МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

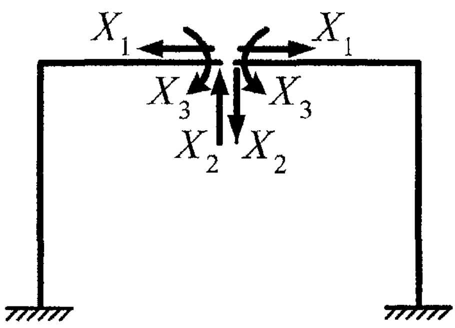
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Методические указания по дисциплине «Строительная механика» для студентов строительных специальностей заочной формы обучения

Часть 2

Статически неопределимые системы. Метод сил



Брест 2008

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Методические указания по дисциплине «Строительная механика» для студентов строительных специальностей заочной формы обучения

Часть 2

Статически неопределимые системы. Метод сил

Брест 2008

УДК 624.04

В методических указаниях изложены основы расчета статически неопределимых рам на действие статических внешних нагрузок методом сил, рассмотрены принципы расчета, обсуждаются упрощения в расчетах симметричных рам, приведены примеры расчетов.

Методические указания предназначены для студентов специальностей 70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 70 03 01 «Автомобильные дороги», 70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов» заочной формы обучения; могут использоваться при самостоятельном изучении курса строительной механики и при выполнении контрольных работ. Издаются в 3 частях. Часть 2.

Составители: В.И. ИГНАТЮК, доцент, канд. техн. наук,
С.В. ЗАГУЛЯЕВ, старший преподаватель,
В.В. МОЛОШ, старший преподаватель

Рецензент: зам. директора филиала УП «БелНИИС» – «Научно-технический центр», канд. техн. наук В. Н. ДЕРКАЧ

© Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет», 2008

ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях изложены основы метода сил в расчетах статически неопределимых рамно-стержневых систем. Подробно рассмотрены все этапы расчета. Обсуждаются упрощения в расчетах симметричных рам. Приведен ряд примеров расчета, которые позволят приобрести необходимый опыт решения подобных задач.

Разделы 1 –2 написаны Игнатюком В.И., разделы 3.1– 3.5 – Молошем В.В., разделы 3.6 – 3.8 – Загуляевым С.В. Общая редакция – Игнатюка В.И.

1. СУТЬ МЕТОДА СИЛ

В методе сил расчет статически неопределимых систем сводится к известным способам расчета статически определимых систем.

Статически определимая система, используемая для расчета статически неопределимой системы, получается из заданной системы путем отбрасывания так называемых “лишних” связей и называется основной системой (О.С.) метода сил. Эта система должна работать так же, как рассматриваемая статически неопределимая система.

Для соблюдения этого необходимо выполнение для основной системы метода сил следующих условий:

1) в основной системе метода сил вместо отброшенных связей необходимо приложить усилия, соответствующие реакциям в этих связях, так как в статически неопределимой системе эти связи есть, и в них могут и будут возникать реактивные усилия; эти усилия и будут неизвестными метода сил; в результате основная система метода сил будет находиться под воздействием внешних нагрузок, действующих на данную систему, и неизвестных метода сил X_i ($i = 1 \ldots Л$, где $Л$ – число “лишних” связей в системе);

2) перемещения точек (сечений) в направлении отброшенных (“лишних”) связей в основной системе должны быть равны нулю, так как в статически неопределимой системе в этих направлениях связи есть, что для основной системы, находящейся под воздействием внешних нагрузок (P) и неизвестных метода сил (X_i), может быть записано аналитически в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta_1(X_1, X_2, \ldots, X_Л, P) = 0; \\ \Delta_2(X_1, X_2, \ldots, X_Л, P) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_Л(X_1, X_2, \ldots, X_Л, P) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение этой системы уравнений позволяет определить основные неизвестные метода сил.

Приложив после этого найденные неизвестные вместе с внешними нагрузками к основной системе метода сил, будем иметь возможность построить для неё эпюры внутренних усилий (M, Q, N) обычными способами (способами расчета статически определимых систем). Эти эпюры будут являться эпюрами внутренних усилий в заданной статически неопределимой системе.

Ниже принципы расчета статически неопределимых систем методом сил рассмотрены применительно к расчету статически неопределимых рам более подробно и последовательно с выделением всех этапов расчета.

2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА МЕТОДОМ СИЛ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ

2.1. Степень статической неопределимости системы

Степень статической неопределимости системы является величиной, обратной (с противоположным знаком) степени свободы системы (см. раздел “Кинематический анализ сооружений”), и для рам может быть определена по формулам:

$$Л = 3К - Ш, \qquad (2)$$

где $К$ – число замкнутых контуров в системе;

$Ш$ – число простых (одиночных) шарниров в системе (здесь считаются все шарниры в системе – как между стержнями, так и шарниры в опорах).

Под **замкнутым контуром** будем понимать замкнутую цепь, образованную стержнями (прямолинейными, ломаными, криволинейными) либо стержнями и основанием, соединенными между собой жестко либо шарнирно (см. рис. 1).

Если в контуре все его элементы соединены между собой жестко, то такой контур будем называть **жестким замкнутым контуром** (рис. 1в,г).

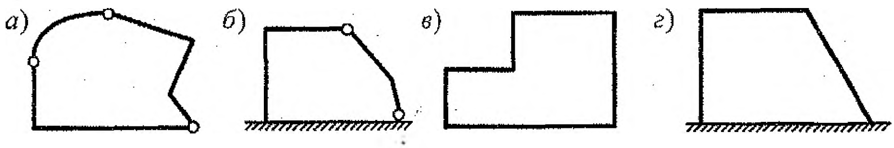


Рис. 1. Примеры замкнутых контуров

Одиночным или **простым** шарниром называют шарнир, в котором соединяется два диска.

Диск – здесь это заведомо неизменяемая статически определимая система либо её часть. Это могут быть, например, прямой, ломаный, криволинейный либо разветвленный стержни, а также системы стержней, образованные в соответствии с принципами образования геометрически неизменяемых статически определимых систем (см. раздел 2.2). Например, в раме на рис. 2 имеем три диска (D_1, D_2, D_3).

При использовании формулы (2) основание (земля) тоже рассматривается как диск, участвующий в образовании замкнутых контуров.

Число одиночных шарниров **в шарнирном узле**, в котором соединяется несколько дисков, может быть определено по формуле:

$$n_{ш}=D_y-1, \tag{3}$$

где D_y – число дисков, соединяющихся в узле.

Например, в узле C рамы на рис. 2 будем иметь три простых шарнира, в узле B – один простой шарнир.

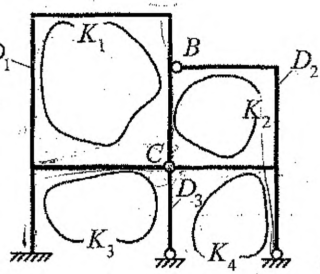


Рис. 2

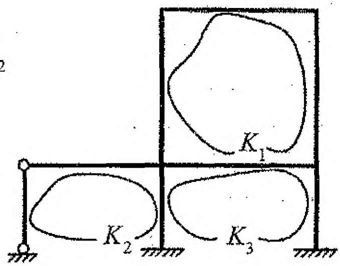


Рис. 3

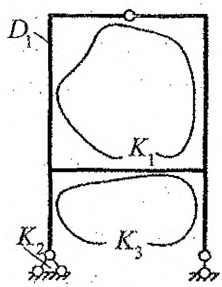


Рис. 4

Вычислим по формуле (2) число лишних связей для рам, представленных на рис. 2÷4:

а) для рамы на рис. 2 – $Л=3К-Ш=3\cdot4-6=6$;

б) для рамы на рис. 3 – $Л=3К-Ш=3\cdot3-2=7$;

в) для рамы на рис. 4 – $Л=3К-Ш=3\cdot3-7=2$.

Заметим, что **формула (2)** может применяться **для любых систем**, то есть не имеет ограничений при использовании.

$$Л=-(3D-2Ш-C_o), \tag{4}$$

где D – число дисков в системе (земля здесь не считается диском, а только основанием, на которое система опирается);

$Ш$ – число простых (одиночных) шарниров, соединяющих диски D;

C_o – число связей в опорах системы.

(!) ***Формула (4) может применяться для всех систем, кроме состоящих из жестких замкнутых контуров или имеющих в себе такие контуры*** (рис. 1в,г), так как жесткий замкнутый контур, хоть и является неизменяемой системой, статически неопределим (имеет три лишних связи).

Так, данная формула не может быть применена к раме на рис. 3.

Вычислим по формуле (4) степень статической неопределимости (число "лишних" связей) для рам на рис. 2 и 4:

а) для рамы на рис. 2 – $Л = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 7) = 6$;

б) для рамы на рис. 4 – $Л = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 3) = 2$.

Результаты совпадают с полученными выше по формуле (2).

2.2. Выбор основной системы метода сил

Основной системой (О.С.) метода сил называется статически определимая, геометрически неизменяемая система, получаемая из заданной статически неопределимой системы путем отбрасывания лишних связей и замены их неизвестными усилиями.

Геометрическая неизменяемость определяется с помощью кинематического анализа основной системы, а точнее с помощью геометрического анализа структуры системы, который выполняется с использованием известных признаков геометрической неизменяемости статически определимых систем.

Основными **признаками геометрической неизменяемости** статически определимых систем и их частей являются:

1) система, состоящая из трех дисков, соединенных последовательно тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (образующими треугольник), является неизменяемой, то есть образует новый диск – см. рис. 5а;

2) если к диску присоединена точка двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, то такая система в целом неизменяема – рис. 5б;

3) два диска, соединенные между собой тремя стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуют неизменяемую систему, то есть новый диск – рис. 5в;

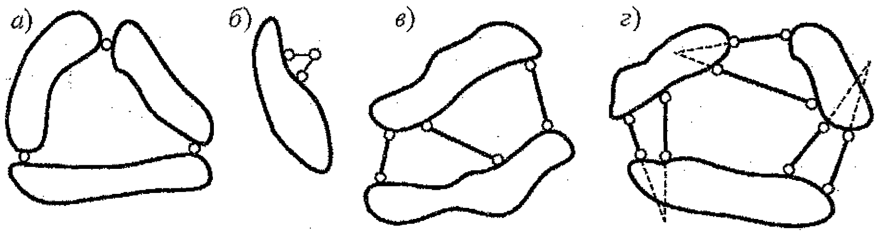


Рис. 5. Геометрические признаки неизменяемости систем

4) система, состоящая из трех дисков, соединенных между собой последовательно каждый с другим парами стержней (всего шестью стержнями), точки пересечения которых не лежат на одной прямой (образуют треугольник), неизменяема – рис. 5г.

Заметим, что основная система метода сил **не может быть** не только **изменяемой**, но не может быть и **мгновенно изменяемой**.

Мгновенная изменяемость также может быть определена на основе **признаков мгновенной изменяемости**, основными из которых являются:

1) система, состоящая из трех дисков, соединенных последовательно тремя шарнирами, лежащими на одной прямой, мгновенно изменяема – см. рис. 6а (несложно увидеть, что этот случай мгновенной изменяемости является исключением из первого признака геометрической неизменяемости);

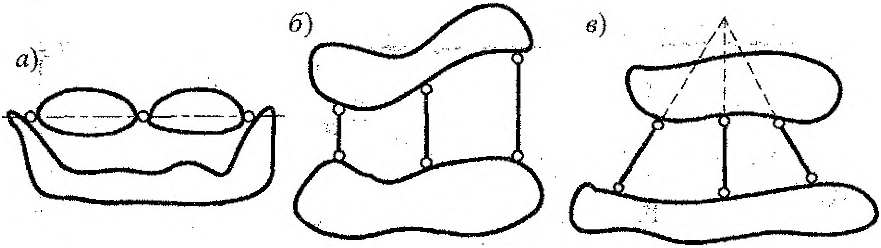


Рис. 6. Геометрические признаки мгновенной изменяемости

2) два диска, соединенные между собой тремя параллельными стержнями образуют мгновенно изменяемую систему – рис. 6б;

3) система, состоящая из двух дисков, соединенных между собой тремя стержнями, пересекающимися в одной точке, мгновенно изменяема – рис. 6в.

Несложно заметить, что случаи 2 и 3 мгновенной изменяемости являются исключениями из третьего случая геометрической неизменяемости.

Рассмотрим несколько примеров выбора основных систем метода сил.

Пример 1. Рама, представленная на рис. 7, имеет две "лишние" связи

$$Л = 3К - Ш = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \text{ или } Л = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 6) = 2,$$

и для нее могут быть выбраны основные системы (О.С.) метода сил, показанные на рис. 7б÷7д, и не может быть принята система, изображенная на рис. 7е, так как она мгновенно изменяема в верхней части по первому признаку мгновенной изменяемости – три диска соединены тремя шарнирами, лежащими на одной прямой.

