

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

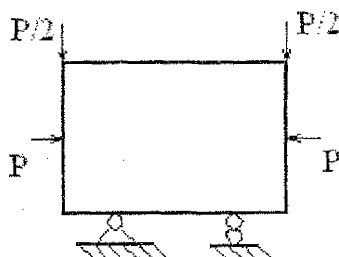
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
"БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

## РАСЧЕТ БАЛКИ-СТЕНКИ

ЗАДАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к выполнению расчетно-графической работы № 2  
по дисциплине «Теория упругости и пластичности»

для студентов строительного факультета специальностей,  
1-70 02 01 – "Промышленное и гражданское строительство",  
1-70 03 01 – "Автомобильные дороги"



Брест 2009

УДК 539.3: 624.04

Методические указания содержат общие положения о широко распространенном в инженерных расчетах методе конечных разностей (МКР). В них рассмотрен пример расчета балки-стенки с помощью МКР, даны условия и схемы индивидуальных заданий к расчетно-графической работе, выполнение которой предполагает использование готовой программы для ПЭВМ.

Основная цель методических указаний – ознакомить студентов с основами численных методов расчета деформируемых твердых тел и приобрести навыки исследований напряженно-деформированного состояния элементов строительных конструкций с помощью ПЭВМ.

Составители: Мартиновский В. Л., доцент  
Веремейчик А. И., ст. преподаватель  
Хвисевич В. М., доцент, к.т.н.

Рецензент: Найчук А.Я. директор филиала РУП «Институт БелНИИС»-«Научно-технический центр», д-р техн. наук

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения .....	3
Требования к оформлению расчетно-графических работ .....	3
Краткие теоретические сведения.....	4
Условие задания.....	9
Пример расчета.....	14
Контрольные вопросы.....	22
Литература .....	22

### ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

С развитием вычислительной техники появилась возможность выполнения больших объемов вычислений за короткое время. Это дало толчок развитию математических методов, позволяющих более точно описать физические процессы в рассматриваемой задаче. В 60-х годах XX века был разработан и эффективно использовался метод конечных разностей, который предполагает в себе разбиение тела сеткой и замены непрерывной функции конечными разностями. Значения производных, начальных и граничных условий выражаются через значения функций в узлах сетки, в результате чего получается система алгебраических уравнений, называемая разностной схемой. Решая эту систему уравнений, можно найти в узлах сетки значения сеточных функций, которые приближенно считаются равными значениям искомых функций. Достоинством этого метода является то, что он легко сочетается с другими численными и аналитическими методами при решении сложных краевых задач. Несомненно, МКР – это большой шаг вперед для решения задач теории упругости и пластичности. Этот метод идеально подходит для тел элементарной формы и со значительной погрешностью может реализовать решение различных задач для тел неправильной формы. В данной работе МКР используется для расчета балки-стенки.

Данные методические указания соответствуют базовым учебным планам специальностей 1 – 70 02 01, 1 – 70 03 01, и включают в себя краткие теоретические сведения по разделу «Метод конечных разностей», условие задания и пример расчета.

При защите расчетно-графической работы необходимо ответить на вопросы, связанные с ее вычислением, и уметь решать контрольные задачи по ее тематике.

### ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

1. Расчетно-проектировочная работа выполняется на отдельных листах формата А4.
2. Порядок оформления: титульный лист; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; выводы; перечень литературы.
3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов согласно стандарту УО «БрГТУ».
4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Страницы нумеруются. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до сотых долей.
5. Эпюры необходимо строить на одном листе с расчетной схемой, на эпюрах указывать числовые значения характерных ординат и единицы расчетных величин.

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Во многих случаях получить точное решение бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости

$$\nabla^4 \varphi = 0, \text{ или } \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

оказывается сложным. Для приближенного решения этого уравнения можно применить метод конечных разностей.

Суть метода конечных разностей (МКР) состоит в том, чтобы решение плоской задачи через функцию напряжений  $\varphi$  свести к алгебраическим уравнениям. В этом методе частные производные бигармонического уравнения (1) приближенно заменяются конечными разностями, в результате чего оно превращается в алгебраическое. Это уравнение, как увидим далее, содержит значение функции напряжений в тринадцати точках, расположенных в определенном порядке на сетке вокруг центральной точки. Поэтому вместо одного бигармонического уравнения в частных производных приходится составлять и решать систему линейных алгебраических уравнений.

Точность МКР прямо зависит от густоты сетки. Чем гуще сетка, тем точнее будет решение задачи.

Зависимости между производными функции в произвольной точке и значениями самой функции в этой точке и в соседних точках могут быть получены на основании следующих соображений.

Предположим, что некоторая функция  $\varphi(x)$  проходит через три точки 1, 2, 3 (рис. 1) и аппроксимируется параболой, т.е.

$$\varphi = ax^2 + bx + c,$$

тогда

$$\varphi_{лев} = a\Delta x^2 - b\Delta x + c;$$

$$\varphi_0 = c;$$

$$\varphi_{пр} = a\Delta x^2 + b\Delta x + c.$$

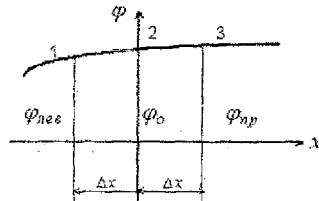


Рис. 1

Решая эти уравнения, находим коэффициенты

$$a = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{2\Delta x^2};$$

$$b = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x};$$

$$c = \varphi_0$$

Теперь уравнение параболы примет вид

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{2\Delta x^2} x^2 + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x} x + \varphi_0$$

Найдем производные

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{\Delta x^2} x + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x};$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{\Delta x^2}.$$

При  $x=0$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x}; \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{\Delta x^2}. \quad (2)$$

Воспользуемся этими формулами для решения плоской задачи. Нанесем на пластинку сетку, проводя горизонтальные и вертикальные линии с шагом  $\Delta x$  и  $\Delta y$  (рис. 2).

