5$ м;

$$\sigma_x = -18x^2 + 12 \cdot (-0,5)^2 = -18x^2 + 3, \quad \sigma_y = 24x^2 - 18 \cdot (-0,5)^2 = 24x^2 - 4,5,$$

$$\tau_{xy} = 36x \cdot (-0,5) = -18x,$$

$$l = \cos(x, \nu) = \cos(x, -y) = 0, \quad m = \cos(y, \nu) = \cos(y, y) = -1,$$

$$p_{x\nu} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot (-1) = -\tau_{xy} = 18x, \quad p_{y\nu} = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot (-1) = -\sigma_y = -24x^2 + 4,5.$$

Для сил нормальных $p_{y\nu}$ и касательных $p_{x\nu}$ строим их эпюры, изменяя x от 0 до $l = 6$ м.

Таблица 4 – Расчет нормальных и касательных сил для нижней грани

	0	3	6
$p_{x\nu}$	0	54	108
$p_{y\nu}$	4,5	-211,5	-859,5

Левая грань: $x = 0$;

$$\sigma_x = 12y^2, \quad \sigma_y = -18y^2, \quad \tau_{xy} = 0,$$

$$l = \cos(x, \nu) = \cos(x, -x) = -1; \quad m = \cos(y, \nu) = \cos(y, -x) = 0;$$

$$p_{x\nu} = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{xy} \cdot 0 = -\sigma_x = -12y^2, \quad p_{y\nu} = \tau_{xy} \cdot (-1) + \sigma_y \cdot 0 = -\tau_{xy} = 0.$$

Для сил нормальных $p_{x\nu}$ и касательных $p_{y\nu}$ строим их эпюры, изменяя y от $-\frac{h}{2} = -0,5$ м до $\frac{h}{2} = 0,5$ м.

Таблица 5 – Расчет нормальных и касательных сил для левой грани

	-0,5	0	0,5
$p_{x\nu}$	-3	0	3
$p_{y\nu}$	0	0	0

Правая грань: $x = l = 6$ м;

$$\sigma_x = -18 \cdot 6^2 + 12y^2 = -648 + 12y^2, \quad \sigma_y = 24 \cdot 6^2 - 18y^2 = 864 - 18y^2,$$

$$\tau_{xy} = 36 \cdot 6 \cdot y = 216y,$$

$$l = \cos(x, \nu) = \cos(x, x) = 1; \quad m = \cos(y, \nu) = \cos(y, x) = 0;$$

$$p_{x\nu} = \sigma_x \cdot 1 + \tau_{xy} \cdot 0 = \sigma_x = -648 + 12y^2, \quad p_{y\nu} = \tau_{xy} \cdot 1 + \sigma_y \cdot 0 = \tau_{xy} = 216y.$$

Для сил нормальных $p_{x\nu}$ и касательных $p_{y\nu}$ строим их эпюры, изменяя y от $-\frac{h}{2} = -0,5$ м до $\frac{h}{2} = 0,5$ м.

Таблица 6 – Расчет нормальных и касательных сил для правой грани

	-0,5	0	0,5
P_{xy}	-645	-648	-645
P_{yy}	-108	0	108

Эпюры сил, действующих на все четыре грани, приведены на рисунке.