Пример 2. Рама, представленная на рис. 8а, имеет три "лишние" связи

$$Л = 3К - Ш = 3 \cdot 3 - 6 = 3 \text{ или } Л = -(3D - 2Ш - C_O) = -(3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 7) = 3,$$

и для нее можно выбрать О.С. метода сил, представленные на рис. 8б÷8е, и нельзя принимать О.С. в виде, изображенном на рис. 8ж (первый признак мгновенной изменяемости – шарниры B,C,D) и на рис. 8з (система изменяема в правой части, которая может вращаться относительно шарнира C, а левая часть

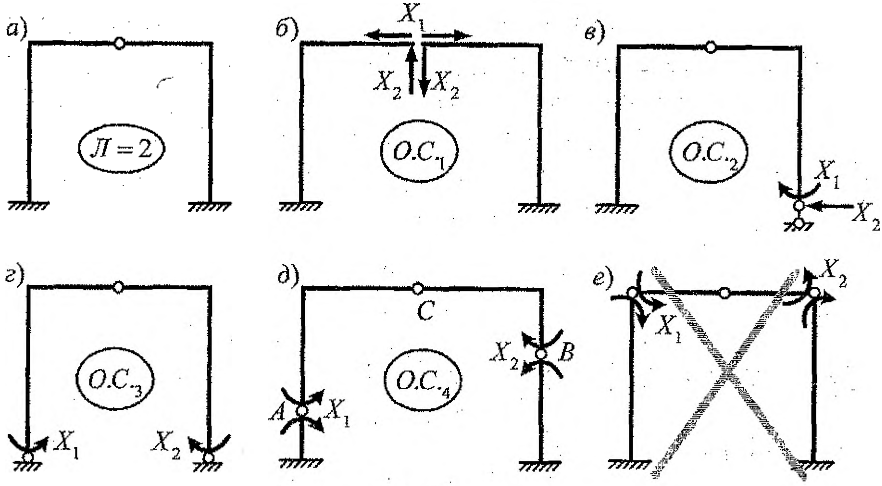


Рис. 7

при этом статически неопределима, что является следствием неправильного отбрасывания "лишних" связей).

Пример 3. Для рамы, представленной на рис. 9 и имеющей три "лишние" связи ($Л = 3К - Ш = 3 \cdot 1 - 0 = 3$), возможные варианты основных систем метода сил показаны на рис. 9б÷9е.

Как видно из представленных примеров, для получения основных систем метода сил можно использовать **следующие подходы в отбрасывании "лишних" связей**:

– отбрасывание опор (удаляется одна связь при отбрасывании шарнирно подвижной опоры, две связи – при отбрасывании шарнирно неподвижной опоры и три связи – при отбрасывании заделки);

– отбрасывание отдельных опорных связей в опорах (количество удаляемых связей равно числу отброшенных опорных связей);

– разрезание затяжек (удаляется одна связь);

– врезание шарниров (удаляется одна связь);

– разрезание шарниров (удаляется две связи при разрезании одного простого шарнира);

– разрезание стержней (удаляется три связи).

Анализ представленных основных систем метода сил позволяет сделать следующий вывод:

(!) Для любой статически неопределимой системы существует очень большое число основных систем метода сил.

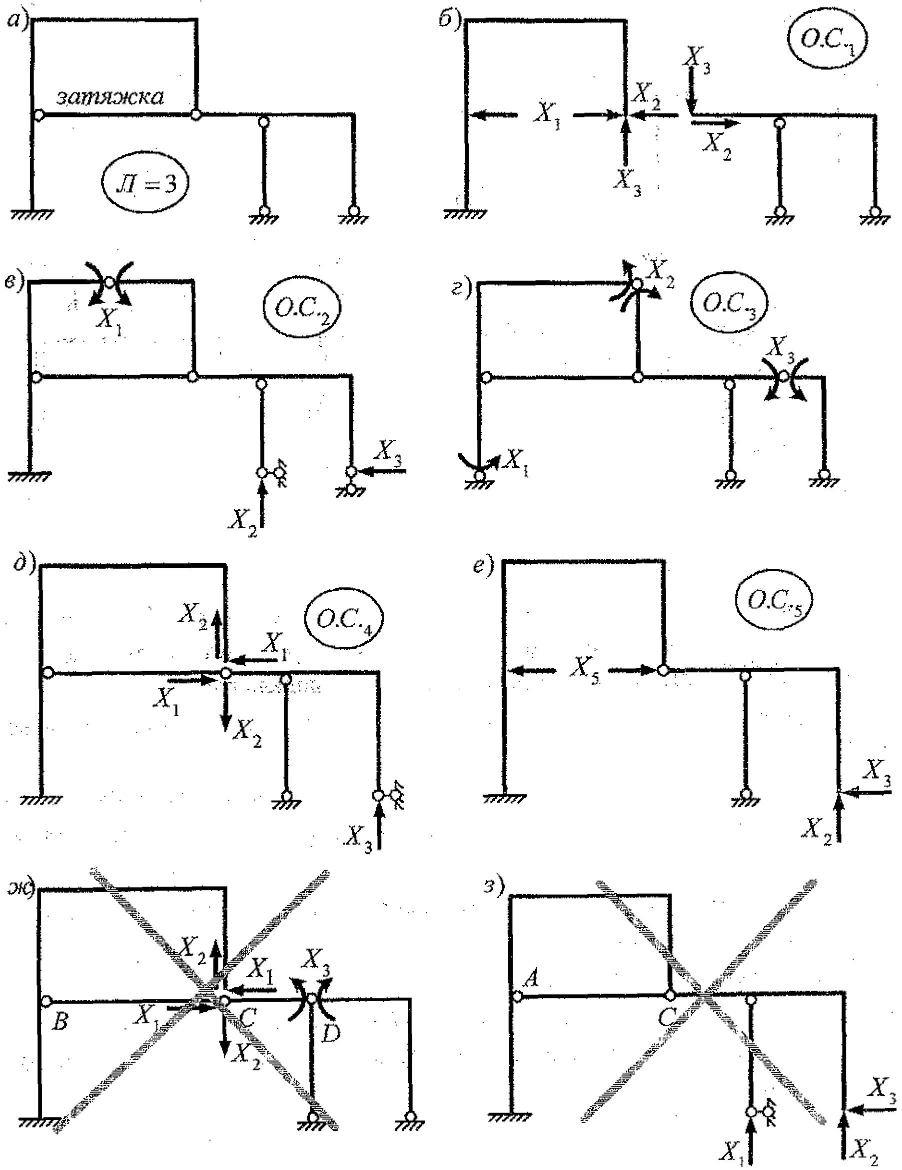


Рис. 8

Например, в О.С.$_4$ на рис. 7 шарнир A можно врезать в любом сечении слева от шарнира C, где таких сечений может быть бесконечное множество, не говоря уже о шарнире B, который также можно врезать в любом из сечений справа (нельзя допускать только случай, когда шарниры A, C и B окажутся на одной прямой – рис.7е). Подобными являются также О.С. на рис. 8в, 9д, подтверждая указанный вывод.

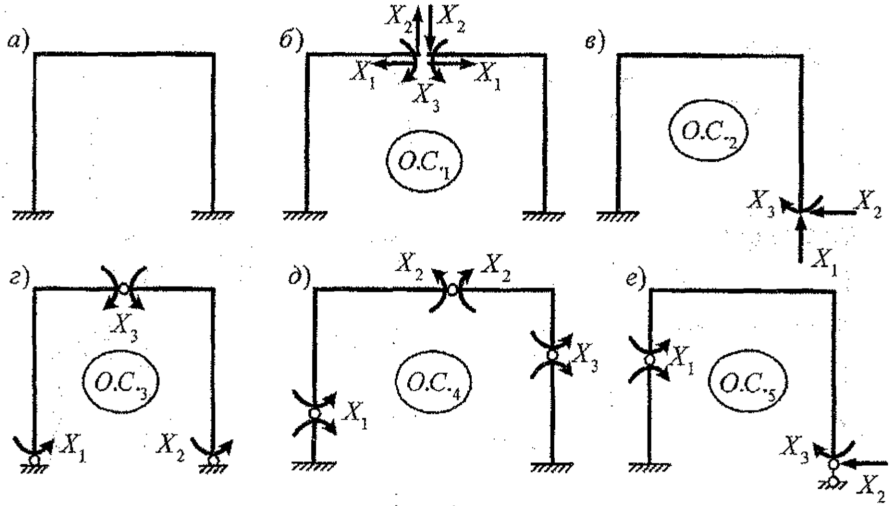


Рис. 9

Для расчета же методом сил должна быть выбрана одна основная система, которую будем называть **расчетной основной системой** метода сил. В качестве расчетной О.С. следует принимать наиболее рациональную.

Рациональность основных систем определяется следующими положениями:

1) в расчетной основной системе метода сил определение опорных реакций и построение эпюр внутренних усилий должно быть как можно более простым;

2) эпюры внутренних усилий (изгибающих моментов) также должны быть как можно более простыми;

3) для симметричных рам следует выбирать симметричные расчетные основные системы (это положение будет обосновано позже).

Для рам, рассмотренных ранее, в качестве расчетных, по мнению автора, можно принять:

– для рамы на рис. 7 – О.С.$_1$;

– для рамы на рис. 8 – О.С.$_1$;

– для рамы на рис. 9 – О.С.$_1$ либо О.С.$_2$.

2.3. Система канонических уравнений метода сил

Основная система (О.С.) метода сил, принимаемая для расчета, как уже указывалось (раздел 2.1), будет эквивалентна заданной статически неопределимой системе, если эти системы будут одинаково деформироваться и иметь соответственно одинаковые перемещения всех точек. А это значит, что перемещения в О.С. в направлениях отброшенных связей должны быть равны нулю (1), так как в заданной статически неопределимой системе эти связи есть.

Запишем условие эквивалентности основной системы, загруженной неизвестными метода сил X_1, X_2, X_3, ... $X_Л$ и внешними нагрузками, заданной статически неопределимой системе с $Л$ лишними связями (1) в развернутой форме, используя принцип независимости действия сил. В результате перемещение по направлению i-ой отброшенной связи будет иметь вид

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \Delta_{i3} + ... + \Delta_{ik} + ... + \Delta_{iЛ} + \Delta_{iP} = 0,$$

где Δ_{ik} – перемещение по направлению i–ой отброшенной связи, вызванное действием k-ой неизвестной силы (X_k); Δ_{iP} – перемещение по направлению i-ой отброшенной связи от действия заданной внешней нагрузки.

Для линейно-деформируемых систем любое перемещение, вызванное действием какой-либо силы, можно выразить в виде произведения этой силы на перемещение того же вида и в том же направлении от действия соответствующей единичной силы, то есть $\Delta_{ik} = \delta_{ik} \cdot X_k$.

Выражая каждое из перемещений от действия неизвестных сил через эти силы и соответствующие единичные перемещения, получим систему канонических уравнений метода сил в виде

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + ... + \delta_{1Л}X_Л + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + ... + \delta_{2Л}X_Л + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + ... + \delta_{3Л}X_Л + \Delta_{3P} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{Л1}X_1 + \delta_{Л2}X_2 + \delta_{Л3}X_3 + ... + \delta_{ЛЛ}X_Л + \Delta_{ЛP} = 0, \end{cases} \qquad (5)$$

где δ_{ik} и Δ_{iP} – перемещения, в обозначениях которых:

– первые индексы определяют точки (сечения), которые перемещаются, и направления их перемещений (эти точки и перемещения совпадают соответственно с точками (сечениями), в которых приложены силы X_i, и с направлениями этих сил);

– вторые индексы указывают на причины, вызывающие эти перемещения, то есть на силу X_k единичной величины, если второй индекс – k, или на внешние нагрузки, действующие на сооружение, если этот индекс – P.

Коэффициенты системы уравнений (5), имеющие одинаковые индексы (δ_{ii}), называют **главными**, коэффициенты с разными индексами (δ_{ik}) называют **побочными**, а величины Δ_{iP} – **свободными членами** или **грузовыми членами**.

Главные коэффициенты здесь будут всегда **положительными** и **не могут равняться нулю**. Побочные коэффициенты могут принимать любые значения, в том числе и нулевое, и для них на основе теоремы Максвелла всегда должно соблюдаться равенство

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \tag{6}$$

В зависимости от вида сил X_i перемещения δ_{ik} и Δ_{iP} по физическому смыслу могут быть:

– **линейным перемещением**, если X_i – сосредоточенная сила;

– **угловым перемещением (углом поворота)**, если X_i – сосредоточенный момент;

– **взаимным линейным перемещением** (сближением или расхождением) двух точек, если X_i – две сосредоточенные силы, приложенные в двух точках по прямой, их соединяющей, навстречу друг другу или друг от друга;

– **взаимным углом поворота** двух сечений, если X_i – два сосредоточенных момента, приложенные в этих сечениях навстречу друг другу.

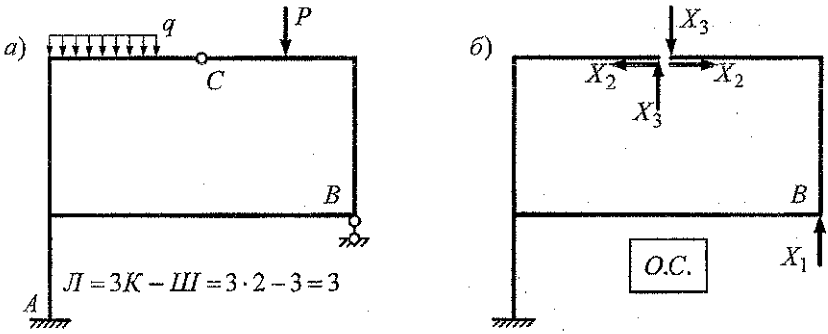


Рис. 10

Например, для рамы, изображенной на рис. 10а, при выборе основной системы метода сил в виде, представленном на рис. 10б, будем иметь систему трех уравнений вида (5).