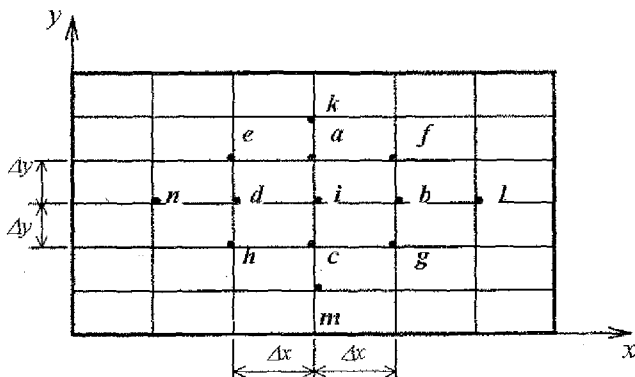


Рис. 2. Расчетная схема МКР

Наметим некоторую центральную точку  $i$ . На основании формул (2) для нее получим:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2\Delta x}; \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\varphi_d - 2\varphi_i + \varphi_b}{\Delta x^2}; \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_i = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2\Delta y}; \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_i = \frac{\varphi_c - 2\varphi_i + \varphi_a}{\Delta y^2}. \quad (6)$$

По выражению (5) запишем смешанную производную

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_i &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_a - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_c}{2 \Delta y} \\ &= \frac{1}{2 \Delta y} \left( \frac{\varphi_f - \varphi_e}{2 \Delta y} - \frac{\varphi_g - \varphi_h}{2 \Delta x} \right). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{-\varphi_e + \varphi_f - \varphi_g + \varphi_h}{4 \Delta x \Delta y}. \quad (7)$$

Используя формулу (4), найдем производную 4-го порядка

$$\left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_i = \frac{\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_d - 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_b}{\Delta x^2}$$

Входящие сюда вторые производные распишем по той же формуле (4). Тогда

$$\left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_i = \frac{6\varphi_i - 4(\varphi_d + \varphi_b) + (\varphi_n + \varphi_l)}{\Delta x^4}. \quad (8)$$

Таким же путем находим 4-ю производную по y

$$\left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right)_i = \frac{6\varphi_i - 4(\varphi_a + \varphi_c) + (\varphi_k + \varphi_m)}{\Delta y^4}. \quad (9)$$

Смешанная производная

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_i &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_c - 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_a \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta y^2} \left( \frac{\varphi_h - 2\varphi_c + \varphi_g}{\Delta x^2} - 2 \frac{\varphi_d - 2\varphi_i + \varphi_b}{\Delta y^2} + \frac{\varphi_e - 2\varphi_a + \varphi_f}{\Delta x^2} \right). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_i = \frac{4\varphi_i - 2(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + (\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h)}{\Delta x^2 \Delta y^2}. \quad (10)$$

Подставляя значения производных (8) - (10) в (1), получим после несложных преобразований тринадцатичленное уравнение

$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_i - 4(\alpha + 1)(\varphi_a + \alpha\varphi_b + \varphi_c + \alpha\varphi_d) + 2\alpha(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) + (\varphi_k + \alpha^2\varphi_l + \varphi_m + \alpha^2\varphi_n) = 0; \quad (11)$$

где  $\alpha = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$ .

Для квадратной сетки, когда  $\Delta x = \Delta y$  и  $\alpha = 1$  уравнение (11) примет вид

$$20\varphi_i - 8(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) + \varphi_k + \varphi_l + \varphi_m + \varphi_n = 0. \quad (12)$$

На практике уравнение (11) удобно представить в операторной форме (рис. 3).

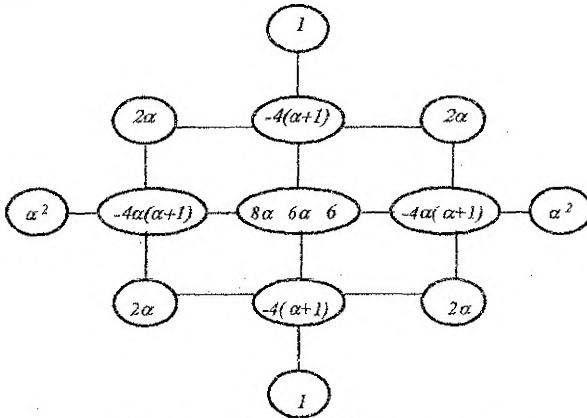


Рис.3. Бигармонический оператор

Напряжения в точке  $i$  получим по формулам (4), (6), (7).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_i = \frac{\varphi_c - 2\varphi_i + \varphi_a}{\Delta y^2}; \\ \sigma_y &= \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\varphi_d - 2\varphi_i + \varphi_b}{\Delta x^2}; \\ \tau_{xy} &= - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_i = \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{4\Delta x \Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Уравнения (11) или (12) должны составляться для каждой внутриконтурной точки.

Когда уравнения составляются для внутриконтурных точек, лежащих на ближайшей линии параллельной контуре, то в них вынуждено входят и значения функции  $\varphi$  контурных и законтурных точек (рис.4).

Значения функции  $\varphi$  на контуре и вне контура находят из граничных условий. Таким образом, неизвестных значений функции столько, сколько узлов внутри контура.

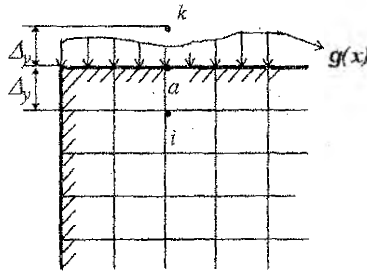


Рис. 4

Для определения значений функции  $\varphi$  на контуре и вне его весьма удобно воспользоваться так называемой рамной аналогией (идеи профессоров: П.Л.Пастернака, П.М.Варвака, А.П.Синицина). Если, например, на верхней грани прямоугольной области приложена нагрузка  $g(x)$ , направленная вниз, то для этой грани можно записать

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -q.$$

Сравнивая это выражение с известной зависимостью

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q,$$

заключаем, что функцию напряжений  $\varphi$  на контуре пластинки можно принять за значение изгибающего момента в данной точке балки (рамы) с такой же нагрузкой, т.е.

$$\varphi_a = M_a,$$

или в общем виде

$$\varphi_{кон} = M. \quad (14)$$

Поскольку функция  $\varphi$  есть непрерывная функция, к которой может быть добавлена  $\Delta\varphi = Ax + By + C$ , то эйлора  $M$  может быть принята в любой неизменяемой статически определимой или неопределимой системе.

Для отыскания  $\varphi$  в законтурной точке  $k$  (рис.4) составим выражение первой производной по  $y$  в точке  $a$ .

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_a = \frac{\varphi_k - \varphi_l}{2 \Delta_y},$$

отсюда 
$$\varphi_k = 2 \Delta_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_a + \varphi_l.$$

Производную  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_a$  найдем из выражения  $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ .

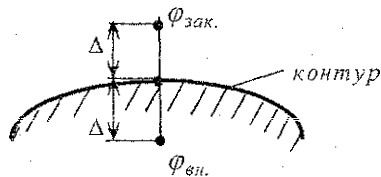


Интегрируя это выражение по  $x$ , получим

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_a = - \int \varepsilon_{xy} dx + C = N_a;$$

тогда  $\varphi_k = 2 \cdot \Delta y \cdot N_a + \varphi_i$ .

