

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

“БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

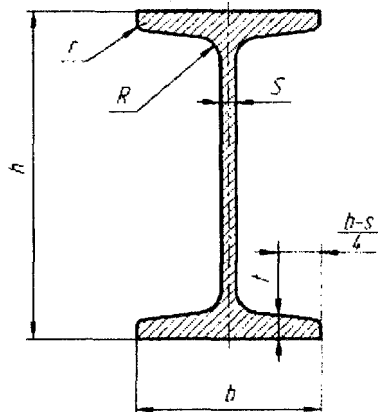
Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-проектировочной работы №4  
по курсу “Сопротивление материалов”

для студентов строительного факультета специальностей  
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,  
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,  
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,  
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»



Брест 2014

Сопротивление материалов является одной из общепрофессиональных дисциплин при подготовке инженеров строительных специальностей.

Для закрепления теоретического материала и приобретения навыков инженерных расчетов студенты выполняют расчетно-проектировочные работы по основным разделам курса.

Настоящие задание и методические указания позволяют индивидуализировать и активизировать самостоятельную работу студентов при изучении курса «Сопротивление материалов».

Составители: Соловей П.И., доцент  
Хвусевич В.М., доцент, к.т.н.  
Черноиван Н.В., доцент, к.т.н.

Рецензент: заместитель директора филиала УП «Белорусский научно-исследовательский институт» – «Научно-технический центр»,  
к.т.н. Деркач В.Н.

## ВВЕДЕНИЕ

Задания и методические указания к расчетно-проектировочной работе №4 соответствуют учебным планам специальностей 1-70 01 01; 1-70 02 01; 1-70 02 02; 1-70 03 01 и охватывают наиболее важные разделы курса сопротивления материалов, которые изучаются студентами в весеннем семестре на втором курсе. Методические указания позволяют студентам изучить и применить теоретический материал для решения задач на примерах расчета статически определимых балок, испытывающих прямой изгиб.

В методических указаниях приведены требования к оформлению расчетно-проектировочной работы и пример её выполнения.

### УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ

1. Необходимые данные к выполнению расчетно-проектировочной работы следует принимать по схемам и таблицам согласно номеру варианта и номеру схемы.
2. Расчетно-проектировочная работа выполняется на стандартных листах формата А4 (210x297 мм) и оформляется в следующем порядке: титульный лист, задание на расчетно-проектировочную работу, текст расчетов, выводы, перечень литературы.
3. Чертежи и схемы следует выполнять на отдельных листах с соблюдением правил графики и масштабов. На эпюрах, чертежах необходимо указывать значение числовых величин, используемых в расчетах.
4. Значения полученных расчетных величин следует округлять до десятых или сотых с указанием размерностей и подчеркивать в конце каждого расчета.
5. Для проверки правильности выполненных расчетов можно воспользоваться пакетом программ в вычислительном центре кафедры информатики и прикладной математики.

## 1. Прямой изгиб

### 1.1 Общие понятия

Для большинства элементов строительных конструкций изгиб является едва ли не самым распространенным видом деформации. Прямой брусок, испытывающий изгиб, называют балкой. Изгиб балок вызывают силы (нагрузки), которые перпендикулярны к продольной оси балки, или пары сил, лежащие в плоскостях, проходящих через эту ось. Если все нагрузки действуют в одной плоскости, называемой силовой, проходящей через геометрическую ось балки и одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения, то такой изгиб называется прямым. Если в поперечных сечениях действуют только изгибающие моменты, то такой изгиб называют чистым прямым изгибом, а при одновременном действии поперечных сил и изгибающих моментов – прямой поперечный изгиб. При прямом изгибе продольная ось (геометрическое место центров тяжести поперечных сечений) из прямолинейной превращается в плавную кривую линию, называемую изогнутой осью балки или упругой линией балки. Упругая линия показывает вертикальные перемещения центров тяжести поперечных сечений под действием нагрузок.

### 1.2 Расчет балок на прочность

В общем случае расчет балок на прочность сводится:

а) к расчету по наибольшим нормальным напряжениям. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R,$$

где  $M_{\max}$  – наибольший изгибающий момент (устанавливается по эп. M);

$W_x$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки при изгибе;

$R$  – расчетное сопротивление материала балки.

По условию прочности можно решить три типа задач. Наибольший интерес представляет проектная задача, т.е. определение требуемого момента сопротивления поперечного сечения балки:

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R};$$

б) к расчету по наибольшим касательным напряжениям, используется условие прочности в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{x,\max}^{\text{отс}}}{I_x b} \leq R_s,$$

где  $Q_{\max}$  – наибольшая поперечная сила (устанавливается по эпюре Q);

$S_{x,\max}^{\text{отс}}$  – статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси X;  $I_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно главной центральной оси X;  $b$  – ширина поперечного сечения балки на уровне точек, в которых определяется  $\tau$ .

Обычно расчет по  $\tau_{\max}$  сводится к проверке прочности балок, а условия прочности составляют для опасных точек опасных поперечных сечений. Опасными сечениями являются те сечения, в которых действуют наибольшие поперечные силы ( $Q$ ), а опасные точки – это точки поперечного сечения, расположенные на нейтральной оси  $X$ . В тех случаях, когда условие прочности не выполняется, поперечное сечение следует увеличить;

в) к расчету на прочность по главным напряжениям. Проверка прочности балок по главным напряжениям сводится к составлению условий прочности с использованием одной из теорий прочности. Для балок, выполненных из пластичных материалов, применяют третью или, чаще всего, четвертую теорию прочности, которая является наиболее экономичной. Так, условия прочности по третьей и четвертой теориям прочности имеют вид:

$$\sigma_{\text{с}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R;$$

$$\sigma_{\text{с}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R,$$

где  $\sigma_{\text{с}}$ ,  $\sigma_{\text{с}}^{\text{III}}$  – расчетные (или эквивалентные –  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}$ ,  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}}$ ) напряжения для проверяемых точек сечений;  $\sigma$ ,  $\tau$  – нормальные и касательные напряжения для соответствующих точек.