Физический смысл коэффициентов этой системы (на примере нескольких коэффициентов) будет следующим:

δ_{11} – вертикальное перемещение точки B в основной системе (О.С.) от действия силы X_1 единичной величины;

δ_{23} – взаимное расхождение в О.С. сечений слева и справа от шарнира C по горизонтали от действия сил X_3, равных единице;

Δ_{3P} – взаимное расхождение в О.С. сечений слева и справа от шарнира C по вертикали от действия внешних нагрузок.

Физический смысл уравнений в целом будет:

1-го уравнения – вертикальное перемещение точки B от действия сил X_1, X_2, X_3 и внешних нагрузок должно равняться нулю, так как в заданной статически неопределимой системе (рис. 10а) в точке B имеется вертикальная связь;

2-ое уравнение представляет собой взаимное расхождение сечений слева и справа от шарнира C по горизонтали от действия сил X_1, X_2, X_3 и внешних нагрузок, которое должно равняться нулю, так как указанные сечения соединены между собой шарниром C (рис. 10а) и не могут расходиться.

Физический смысл 3-его уравнения аналогичен смыслу 2-го с разницей в направлении взаимного расхождения сечений (по вертикали).

2.4. Вычисление единичных коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Коэффициенты и свободные члены уравнений метода сил (5) являются по физическому смыслу (см. раздел 2.3) перемещениями и поэтому могут быть вычислены по формуле Мора [1, 2, 3, 4]. При этом для рам в формуле Мора обычно пренебрегают влиянием поперечных и продольных сил, которое для таких систем незначительно, опуская соответствующие слагаемые. В результате выражения для определения единичных коэффициентов и свободных членов систем канонических уравнений метода сил будем иметь в виде:

$$\delta_{ii} = \sum_{1}^{n} \int_{0}^{l} \frac{\overline{M}_i^2\, dx}{EJ}; \qquad \delta_{ik} = \sum_{1}^{n} \int_{0}^{l} \frac{\overline{M}_i\, \overline{M}_k\, dx}{EJ}; \qquad \delta_{ii} = \sum_{1}^{n} \int_{0}^{l} \frac{\overline{M}_i^2\, dx}{EJ}; \qquad (7)$$

где $\overline{M}_i$ ($\overline{M}_k$) – закон изменения (эпюра) изгибающих моментов в О.С. от действия силы $X_i = 1$ ($X_k = 1$); M_P – закон изменения (эпюра) изгибающих моментов в О.С. от действия внешних нагрузок; EJ – жесткость стержня (участка) при изгибе, n – число участков интегрирования, l – длины этих участков.

Законы изменения изгибающих моментов на различных участках рамностержневых систем будут разными. Разными могут быть и жесткости участков.

Поэтому в формулах (7) вычисление интегралов Мора необходимо производить отдельно по участкам, на которых законы изменения эпюр $\overline{M}_i$, $\overline{M}_k$, M_P и величины жесткостей в пределах длин этих участков одинаковы, с последующим сложением результатов по всем участкам системы.

Из этого следует, что эпюры внутренних усилий в системе при использовании формул (7) следует разбивать на **участки одновременной непрерывности изменения внутренних усилий и жесткостей**, в пределах которых законы изменения "перемножаемых" эпюр должны быть неизменными, то есть не должны иметь скачков, изломов и переходов к другим законам изменения, и на которых жесткости должны быть постоянными. После этого выполняется интегрирование последовательно по каждому из этих участков с последующим суммированием результатов по всей системе. Границами рассматриваемых участков интегрирования в рамно-стержневых системах будут точки (сечения):

– излома и разветвления стержней;

– приложения сосредоточенных внешних нагрузок (сил, моментов);

– действия опорных реакций;

– начала и конца распределенных нагрузок.

Таким образом, для вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил мы должны в основной системе построить единичные эпюры изгибающих моментов $\overline{M}_i$ ($i = 1 \dots Л$) от действия единичных значений неизвестных ($X_i = 1$) и грузовую эпюру изгибающих моментов M_P от действия внешних нагрузок. После этого мы сможем приступить к вычислению искомых величин.

Вычисление интегралов Мора в формулах (7) может производиться следующими основными способами:

– способом непосредственного интегрирования;

– по правилу Верещагина;

– по формуле Симпсона;

– по формуле трапеций;

– и другими способами.

Обсудим и рассмотрим эти способы подробнее.

Способ непосредственного интегрирования в расчетах рамно-стержневых систем не удобен и практически не используется. Применяется он в случаях, когда нельзя использовать правило Верещагина, формулы Симпсона и трапеций – например, в системах, состоящих из криволинейных стержней (в арках).

Правило Верещагина. Для вычисления на участке постоянной жесткости, на котором эпюры M_1 и M_2 непрерывны, интеграла Мора вида

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2\, dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_1 M_2\, dx \qquad (8)$$

необходимо площадь одной из эпюр (если одна из эпюр криволинейна, то обязательно криволинейной) умножить на ординату, взятую под центром тяжести этой площади из другой эпюры.

Таким образом, при использовании правила Верещагина для эпюры, площадь которой берется, необходимо уметь вычислять эту площадь и находить (знать) положение ее центра тяжести.

При этом **знак получаемого результата** определяется по правилу:

если знаки (растянутые волокна) ординат эпюры, площадь которой вычисляется, и ординаты под центром ее тяжести из другой эпюры совпадают, то принимается знак "плюс", если не совпадают, то знак "минус".

Приведем несколько **примеров** использования правила Верещагина.

Для эпюр на участке постоянной жесткости длиной l, представленных на рис. 11, вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина может быть выполнено четырьмя разными способами, которые, естественно, будут давать один и тот же результат:

а) при вычислении площади эпюры M_1 и разбивке ее (для быстрого и удобного определения положения центров тяжести) на прямоугольник $a\times b$ и треугольник $(b-a)\times l$ (рис. 11а):

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2\, dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left[(a\cdot l)\cdot\frac{c}{2} + \frac{1}{2}(b-a)\,l\cdot\frac{1}{3}c\right];$$

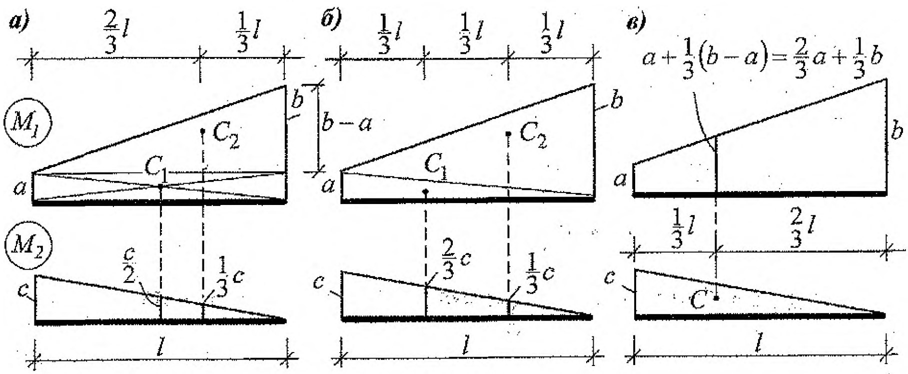
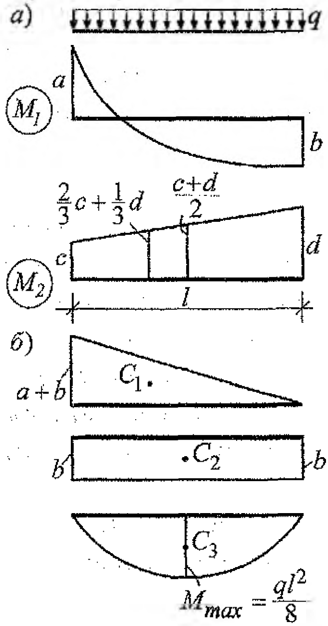


Рис. 11

б) при вычислении площади эпюры M_1 и разбивке ее на два треугольника $a \times l$ и $b \times l$ (рис. 11б):
$$\int_0^l \frac{M_1 M_2\, dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{a \cdot l}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}c + \left(\frac{b \cdot l}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}c\right];$$

в) при вычислении площади эпюры M_2 (так как обе эпюры линейны, то не имеет значения, площадь какой из них брать) (рис 11в):



$$\int_0^l \frac{M_1 M_2\, dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{c \cdot l}{2}\right)\cdot \underbrace{\left[a + \frac{1}{3}(b-a)\right]}_{}, $$

если эпюру M_1 разобьем на прямоугольник и треугольник;

или $$\int_0^l \frac{M_1 M_2\, dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{c \cdot l}{2}\right)\cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b\right)}_{}.$$

если эпюру M_1 разобьем на два треугольника.

Рис. 12

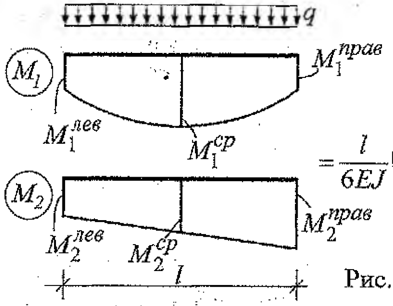
На рис. 12а представлены еще две эпюры изгибающих моментов, одна из которых криволинейна (изменяется по параболическому закону в связи с действием на участке равномерно распределенной нагрузки q). Такую эпюру можно разбить на несколько эпюр, что позволяет сделать принцип независимости действия сил – например, на прямоугольную, треугольную и на чисто параболическую эпюру, соответствующую на участке эпюре изгибающих моментов в простой двухопорной балке (рис. 12б), после чего "перемножить" каждую из этих простых эпюр на эпюру $\overline{M}_2$:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2\, dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2}(a+b)l\cdot\left(\frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d\right) + (b \cdot l)\cdot\frac{c+d}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot l\cdot\frac{c+d}{2}\right],$$

где площадь параболической эпюры вычисляется по формуле
$$\omega_{параболы} = \frac{2}{3}M_{max}\, l = \frac{2}{3}\left(\frac{ql^2}{8}\right)l.$$

<u>**Формула Симпсона**</u>. Эта формула может применяться для вычисления интегралов Мора путем соответствующего "перемножения" как линейных эпюр, так и эпюр, одна из которых криволинейна (изменяется по параболиче-

скому закону) (рис. 13). **Формула Симпсона** имеет вид:

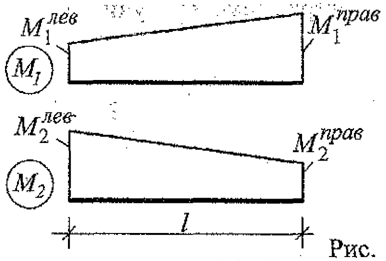


$$\int_0^l \frac{M_1 M_2\, dx}{EJ} = \tag{9}$$

$$= \frac{l}{6EJ}\left(M_1^{лев}\cdot M_2^{лев} + 4M_1^{ср}\cdot M_2^{ср} + M_1^{прав}\cdot M_2^{прав}\right).$$

Рис. 13

Формула трапеций – может применяться для "перемножения" согласно интегралам Мора только линейных эпюр (рис. 14):



$$\int_0^l \frac{M_1 M_2\, dx}{EJ} = \tag{10}$$

$$= \frac{l}{6EJ}\left(2M_1^{лев}\cdot M_2^{лев} + M_1^{лев}\cdot M_2^{прав} + \right.$$

$$\left. + M_1^{прав}\cdot M_2^{лев} + 2M_1^{прав}\cdot M_2^{прав}\right).$$

Рис. 14

Правило знаков. ***В формулах Симпсона и*** **трапеций** произведения "перемножаемых" ординат принимаются со знаком "плюс", если растянутые волокна в сечениях, в которых взяты эти ординаты, находятся с одной стороны стержня на обоих эпюрах, и знак "минус", если растянутые волокна в сечениях стержня для этих ординат противоположны.

2.5. Проверки единичных коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

После вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений по формулам (7) необходимо выполнить **проверки** правильности выполнения расчетов, в качестве которых могут быть использованы:

а) **универсальная проверка** правильности вычисления единичных коэффициентов:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_S^2\, dx}{EJ} = \sum_{i=1}^{Л} \sum_{k=1}^{Л} \delta_{ik}, \tag{11}$$

где правая часть выражения представляет собой сумму всех единичных коэффициентов системы уравнений метода сил (5), а $\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots + \overline{M}_Л$ – суммарная единичная эпюра.

б) если универсальная проверка единичных коэффициентов не выполняется, то для определения, в каком уравнении (в какой строке) находятся неверно вычисленные коэффициенты, можно сделать **построчные проверки**, записываемые в виде

$$\sum_{1}^{n}\int_{0}^{l}\frac{\overline{M}_i\,\overline{M}_S\,dx}{EJ}=\sum_{k=1}^{Л}\delta_{ik}\,,\qquad (k=1\ \ldots\ Л) \tag{12}$$

где правая часть представляет собой сумму всех единичных коэффициентов в i-том уравнении системы (5).

Из анализа выполнения или невыполнения отдельных построчных проверок можно определить (в крайнем случае ориентировочно), какой из коэффициентов δ_{ik} возможно вычислен неверно.

Как несложно видеть, все ($Л$) построчные проверки заменяют универсальную и наоборот.