В общем случае последнее выражение можно записать на основании (рис.5).



$$\varphi_{зак.} = 2 \Delta N + \varphi_{вн.} \quad (15)$$

На основании формул (14) и (15) следует, что для записи  $\varphi_{вн.}$  и  $\varphi_{зак.}$  нужно построить эпюры изгибающих моментов ( $M$ ) и продольных сил ( $N$ ) в соответствующей раме.

Рис. 5

Под соответствующей рамой будем понимать такую раму, которая повторяет контур пластинки, геометрически неизменяемая и, желательно, статически определимая.

На основании вышеизложенного следует придерживаться следующего порядка расчета балки-стенки (пластинки) методом конечных разностей:

1. На заданную балку-стенку наносится сетка с определенным шагом и нумеруются внутренние узлы сетки (с учетом симметрии).

2. В соответствии с методом рамы аналогий, выбирается соответствующая рама и для нее строятся эпюры изгибающих моментов ( $M$ ) и продольных сил ( $N$ ). Эпюра ( $M$ ) строится на растянутых волокнах, изгибающие моменты, отложенные внутри контура рамы, считать положительными. Знак продольной силы: растяжение — плюс, сжатие — минус.

3. Выражаются значения функции  $\varphi$  в законтурных точках через внутриконтурные по формуле (15).

4. Записываются алгебраические уравнения по формулам (11) или (12) для каждой внутриконтурной точки.

5. Решается система уравнений и находятся значения функции  $\varphi$  во внутриконтурных точках.

6. Определяются напряжения в узлах сетки по формулам (13), и строятся их эпюры.

### УСЛОВИЕ ЗАДАНИЯ

Для заданной схемы балки-стенки при числовых данных, приведенных в табл. 1, требуется:

1) определить значения функции напряжений  $\varphi$  во всех узлах предварительно нанесенной сетки (3×3) методом конечных разностей;

2) подсчитать напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в узловых точках сетки и построить эпюры этих напряжений в одном из вертикальных и в одном из горизонтальных сечений;

3) сравнить полученное решение (эпюры в вертикальном сечении) с решением сопротивления материалов и выполнить анализ результатов сравнения;

4) выбрать более густую сетку (6×6) и определить значения функции напряжений в контурных и законтурных узлах;

5) используя вычислительную программу, подсчитать напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в узловых точках сетки и построить эпюры этих напряжений в двух вертикальных и двух горизонтальных сечениях балки-стенки (одно из этих сечений должно совпадать с сечением п. 2);

б) сравнить полученное решение с результатом "ручного" расчета.

Схема закрепления балки-стенки приведена на рис. 6. Схемы загрузки балки-стенки (рис. 7) следует принимать по указанию преподавателя.

Данные для выполнения задачи следует выбирать из табл. 1, согласно заданному шифру и первым пяти буквам русского алфавита. Например, записав шифр и под каждой цифрой его буквы:

шифр — 38104

буква — а б в г д,

выбирают из указанной таблицы число, которое находится на пересечении соответствующих строки и столбца. Причем, вначале берется буква, а затем по ней определяется цифра.

ПРИМЕР. Шифр — 38104. В табл. 1. (последняя строка) по горизонтали первая буква "а". На пересечении этого столбца со строчкой, соответствующей цифре шифра, т.е. цифре 3, находятся высота и длина балки-стенки (параметры  $h$  и  $l$ ). Затем по следующей букве "б" и соответствующей цифре шифра 8, пересечении столбца "б" и строки "8", получаем величину "а" и т.д. Окончательно, согласно указанному шифру получим:  $l=12$  м,  $h=9$  м,  $a=l/2$ ,  $b=0$ ,  $d=0$ ,  $q=25$  кН/м<sup>2</sup>,  $P=140$  кН/м.

Работы, выполненные с нарушением этих указаний, не зачитываются.

### ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Таблица 1.

№	$l$ (м)	$h$ (м)	$a$ (м)	$b$ (м)	$d$ (м)	$q$ (кН/м <sup>2</sup> )	$P$ (кН/м)
1	9	6	0	0	0	20	80
2	12	6	//6	//2	1	50	160
3	12	9	//3	//3	2	25	90
4	15	9	//2	//6	3	45	140
5	15	12	0	//6	4	30	100
6	18	9	//6	//3	4	40	120
7	18	12	//3	//2	3	35	110
8	18	15	//2	0	2	30	100
9	21	12	0	0	1	40	120
0	21	18	//3	//3	0	25	90
		<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>г</b>		<b>д</b>