По главным напряжениям следует проверять те сечения, в которых одновременно действуют наибольшие или близкие к ним поперечные силы  $Q$  и изгибающие моменты  $M$ . Опасными точками таких сечений являются обычно точки, расположенные в местах резкого изменения ширины поперечных сечений. Так, например, в двутаврах, швеллерах – это точки примыкания полков к стенкам, ширина ( $b$ ) которых на порядок меньше ширины полков.

### 1.3 Расчет балок на жесткость

При проверке балок на жесткость используется условие жесткости:

$$y_{\max} \leq [f] ; \quad [f] = \frac{l}{k},$$

где  $y_{\max}$  – максимальный прогиб балки в пролете, консолей и т.д.;

$[f]$  – допускаемая величина прогиба;  $l$  – длина проверяемых участков балки;

$k$  – коэффициент, величина которого задается нормами ( $k=100; 200; 400; 500; 1000$ ).

Для определения перемещений балок или при построении их эпюор целесообразнее использовать универсальный метод, т.е.

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \sum M \frac{(z-a)^2}{2} + \sum F \frac{(z-b)^3}{6} + \sum q \frac{(z-c)^4}{24} - \sum q \frac{(z-d)^4}{24};$$

$$EI_x \theta = EI_x \theta_0 + \sum M \cdot (z-a) + \sum F \frac{(z-b)^2}{2} + \sum q \frac{(z-c)^3}{6} - \sum q \frac{(z-d)^3}{6},$$

где  $y_0$ ;  $\theta_0$  – начальные параметры, т.е. прогиб и угол поворота сечения, расположенного в начале координат, т. О. Начало координат чаще всего располагают

на левом конце балки в центре тяжести поперечного сечения.  $z$  – расстояние от начала координат (т. О) до сечения, для которого определяются:  $y, \theta$ ;  $a, b, c, d$  – расстояния от начала координат до сечений в которых приложены соответственно:  $m, F, q, -q$ .

#### 1.4 Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит сущность методов расчета по допускаемым напряжениям, разрушаемым нагрузкам и по предельным состояниям?
2. Что понимают под пластическим шарниром и пластическим моментом сопротивления, как определяется его величина?
3. Какие сечения и точки в сечении считаются опасными при расчете балок на прочность: а) по нормальным напряжениям, б) по касательным напряжениям, в) по главным напряжениям?
4. Какие поперечные сечения балок являются более рациональными?
5. Что понимают под упругой линией балки (или изогнутой осью балки)?
6. Какие известны методы определения перемещений балок?
7. Какой вид имеет приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки?
8. Какой вид имеет универсальное уравнение изогнутой оси балки?
9. Что понимают под начальными параметрами? Как определяется их величина?
10. Как осуществляется расчет балок на жесткость?
11. Какая существует связь эпюры прогибов и эпюры моментов?
12. Как определяются аналитически максимальные моменты и прогибы балок?

#### 1.5 Задание по расчетно-проектировочной работе №4

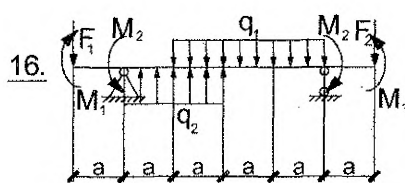
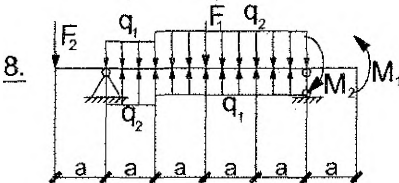
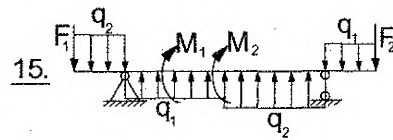
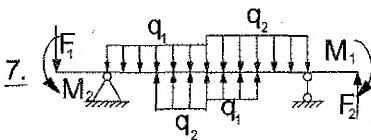
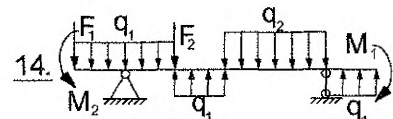
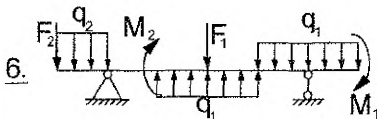
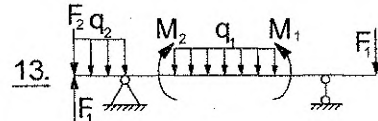
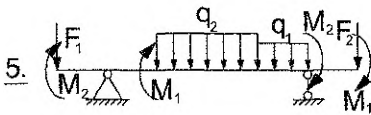
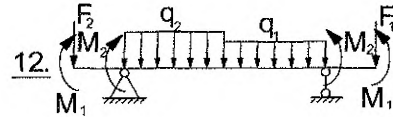
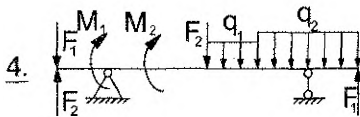
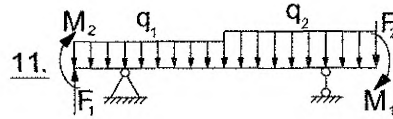
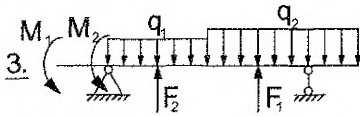
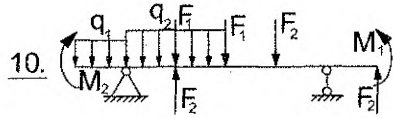
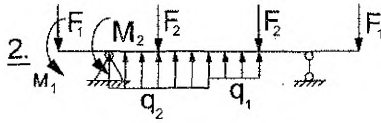
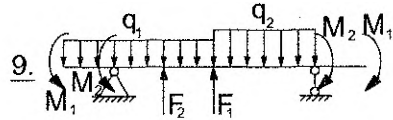
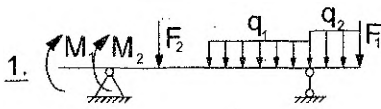
##### **«Расчет статически определяемой двутавровой балки на прочность и жесткость»**

Дано: Двутавровая балка (принять по номеру схемы) загружена внешней нагрузкой (числовые данные принять с учетом номера варианта). Расчетное сопротивление материала балки  $R=230$  МПа,  $R_s=133$  МПа; модуль продольной упругости  $E=206$  ГПа; допускаемый прогиб  $[f/1]=1/500$  и  $1/100$  для консолей.