в) **столбцовая проверка** правильности вычисления свободных (грузовых) членов системы уравнений записывается в виде:

$$\sum_{1}^{n}\int_{0}^{l}\frac{\overline{M}_S\,M_P\,dx}{EJ}=\sum_{i=1}^{Л}\Delta_{iP}\,, \tag{13}$$

где правая часть выражения представляет собой сумму всех свободных членов (грузовых перемещений) системы уравнений.

2.6. Решение системы канонических уравнений

Система канонических уравнений метода сил (5) является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений и может быть решена, например: способом подстановки, способом Гаусса, по правилу Крамера с использованием определителей и другими известными способами. При этом могут использоваться и соответствующие компьютерные программы (MathCad, Excel, Mathematika, Eurika и т.д.)

Заметим, что после нахождения неизвестных метода сил следует обязательно выполнить **<u>проверку правильности решения</u>** системы уравнений путем подстановки найденных значений X_i (i = 1 … $Л$) во все уравнения системы. Такая проверка позволит обнаружить ошибки при ручном решении системы уравнений либо ошибки ввода данных при использовании компьютерных программ. ***Если такую проверку не сделать, то может оказаться, что все дальнейшие расчеты и вычисления будут напрасной тратой времени.***

2.7. Построение и проверки окончательных эпюр внутренних усилий в статически неопределимой системе

После определения неизвестных метода сил X_i (i = 1 … Л) построение окончательных эпюр внутренних усилий в рассчитываемой статически неопределимой системе может быть выполнено двумя способами:

1. Можно приложить к О.С. метода сил внешние нагрузки и все найденные неизвестные и построить в этой О.С., как в обычной статически определимой системе, эпюры M, Q и N, которые и будут эпюрами внутренних усилий в заданной статически неопределимой системе.

2. Учитывая, что от действия каждого из неизвестных метода сил X_i единичной величины и от действия внешних нагрузок эпюры изгибающих моментов в О.С. уже построены (перед вычислением коэффициентов системы уравнений – см. раздел 2.4), ими можно воспользоваться. В этом случае окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе можно построить, используя принцип независимости действия сил, по формуле:

$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + \overline{M}_3 X_3 + \ldots + \overline{M}_Л \cdot X_Л + M_P \qquad (14)$$

Так как здесь используются результаты расчетов и построений эпюр, уже выполненных ранее (и которые в первом подходе, по существу, надо повторять), то этот подход получается более простым и быстрее приводит к цели, и поэтому далее используется только такой подход.

Правильность расчетов и построения эпюр изгибающих моментов проверяется с помощью **деформационной (кинематической) проверки**, которая может быть представлена в двух вариантах:

1) полная деформационная проверка – записывается в виде

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_S\, M\, dx}{EJ} = 0 \qquad (15)$$

и по физическому смыслу представляет собой суммарное перемещение по направлениям всех неизвестных метода сил X_i (i = 1…Л) от действия этих неизвестных и внешних нагрузок, которое должно равняться нулю, так как в заданной статически неопределимой системе в направлении этих неизвестных (X_i) есть связи (этот физический смысл совпадает с физическим смыслом всех вместе взятых канонических уравнений метода сил – см. раздел 2.3);

2) построчные деформационные (кинематические) проверки – имеют вид

$$\sum_{1}^{n} \int_{0}^{l} \frac{\overline{M}_i M\, dx}{EJ} = 0\,, \qquad i = 1 \ldots Л\,; \tag{16}$$

физический смысл каждой из этих проверок заключается в равенстве нулю перемещений от действия всех X_i и внешних нагрузок по направлениям каждого из неизвестных метода сил X_i, так как по этим направлениям в статически неопределимой системе есть связи (и это соответствует физическому смыслу соответствующих канонических уравнений метода сил –см. раздел 2.3).

Все вместе построчные деформационные проверки (16) соответствуют полной деформационной проверке (15), и если полная проверка выполняется, то не имеет смысла выполнять построчные проверки. Их целесообразно производить при невыполнении полной деформационной проверки для того, чтобы выявить, в каком из направлений (уравнений) искать ошибку.

Эпюра поперечных сил *Q* может быть построена по эпюре *М* с использованием известной дифференциальной зависимости $Q = \dfrac{dM}{dx}$.

Для линейных участков эпюры *М* эту зависимость можно представить в виде

$$Q = \pm\left|\frac{M_{прав} - M_{лев}}{l}\right|, \tag{17}$$

где $M_{лев}$, $M_{прав}$ – величины изгибающих моментов по концам рассматриваемого участка (если растянутые волокна у этих изгибающих моментов находятся с разных сторон, то одна из них принимается положительной, а вторая – отрицательной).

Знак перед абсолютной величиной в формуле (17) принимается **по правилу**: ***если для совмещения стержня, на котором построена эпюра М, с касательной к этой эпюре стержень необходимо поворачивать по часовой стрелке (при угле поворота меньше 90°), то принимается знак „+", если против часовой стрелки, то принимается знак „–".***

Для криволинейных (параболических) участков эпюры *М* дифференциальная зависимость $Q = \dfrac{dM}{dx}$ может быть записана в следующем виде

$$Q = Q_o \pm \left|\frac{M_{прав} - M_{лев}}{l}\right|, \tag{18}$$

где второе слагаемое представляет собой поперечную силу $Q_{лин}$ от линейной части эпюры *М* на участке (17), а первое слагаемое Q_o учитывает криволинейную часть этой эпюры и представляет собой эпюру (закон изменения) поперечных сил на участке, рассматриваемом в виде простой двухопорной балки, от действия равномерно распределенной нагрузки (см. рис. 15).

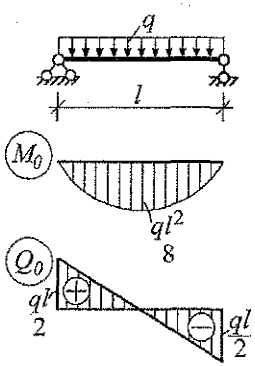


Рис. 15

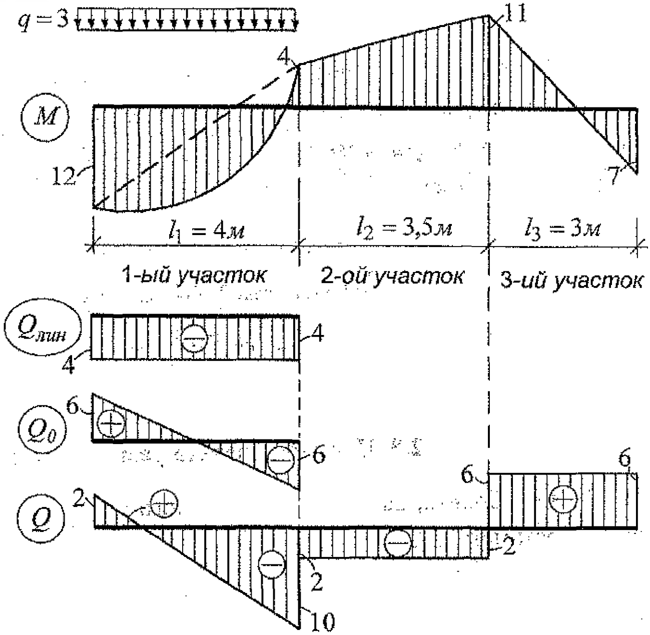


Рис. 16

Например, для эпюры M на рис. 16, представленной тремя участками с различными законами ее изменения, поперечные силы на этих участках (слева направо) будут равны:

$$Q_1^{лев,прав} = \pm\frac{ql_1}{2} - \left|\frac{4-(-12)}{4}\right| = \pm\frac{3\cdot 4}{2} - 4 = \pm 6 - 4;\quad Q_1^{лев} = +2;\quad Q_1^{прав} = -10;$$

$$Q_2 = -\left|\frac{11-4}{3,5}\right| = -2;\qquad Q_3 = +\left|\frac{-7-11}{3}\right| = +6.$$

Эпюру продольных сил N строят по эпюре Q **способом вырезания узлов**, то есть вырезают узлы рамы, прикладывая в сечениях уже известные поперечные силы и неизвестные (а также известные) продольные силы (если в узле приложены внешние сосредоточенные силы, то они также должны быть учтены). Затем составляются уравнения равновесия узлов ($\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$), из которых определяют неизвестные продольные силы. Разрешимой здесь задача будет только в том случае, если в узле будем иметь не более двух неизвестных продольных сил, не лежащих при этом на одной прямой. И, следовательно, вырезать последовательно следует узлы с не более чем двумя неизвестными продольными силами. Реализация этой несложной процедуры показана далее на примерах расчета рам.

После построения эпюр внутренних усилий, вырезая опорные узлы и рассматривая их равновесие, можно найти реакции в опорах рамы, после чего нужно выполнить **статическую проверку** равновесия рамы в целом с использованием, например, уравнений:

$$\Sigma X_{оп.реакций} + \Sigma X_{вн.нагрузок} = 0;$$

$$\Sigma Y_{оп.реакций} + \Sigma Y_{вн.нагрузок} = 0;$$

$$\Sigma M_{T.оп.реакций} + \Sigma M_{T.вн.нагрузок} = 0.$$

2.8. Порядок расчета рам методом сил

Таким образом, на основе изложенного предлагается следующий порядок расчета рам методом сил:

1. Определяем степень статической неопределимости рамы (то есть число „лишних" связей в раме – $Л$).

2. Выбираем расчетную основную систему метода сил (О.С.), представив предварительно несколько возможных вариантов основных систем.

3. Записываем в общем виде систему канонических уравнений метода сил и выясняем физический смысл этих уравнений, а также входящих в них величин.

4. В расчетной О.С. метода сил строим единичные $\left(\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots \overline{M}_Л\right)$ и грузовую (M_P) эпюры изгибающих моментов.

5. Вычисляем все единичные коэффициенты $\left(\delta_{ik}\right)$ и свободные члены $\left(\Delta_{iP}\right)$ системы канонических уравнений метода сил.

6. Выполняем проверки правильности вычисления единичных коэффициентов и свободных членов системы уравнений.

7. Решаем систему канонических уравнений и находим неизвестные метода сил $X_1, X_2, \ldots X_Л$.

8. Строим в заданной статически неопределимой раме окончательную эпюру изгибающих моментов M.

9. Выполняем деформационную проверку эпюры M.

10. По эпюре M строим окончательную эпюру поперечных сил Q.

11. Способом вырезания узлов на эпюре Q с учетом действующих в узлах внешних нагрузок строим в заданной раме эпюру продольных сил N.

12. Вырезая опорные узлы, определяем опорные реакции, и выполняем статическую проверку равновесия рамы в целом.

2.9. Примеры расчетов рам методом сил

Здесь представлены два примера расчета рам методом сил с одной и двумя лишними связями. Принципы и подходы в расчетах рам с бóльшим числом лишних связей ничем не отличаются от представленных в данных примерах – разница будет связана только с числом уравнений в системах уравнений, с числом вычисляемых единичных коэффициентов и свободных членов системы уравнений и с числом единичных эпюр изгибающих моментов, которые необходимо будет строить и с использованием которых выполняются расчеты.

Пример 1. Рассмотрим простую раму, представленную на рис. 17а.

1. Данная рама имеет одну лишнюю связь:

$$Л = 3К - Ш = 3 \cdot 3 - 8 = 1$$

$$\text{или } Л = -(3Д - 2Ш - С_о) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4) = 1.$$