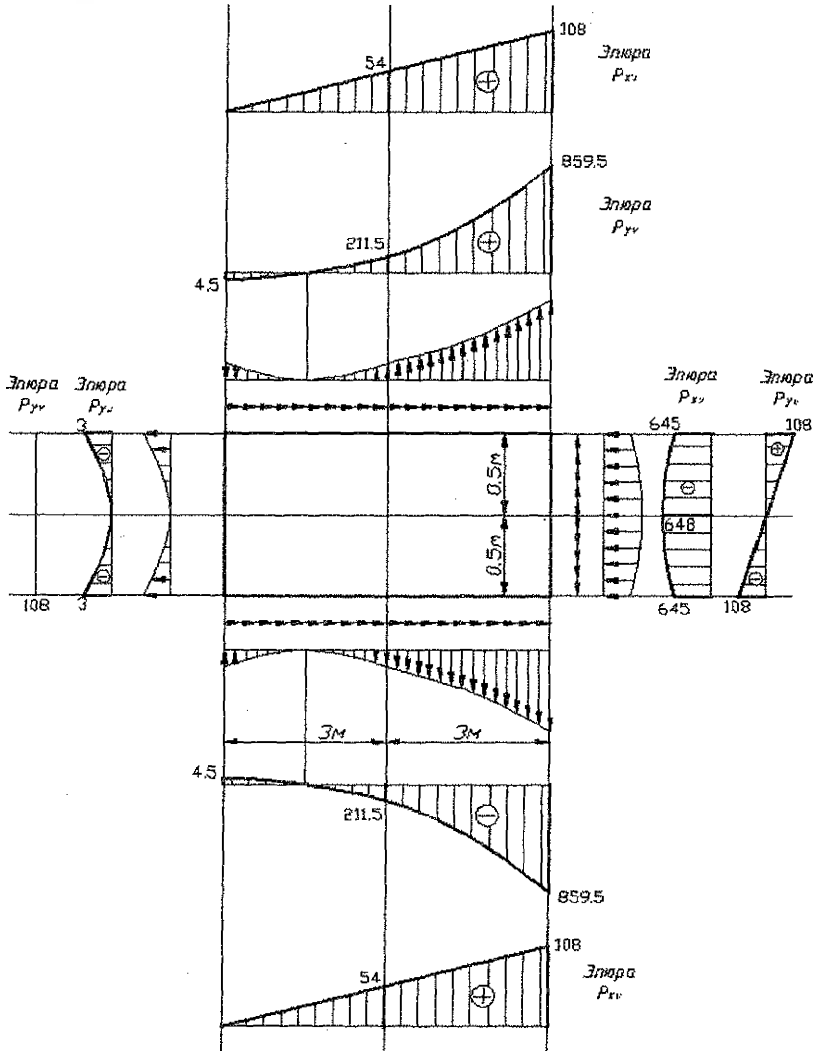


Рисунок 29 – Эпюры нормальных и касательных сил

Пример 4.

Дана прямоугольная изгибаемая пластина (рисунок 30). Требуется:

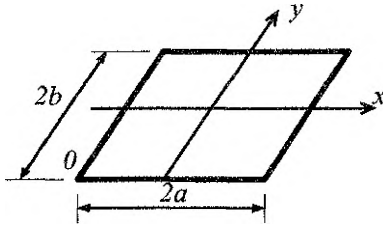
1) установить граничные условия, которым удовлетворяет функция прогибов $w(x, y)$;

2) проверить, удовлетворяет ли функция $w(x, y)$ уравнению Софи Жермен $\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$, и если это не так, то использовать уравнение Бубнова-Галеркина:

$$\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS. \text{ Из этих уравнений определить постоянную } C;$$

3) по формулам для $M_x, M_{yx}, M_{xy}, Q_x, M_y, Q_y$ составить их выражения;

4) построить эпюры изгибающих моментов M_x в сечении $x=0$ и M_y в сечении $y=0$.



Дано:

$$q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b},$$

$$w = C \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b},$$

$$a = 3\text{ м}, \quad \nu = 0,3,$$

$$b = 2\text{ м}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$q_0 = 2 \text{ МПа}, \quad [\sigma] = 200 \text{ МПа}.$$

Рисунок 30 – Расчетная схема пластинки

Решение:

1. Установим, каким граничным условиям удовлетворяет функция прогибов $w(x, y)$.

$$\text{При } x = \pm a, w = 0,$$

$$y = \pm b, w = 0.$$

Следовательно, пластинка оперта по всем четырем краям. Определим тип опирания. Углы поворота:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -C \cdot \frac{\pi}{2a} \cdot \sin \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -C \cdot \frac{3\pi}{2b} \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{2b},$$

$$\text{при } x = \pm a, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0,$$

$$y = \pm b, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \neq 0.$$

Значит, пластинка не зашкреплена. Проверим шарнирное опираение:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -C \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -C \left(\frac{3\pi}{2b} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

тогда при $x=\pm a$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$,

$$y=\pm b, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Итак, пластинка шарнирно опирается по всем четырем краям (рисунок 31).

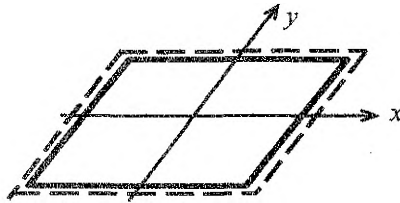


Рисунок 31 – Схема закрепления пластинки

2. Проверим, удовлетворяется ли уравнение Софи Жермен. Для этого вычислим производные:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = C \cdot \left(\frac{\pi}{2a} \right)^4 \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = C \cdot \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \left(\frac{3\pi}{2b} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b} \right)^4 \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b}.$$

Подставим значения производных и $q(x, y)$ в бигармоническое уравнение:

$$C \cdot D \cdot \pi^4 \left[\left(\frac{1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{3}{2b} \right)^2 \right]^2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b} = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b},$$

видим, что уравнение выполняется при соответствующем выражении для C .

Определяем постоянную C :

$$C = \frac{q_0}{D \cdot \pi^4 \left[\left(\frac{1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{3}{2b} \right)^2 \right]^2}.$$

3. Составим выражения для $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$.