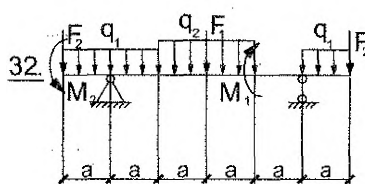
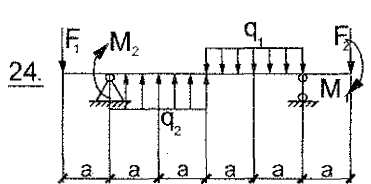
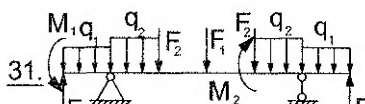
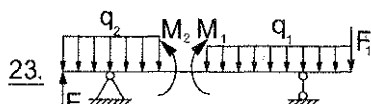
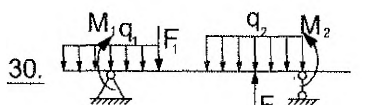
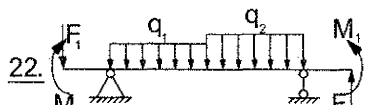
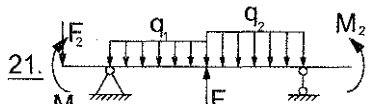
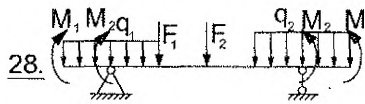
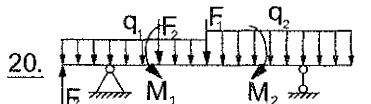
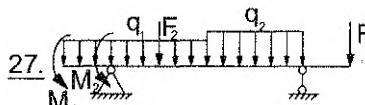
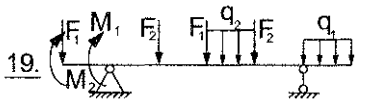
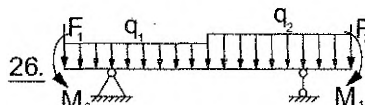
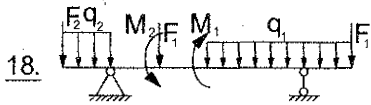
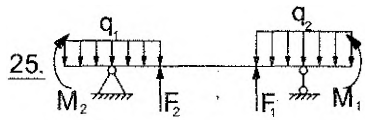
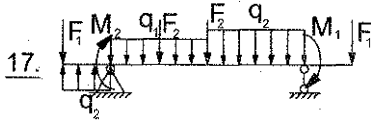
Требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов ( $Q, M$ );
- 3) подобрать сечение балки и проверить прочность по касательным и главным напряжениям с использованием четвертой теории прочности;
- 4) определить главные напряжения для одной из опасных точек (т.2);
- 5) построить эпюры нормальных, касательных, главных и экстремальных касательных напряжений для опасного сечения по главным напряжениям;
- 6) построить эпюру прогибов балки, определив прогибы трех сечений в пролете и консолей;
- 7) проверить балку на жесткость;
- 8) проверить правильность построения эпюр  $Q, M, Y$  с помощью ЭВМ с приложением распечатки.

### 1.6 Схемы двутавровых балок с нагрузками



продолжение схем балок





### 1.7 Числовые значения нагрузок для балок

Номер варианта	Размер а, м	Нагрузка			Индекс нагрузки		
		q, кН/м	F, кН	M, кНм	q	F	M
1	0,9	30	110	40	2	1,2	2
2	1,1	40	100	30	2	1	1
3	1,0	32	120	34	1	1	1,2
4	0,8	34	90	36	1,2	2	1
5	1,1	30	70	32	2	1	2
6	1,0	36	80	38	1	2	1,2
7	1,2	38	90	28	1,2	1	1
8	0,9	40	100	30	2	2	2
9	1,0	30	110	32	1,2	1	1,2
10	1,1	40	80	30	1	2	2
11	0,9	34	90	40	2	1	1
12	1,2	36	65	38	1,2	2	1
13	1,1	38	70	32	1	1	2
14	0,9	40	75	30	2	2	1
15	1,2	42	80	28	1	1	1,2
16	1,1	44	60	34	1,2	2	1
17	1,0	32	70	42	2	2	2
18	0,8	42	80	40	1,2	1	1,2
19	0,9	34	90	32	1	2	2
20	1,1	36	100	36	1	1	1
21	0,8	30	110	28	2	2	2
22	0,9	38	120	30	2	1	1
23	1,0	40	95	42	1	2	1,2
24	1,1	32	110	28	1,2	2	1
25	1,2	34	105	40	1	1	2
26	1,1	38	110	30	2	1	1,2
27	1,2	40	80	40	1	2	1
28	0,8	34	90	36	2	1	2
29	0,9	30	100	38	1	2	1
30	1,0	32	110	32	1,2	1	1,2
31	1,1	50	90	40	1	2	2
32	0,8	45	60	30	2	1	1
33	0,9	40	70	35	1,2	2	1
34	0,8	50	80	32	1	2	2
35	1,0	44	120	30	2	1	1
36	1,1	30	140	36	1,2	2	2
37	0,9	34	70	38	2	1	2
38	1,1	32	110	28	1	2	1
39	1,0	40	80	40	1,2	2	1
40	0,8	36	70	50	2	1	1,2

### 1.8 Пример расчета двутавровой балки на прочность и жесткость

Дано: Двутавровая балка (рис. 1.1) загружена сосредоточенной силой  $F=40$  кН, моментом  $M=50$  кНм и распределенной нагрузкой  $q=30$  кН/м. Расчетное сопротивление материала балки  $R=230$  МПа,  $R_s=133$  МПа; модуль продольной упругости  $E=206$  ГПа; допустимый прогиб  $[f/l]=1/500$  и  $1/100$  для консолей.