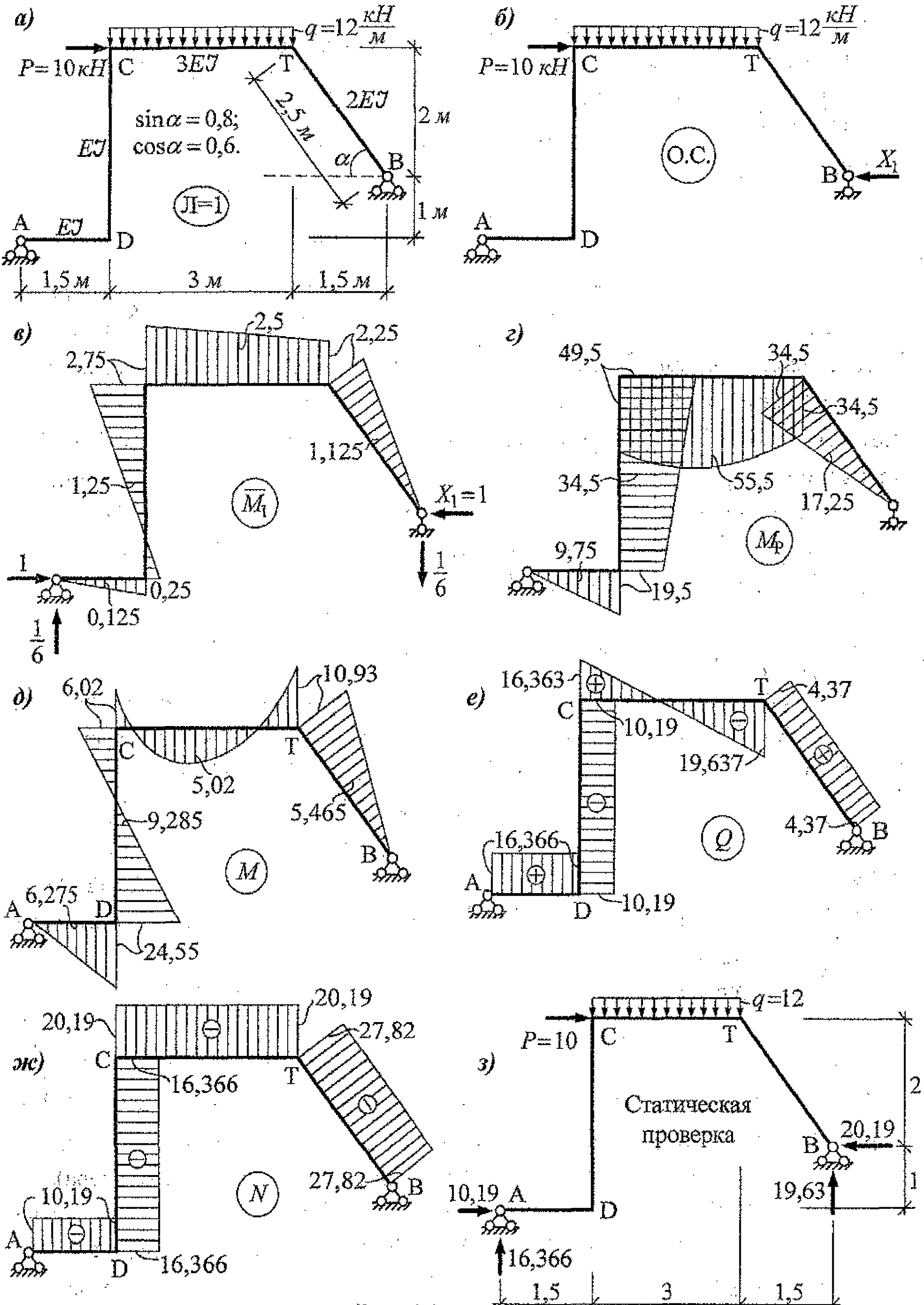
2. Принятая расчетная основная система метода сил показана на рис. 17б. Выбор основной системы здесь может быть осуществлен также отбрасыванием любой другой опорной связи, либо врезанием шарнира в любом из сечений рамы, кроме сечения, лежащего на пересечении стержня CD и воображаемой прямой AB, так как в этом случае полученная система будет мгновенно изменяемой, как образованная тремя дисками, соединенными между собой тремя шарнирами, лежащими на одной прямой (первый признак мгновенно изменяемости – см. раздел 2.2).

3. Каноническое уравнение метода сил здесь будет также одно

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \tag{19}$$

и будет представлять собой по физическому смыслу горизонтальное перемещение точки B в основной системе от действия силы X_1 и внешней нагрузки, которое должно равняться нулю, так как в заданной рассчитываемой системе в точке B имеется горизонтальная связь (стоит шарнирно неподвижная опора).

4. В основной системе (О.С.) метода сил как в обычной статически определимой системе строим единичную эпюру изгибающих моментов $\overline{M}_1$ от действия силы X_1 единичной величины $(X_1 = 1)$ (рис. 17в) и грузовую эпюру M_P от действия внешних нагрузок (рис. 17г).



а)
q=12 кН/м
P=10 кН
C
3EJ
T
2,5 м
2EJ
2 м
sinα = 0,8;
cosα = 0,6.
EJ
α
B
Л=1
1 м
A
EJ
D
1,5 м
3 м
1,5 м
б)
q=12 кН/м
P=10 кН
C
T
О.С.
B
X1
A
D
в)
2,5
2,25
2,75
1,125
1,25
M1
X1=1
1
0,25
0,125
1/6
1/6
г)
49,5
34,5
34,5
34,5
55,5
17,25
9,75
19,5
Mp
д)
6,02
10,93
C
T
5,02
9,285
5,465
M
B
6,275
A
D
24,55
е)
16,363
T
4,37
C
10,19
19,637
Q
4,37
B
16,366
A
D
10,19
ж)
20,19
20,19
27,82
C
16,366
T
N
27,82
B
10,19
A
D
16,366
з)
q=12
P=10
C
T
2
Статическая
проверка
B
20,19
1
10,19
A
D
19,63
16,366
1,5
3
1,5

Рис. 17

5. Вычисляем единичный δ_{11} и грузовой Δ_{1P} коэффициенты уравнений метода сил. Покажем здесь вычисление этих коэффициентов разными способами:

а) по правилу Верещагина:

$$\delta_{11}=\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_1^2dx}{EJ}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{0,25\cdot1,5}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}0,25+\frac{1}{EJ}\left[-(0,25\cdot3)\cdot1,25+\frac{(2,75+0,25)}{2}\cdot3\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{2}{3}3-0,25\right)\right]+\frac{1}{3EJ}\left[(2,25\cdot3)\cdot2,5+\frac{(2,75-2,25)\cdot3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}0,5+2,25\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2EJ}\left(\frac{2,25\cdot2,5}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}2,25=\frac{1}{EJ}(0,031+6,938+6,271+2,109)=\frac{15,35}{EJ};$$

$$\Delta_{1P}=\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_1M_P\,dx}{EJ}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{19,5\cdot1,5}{2}\right)\frac{2}{3}0,25+\frac{1}{EJ}\left[-(19,5\cdot3)\cdot1,25-\frac{(49,5-19,5)}{2}\cdot3\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{2}{3}3-0,25\right)\right]+\frac{1}{3EJ}\left[-(34,5\cdot3)\cdot2,5-\frac{(49,5-34,5)}{2}\cdot3\left(2,25+\frac{2}{3}0,5\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{12\cdot3^2}{8}\cdot3\right)\cdot2,5\right]-\frac{1}{2EJ}\left(\frac{1}{2}34,5\cdot2,5\right)\frac{2}{3}2,25=$$

$$=\frac{1}{EJ}(2,438-151,875-128,125-32,344)=-\frac{309,906}{EJ};$$

б) по формуле Симпсона:

$$\delta_{11}=\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_1^2dx}{EJ}=\frac{1,5}{6EJ}\left(0^2+4\cdot0,125^2+0,25^2\right)+\frac{3}{6EJ}\left(0,25^2+4\cdot1,25^2+2,75^2\right)+$$

$$+\frac{3}{6\cdot3EJ}\left(2,75^2+4\cdot2,5^2+2,25^2\right)+\frac{2,5}{6\cdot2EJ}\left(2,25^2+4\cdot1,125^2+0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}(0,031+6,938+6,271+2,109)=\frac{15,35}{EJ};$$

$$\Delta_{1P}=\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_1M_P\,dx}{EJ}=\frac{1,5}{6EJ}\left(0^2+4\cdot0,125\cdot9,75+0,25\cdot19,5\right)+\frac{3}{6EJ}(0,25\cdot19,5-$$

$$-4\cdot1,25\cdot34,5-2,75\cdot49,5)-\frac{3}{6\cdot3EJ}(-2,75\cdot49,5-4\cdot2,5\cdot55,5-2,25\cdot34,5)+$$

$$+\frac{2,5}{6\cdot2EJ}(2,25\cdot34,5+4\cdot1,125\cdot17,25+0\cdot0)=$$

$$=\frac{1}{EJ}(2,438-151,875-128,125-32,344)=-\frac{309,906}{EJ}.$$

(!)Заметим, что при подобных вычислениях интегралов Мора можно на различных участках выполнять расчеты разными способами (по правилу Верещагина, по формуле трапеций, по формуле Симпсона), комбинируя их с точки зрения удобства выполнения вычислений, что и будем далее делать.

7. Решаем каноническое уравнение метода сил (19)

$$\frac{15{,}35}{EJ}X_1 - \frac{309{,}906}{EJ} = 0; \qquad X_1 = 20{,}19\ (кН).$$

8. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов по формуле (14)

$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + M_P,$$

умножая все характерные ординаты эпюры $\overline{M}_1$ на величину 20,19 и складывая результаты с соответствующими ординатами эпюры M_P. Окончательная эпюра M представлена на рис. 17д.

9. Деформационная (кинематическая) проверка окончательной эпюры M:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 M dx}{EJ} = 0; \quad \frac{1}{EJ}\left(\frac{24{,}55\cdot 1{,}5}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}0{,}25 + \frac{3}{6EJ}(0{,}25\cdot 24{,}55 - 4\cdot 1{,}25\cdot 9{,}285 +$$

$$+2{,}75\cdot 6{,}02) + \frac{3}{6\cdot 3EJ}(2{,}75\cdot 6{,}02 - 4\cdot 2{,}5\cdot 5{,}02 + 2{,}25\cdot 10{,}93) + \frac{1}{2EJ}\left(\frac{10{,}93\cdot 2{,}5}{2}\right)\frac{2}{3}2{,}25 =$$

$$= \frac{1}{EJ}(3{,}069 - 11{,}866 - 1{,}509 + 10{,}247) = \frac{1}{EJ}(13{,}316 - 13{,}375) = 0{,}059 \approx 0;$$

$$\text{погрешность } \left|\frac{13{,}316 - 13{,}375}{13{,}375}\right|\cdot 100\% = 0{,}443\% < 3\% \text{ незначительна.}$$

10. Строим эпюру поперечных сил в заданной статически неопределимой системе, используя формулы (17), (18):

а) на участках AD и DC по формуле (17) получим

$$Q_{AD} = +\left|\frac{24{,}55 - 0}{1{,}5}\right| = +16{,}366\ (кН); \qquad Q_{DC} = -\left|\frac{24{,}55 - (-6{,}02)}{3}\right| = -10{,}19\ (кН);$$

б) на участке CT необходимо использовать формулу (18)

$$Q_{CT} = \pm\frac{12\cdot 3}{2} - \left|\frac{10{,}93 - 6{,}02}{3}\right| = \pm 18 - 1{,}637\ (кН);$$

$$Q_{CT}^{лев} = +18 - 1{,}637 = 16{,}363 (кН); \qquad Q_{CT}^{прав} = -18 - 1{,}637 = -19{,}637 (кН);$$

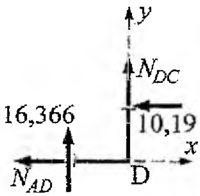
в) на участке TB поперечную силу получим по формуле (17)

$$Q_{TB} = +\left|\frac{10{,}93 - 0}{2{,}5}\right| = +4{,}37\ (кН).$$

Эпюра поперечных сил изображена на рис. 17е.

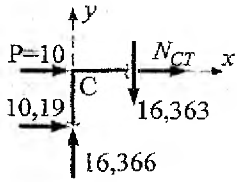
11. Эпюру продольных сил N строим способом вырезания узлов на эпюре Q:

а) узел D



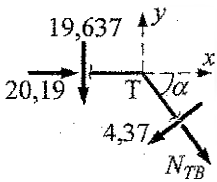
$\sum X = 0;$
$N_{AD} = -10{,}19(кН);$
$\sum Y = 0;$
$N_{DC} = -16{,}366(кН);$

б) узел C



$\sum X = 0;$
$10 + 10{,}19 - N_{CT} = 0;$
$N_{CT} = -20{,}19(кН);$
$\sum Y = 0;$
$16{,}366 - 16{,}363 \approx 0.$

в) узел T



$\sum X = 0;\quad 20{,}19 - 4{,}37 \cdot 0{,}8 + N_{TB} \cdot 0{,}6 = 0;\quad N_{TB} = -27{,}823(кН);$

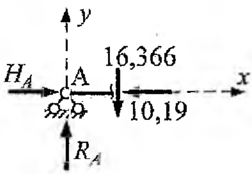
$\sum Y = 0;\quad -19{,}637 - 4{,}37 \cdot 0{,}6 + 27{,}823 \cdot 0{,}8 = 0;$

$-22{,}259 + 22{,}259 = 0.$

Эпюра продольных сил в заданной статически неопределимой системе изображена на рис. 17ж.

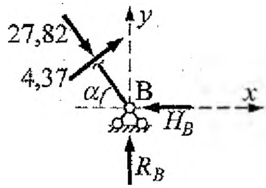
12. Вырезая опорные узлы, найдем опорные реакции:

а) узел A



$\sum X = 0;\ H_A = 10{,}19(кН);$
$\sum Y = 0;\ R_A = 16{,}366(кН).$

б) узел B



$\sum X = 0;\ 27{,}82 \cdot 0{,}6 + 4{,}37 \cdot 0{,}8 - H_B = 0;$
$H_B = 20{,}19\ (кН);$
$\sum Y = 0;\ -27{,}82 \cdot 0{,}8 + 4{,}37 \cdot 0{,}6 + R_B = 0;$
$R_B = 19{,}63\ (кН).$

Приложив внешние нагрузки и опорные реакции к системе (рис. 17з), выполним статическую проверку равновесия рамы:

$\sum X = 0;\qquad 10{,}19 + 10 - 20{,}19 = 0;\qquad 20{,}19 - 20{,}19 = 0;$

$\sum Y = 0;\qquad 16{,}366 - 12 \cdot 3 + 19{,}63 = 0;\qquad 35{,}999 - 36 \approx 0;$

$\sum M_C = 0;\qquad 12 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - 10{,}19 \cdot 3 + 16{,}366 \cdot 1{,}5 - 19{,}63 \cdot 4{,}5 + 20{,}19 \cdot 2 = 0;$

$118{,}929 - 118{,}905 \approx 0;$

погрешность $\left|\dfrac{118{,}929 - 118{,}905}{118{,}905}\right| \cdot 100\% = 0{,}02\%$ незначительна.