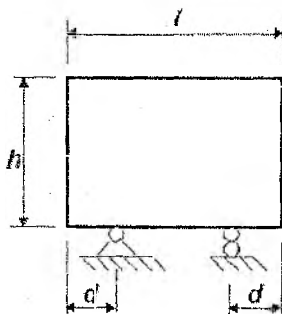


Рис.6. Схема закрепления балки-стенки

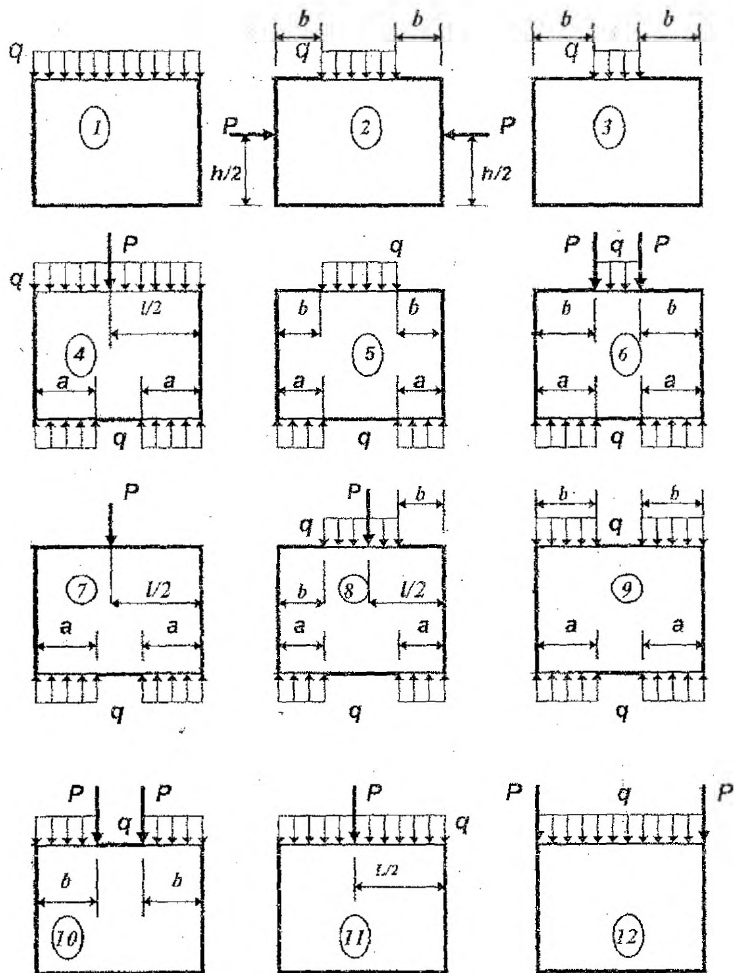
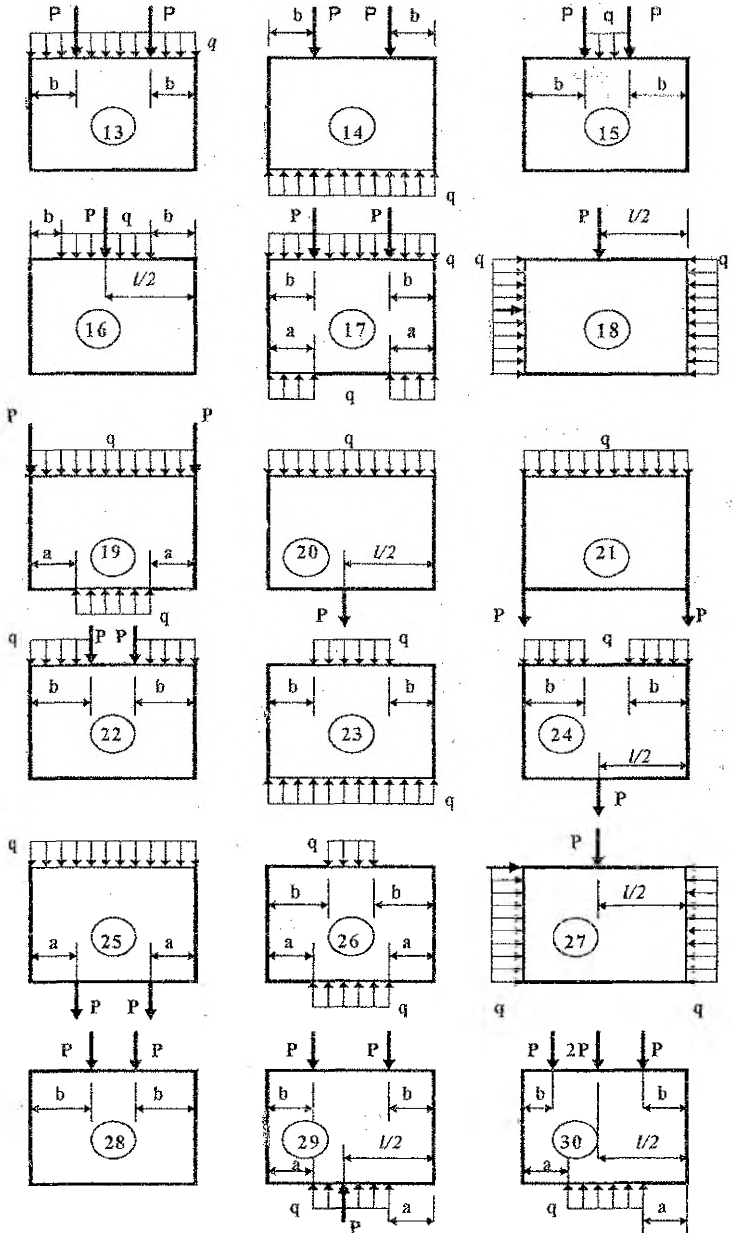


Рис. 7. Схемы загрузки балки-стенки

Продолжение рис. 7



### Расчет балки-стенки на ЭВМ

Программа по расчету балки-стенки методом конечных разностей составлена на алгоритмическом языке ФОРТРАН и находится в фонде программ ИВЦ БрГТУ (диск S, директория МКRTU).

Запуск программы осуществляется с помощью выполняемого файла MKR.BAT. Ввод исходных данных происходит в диалоговом режиме. Результаты расчета записываются в создаваемый программой файл MKR.REZ на диске R. Этому файлу после расчета необходимо сразу же присвоить новое (любое) имя во избежание записи туда результатов расчета других пользователей. После просмотра результатов расчета, а также проверки правильности ввода исходных данных (они находятся в файле результатов) их необходимо вывести на печать.

### Ввод исходных данных

Для подготовки исходных данных балку-стенку необходимо разбить на 6 частей вдоль каждой из осей  $x$  и  $y$  (рис. 13).

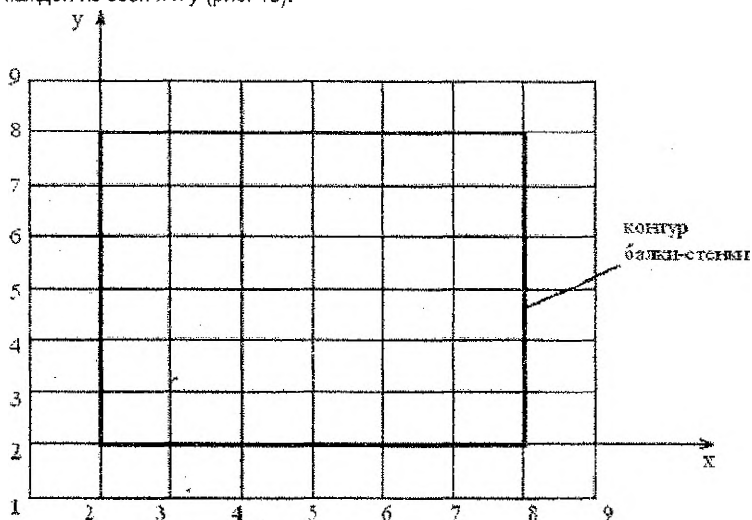


Рис. 8. Схема нумерации узловых точек

Программа предусматривает ввод следующих исходных данных:

1. Введите фамилию и инициалы, группу, шифр задания.
2. Введите параметр симметрии  $KSIM=$ : 0 — симметричное нагружение.
3. Введите пролет балки-стенки в метрах  $L=$
4. Введите высоту балки-стенки в метрах  $h=$
5. Введите число участков разбиения балки-стенки по длине  $KL=$
6. Введите число участков разбиения балки-стенки по высоте  $KN=$
7. Введите количество внутренних узлов сетки  $N=$
8. Введите значения моментов в контурных точках рамы  $M(i)$ ,  $i=1,2,\dots,24$  для сетки  $6 \times 6$  (ввод производится по периметру балки-стенки, начиная с левого нижнего угла).