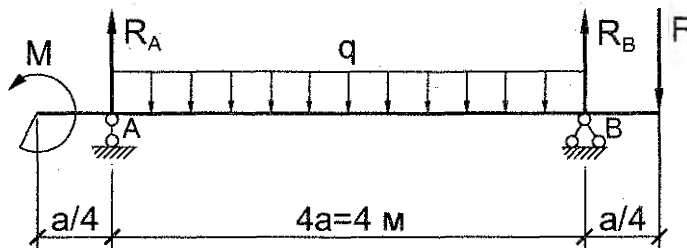


Рисунок 1.1 – Расчетная схема балки

Требуется: (см. п.п. 1-8)

#### Решение

##### 1. Определение опорных реакций.

Составим уравнения статического равновесия:

$$\sum M_A = 0; 4,25 \times F \times a + 8 \times q \times a^2 - M - 4 \times R_B \times a = 0; R_B = \frac{4,25 \times F \times a + 8 \times q \times a^2 - M}{4 \times a};$$

$$R_B = 90 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; -M - 8 \times q \times a^2 + F \times a + 4 R_A \times a = 0; R_A = \frac{M + 8 \times q \times a^2 - F \times a}{4 \times a};$$

$$R_A = 70 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum Y = 0; R_A + R_B - 4 \times q \times a - F = 0; 70 + 90 - 120 - 40 = 160 - 160 = 0$$

##### 2. Построение эпюр Q, M.

Определяем значения Q, M в характерных сечениях балки.

$$Q_0 = 0; Q_{A(\text{лев.})} = 0; Q_{A(\text{пр.})} = R_A = 70 \text{ кН}; Q_C = F = 40 \text{ кН};$$

$$M_0 = -M = -50 \text{ кНм}; M_A = -M = -50 \text{ кНм}; M_C = 0; M_B = -F \times a/4 = -40 \times 0,25 = -10 \text{ кНм.}$$

Определим положение сечения ( $z_0$ ), в котором  $Q=0$ .

$$Q_{z_0} = R_A - q \times z_0 = 0; z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{70}{30} = 2,33 \text{ м.}$$

Тогда величина максимального момента для сечения ( $z_0$ ) будет равна:

$$M_{\text{max}} = -M + R_A \times z_0 - q \times \frac{z_0^2}{2} = -50 + 70 \times 2,33 - 30 \times \frac{2,33^2}{2} = 32 \text{ кНм.}$$

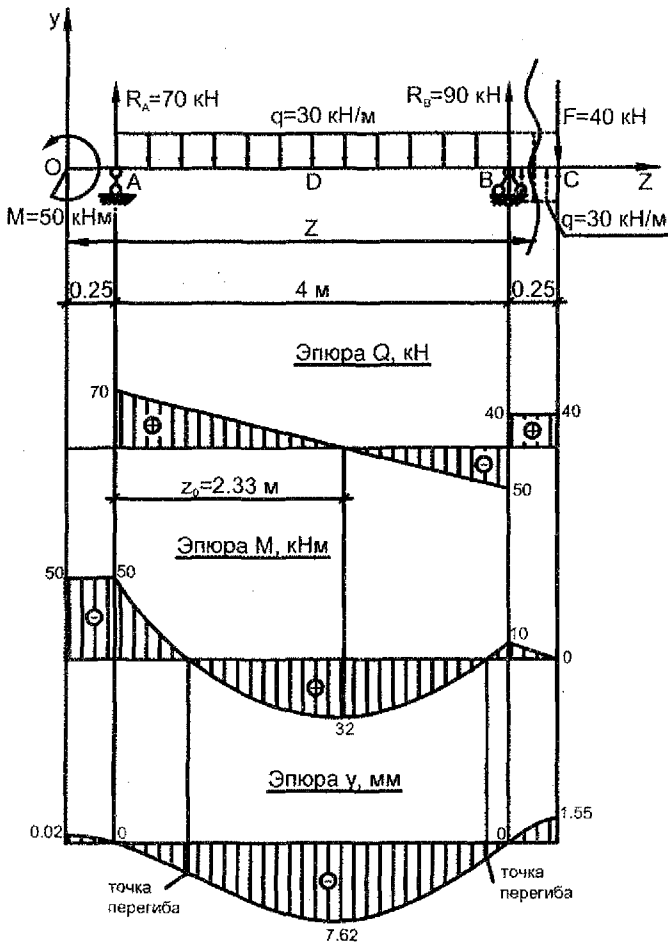


Рисунок 1.2 – Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, прогибов

### 3. Подбор сечения балки и проверка на прочность

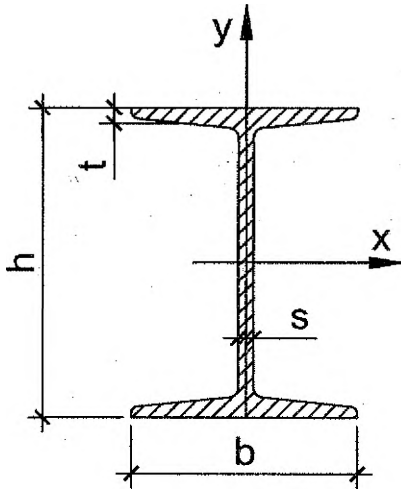
Сечение подбираем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R.$$