Пример 2. Рассмотрим более сложную раму, показанную на рис. 19а.

1. Рама имеет две лишние связи

$$Л = 3К - Ш = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

$$\text{или } Л = -(3Д - 2Ш - С_о) = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 5) = 2.$$

2. Принятая расчетная основная система метода сил показана на рис. 19б. Вариантами О.С. здесь могут быть также рамы, представленные на рис. 18.

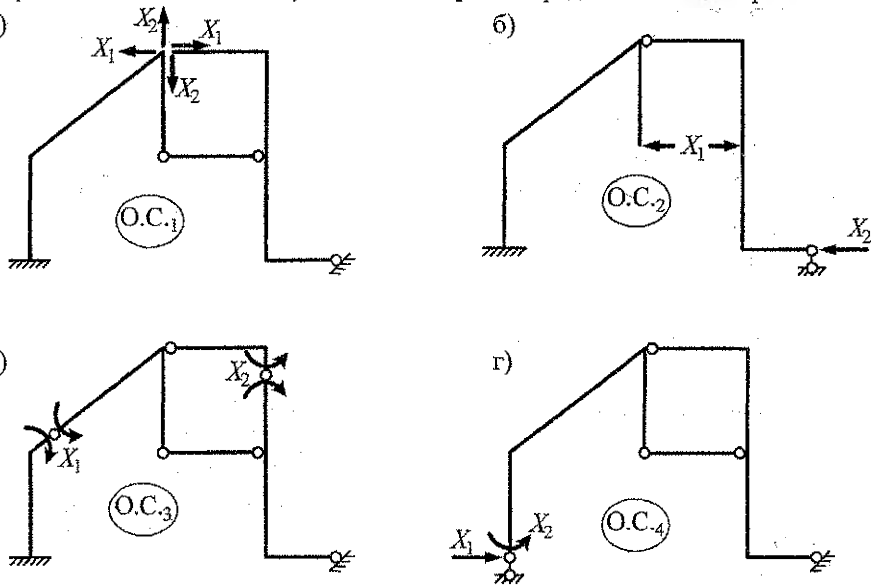


Рис. 18.

3. Система канонических уравнений метода сил в данном случае будет иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Физический смысл уравнений:

1-ое уравнение – представляет собой угол поворота сечения в стержне над опорой А (рис. 19б) от действия сил X_1, X_2 и заданной внешней нагрузки, который должен быть равен нулю, так как это сечение в заданной статически неопределимой раме жестко присоединено к основанию (опорой в точке А является заделка);

2-ое уравнение – представляет взаимное расхождение точек D и K от действия сил X_1, X_2 и внешней нагрузки, которое должно равняться нулю, так как эти точки соединены стержнем (затяжкой), который считается нерастяжимым (в расчете пренебрегается продольными деформациями).

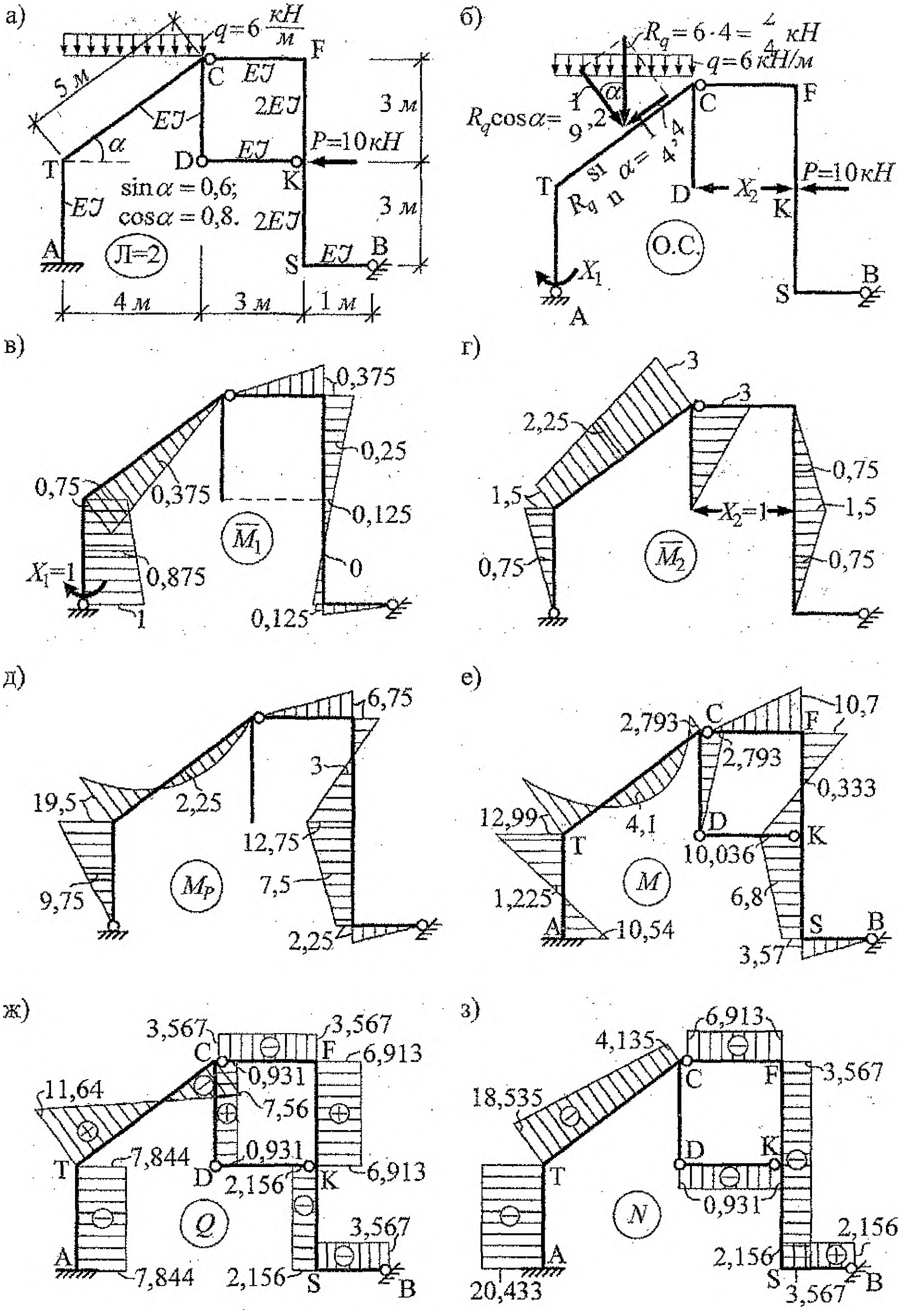

а)
$q=6\ \frac{кН}{м}$
5 м
C
F
EJ
2EJ
3 м
α
P=10кН
T
D
K
$\sin\alpha=0{,}6;$
$\cos\alpha=0{,}8.$
3 м
A
Л=2
S
B
4 м
3 м
1 м
б)
$R_q=6\cdot4=24$ кН
q=6 кН/м
$R_q\cos\alpha=19{,}2$
$R_q\sin\alpha=14{,}4$
X_2
P=10кН
О.С.
X_1
в)
0,375
0,25
0,75
0,375
0,125
$\overline{M}_1$
$X_1=1$
0,875
0
1
0,125
г)
3
2,25
3
0,75
1,5
1,5
$X_2=1$
0,75
$\overline{M}_2$
0,75
д)
6,75
3
19,5
2,25
12,75
M_P
9,75
7,5
2,25
е)
10,7
2,793
2,793
0,333
12,99
4,1
10,036
M
1,225
6,8
10,54
3,57
ж)
3,567
3,567
6,913
0,931
11,64
7,56
7,844
0,931
2,156
6,913
Q
3,567
7,844
2,156
з)
6,913
4,135
3,567
18,535
0,931
N
2,156
2,156
20,433
3,567

Рис. 19

Физический смысл отдельных коэффициентов и свободных членов:

δ_{12} – угол поворота в основной системе метода сил сечения над опорой А от действия сил X_2 единичной величины;

δ_{22} – взаимное расхождение точек D и K в основной системе от действия сил X_2, равных по единице;

Δ_{2P} – взаимное расхождение точек D и K в основной системе от действия внешних нагрузок.

4. Строим в основной системе метода сил единичные эпюры изгибающих моментов (две) $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ от действия единичных значений неизвестных X_1 и X_2 и грузовую эпюру M_P от действия заданных внешних нагрузок.

Заметим, что рама в основной системе представляет собой трехшарнирную раму с опорами в одном уровне и определение опорных реакций в ней от любой из нагрузок может быть выполнено, например, из уравнений:

$$\sum M_A = 0; \qquad \sum M_B = 0; \qquad \sum M_C^{лев} = 0; \qquad \sum M_C^{прав} = 0,$$

а для их проверки можно использовать уравнения: $\sum X = 0;$ $\sum Y = 0.$

Эпюры $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ и M_P показаны на рис. 19в÷19д.

5. Вычисляем коэффициенты и свободные члены канонических уравнений метода сил:

а) единичные коэффициенты:

$$\delta_{11} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_1^2 dx}{EJ} = \frac{3}{6EJ}\left(1^2 + 4\cdot 0{,}875^2 + 0{,}75^2\right) + \frac{1}{EJ}\left(\frac{0{,}75\cdot 5}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}0{,}75 +$$

$$+\frac{1}{EJ}\left(\frac{0{,}375\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}0{,}375 + \frac{6}{6\cdot 2EJ}\left(0{,}375^2 + 4\cdot 0{,}125^2 + 0{,}125^2\right) +$$

$$+\frac{1}{EJ}\left(\frac{0{,}125\cdot 1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}0{,}125 = \frac{3{,}505}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2\, dx}{EJ} = \frac{3}{6EJ}(-1\cdot 0 - 4\cdot 0{,}875\cdot 0{,}75 - 0{,}75\cdot 1{,}5) +$$

$$+\frac{5}{6EJ}(-0{,}75\cdot 1{,}5 - 4\cdot 0{,}375\cdot 2{,}25 - 0\cdot 3) + \frac{3}{6\cdot 2EJ}(0{,}375\cdot 0 + 4\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75 + 0{,}125\cdot 1{,}5) +$$

$$+\frac{3}{6\cdot 2EJ}(0{,}125\cdot 1{,}5 + 4\cdot 0\cdot 0{,}75 + 0{,}125\cdot 0) = -\frac{5{,}344}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_2^2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1{,}5\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}1{,}5 + \frac{5}{6EJ}\left(1{,}5^2 + 4\cdot 2{,}25^2 + 3^2\right) + \frac{1}{EJ}\left(\frac{3\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}3 +$$

$$+\frac{1}{2EJ}\left(\frac{1{,}5\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}1{,}5\cdot 2 = \frac{39{,}75}{EJ};$$

б) грузовые члены:

$$\Delta_{1P}=\sum_{1}^{n}\int_{0}^{l}\frac{\overline{M}_1\,M_P\,dx}{EJ}=\frac{3}{6EJ}\left(1\cdot 0-4\cdot 0{,}875\cdot 9{,}75-0{,}75\cdot 19{,}5\right)+$$

$$+\frac{5}{6EJ}\left(-0{,}75\cdot 19{,}5+4\cdot 0{,}375\cdot 2{,}25+0\cdot 0\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{0{,}375\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}6{,}75+$$

$$+\frac{3}{6\cdot 2EJ}\left(0{,}375\cdot 6{,}75-4\cdot 0{,}25\cdot 3-0{,}125\cdot 12{,}75\right)+$$

$$+\frac{3}{6\cdot 2EJ}\left(-0{,}125\cdot 12{,}75+4\cdot 0\cdot 7{,}5+0{,}125\cdot 2{,}25\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{0{,}125\cdot 1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}2{,}25=-\frac{31{,}972}{EJ};$$

$$\Delta_{2P}=\sum_{1}^{n}\int_{0}^{l}\frac{\overline{M}_2\,M_P\,dx}{EJ}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1{,}5\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}19{,}5+\frac{5}{6EJ}\left(19{,}5\cdot 1{,}5-4\cdot 2{,}25\cdot 2{,}25+3\cdot 0\right)+$$

$$+\frac{3}{6\cdot 2EJ}\left(0\cdot 6{,}75-4\cdot 0{,}75\cdot 3-1{,}5\cdot 12{,}75\right)+$$

$$+\frac{3}{6\cdot 2EJ}\left(-1{,}5\cdot 12{,}75-4\cdot 0{,}75\cdot 7{,}5-0\cdot 2{,}25\right)\frac{19{,}313}{EJ}.$$

6. Проверки правильности вычисления единичных коэффициентов и грузовых членов:

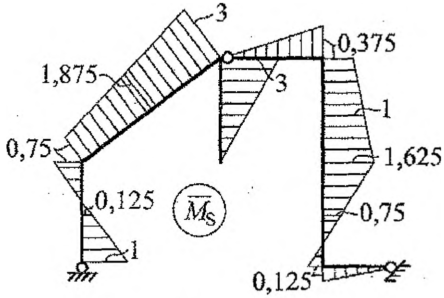


Рис. 20

а) универсальная проверка:

$$\sum_{1}^{n}\int_{0}^{l}\frac{\overline{M}_S^2\,dx}{EJ}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\delta_{ik},$$