Вычислим производные: $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = C \left(\frac{\pi}{2a} \right)^3 \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b};$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b} \right)^3 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{2b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = C \left(\frac{\pi}{2a} \right) \cdot \left(\frac{3\pi}{2b} \right) \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{2b};$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = C \frac{\pi}{2a} \cdot \left(\frac{3\pi}{2b} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = C \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b} \right) \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{2b}.$$

Тогда с учетом выражения C получим:

$$M_x = \frac{4q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \mu \frac{9}{b^2} \right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2} \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$M_y = \frac{4q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\left(\frac{9}{b^2} + \mu \frac{1}{a^2} \right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$M_{xy} = - \frac{12q_0(1-\mu)}{ab \cdot \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{2a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{2b};$$

$$Q_x = - \frac{2q_0 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{9}{ab^2} \right)}{\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$Q_y = - \frac{2q_0 \left(\frac{27}{b^3} + \frac{9}{a^2 b} \right)}{\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{2b}.$$

4. Построим эпюры M_x в сечении $x=0$ и эпюры M_y, M_{xy}, Q_y в сечении $y=0$.

$$x=0, \quad M_x = \frac{4q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \mu \frac{9}{b^2} \right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b} = 114 \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b} \text{ (кН)}$$

$$M_{yx}=0; \quad Q_x=0;$$

при $y=\pm b$: $M_x=0, 114 \cdot 10^6 \cdot 0=0$;

при $y=\pm b/2$: $M_x=0, 114 \cdot 10^6 \cdot (-0,707) = -81 \text{ кН}$;

при $y=0$: $M_x=0, 114 \cdot 10^6 \cdot 1 = 114 \text{ кН}$;

$$y=0, \quad M_y = \frac{4q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\left(\frac{9}{b^2} + \mu \frac{1}{a^2} \right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} = 332 \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} \text{ (кН)}$$

$$M_{xy}=0; \quad Q_y=0;$$

при $x=\pm a$: $M_y=332 \cdot 0=0$;

при $x=\pm a/2$: $M_y=332 \cdot (-1) = -332 \text{ кН}$;

при $x=0$: $M_y=332 \cdot 1 = 332 \text{ кН}$.

По полученным значениям строим эпюры M_x, M_y (рисунок 32).

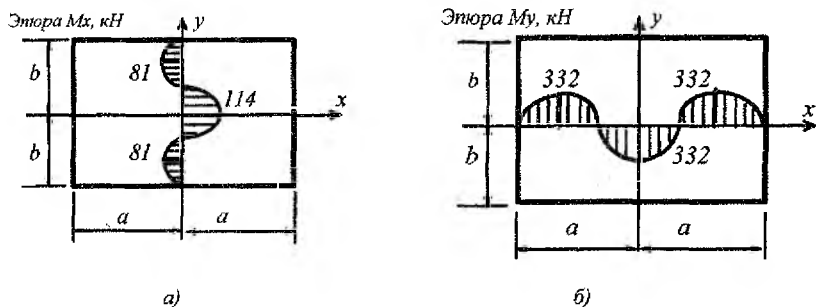


Рисунок 32 – Эпюры изгибающих моментов

Пример 5.

Кольцевая пластина (рисунок 33) жестко закреплена по наружному контуру и нагружена радиальными изгибающими моментами m , равномерно распределенными по внутреннему контуру.

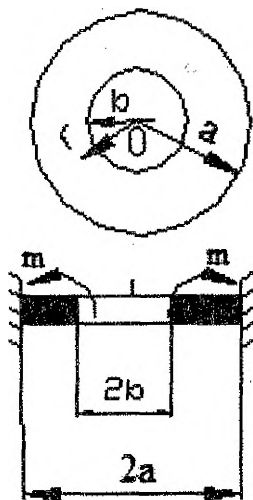


Рисунок 33 – Схема кольцевой пластины

Требуется:

1. Проверить граничные условия.
2. Определить постоянную C .
3. Составить выражения для внутренних сил.
4. В диаметральной сечении построить эпюры M_r, M_θ .

$$W = C \left(2\ln \frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right), \quad a=8 \text{ м}, \quad b=4 \text{ м}, \quad \nu=0,3.$$

Решение:

1. Проверка граничных условий. Прогиб и угол поворота в радиальном направлении при $r=a$ должны быть равны нулю:

$$\text{при } r=a, w=0, \alpha_r = \frac{dw}{dr} = 0.$$

$$w(r) = C \left(2\ell n \frac{a}{a} + \frac{a^2 - a^2}{a^2} \right) = 0;$$

$$\alpha_r = C \left(2 \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{a} - \frac{2r}{a^2} \right) = 2C \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} \right);$$

$$\alpha_r(a) = 2C \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2} \right) = 0.$$

Граничные условия выполняются.

2. Определение постоянной C .

Используем условие: при $r=b$, $M_r = m$.

Находим производные:

$$\frac{d^2w}{dr^2} = 2C \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$\frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 2C \frac{\nu}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} \right) = 2C\nu \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$M_r = -2CD \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu}{a^2} \right) = 2CD \frac{a^2(1-\nu) + r^2(1+\nu)}{a^2 r^2}.$$

$$2CD \frac{a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)}{a^2 b^2} = m;$$

$$C = \frac{ma^2 b^2}{2D [a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]} \left(\frac{\text{кН} \cdot \text{М}}{\text{кН} \cdot \text{М} \cdot \text{М}^2} \cdot \text{М}^4 = \text{М} \right).$$

2. Находим выражения для M_r, M_θ :

$$M_r = \frac{mb^2}{[a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]} \left[(1+\nu) + (1-\nu) \frac{a^2}{r^2} \right],$$

$$\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 2C \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$\nu \frac{d^2w}{dr^2} = 2C\nu \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$M_{\Theta} = -2CD \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu}{a^2} \right) = \frac{mb^2}{[a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]} \left[(1+\nu) + (-1+\nu) \frac{a^2}{r^2} \right].$$

3. Строим эпюры M_r, M_{Θ} (рисунок 30).