Требуемый момент сопротивления равен:

$$W_x^{\text{тp}} = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{50 \cdot 10^3}{230 \cdot 10^6} = 217 \text{ см}^3.$$

По таблицам прокатных профилей предварительно выбираем двутавр №22 (ГОСТ 8239-89)



Геометрические характеристики двутавра №22 (ГОСТ 8239-89):

$$A=30.6 \text{ см}^2;$$

$$h=22 \text{ см};$$

$$b=11 \text{ см};$$

$$t=0.87 \text{ см};$$

$$s=0.54 \text{ см};$$

$$I_x=2550 \text{ см}^4;$$

$$W_x=232 \text{ см}^3;$$

$$S_{x,max}^{отс} = 131 \text{ см}^3.$$

Рисунок 1.3 – Схема прокатного двутавра

Для дальнейших расчетов заменим прокатное сечение равным по габаритам составным сечением (см. рис. 1.4). При этом толщины полков и стенки первоначально округляем до ближайшего целого числа.

**Примечание.** В данной расчетно-проектировочной работе вопросы непосредственного подбора двутавров составного сечения и проверки местной устойчивости полков и стенок балок **не рассматриваются**. Методики указанных выше подборов и проверок будут рассмотрены в курсе «Металлические конструкции».

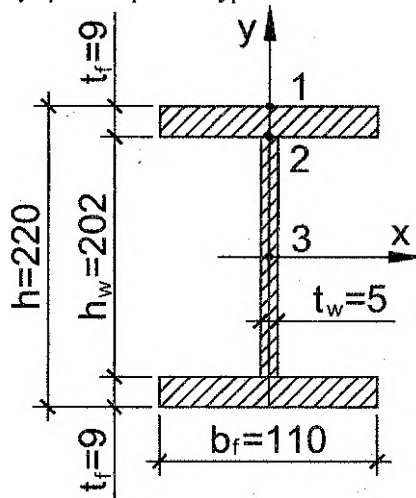


Рисунок 1.4 – Сечение принятого составного двутавра

Найдем геометрические характеристики принятого составного двутавра.

$$I_x = t_w \times h_w^3 / 12 + 2 \times [b_f \times t_f^3 / 12 + b_f \times t_f \times (t_f / 2 + h_w / 2)^2] = \\ = 0,5 \times 20,2^3 / 12 + 2 \times [11 \times 0,9^3 / 12 + 11 \times 0,9 \times (0,9 / 2 + 20,2 / 2)^2] = 2549 \text{ см}^4; \\ W_x = 2 \times I_x / h = 2 \times 2549 / 22 = 231,7 \text{ см}^3 > W_x^{\text{тп}}.$$

Проверка прочности балки по наибольшим нормальным напряжениям в точке 1 (см. рис. 1.4) сечения А справа, где  $M_{\text{max}} = 50 \text{ кНм}$ .

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{50 \cdot 100}{231,7} = 21,58 \text{ кН/см}^2 = 215,8 \text{ МПа} < R = 230 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по наибольшим нормальным напряжениям выполняется.

**Запас прочности** составляет  $|(215,8 - 230) / 230| \times 100\% = 6,17\% > 5\%$ .

Проверка прочности балки по главным напряжениям, используя четвертую теорию прочности.

Проверку производим для точек примыкания стенки двутавра к полкам (точка 2 см. рис. 1.4), в сечении А справа, где  $Q_A = 70 \text{ кН}$ ;  $M_A = 50 \text{ кНм}$ .

Условие прочности по четвертой теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{тн}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R.$$

Для точки 2:

$$y_2 = \frac{h_w}{2} = \frac{20,2}{2} = 10,1 \text{ см};$$

$$S_{x,2}^{\text{отс.}} = b_f \cdot t_f \cdot \frac{h_w + t_f}{2} = 11 \cdot 0,9 \cdot \frac{20,2 + 0,9}{2} = 104,4 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_2 = \frac{M_A \cdot y_2}{I_x} = \frac{50 \cdot 10^2 \cdot 10,1}{2549} \cdot 10 = 198,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{Q_A \cdot S_{x,2}^{\text{отс.}}}{I_x \cdot t_w} = \frac{70 \cdot 104,4}{2549 \cdot 0,5} \cdot 10 = 57,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{тн}} = \sqrt{198,1^2 + 3 \cdot 57,3^2} = 221,6 \text{ МПа} < R = 230 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по главным напряжениям выполняется.

**Запас прочности** составляет  $(221,6 - 230) / 230 \times 100\% = 3,65\% < 5\%$ , что допустимо.

**Примечание.** Составное сечение считается подобранным верно в случае **минимального** запаса прочности до **5%**. **Перенапряжение** (до **3%**) допускается по согласованию с преподавателем.

*В случае необходимости корректировки поперечного сечения рекомендуется увеличивать (при перенапряжении) или уменьшать (при большом недо-напряжении) высоту стенки (и высоту составного двутавра соответственно) с градацией 5...10 мм, не изменяя при этом другие размеры.*

Проверка прочности балки по касательным напряжениям в точке 3 (см. рис. 1.4) сечения А справа, где  $Q_{\text{max}} = 70 \text{ кН}$ .

$$S_{x.3}^{\text{отс.}} = b_f \cdot t_f \cdot \frac{h_w + t_f}{2} + \frac{h_w}{2} \cdot t_w \cdot \frac{h_w}{4} =$$

$$= 11 \cdot 0.9 \cdot \frac{20.2 + 0.9}{2} + \frac{20.2}{2} \cdot 0.5 \cdot \frac{20.2}{4} = 129.9 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{70 \cdot 129.9}{2549 \cdot 0.5} = 7.13 \text{ кН/см}^2 = 71.3 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{max}} = 71.3 \text{ МПа} < R_s = 133 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

#### 4. Определение главных напряжений для одной из опасных точек опасного сечения графическим путем

Покажем напряженное состояние в точке 2 сечения А (справа). В соответствии с правилом знаков вектора растягивающего (положительного) нормального напряжения ( $\sigma=198.1$  МПа) направляем от граней куба, а вектора положительного касательного напряжения ( $\tau=57.3$  МПа) по вертикальным граням куба направлением таким образом, чтобы они вращали куб по часовой стрелке. Согласно закону парности касательных напряжений дополняем горизонтальные грани куба векторами касательного напряжения. Относительно вершин куба вектора касательного напряжения должны либо сходиться, либо расходиться (см. рис. 1.5).