9. Введите значения продольных усилий в контурных точках рамы  $N(i, j)$ ,  $i=1,2,\dots,28$  для сетки  $6 \times 6$  (ввод производится аналогично изгибающим моментам. В угловых точках продольные усилия для стойки и ригеля имеют разные значения, поэтому ввод в этих точках производится дважды).

Результаты расчета, т. е. напряжения в узлах сетки (рис. 8)  $\sigma_x(i, j)$ ,  $\sigma_y(i, j)$ ,  $\tau_{xy}(i, j)$  ( $i$  — нумерация сетки по направлению оси  $y$ ,  $j$  — нумерация сетки по направлению оси  $x$ ) выводятся на печать в виде таблицы, пример которой для рассмотренного варианта приведен ниже.

### ПРИМЕР РАСЧЕТА

Балка-стенка толщиной  $\delta = 1$  м нагружена на верхней кромке и частично на нижней распределённой нагрузкой  $q$  и сверху сосредоточенной силой  $P$ . Пролёт балки-стенки  $l$ , а высота её  $h$ .

Требуется определить напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  в балке-стенке и построить их эпюры в сечениях А-А и В-В; для сечения А-А построить эпюру  $\sigma_x$  по формуле сопротивления материалов.

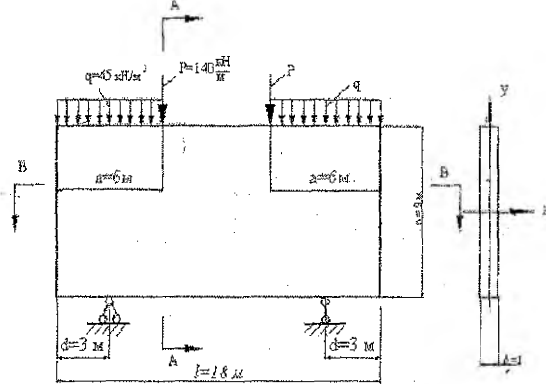


Рис. 9. Схема балки-стенки

### Решение.

1. Нанесём на балку-стенку сетку  $(3 \times 3)$  с шагом  $\Delta X = 6i$ ,  $\Delta Y = 3j$ .

Затем пронумеруем внутренние точки (узлы сетки), (рис. 10), соблюдая при этом симметрию системы.

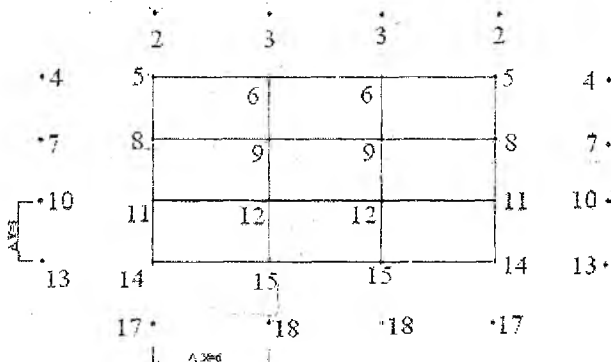


Рис. 10. Расположение узлов сетки

2. Выбираем статически определимую раму с учётом симметрии. Для этого разрежем нижний ригель (рис. 11).

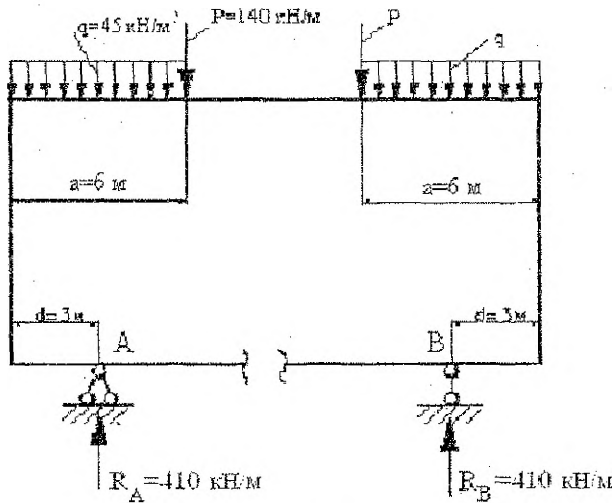


Рис. 11. Модель соответствующей рамы

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_p = 0, \quad q \cdot a \cdot \left( l - d - \frac{a}{2} \right) + P \cdot (l - d - a) + P \cdot \frac{a}{2} - R_A \cdot (l - 2d) = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot a \cdot \left( l - d - \frac{a}{2} \right) + P \cdot (l - d - a) + P \cdot \frac{a}{2}}{(l - 2d)}$$

$$= \frac{45 \cdot 6 \cdot (18 - 3 - 3) + 140 \cdot (18 - 3 - 6) + 140 \cdot 3}{18 - 6} = 410 \text{ кН/м};$$

аналогично определяем:  $R_B = 410 \text{ кН/м}$ .

Строим эпюры изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$  (рис. 12).

$$M_{14} = R_A \cdot d = 410 \cdot 3 = 1230 \text{ кН};$$

$$M_{11} = M_8 = M_5 = 1230 \text{ кН};$$

$$M_6 = -R_A \cdot \frac{a}{2} + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -410 \cdot 3 + 45 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = -420 \text{ кН}.$$

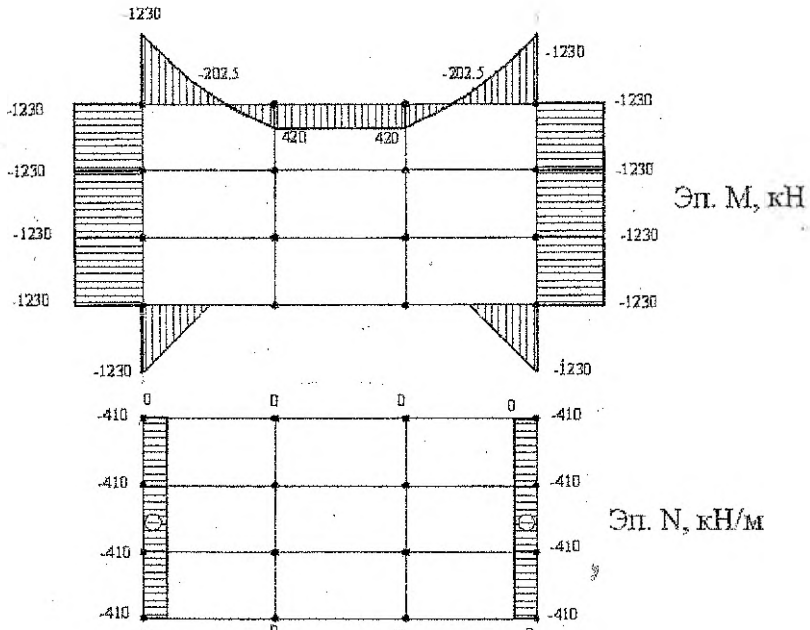


Рис. 12. Эпюры  $M$  и  $N$  для соответствующей рамы

3. По формуле (14) запишем функцию  $\varphi$  на контуре балки-стенки.