Вычислим:

$$\frac{b^2}{[a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]} = \frac{4^2}{8^2(1-0,3) + 4^2(1+0,3)} = 0,244,$$

$$M_r = 0,244m \left(1,3 + \frac{44,8}{r^2} \right);$$

$$M_{\Theta} = 0,244m \left(1,3 - \frac{44,8}{r^2} \right).$$

Находим:

при $r = 4$ м, $M_r = m$; $M_{\Theta} = -0,366m$;

при $r = 6$ м, $M_r = 0,621m$; $M_{\Theta} = 0,014m$;

при $r = 8$ м, $M_r = 0,488m$; $M_{\Theta} = 0,146m$.

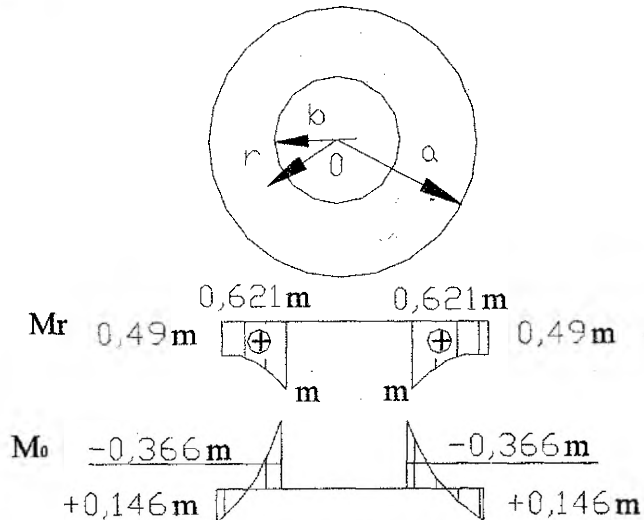


Рисунок 34 – Эпюры моментов

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа включает 2 задачи. Студенты с последней четной цифрой номера группы решают задачи 1, 2, нечетной цифрой – 3 и 4.

ЗАДАЧА 1. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ УПРУГОГО ТЕЛА

Заданы компоненты напряжения на гранях элемента, вырезанного в некоторой точке нагруженного тела (рисунок 35). Тело изотропно, материал подчиняется закону Гука. Модуль продольной упругости E и коэффициент Пуассона ν определяются по таблице 2.

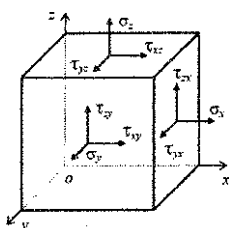


Рисунок 35

Требуется:

- 1) нанести исходные компоненты тензора напряжений на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности рассматриваемой точки;
- 2) определить величину и направление главных напряжений;
- 3) вычислить компоненты тензора деформаций в заданных осях, построить тензор деформаций.

Числовые данные для выполнения задачи следует выбрать из таблицы 7 согласно пяти последним цифрам шифра и первым пяти буквам русского алфавита.

Например, записав шифр и под каждой цифрой его буквы:

шифр — 1 0 1 7 2 3

буква — а б в г д

выбирают из указанной таблицы число, которое находится на пересечении соответствующих строки и столбца. Причем, вначале берется буква, а затем по ней определяется цифра.

ПРИМЕР. Шифр — 101723. В таблице 7 по горизонтали в последней строке первая буква "а". На пересечении этого столбца со строчкой, соответствующей цифре шифра, т.е. цифре 0, находится $\sigma_x = -60$ МПа. Затем по следующей букве "б" и соответствующей цифре шифра 1, пересечении столбца "б" и строки "1", получаем величину " σ_y " и т.д.

Таблица 7 – Числовые данные к задаче 1

№ строки	σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа	τ_{xy} , МПа	τ_{yz} , МПа	τ_{zx} , МПа	E , ГПа	ν
1	30	-40	60	20	-10	30	220	0,3
2	-80	20	-50	30	40	-10	150	0,25
3	50	-20	40	-10	10	20	120	0,22
4	-20	30	-40	10	-60	10	85	0,32
5	40	-50	20	-20	80	-60	100	0,35
6	20	-10	-30	50	-30	70	70	0,33
7	-40	50	50	-30	10	-90	60	0,25
8	-90	80	-60	40	-70	-40	70	0,23
9	-30	-70	70	-40	-20	-50	80	0,27
0	-60	-50	-80	-50	-40	-30	110	0,36
	а	б	в	г	д	а	в	г

ЗАДАЧА 2. РАСЧЕТ БАЛКИ-СТЕНКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Для заданной схемы балки-стенки требуется:

- 1) определить значения функции напряжений ϕ во всех узлах предварительно нанесенной сетки (3×3) методом конечных разностей;
- 2) подсчитать напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в узловых точках сетки и построить эпюры этих напряжений в одном из вертикальных сечений;
- 3) сравнить полученное решение с решением сопротивления материалов и выполнить анализ результатов сравнения.