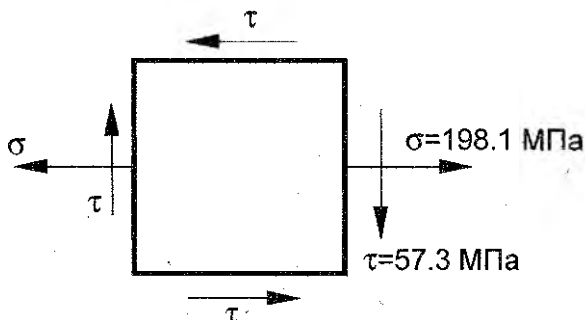


Рисунок 1.5 – Напряженное состояние в точке 2

В системе координат  $\tau$ - $\sigma$  (рис. 1.6) откладываем в масштабе отрезки:  $OK = \sigma = 198.1$  МПа;  $KK_1 = \tau = 57.3$  МПа,  $OK_2 = -57.3$  МПа. Соединив точки  $K_1$  и  $K_2$ , получим диаметр искомого круга напряжений с центром в точке  $C$ , на котором описываем окружность. Пересечение круга с осью  $\sigma$  даёт две точки  $A$  и  $B$ , которые характеризуют главные напряжения.

Так, отрезок  $OB$  в масштабе представляет  $\sigma_1 = 213.5$  МПа, а  $OA$  –  $\sigma_3 = -15.4$  МПа. Проведя прямые через точки  $K_1$  и  $K_2$  до их пересечения, находим полюс  $P$ . Соединив точки  $P$  и  $B$ , получим направление действия напряжения  $\sigma_1$ , а точки  $P$  и  $A$  – направление действия  $\sigma_3$ .

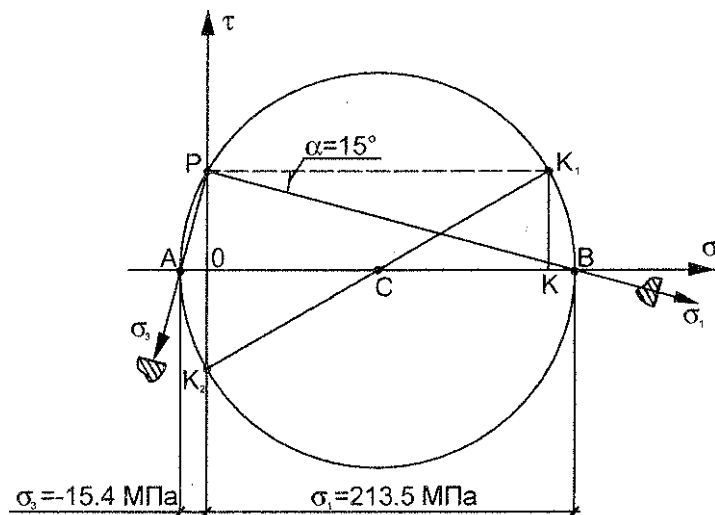


Рисунок 1.6 – Круг Мора

Переносим параллельно направлению действия напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  на элемент, представленный на рис. 1.5, и покажем положение главных площадок, которые перпендикулярны к соответствующим напряжениям  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  (см. рис. 1.7). Для контроля значения угла  $\alpha$  можно воспользоваться аналитической формулой:  $\text{tg}(2\alpha) = -2\tau/\sigma = -2 \times 57.3/198.1 = -0.578$ , тогда  $\alpha = -15.02^\circ$  (отрицательный угол откладывается по часовой стрелке).

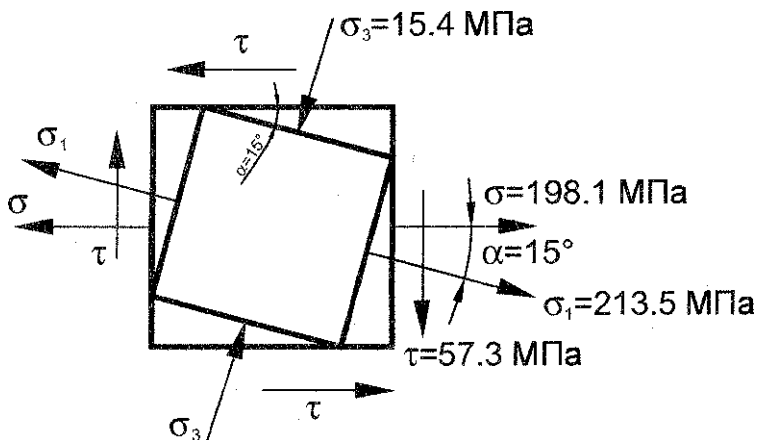


Рисунок 1.7 – Полное напряженное состояние в точке 2

### 5. Построение эпюр нормальных, касательных, главных и экстремальных касательных напряжений для опасного сечения по главным напряжениям

При определении величины главных напряжений и экстремальных касательных напряжений воспользуемся теорией плоского напряженного состояния.

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \quad \tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

где  $\sigma$  и  $\tau$  определяем по известным формулам для соответствующих точек сечения:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} \cdot y; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b}$$

При этом  $Q$ ,  $M$  и  $y$  необходимо подставить в формулы с учетом их знаков.