$$\varphi_{14} = \varphi_{11} = \varphi_8 = \varphi_5 = -1230 \text{ кН};$$

$$\varphi_6 = 420 \text{ кН};$$

$$\varphi_{15} = 0.$$

4. По формуле (15) выразим функцию  $\varphi$  в законтурных точках через внутриконтурные.

$$\varphi_2 = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_8 = \varphi_3 = -1230 \text{ кН};$$

$$\varphi_3 = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_9 = \varphi_4;$$

$$\varphi_4 = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_6 = 420 - 4920 = -4500 \text{ кН};$$

$$\varphi_7 = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_9 = \varphi_5 - 4920;$$

$$\varphi_{10} = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_{12} = \varphi_{12} - 4920;$$

$$\varphi_{13} = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_{15} = -4920 \text{ кН};$$

$$\varphi_{17} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_{11} = \varphi_{11} = -1230 \text{ кН};$$

$$\varphi_{18} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_{12} = \varphi_{12};$$

5. Запишем уравнения для каждой внутриконтурной точки:

$$\begin{aligned} & (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_9 - 4(\alpha + 1)(\varphi_6 + \alpha\varphi_9 + \varphi_{12} + \alpha\varphi_8) + 2\alpha(\varphi_3 + \varphi_6 + \varphi_{12} + \varphi_{11}) + \\ & + (\varphi_3 + \alpha^2\varphi_8 + \varphi_{13} + \alpha^2\varphi_7) = 0; \end{aligned}$$



$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_{12} - 4(\alpha + 1)(\varphi_9 + \alpha\varphi_{12} + \varphi_{15} + \alpha\varphi_{11}) + 2\alpha(\varphi_8 + \varphi_9 + \varphi_{15} + \varphi_{14}) + (\varphi_6 + \alpha^2\varphi_{11} + \varphi_{18} + \alpha^2\varphi_{10}) = 0;$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} = \frac{9}{36} = 0,25;$$

$$8,375\varphi_9 - 5(420 + 0,25\varphi_9 + \varphi_{12} - 0,25 \cdot 1230) + 0,5(-1230 + 420 + \varphi_{12} - 1230) + (\varphi_9 - 0,0625 \cdot 1230 + 0 + 0,0625(\varphi_9 - 4920)) = 0;$$

$$8,375\varphi_{12} - 5(\varphi_9 + 0,25\varphi_{12} + 0 - 0,25 \cdot 1230) + 0,5(-1230 + \varphi_9 + 0 - 1230) + (420 - 0,0625 \cdot 1230 + \varphi_{12} + 0,0625(\varphi_{12} - 4920)) = 0.$$

Приведём подобные слагаемые и получим:

$$\begin{cases} 8,1875\varphi_9 - 4,5\varphi_{12} = 1966,875 \\ -4,5\varphi_9 + 8,1875\varphi_{12} = -343,125 \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$$\varphi_9 = 311,204 \text{ кН};$$

$$\varphi_{12} = 129,135 \text{ кН}.$$

6. Напряжения в  $i$ -той точке получим по формулам (13).

**Сечение А-А:**

$$(\sigma_x)_6 = \frac{\varphi_9 - 2\varphi_6 + \varphi_3}{9} = \frac{311,204 - 2 \cdot 420 + 129,135}{9} = -24,17 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_x)_9 = \frac{\varphi_{12} - 2\varphi_9 + \varphi_6}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 311,204 + 420}{9} = -8,14 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_x)_{12} = \frac{\varphi_{15} - 2\varphi_{12} + \varphi_9}{9} = \frac{0 - 2 \cdot 129,135 + 311,204}{9} = 5,88 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_x)_{15} = \frac{\varphi_{18} - 2\varphi_{15} + \varphi_{12}}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 0 + 129,135}{9} = 28,7 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_y)_6 = \frac{\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_6}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 420 + 420}{36} = -45,83 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_y)_9 = \frac{\varphi_8 - 2\varphi_9 + \varphi_9}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 311,204 + 311,204}{36} = -42,81 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_y)_{12} = \frac{\varphi_{11} - 2\varphi_{12} + \varphi_{12}}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 129,135 + 129,135}{36} = -37,75 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_y)_{15} = \frac{\varphi_{14} - 2\varphi_{15} + \varphi_{15}}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 0 + 0}{36} = -34,17 \text{ кПа};$$

$$\begin{aligned}
 (\tau_{xy})_6 &= \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_5 - \varphi_8}{72} = \frac{-1230 - 311,204 + 311,204 + 1230}{72} = 0; \\
 (\tau_{xy})_9 &= \frac{\varphi_3 - \varphi_6 + \varphi_{12} - \varphi_{11}}{72} = \frac{-1230 - 420 + 129,135 + 1230}{72} = -4,04 \text{ кПа}; \\
 (\tau_{xy})_{12} &= \frac{\varphi_8 - \varphi_9 + \varphi_{15} - \varphi_{14}}{72} = \frac{-1230 - 311,204 + 0 + 1230}{72} = -4,32 \text{ кПа}; \\
 (\tau_{xy})_{15} &= \frac{\varphi_{11} - \varphi_{12} + \varphi_{18} - \varphi_{17}}{72} = \frac{-1230 - 129,135 + 129,135 + 1230}{72} = 0.
 \end{aligned}$$

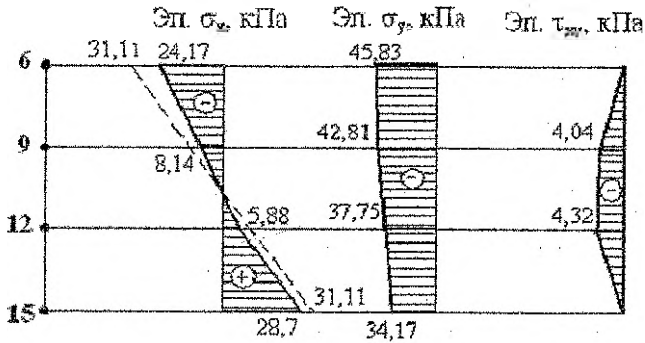


Рис. 13. Эпюры напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в сечении А-А