Схема закрепления балки-стенки приведена на рисунке 36. Схемы загрузки балки-стенки (рисунок 37) следует принимать по двум последним цифрам шифра. Во всех вариантах принять $P^* = 0$.

Числовые данные для выполнения задачи следует выбирать из таблицы 8 согласно пяти последним цифрам шифра и первым пяти буквам русского алфавита (пояснение в условии задачи 1).

Таблица 8 – Числовые данные к задаче 2

№ строки	l (м)	h (м)	a (м)	b (м)	d (м)	q (Кн/м ²)	P (Кн/м)
1	9	6	0	0	0	10	80
2	12	6	1/6	1/2	1	50	160
3	12	9	1/3	1/3	2	25	100
4	15	9	1/2	1/6	3	45	140
5	15	12	0	1/6	4	65	100
6	18	9	1/6	1/3	4	40	120
7	18	12	1/3	1/2	3	35	110
8	18	15	1/2	0	2	50	80
9	21	12	0	0	1	40	120
0	21	18	1/3	1/3	0	25	70
	в	д	в	г	д		

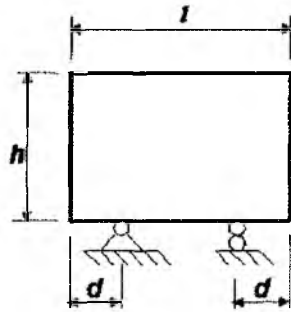


Рисунок 36 – Схема закрепления балки-стенки

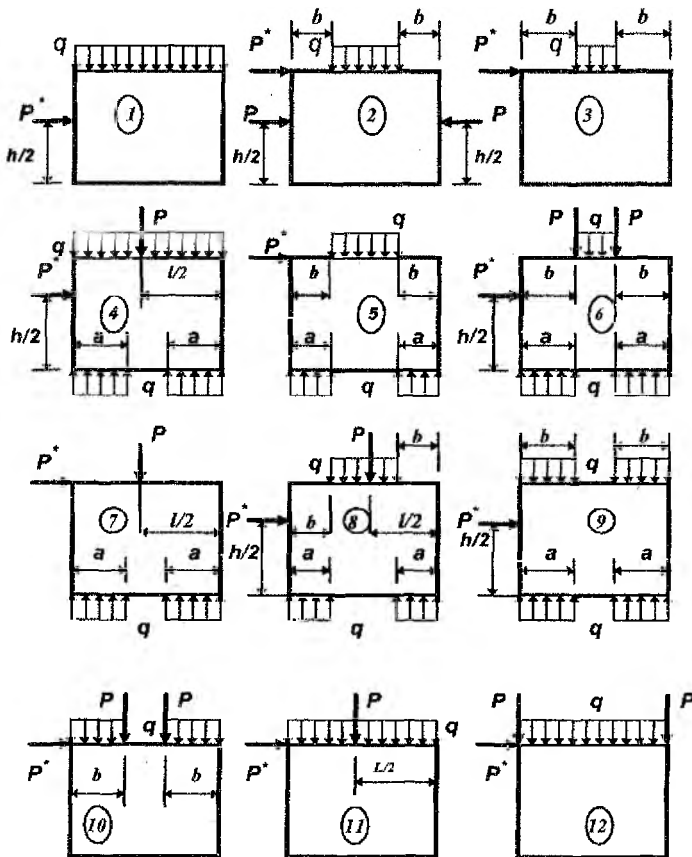
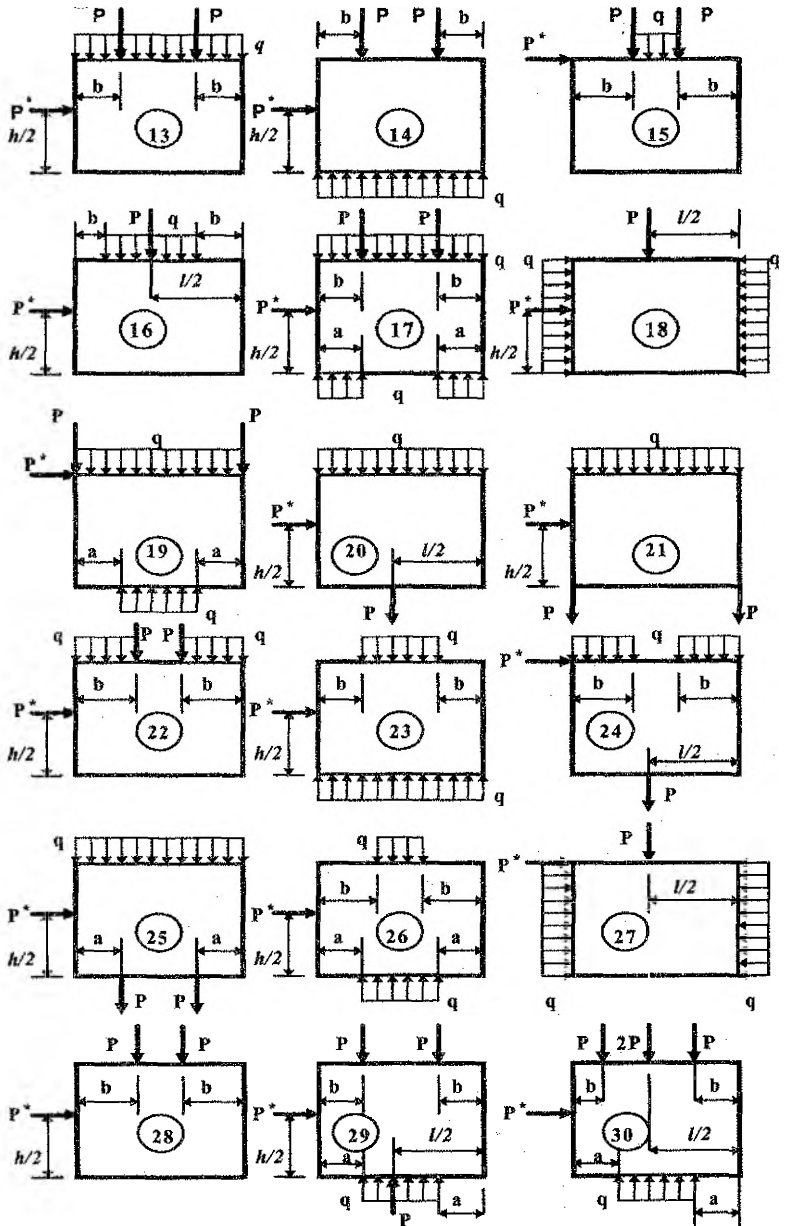