Точка 1:  $\sigma = -\frac{M_x}{W_x} = \frac{50 \cdot 10^2}{231.7} \cdot 10 = 215.8 \text{ МПа};$

$$\tau = 0 \text{ т.к. } S_x^{\text{отс}} = 0; \quad \sigma_1 = 215.8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1}{2} = \pm 107.9 \text{ МПа.}$$

Точка 2:  $\sigma = \frac{50 \cdot 10^2}{2549} \cdot 10.1 \cdot 10 = 198.1 \text{ МПа};$

$$\tau^{\text{пол}} = \frac{70 \cdot 104.4}{2549 \cdot 11} \cdot 10 = 2.61 \text{ МПа};$$

$$\tau^{\text{ст}} = \frac{70 \cdot 104.4}{2549 \cdot 0.5} \cdot 10 = 57.3 \text{ МПа.}$$

Дальнейший ход вычислений сводим в таблицу 1 и по полученным результатам строим эпюры напряжений (рис. 1.8).

Таблица 1 – Данные для построения эпюр напряжений

Точка сечения	y, см	$S_{x,2}^{\text{отс}}$ , см <sup>3</sup>	$\sigma$ , МПа	$\tau$ , МПа	$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ , МПа	$\sigma_1$ , МПа	$\sigma_3$ , МПа	$\tau_{\max, \min}$ , МПа
1	11	0	215.8	0	215.8	215.8	0	$\pm 107.9$
2	полка	104.4	198.1	2.61	198.2	198.15	-0.05	$\pm 99.1$
	стенка	104.4	198.1	57.3	228.9	213.5	-15.4	$\pm 114.4$
3	0	129.9	0	71.3	142.6	71.3	-71.3	$\pm 71.3$
2'	полка	104.4	-198.1	2.61	198.2	0.05	-198.15	$\pm 99.1$
	стенка	104.4	-198.1	57.3	228.9	15.4	-213.5	$\pm 114.4$
1'	11	0	-215.8	0	215.8	0	-215.8	$\pm 107.9$



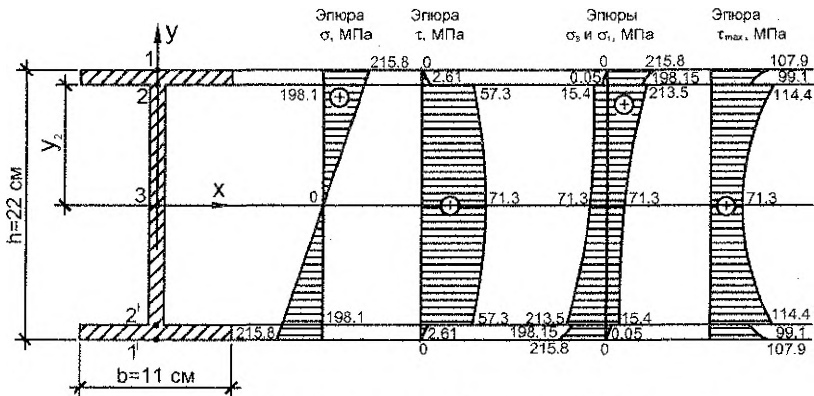


Рисунок 1.8 – Эпюры напряжений в сечении А (справа)

### 6. Построение эпюры прогибов балки

Начало координат выбираем на левом конце балки (т. О). Продлим равномерно распределенную нагрузку  $q$  до правого конца балки и уравновесим её компенсирующей распределённой нагрузкой обратного направления (см. рис. 1.2).

Составим универсальное уравнение прогибов для последнего силового участка ВС.

$$E \cdot I_x \cdot Y_z = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot z - \frac{M \cdot z^2}{2} + \frac{R_A \cdot (z - 0.25 \cdot a)^3}{6} - \frac{q \cdot (z - 0.25 \cdot a)^4}{24} + \frac{R_B \cdot (z - 4.25 \cdot a)^3}{6} + \frac{q \cdot (z - 4.25 \cdot a)^4}{24},$$

где  $\theta_0$  и  $Y_0$  начальные параметры (угол поворота и прогиб сечения в начале координат), которые определим из условий для опорных сечений:

При  $z=0.25a$ ,  $Y_A=0$

$$E \cdot I_x \cdot Y_A = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 0.25 \cdot a - \frac{M \cdot (0.25 \cdot a)^2}{2} = 0;$$

при  $z=4.25a$ ,  $Y_B=0$ ,

$$E \cdot I_x \cdot Y_B = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 4.25 \cdot a - \frac{M \cdot (4.25 \cdot a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4 \cdot a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4 \cdot a)^4}{24} = 0.$$

Решаем систему уравнения:  $Y_A=0$ ;  $Y_B=0$ .

$$\begin{cases} E \cdot I_x \cdot Y_0 + 0.25 \cdot E \cdot I_x \cdot \theta_0 - \frac{50 \cdot 0.25^2}{2} = 0; \\ E \cdot I_x \cdot Y_0 + 4.25 \cdot E \cdot I_x \cdot \theta_0 - \frac{50 \cdot 4.25^2}{2} + \frac{70 \cdot 4^3}{6} - \frac{30 \cdot 4^4}{24} = 0. \end{cases}$$

После упрощения получим:

$$\begin{cases} E \cdot I_x \cdot Y_0 + 0.25 \cdot E \cdot I_x \cdot \theta_0 = 1.5625 \text{ кНм}^3; \\ E \cdot I_x \cdot Y_0 + 4.25 \cdot E \cdot I_x \cdot \theta_0 = 24.896 \text{ кНм}^3. \end{cases}$$

Тогда

$$E \cdot I_x \cdot \theta_0 = 5.833 \text{ кНм}^2;$$

$$E \cdot I_x \cdot Y_0 = 0.1041 \text{ кНм}^3.$$

Проверка:

$$E \cdot I_x \cdot Y_A = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 0.25a - \frac{M \cdot (0.25 \cdot a)^2}{2} = 1.5625 - 1.5625 = 0;$$

$$E \cdot I_x \cdot Y_B = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 4.25 \cdot a - \frac{M \cdot (4.25 \cdot a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4 \cdot a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4 \cdot a)^4}{24} = \\ = 771.5631 - 771.5625 \approx 0.$$