где $\overline{M}_S=\overline{M}_1+\overline{M}_2$ – суммарная единичная эпюра изгибающих моментов, имеющая вид, показанный на рис. 20;

$$\sum_{1}^{n}\int_{0}^{l}\frac{\overline{M}_S^2\,dx}{EJ}=\frac{3}{6EJ}\left(1^2+4\cdot 0{,}125^2+0{,}75^2\right)+\frac{5}{6EJ}\left(0{,}75^2+4\cdot 1{,}875^2+3^2\right)+$$

$$+\frac{1}{EJ}\left(\frac{3\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}3+\frac{1}{EJ}\left(\frac{0{,}375\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}0{,}375+\frac{3}{6\cdot 2EJ}\left(0{,}375^2+4\cdot 1^2+1{,}625^2\right)+$$

$$+\frac{3}{6\cdot 2EJ}\left(1{,}625^2+4\cdot 0{,}75^2+0{,}125^2\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{0{,}125\cdot 1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}0{,}125=\frac{32{,}568}{EJ};$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\delta_{ik}=\delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{3{,}505}{EJ}-\frac{5{,}344}{EJ}\cdot 2+\frac{39{,}75}{EJ}=\frac{32{,}567}{EJ};$$

проверка выполняется;

б) столбцовая проверка:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_S M_P\,dx}{EJ} = \sum_{i=1}^{2} \Delta_{iP}; \qquad \sum_{i=1}^{2} \Delta_{iP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = -\frac{31{,}972}{EJ} + \frac{19{,}313}{EJ} = -\frac{12{,}659}{EJ};$$

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_S M_P\,dx}{EJ} = \frac{3}{6EJ}(1\cdot 0 - 4\cdot 0{,}125\cdot 9{,}75 + 0{,}75\cdot 19{,}5) +$$

$$+\frac{5}{6EJ}(0{,}75\cdot 19{,}5 - 4\cdot 1{,}875\cdot 2{,}25 + 3\cdot 0) + \frac{1}{EJ}\left(\frac{0{,}375\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}6{,}75 +$$

$$+\frac{3}{6\cdot 2EJ}(0{,}375\cdot 6{,}75 - 4\cdot 1\cdot 3 - 1{,}625\cdot 12{,}75) +$$

$$+\frac{3}{6\cdot 2EJ}(-1{,}625\cdot 12{,}75 - 4\cdot 0{,}75\cdot 7{,}5 + 0{,}125\cdot 2{,}25) + \frac{1}{EJ}\left(\frac{0{,}125\cdot 1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}2{,}25 = -\frac{12{,}66}{EJ};$$

проверка выполняется.

7. Решаем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \dfrac{3{,}505}{EJ}X_1 - \dfrac{5{,}344}{EJ}X_2 - \dfrac{31{,}982}{EJ} = 0; \\[2mm] -\dfrac{5{,}344}{EJ}X_1 + \dfrac{39{,}75}{EJ}X_2 + \dfrac{19{,}313}{EJ} = 0. \end{cases}$$

Находим: $X_1 = 10{,}54\ (кН\cdot м)$; $\quad X_2 = 0{,}931\ (кН)$.

Проверяем решение путем подстановки этих значений в уравнения:

$$\begin{cases} 3{,}505\cdot 10{,}54 - 5{,}344\cdot 0{,}931 - 31{,}972 = 0; & 36{,}943 - 36{,}947 \approx 0; \\ -5{,}344\cdot 10{,}54 + 39{,}75\cdot 0{,}931 + 19{,}313 = 0; & 56{,}325 - 56{,}321 \approx 0. \end{cases}$$ погрешности незначительны.

8. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе по формуле:

$$M = \overline{M}_1\cdot X_1 + \overline{M}_2\cdot X_2 + M_P.$$

Для удобства расчетов можно отдельно построить промежуточные эпюры $\overline{M}_1\cdot X_1$ и $\overline{M}_2\cdot X_2$ (см. рис. 21).

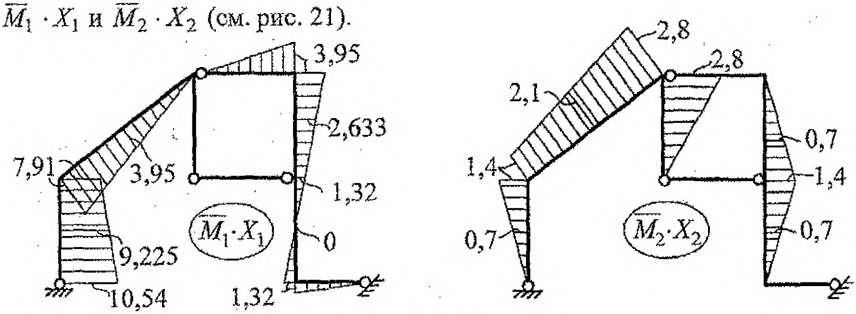


Рис. 21

Сложив ординаты эпюр $\overline{M}_1 \cdot X_1$, $\overline{M}_2 \cdot X_2$ (рис. 21) и M_P (рис. 19д), получим окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе в виде, изображенном на рис. 19е.

9. Деформационная (кинематическая) проверка эпюры М:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{M \overline{M}_S \, dx}{EJ} = 0; \quad \frac{3}{6EJ}(1 \cdot 10{,}54 - 4 \cdot 1{,}225 \cdot 0{,}125 + 12{,}99 \cdot 0{,}75) +$$

$$+ \frac{5}{6EJ}(12{,}99 \cdot 0{,}75 - 4 \cdot 4{,}10 \cdot 1{,}875 + 2{,}793 \cdot 3) + \frac{1}{EJ}\left(\frac{2{,}793 \cdot 3}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} 3 +$$

$$+ \frac{1}{EJ}\left(\frac{10{,}7 \cdot 3}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} 0{,}375 + \frac{3}{6 \cdot 2EJ}(10{,}7 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 1 \cdot 0{,}333 - 10{,}036 \cdot 1{,}625) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EJ}(-10{,}036 \cdot 1{,}625 - 4 \cdot 6{,}8 \cdot 0{,}75 - 3{,}57 \cdot 0{,}125) + \frac{1}{EJ}\left(\frac{3{,}57 \cdot 1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} 0{,}125 =$$

$$= \frac{1}{EJ}(9{,}835 - 10{,}524 + 8{,}379 + 4{,}013 - 2{,}741 - 9{,}066 + 0{,}149) =$$

$$= \frac{1}{EJ}(22{,}376 - 22{,}331) = \frac{0{,}045}{EJ} \approx 0;$$

погрешность $\dfrac{0{,}045}{22{,}331} \cdot 100\% = 0{,}2\% < 3\%$ незначительна.

10. Эпюру поперечных сил Q строим по эпюре изгибающих моментов с использованием формул (17), (18).

При этом на наклонном участке рамы ТС заданную распределенную нагрузку необходимо разложить на составляющие вдоль и перпендикулярно к стержню. Для этого найдем вначале равнодействующую заданной нагрузки q — $R_q = q \cdot l = 6 \cdot 4 = 24$ (кН), которую затем разложим на две составляющие (см. рис. 19б). Если теперь составляющую, действующую нормально к стержню, разделить на длину наклонного стержня (5м), то получим величину равномерно распределенной нагрузки q_o ($q_o = 19{,}2/5 = 3{,}84$ кН/м), действующей перпендикулярно на этот участок рамы, и от действия которой после этого сможем вычислить ординаты эпюры Q_o, входящие в формулу (18) – см. рис. 22.

Значения ординат эпюры Q по краям участка ТС тогда будут равны

$$Q_{TC} = Q_o + \left|\frac{M_{прав} - M_{лев}}{l}\right| = \pm\frac{3{,}84 \cdot 5}{2} + \left|\frac{2{,}793 - 12{,}99}{5}\right| = \pm 9{,}6 + 2{,}04;$$

$$Q_{TC}^{лев} = +9{,}6 + 2{,}04 = 11{,}64 \text{ (кН)}; \qquad Q_{TC}^{прав} = -9{,}6 + 2{,}04 = -7{,}56 \text{ (кН)}.$$

На участках линейного изменения эпюры M получим:

$$Q_{AT} = -\left|\frac{10{,}54-(-12{,}99)}{3}\right| = 7{,}844\ (\text{кН});$$

$$Q_{CD} = +\left|\frac{0-2{,}793}{3}\right| = +0{,}931\ (\text{кН});$$

$$Q_{CF} = -\left|\frac{10{,}7-0}{3}\right| = -3{,}567\ (\text{кН});$$

$$Q_{FK} = +\left|\frac{10{,}036-(-10{,}7)}{3}\right| = 6{,}913\ (\text{кН});$$

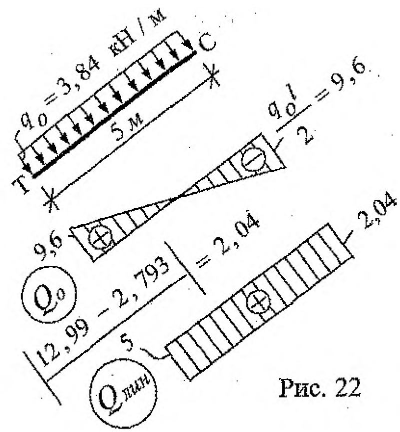


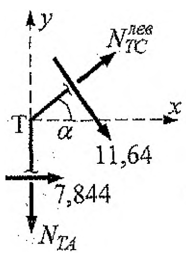
Рис. 22

$$Q_{KS} = -\left|\frac{3{,}57-10{,}036}{3}\right| = -2{,}156\ (\text{кН}); \qquad Q_{SB} = -\left|\frac{0-3{,}57}{1}\right| = -3{,}567\ (\text{кН});$$

Эпюра поперечных сил в заданной статически неопределимой раме представлена на рис. 19е.

11. Эпюру продольных сил строим способом вырезания узлов:

а) узел Т



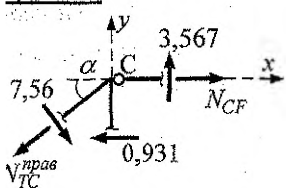
$$\sum X = 0; \qquad 7{,}844 + 11{,}64 \cdot 0{,}6 + N_{TC}^{лев} \cdot 0{,}8 = 0;$$

$$N_{TC}^{лев} = -18{,}535(\text{кН});$$

$$\sum Y = 0; \qquad -N_{TA} - 11{,}64 \cdot 0{,}8 - (-18{,}535) \cdot 0{,}6 = 0;$$

$$N_{TA} = -20{,}433(\text{кН});$$

б) узел С



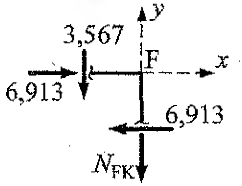
$$\sum Y = 0; \qquad -N_{TC}^{прав} \cdot 0{,}6 - 7{,}56 \cdot 0{,}8 + 3{,}567 = 0;$$

$$N_{TC}^{прав} = -4{,}135(\text{кН});$$

$$\sum X = 0; \qquad -(-4{,}135) \cdot 0{,}8 + 7{,}56 \cdot 0{,}6 - 0{,}931 + N_{CF} = 0;$$

$$N_{CF} = -6{,}913(\text{кН});$$

в) узел F

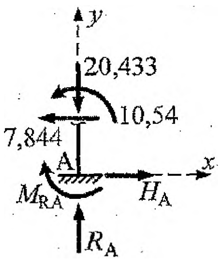


$$\sum X = 0; \qquad 6{,}913 - 6{,}913 = 0;$$
$$\sum Y = 0; \qquad -3{,}567 - N_{FK} = 0;$$
$$N_{FK} = 3{,}567\ (\text{кН}).$$

Аналогично вырезаем узлы K и S. Окончательная эпюра продольных сил в заданной статически неопределимой раме представлена на рис. 19з.

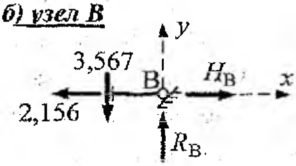
12. Вырезая теперь опорные узлы и учитывая все виды усилий в приопорных сечениях (M, Q, N), несложно найти реакции опор в узлах A и B:

а) узел A



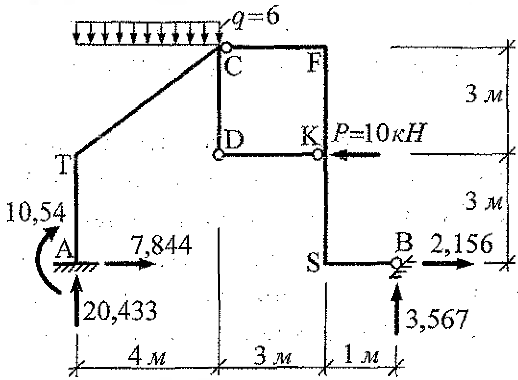
$$\sum X = 0; \quad H_A = 7{,}844\ (\text{кН});$$
$$\sum Y = 0; \quad R_A = 20{,}433\ (\text{кН});$$
$$\sum M_A = 0; \quad M_{RA} = 10{,}54\ (\text{кН}\cdot\text{м});$$

б) узел B



$$\sum X = 0; \quad H_B = 2{,}156\ (\text{кН});$$
$$\sum Y = 0; \quad R_B = 3{,}567\ (\text{кН}).$$

12. После этого делаем статическую проверку равновесия рамы:



$$\sum X = 0; \qquad 7{,}844 + 2{,}156 - 10 = 0;\ 10 - 10 = 0;$$
$$\sum Y = 0; \qquad 20{,}433 + 3{,}567 - 6\cdot 4 = 0;\ 24 - 24 = 0;$$
$$\sum M_C = 0; \quad 10{,}54 + 20{,}433\cdot 4 - 7{,}844\cdot 6 - (6\cdot 4)\cdot 2 + 10\cdot 3 - 2{,}156\cdot 6 - 3{,}567\cdot 4 = 0;$$
$$122{,}27 - 122{,}27 = 0.$$

3. УПРОЩЕНИЯ В РАСЧЕТАХ МЕТОДОМ СИЛ СИММЕТРИЧНЫХ РАМ

3.1. Общие понятия и определения

Симметричными называют рамы, обладающие симметрией относительно некоторой оси в конфигурации стержней, в расположении и действии опорных связей и в жесткостях стержней.