Рисунок 37 – Схемы загрузки балки-стенки



ЗАДАЧА 3. РАСЧЕТ ПОЛОСЫ-БАЛКИ

Дана прямоугольная полоса-балка длиной l , высотой h и толщиной, равной 1. Начало координат O принято в середине торцового сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси Oy и Oz . Продольная ось Ox проходит посередине полосы-балки. Объемными силами пренебречь.

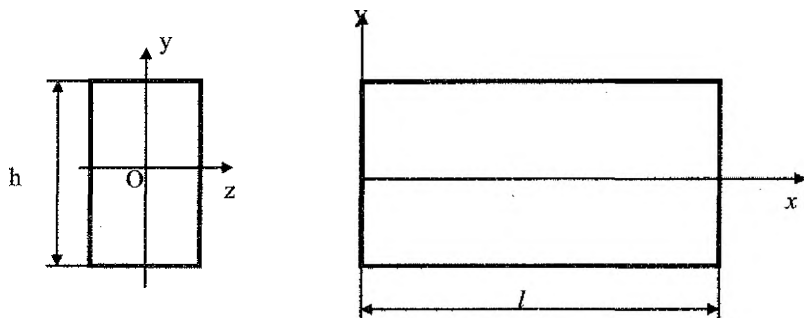


Рисунок 38 – Схема полосы-балки

Требуется:

1) проверить, можно ли предложенную функцию $\varphi(x,y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости;

4. найти выражения для напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} ;

5. построить эпюры напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} для одного сечения: либо перпендикулярного оси x , либо перпендикулярного оси y ;

6. определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры.

Числовые данные для решения задачи следует выбирать из таблицы 4 согласно пяти последним цифрам шифра и первым пяти буквам русского алфавита (пояснение приведено в условии к задаче 1).

Таблица 9 – Исходные данные к расчету полосы-балки

№ строки	Функция напряжений $\varphi(xy)$	a	b	l	h	x	y
		м					
1	$\varphi = a(x^4 - y^4) + bx^3y + xy^3$	1	1	5	1	1	0,2
2	$\varphi = ax(x^2 + y^2) + bx^2y + xy$	2	1	6	1	2	0,3
3	$\varphi = ay(x^2 + y^2) + bxy^2 + xy$	2	1	5	2	2	0,4
4	$\varphi = axy^3 + b(x^2y^2 - \frac{x^4}{3})$	1	2	6	1	2	0,3
5	$\varphi = ax^3 + bx^2y + xy^2 + xy$	1	2	6	2	2	0,5

Продолжение таблицы 9

6	$\varphi = a(x^4 - y^4) + by^2 + by^2(x_2 - \frac{y^2}{3})$	2	2	4	2	1	0,5
7	$\varphi = a(y^4 - x^4) + bxy^3 + x^2y$	2	1	4	2	1	0,5
8	$\varphi = \frac{a}{12}(x^4 - y^4) + \frac{1}{3}xy(bx^2 + y^2)$	2	1	6	1	3	0,3
9	$\varphi = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}bx^2y^2 - \frac{1}{6}by^4$	1	2	5	1	2	0,2
0	$\varphi = \frac{1}{3}axy^3 + \frac{1}{2}bx^2y^2 - \frac{1}{6}bx^4$	2	1	5	2	2	0,4
	е	д	е	г	д	е	в

ЗАДАЧА 4. РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Номер варианта выбирается в соответствии с суммой 3-х последних цифр шифра.