Для построения эпюры прогибов балки, в нашем случае, вычислим прогибы только следующих сечений:

В сечении O ( $z=0$ )

$$E \cdot I_x \cdot Y_0 = 0.1041 \text{ кНм}^3;$$

$$E \cdot I_x = 206 \cdot 10^2 \cdot 2549 = 52509400 \text{ кН} \times \text{см}^2 = 5251 \text{ кН} \times \text{м}^2;$$

$$Y_0 = \frac{0.1041}{5251} \cdot 10^3 = 0.02 \text{ мм.}$$

В сечении A ( $Z=a/4$ )

$$Y_A = 0$$

В сечении D (середина пролета,  $Z=2.25a$ )

$$E \cdot I_x \cdot Y_D = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 2.25 \cdot a - \frac{M \cdot (2.25 \cdot a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (2 \cdot a)^3}{6} - \frac{q \cdot (2 \cdot a)^4}{24} = \\ = -40.0 \text{ кНм}^3; Y_D = -\frac{40.0}{5251} \cdot 10^3 = -7.62 \text{ мм.}$$

В сечении B ( $Z=4.25a$ )

$$Y_B = 0$$

В сечении C ( $Z=4.5a$ )

$$E \cdot I_x \cdot Y_C = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 4.5 \cdot a - \frac{M \cdot (4.5 \cdot a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4.25 \cdot a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4.25 \cdot a)^4}{24} + \\ + \frac{R_B \cdot (0.25 \cdot a)^3}{6} + \frac{q \cdot (0.25 \cdot a)^4}{24} = 0.1041 + 5.833 \cdot 4.5 - \frac{50 \cdot 4.5^2}{2} + \frac{70 \cdot 4.25^3}{6} - \\ - \frac{30 \cdot 4.25^4}{24} + \frac{90 \cdot 0.25^3}{6} + \frac{30 \cdot 0.25^4}{24} = 8.12 \text{ кНм}^3; Y_C = \frac{8.12}{5251} \cdot 10^3 = 1.55 \text{ мм.}$$

По данным расчёта построена эпюра прогибов балки (см. рис. 1.2).

**Примечание.** В расчетно-проектировочной работе необходимо еще определить прогибы двух сечений в пролете балки, т.е. при  $z=2a$ ;  $z=4a$ , для более точного построения эпюры прогибов.

## 7. Проверка балки на жёсткость

В пролёте:  $l_{np} = 4 \times a = 4 \text{ м} = 4000 \text{ мм}$ ;

$$\frac{Y_D}{l_{np}} = \frac{7.62}{4000} = \frac{1}{525} < \left[ \frac{f}{l_{np}} \right] = \frac{1}{500}.$$

На правой консоли:  $l_{кон} = 0.25 \times a = 0.25 \text{ м} = 250 \text{ мм}$ ;

$$\frac{Y_c}{I_{\text{кон}}} = \frac{1.55}{250} = \frac{1}{161} < \left[ \frac{f}{I_{\text{кон}}} \right] = \frac{1}{100}.$$

Условие жёсткости выполняется. Окончательно принимаем составной двутавр, показанный на рисунке 1.4.

**Примечание.** В случае невыполнения условия жесткости необходимо корректировать (увеличивать) сечение составного двутавра и **пунктиром** показать на построенной эпюре прогибов её окончательный вариант.

## 8. Определение коэффициентов запаса по прочности и жёсткости

Запасы по напряжениям:

$$\text{- по нормальным напряжениям } K_{\sigma} = \frac{R}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{230}{215.8} = 1.066;$$

$$\text{- по касательным напряжениям } K_{\tau} = \frac{R_s}{\tau_{\text{max}}} = \frac{133}{71.3} = 1.865;$$

$$\text{- по главным напряжениям } K_{\sigma_{\tau}} = \frac{R}{\sigma_{\tau}} = \frac{230}{221.6} = 1.038.$$

Запасы по жёсткости:

$$K_{Y_b} = \frac{[Y_b]}{Y_b} = \frac{8.00}{7.62} = 1.050, \text{ где } [Y_b] = \frac{I_{\text{пр}}}{500} = \frac{4000}{500} = 8.0 \text{ мм};$$

$$K_{Y_c} = \frac{[Y_c]}{Y_c} = \frac{2.50}{1.55} = 1.613, \text{ где } [Y_c] = \frac{I_{\text{кон}}}{100} = \frac{250}{100} = 2.50 \text{ мм}.$$

Площадь рассмотренного составного двутавра составляет  $A = t_w \times h_w + 2 \times b_f \times t_f = 0.5 \times 20.2 + 2 \times (11 \times 0.9) = 29.9 \text{ см}^2$ , что на 2.2% меньше исходного прокатного двутавра.

## Литература

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов. – Мн.: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
2. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 376 с.
3. Александров, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А.В. Александрова. – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.
4. Заяц, В.Н. Сопротивление материалов / В.Н. Заяц, М.К. Балыкин, И.А. Голубев. – Минск: БГПА, 1998. – 367 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ.

Составители:

**Соловей Павел Иванович**  
**Хвисевич Виталий Михайлович**  
**Черноиван Николай Вячеславович**

**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ДВУТАВРОВОЙ  
БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ**

**ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению расчетно-проектировочной работы №4  
по курсу «Сопротивление материалов»

для студентов строительного факультета специальностей  
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,  
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,  
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,  
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»

Ответственный за выпуск: Черноиван Н.В.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная верстка: Романюк И.Н.

Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано к печати 31.01.2014 г. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка»

Усл. печ. л. 1,16. Уч. изд. л. 1,25. Заказ № 42. Тираж 130 экз.

Отпечатано на ризографе Учреждения образования  
«Брестский государственный технический университет».

224017, г. Брест, ул. Московская, 267.