Сечение В-В:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x)_8 &= 0; \\
 (\sigma_x)_9 &= \frac{\varphi_{12} - 2\varphi_9 + \varphi_6}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 311,204 + 420}{9} = -8,14 \text{ кПа}; \\
 (\sigma_x)_8 &= \frac{\varphi_7 - 2\varphi_8 + \varphi_9}{36} = \frac{-4608,796 - 2 \cdot (-1230) + 311,204}{36} = -51,04 \text{ кПа}; \\
 (\sigma_y)_9 &= \frac{\varphi_8 - 2\varphi_6 + \varphi_9}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 311,204 + 311,204}{36} = -42,81 \text{ кПа}; \\
 (\tau_{xy})_8 &= \frac{\varphi_4 - \varphi_6 + \varphi_{12} - \varphi_{10}}{72} = \frac{-4500 - 420 + 129,135 + 4790,865}{72} = 0; \\
 (\tau_{xy})_9 &= \frac{\varphi_3 - \varphi_6 + \varphi_{12} - \varphi_{11}}{72} = \frac{-1230 - 420 + 129,135 + 1230}{72} = -4,04 \text{ кПа}; \\
 (\tau_{xy})_9 &= \frac{\varphi_6 - \varphi_3 + \varphi_{11} - \varphi_{12}}{72} = \frac{420 + 1230 - 1230 - 129,135}{72} = 4,04 \text{ кПа}; \\
 (\tau_{xy})_8 &= \frac{\varphi_6 - \varphi_4 + \varphi_{10} - \varphi_{12}}{72} = \frac{420 + 4500 - 4790,865 - 129,135}{72} = 0.
 \end{aligned}$$

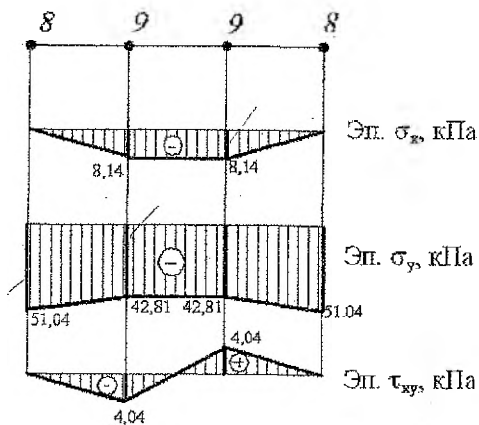


Рис. 14. Эпюры напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в сечении В-В

Построим эпюру  $\sigma_x$  в сечении А-А методом сопротивления материалов. Представим балку-стенку в виде обычной балки (рис.15).

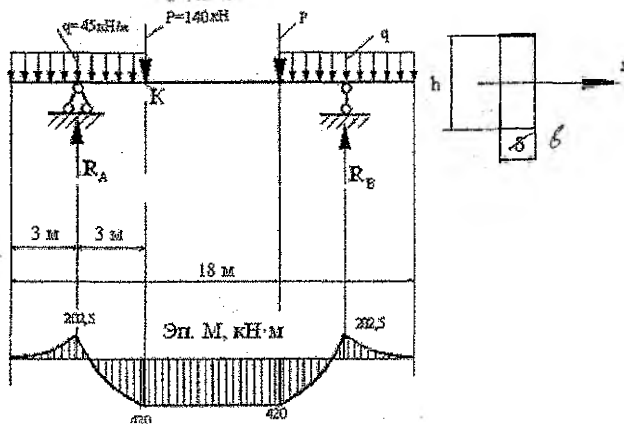


Рис. 15. К расчету балки-стенки по балочной схеме (метод сопротивления материалов)

$$\sigma_x = \frac{M_K}{W_{z1}};$$

$$M_K = R_A \cdot 3 - q \cdot 6 \cdot 3 = 420 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$W_{z1} = \frac{b \cdot a^2}{6} = \frac{1 \cdot 9^2}{6} = 13,5 \text{ м}^3;$$

$$\sigma_x = \frac{420}{13,5} = 31,11 \text{ кПа}.$$

Эпюра  $\sigma_x$  показана на рис. 13 пунктирной линией (определение напряжений  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  методом сопротивления материалов не представляется возможным).

Таблица результатов расчета на ПЭВМ имеет вид:

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ЗАДАЧИ

ЧИСЛО УЧАСТКОВ РАЗБИЕНИЯ : ПО ДЛИНЕ - 6, ПО ВЫСОТЕ - 6, ПОРЯДОК СИСТЕМЫ - 25

РАЗМЕРЫ БАЛКИ-СТЕНКИ: ДЛИНА - 18.00 М, ВЫСОТА - 9.00 М

ЗНАЧЕНИЯ МОМЕНТОВ В КОНТУРНЫХ ТОЧКАХ РАМЫ

1) -1230.000	2) -1230.000	3) -1230.000	4) -1230.000
5) -1230.000	6) -1230.000	7) -1230.000	8) -202.500
9) 420.000	10) 420.000	11) 420.000	12) -202.500
13) -1230.000	14) -1230.000	15) -1230.000	16) -1230.000
17) -1230.000	18) -1230.000	19) -1230.000	20) .000
21) .000	22) .000	23) .000	24) .000

ЗНАЧЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ В КОНТУРНЫХ ТОЧКАХ

1) .000	2) -410.000	3) -410.000	4) -410.000
5) -410.000	6) -410.000	7) -410.000	8) -410.000
9) .000	10) .000	11) .000	12) .000
13) .000	14) .000	15) .000	16) -410.000
17) -410.000	18) -410.000	19) -410.000	20) -410.000
21) -410.000	22) -410.000	23) .000	24) .000
25) .000	26) .000	27) .000	28) .000