Варианты 1-15. Расчет прямоугольной пластины.

Дана прямоугольная изгибаемая пластина (рисунок 39).

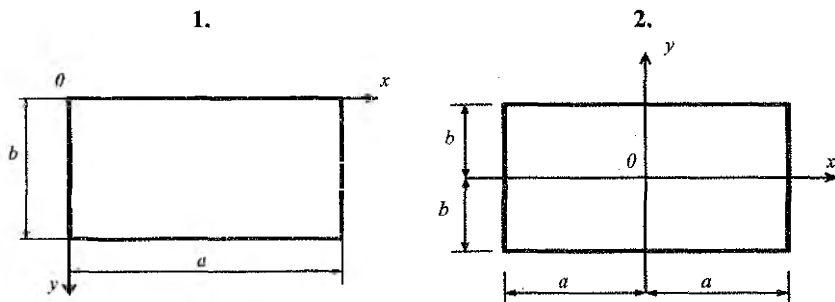


Рисунок 39 – Схема пластины

Требуется:

1) установить граничные условия, которым удовлетворяет функция прогибов $w(x, y)$;

2) проверить, удовлетворяет ли функция $w(x, y)$ уравнению Софи Жермен $\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$, и если это не так, то использовать уравнение Бубнова-Галеркина:

$$\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS. \text{ Из этих уравнений определить постоянную } C \text{ и вы-}$$

числить максимальный прогиб W_{max} ;

3) по формулам для $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ составить их выражения;

4) построить эпюры внутренних сил в одном из сечений: сечение x - эпюры M_x, Q_x, M_{xy} ; сечение y - эпюры M_y, Q_y, M_{yx} .

Функции для прогиба и нагрузки взять из таблицы 10, а числовые значения – из таблицы 11. Числовые данные по таблице 11 выбираются согласно пяти последним цифрам шифра и первым пяти буквам русского алфавита (см. пример в условии задачи 1).

Таблица 10 – Числовые данные к расчету прямоугольных пластин

Сумма трех последних цифр шифра	Вид пластины по рисунку 39. Выражения для нагрузки $q(x, y)$ и прогиба $W(x, y)$. D, C и q_0 - постоянные величины
0	Рисунок 39 а $q = const; W = C(x-a)^2(y-b)^2$
1	Рисунок 39 а $q = const; W = Cxy(x-a)(y-b)$
2	Рисунок 39 а $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; W = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
3	Рисунок 39 а $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}; W = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$
4	Рисунок 39 а $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; W = C \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
5	Рисунок 39 б $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
6	Рисунок 39 б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}$
7	Рисунок 39 б $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
8	Рисунок 39 б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{2\pi y}{b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{2\pi y}{b}$
9	Рисунок 39 б $q = const; W = C(x^2 - a^2)(y - b)^2$
10	Рисунок 39 б $q = const; W = C(x - a)^2(y^2 - b^2)$

Продолжение таблицы 10

11	Рисунок 39 б $q = const; W = C(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$
12	Рисунок 39 б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
13	Рисунок 39 б $q = q_0 \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}$
14	Рисунок 39 б $q = q_0 \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
15	Рисунок 39 б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}$

Таблица 11 – Числовые данные к задаче 4

№	М					ν
	а	б	h	х	у	
1	4	3	0,1	3	2	0,35
2	3	3	0,1	2	2	0,30
3	3	3	0,1	1	1	0,25
4	4	4	0,2	2	3	0,25
5	5	3	0,1	3	1	0,30
6	3	5	0,1	1	3	0,30
7	3	3	0,2	2	2	0,35
8	5	5	0,2	2	2	0,35
9	5	4	0,2	3	1	0,30
0	4	5	0,2	2	3	0,30
	д	е	б	г	д	е

Варианты 16-27. Расчет круглой или кольцевой пластины.

Дана круглая сплошная или кольцевая пластина. Для данной схемы закрепления требуется:

- 1) проверить граничные условия.
- 2) определить постоянную С.
- 3) составить выражения для внутренних сил.
- 4) в диаметральной сечении построить эпюры M_r, M_θ .

Функцию прогибов взять из таблицы 12, а числовые значения – из таблицы 13.