НАПРЯЖЕНИЯ

	Gx	Gy	Txy
(2.2)	.00000E+00	.27333E+03	.14084E+03
(3.2)	.00000E+00	-.16690E+02	.13667E+03
(4.2)	.00000E+00	-.32738E+02	.42386E+05
(5.2)	.00000E+00	-.41427E+02	-.93248E+05
(6.2)	.00000E+00	-.44285E+02	-.50863E+05
(7.2)	.00000E+00	-.44588E+02	.59340E+05
(8.2)	-.54667E+03	-.45000E+02	-.14781E+03
(2.3)	-.66758E+02	-.13667E+03	.00000E+00
(3.3)	.12829E+01	-.11424E+03	.72954E+01
(4.3)	.14718E+02	-.89338E+02	.92177E+01
(5.3)	.11663E+02	-.71064E+02	.94723E+01
(6.3)	.51085E+01	-.58847E+02	.87791E+01
(7.3)	-.21758E+00	-.50345E+02	.65656E+01
(8.3)	.16484E+01	-.45000E+02	.68333E+02
(2.4)	.45918E+02	.00000E+00	.00000E+00
(3.4)	.12445E+02	-.13118E+02	.17472E+02
(4.4)	.29330E+01	-.26975E+02	.18237E+02
(5.4)	-.89682E+00	-.38253E+02	.13909E+02

(6,4)	-.46486E+01	-.48592E+02	.84540E+01
(7,4)	-.13059E+02	-.59623E+02	.32018E+01
(8,4)	-.39466E+02	-.69167E+02	.00000E+00
(2,5)	.53648E+02	.00000E+00	.00000E+00
(3,5)	.20654E+02	-.19325E+01	.11868E-04
(4,5)	.14617E+01	-.79694E+01	.59340E-05
(5,5)	-.96993E+01	-.13271E+02	-.84771E-05
(6,5)	-.17171E+02	-.14171E+02	-.93248E-05
(7,5)	-.19955E+02	-.88093E+01	-.33908E-05
(8,5)	-.42284E+01	.00000E+00	.00000E+00
(2,6)	.45918E+02	.00000E+00	.00000E+00
(3,6)	.12445E+02	-.13118E+02	-.17472E+02
(4,6)	.29330E+01	-.26975E+02	-.18237E+02
(5,6)	-.89687E+00	-.38253E+02	-.13909E+02
(6,6)	-.46485E+01	-.48592E+02	-.84540E+01
(7,6)	-.13059E+02	-.59623E+02	-.32018E+01
(8,6)	-.39466E+02	-.69167E+02	.00000E+00
(2,7)	-.66758E+02	-.13667E+03	.68333E+02
(3,7)	.12829E+01	-.11424E+03	-.72955E+01
(4,7)	.14718E+02	-.89338E+02	-.92178E+01
(5,7)	.11663E+02	-.71064E+02	-.94723E+01
(6,7)	.51085E+01	-.58847E+02	-.87791E+01
(7,7)	-.21756E+00	-.50345E+02	-.65856E+01
(8,7)	.16484E+01	-.45000E+02	.00000E+00
(2,8)	-.54667E+03	.00000E+00	-.14084E+03
(3,8)	.00000E+00	-.18690E+02	.42386E-05
(4,8)	.00000E+00	-.32738E+02	.76294E-05
(5,8)	.00000E+00	-.41427E+02	.16954E-05
(6,8)	.00000E+00	-.44285E+02	-.33908E-05
(7,8)	.00000E+00	-.44588E+02	.13667E+03
(8,8)	.00000E+00	.22833E+03	.14781E+03

По результатам машинного расчета для примера построены эпюры (рис. 16, 17).

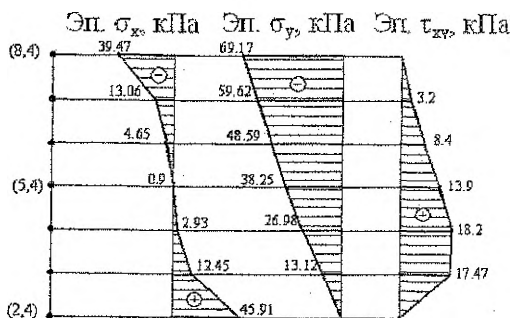


Рис. 16. Эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  в сечении А-А

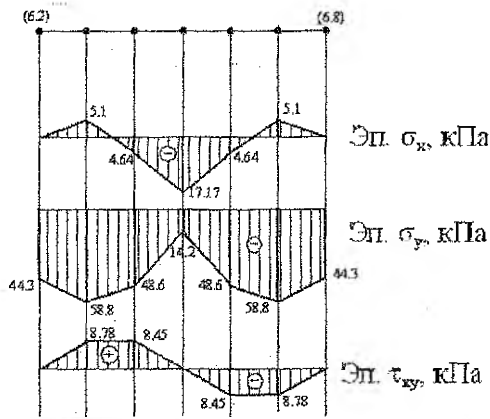


Рис. 17. Эпюры напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в сечении В-В

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем сущность метода конечных разностей?
2. Какая разница между плоской деформацией и обобщенным плоским состоянием?
3. Напишите основное уравнение плоской задачи теории упругости.
4. Какие вы знаете методы решения плоской задачи теории упругости?
5. Какая функция называется бигармонической?
6. Дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи.
7. Условия на контуре для плоской задачи.
8. Как определяются напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  через функцию напряжений?
9. Каким требованиям должны удовлетворять напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и функциям напряжений  $\varphi$ ?
10. Какой вид имеет уравнение, которое записывается для внутриконтурных точек?
11. Что такое  $\Delta x, \Delta y, \alpha$ ?
12. Как определить напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в любой точке сетки МКР?
13. Для чего строятся эпюры изгибающих моментов и продольных сил?
14. Что такое соответствующая рама и требования, предъявляемые к ней?
15. Как определить значения функции напряжений на контуре балки-стенки?
16. Как выразить значения функции напряжений в законтурных точках?
17. Сколько необходимо составить уравнений МКР для решения плоской задачи теории упругости?
18. От чего зависит точность решения задачи МКР?

### ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. - М.: Высшая школа, 1968.
2. Киселев В.А. Плоская задача теории упругости. - М.: Высшая школа, 1976.
3. Александров А.В., Поталов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высшая школа, 1990.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

*Мartiновский Владимир Леонидович*

*Веремейчик Андрей Иванович*

*Хвiсевич Виталий Михайлович*

## **РАСЧЕТ БАЛКИ-СТЕНКИ**

### **ЗАДАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению расчетно-графической работы № 2  
по дисциплине «Теория упругости и пластичности»

для студентов строительного факультета специальностей  
1- 70 02 01 – «Промышленное и гражданское строительство»,  
1- 70 03 01 – «Автомобильные дороги»

Ответственный за выпуск: Хвiсевич В.М.

Редактор: Стрoкaч Т.В.

Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.

Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано к печати 9.01.2008 г. Бумага «Снегурочка». Гарнитура Arial Narrow.  
Усл. печ. л. 1,4. Уч.-изд. л. 1,5. Заказ № 5. Тираж 50 экз. Отпечатано на ризографе  
учреждения образования «Брестский государственный технический университет».  
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.