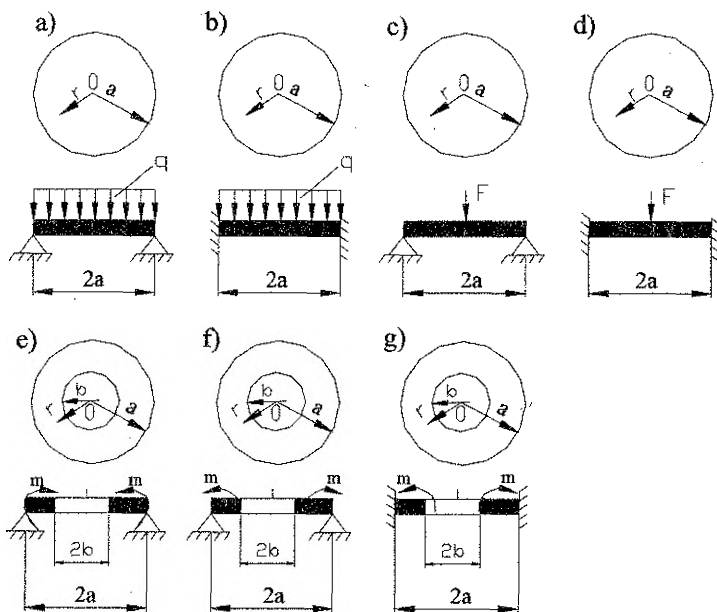


Рисунок 40 – Схемы круглых и кольцевых пластин

Таблица 12 – Выражения для нагрузки и прогибов

Сумма трех последних цифр шифра	Вид пластины по рисунку 40. Выражения для нагрузки и прогиба $W(r)$. D и C постоянные величины.
16	Рисунок 40.а; $q = const$; $W = C(a^2 - r^2) \left(\frac{5+\nu}{1-\nu} a^2 - r^2 \right)$
17	Рисунок 40.б; $q = const$; $W = C(a^2 - r^2)^2$
18	Рисунок 40.с; $W = C \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right]$
19	Рисунок 40.д; $W = C \left(r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{2} \right)$
20	Рисунок 40.е; $W = C \left[\frac{a^2 - r^2}{a^2} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} \right]$
21	Рисунок 40.ф; $W = C \left[\frac{a^2 - r^2}{a^2} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \ln \frac{r}{a} \right]$
22	Рисунок 40.г; $W = C \left(2 \ln \frac{r}{a} - \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right)$

Продолжение таблицы 12

23	Рисунок 40.а; $q = const$; $W = C_3 + C_4 r^2 + \frac{q}{64D} r^4$
24	Рисунок 40.б; $q = const$; $W = C_3 + C_4 r^2 + \frac{q}{64D} r^4$
25	Рисунок 40.д; $W = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$
26	Рисунок 40.е; $W = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$
27	Рисунок 40.г; $W = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$

Примечания:

1. Радиальные моменты m равномерно распределены по внутреннему или наружному контуру.

2. Нагрузка q равномерно распределена по площади пластины.

3. В вариантах 18 и 19 постоянную C можно определить из равенства:

$$-D \left(\frac{\partial^3 W}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \frac{F}{2\pi a}$$

4. В варианте 20 постоянную C можно определить из равенства: при $r = a, M_r = m$; в вариантах 21, 22 – из условия: при $r = b, M_r = m$.

5. В варианте 23 постоянные C_3, C_4 находим из условий: при $r = a, W = 0, M_r = 0$; в варианте 24: при $r = a, W = 0, dW/dr = 0$.

6. Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из условий:

вариант 25: при $r = b, Q_r = 0; M_r = 0$;

при $r = a, W = 0; M_r = m$;

вариант 26: при $r = a, M_r = m$;

при $r = a, W = 0; M_r = 0$;

вариант 27: при $r = b, Q_r = 0; M_r = 0$;

при $r = a, W = 0; dW/dr = 0$.

Таблица 13 – Числовые данные к расчету круглой или кольцевой пластины

№ строки	м			v
	а	б	h	
1	6	4	0,1	0,25
2	5	3	0,1	0,27
3	4	2	0,2	0,4
4	5	3	0,2	0,3
5	5	3	0,2	0,33
6	6	4	0,1	0,29
7	6	3	0,1	0,35
8	5	3	0,2	0,4
9	5	3	0,1	0,36
0	6	3	0,2	0,32
	д	е	д	г

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968.
2. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Высшая школа, 1979.
3. Киселев, В.А. Плоская задача теории упругости. – М.: Высшая школа, 1976.
4. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990.
5. Рочняк, О.А. Основы теории упругости / О.А. Рочняк, В.Г. Фёдоров, В.М. Хвисевич. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2001.
6. Рекач, В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. – М., 1984.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

*Веремейчик Андрей Иванович
Хвусевич Виталий Михайлович*

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Методические указания и задания
к выполнению контрольной работы
для студентов специальности

1-70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство”
факультета инновационной деятельности и финансов
заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Веремейчик А.И.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.

Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 24.03.2014 г. Формат 60x84¹/₁₆. Гарнитура Times New Roman.
Бумага «Снегурочка». Усл. п. л. 3,95 . Уч. изд. 4,25 . Заказ № 240.
Тираж 110 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.