В симметричных рамах будем различать три вида эпюр усилий:

- произвольные эпюры;
- симметричные эпюры;
- кососимметричные или обратносимметричные эпюры.

Симметричными будем называть **эпюры**, которые относительно оси симметрии рамы обладают симметрией по ординатам усилий и по деформациям (для эпюры M по растянутым волокнам).

Следует заметить, что симметричная эпюра поперечных сил Q будет иметь в симметричных сечениях противоположные знаки (физическое же действие поперечных сил при этом будет, что несложно проверить, симметричным).

Кососимметричными или **обратносимметричными** называют **эпюры**, которые относительно оси симметрии рамы обладают симметрией в величинах ординат усилий, но противоположны по деформациям.

Если в таких эпюрах с одной из сторон от оси симметрии поменять деформации на противоположные, то эти эпюры станут симметричными.

Заметим, что кососимметричная эпюра Q в симметричных сечениях будет иметь одинаковые знаки.

Нагрузки, силы (в том числе неизвестные метода сил) и воздействия, от действия которых получаются симметричные эпюры усилий, будем называть **симметричными нагрузками, силами и воздействиями**.

Соответственно нагрузки, силы и воздействия, от действия которых получаются кососимметричные (обратносимметричные) эпюры усилий, будем называть **кососимметричными (обратносимметричными) нагрузками, силами и воздействиями.**

В расчетах симметричных рам методом сил при выборе определенного вида основных систем – симметричных основных систем – и в зависимости от вида действующих нагрузок возможен целый ряд довольно существенных упрощений расчетов, которые представлены ниже.

3.2. Разделение системы уравнений на две независимые группы

Рассмотрим симметричную раму, изображенную на рис. 23а и имеющую четыре лишние связи

$$Л = 3К - Ш = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$\text{или } Л = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 6) = 4\,.$$

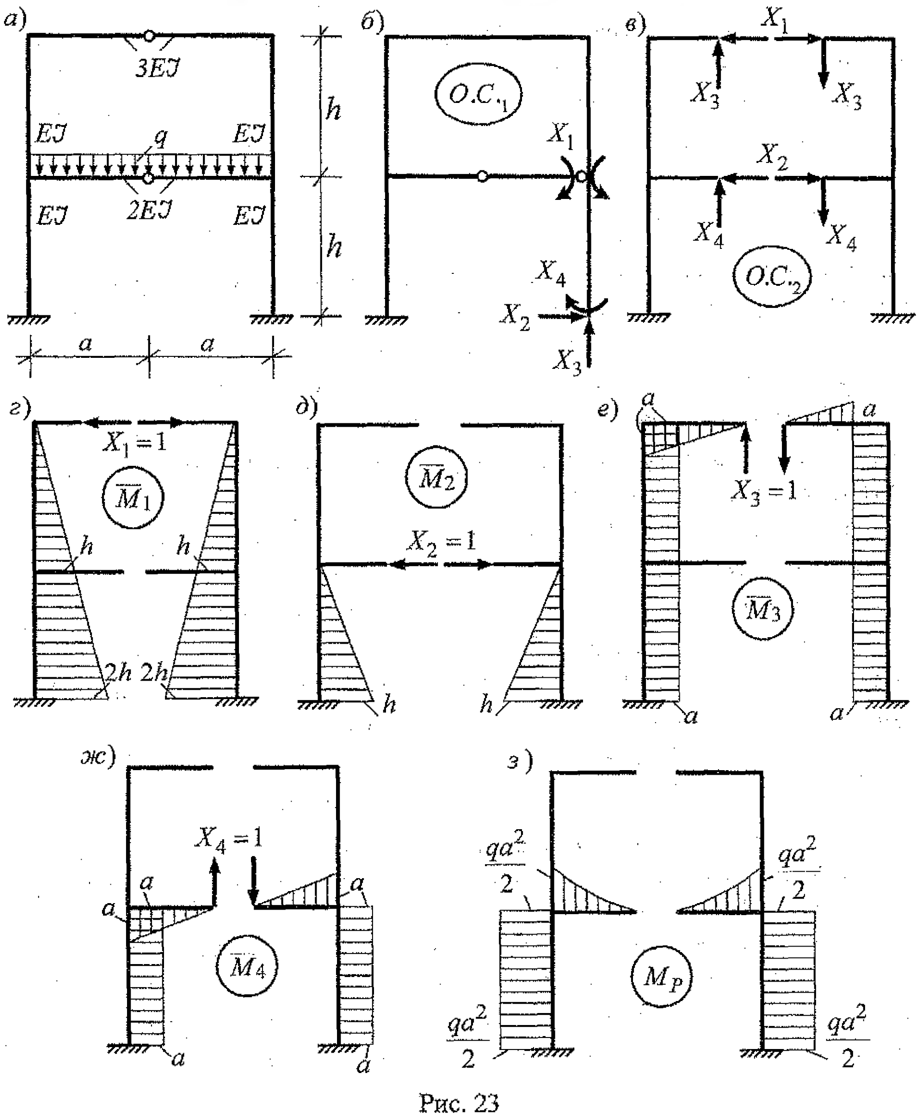


Рис. 23

Если для этой рамы выбрать О.С. метода сил, показанную на рис. 23б, то система канонических уравнений метода сил будет иметь вид

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\delta_{14}X_4+\Delta_{1P}=0;\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\delta_{24}X_4+\Delta_{2P}=0;\\ \delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\delta_{34}X_4+\Delta_{3P}=0;\\ \delta_{41}X_1+\delta_{42}X_2+\delta_{43}X_3+\delta_{44}X_4+\Delta_{4P}=0.\end{cases} \tag{21}$$

Если же выбрать основную систему в виде, представленном на рис. 23в, то систему уравнений (21) можно существенно упростить. Построим в этой О.С. единичные эпюры изгибающих моментов (см. рис. 23г÷23ж) и вычислим один из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений (21):

$$\delta_{14}=\delta_{41}=\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_1\overline{M}_4\,dx}{EJ}=\frac{1}{EJ}(a\cdot h)\cdot\frac{h+2h}{2}-\frac{1}{EJ}(a\cdot h)\cdot\frac{h+2h}{2}=0.$$

Такой результат, как показывает анализ "перемножаемых" (по правилу Верещагина) эпюр и вычисления, обусловлен тем, что эпюра $\overline{M}_1$ является симметричной, а эпюра $\overline{M}_4$ – кососимметричной.

И данный результат будет иметь место всегда в подобных случаях, то есть

(!) Перемещения, получаемые "перемножением" в соответствии с формулой Мора симметричных эпюр на кососимметричные (либо наоборот) будут всегда равны нулю.

В нашем случае соответственно равны нулю будут еще следующие единичные коэффициенты: $\delta_{13}=\delta_{31}=0;$ $\delta_{23}=\delta_{32}=0;$ $\delta_{24}=\delta_{42}=0.$

Так как произведения всех этих нулевых единичных коэффициентов на неизвестные в системе уравнений (21) будут также давать ноль, то целый ряд слагаемых в этих уравнениях выпадет, и в результате система уравнений (21) по существу разделится на две независимые группы:

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0;\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}\delta_{33}X_3+\delta_{34}X_4+\Delta_{3P}=0;\\ \delta_{43}X_3+\delta_{44}X_4+\Delta_{4P}=0.\end{cases} \tag{22}$$

Первая группа этих уравнений включает в себя только симметричные неизвестные (X_1 и X_2), а вторая – только кососимметричные неизвестные (X_3 и X_4), и решаться они могут независимо друг от друга.

Вывод. При выборе для симметричной статически неопределимой рамы симметричной основной системы метода сил с симметричными и кососимметричными неизвестными общая система канонических уравнений метода сил будет разделяться на две независимые системы, одна из которых будет содержать только симметричные неизвестные, а вторая – только кососимметричные неизвестные.

3.3. Упрощения при загружении симметричных рам симметричными (кососимметричными) нагрузками

Если симметричная статически неопределимая рама будет загружена симметричной внешней нагрузкой, как, например, рама на рис. 23а, то при выборе симметричной основной системы (см., например, рис 23в) грузовая эпюра в О.С. (M_P) будет также симметричной. А это значит (см. выводы предыдущего раздела), что грузовые перемещения Δ_{3P} и Δ_{4P} будут равны нулю, как получаемые "перемножением" симметричной эпюры (M_P) на кососимметричные ($\overline{M}_3$ и $\overline{M}_4$). В результате вторая группа (система) уравнений в (22) становится однородной алгебраической системой уравнений, и решением ее будут нулевые значения неизвестных ($X_3 = 0$; $X_4 = 0$). В итоге неизвестными в расчете остаются только симметричные неизвестные (в данном случае – X_1 и X_2).

Аналогичные рассуждения можно провести для случая нагружения симметричной рамы кососимметричной внешней нагрузкой, и тогда получим, что симметричные неизвестные обратятся в нуль, а останутся только кососимметричные неизвестные.

<u>Вывод</u>. При выборе для симметричной статически неопределимой рамы симметричной О.С. метода сил с симметричными и кососимметричными неизвестными

и в случае симметричного ее нагружения все кососимметричные неизвестные будут равны нулю,

в случае же кососимметричного ее нагружения все симметричные неизвестные будут равны нулю.

3.4. Группировка неизвестных

В ряде случаев при расчете симметричных рам (например, для рам, имеющих несколько пролетов) (см., например, раму, изображенную на рис. 24а), часто сложно или даже невозможно выбрать симметричную основную систему метода сил, в которой и неизвестные сразу удовлетворяли бы условиям симметрии, то есть были бы либо симметричными, либо кососимметричными. Это можно сделать только в случаях, когда все "лишние" связи можно отбросить в точках (сечениях), лежащих на оси симметрии рамы. В остальных случаях, когда при выборе симметричной по конфигурации и структуре О.С., неизвестные метода сил сразу не удовлетворяют условиям симметрии, эти неизвестные можно преобразовать к симметричным и кососимметричным. Основой для такого преобразования является то, что полученные неизвестные будут действовать в симметричных точках (сечениях) и в симметричных направлениях. Это позволяет путем разбивки (разделения) таких неизвестных специальным образом и последующей группировки их частей привести эти неизвестные к удовлетворению условиям симметрии. Например, для рамы на рис. 24а, симметричной относительно средней вертикальной оси и имеющей четыре лишних связи ($Л = 3К - Ш = 3 \cdot 3 - 5 = 4$), О.С. метода сил может быть выбрана в виде, изображенном на рис. 24б, где сама рама симметрична, а неизвестные X_1', X_2' и X_3', X_4' не являются ни симметричными, ни кососимметричными. При этом эти неизвестные действуют в точках (сечениях) и направлениях, симметричных относительно оси симметрии рамы. Сделаем замену таких неизвестных в соответствии с зависимостями

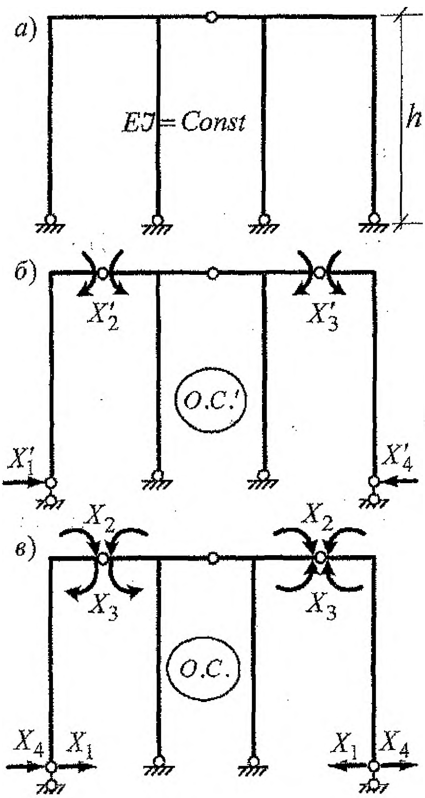


Рис. 24

$$\begin{cases} X_1' = X_1 + X_4; \\ X_4' = X_1 - X_4; \end{cases} \qquad \begin{cases} X_2' = X_2 + X_3; \\ X_3' = X_2 - X_3, \end{cases} \qquad (23)$$

которые с математической точки зрения дают однозначное соответствие величин, входящих в левые и правые их части этих зависимостей, как систем двух уравнений с двумя неизвестными. Группируя одноименные неизвестные с обеих сторон от оси симметрии, получаем О.С. метода сил, в которой теперь неизвестные будут либо симметричными, либо кососимметричными. В данном случае неизвестные X_1 и X_2 являются симметричными, а неизвестные X_3 и X_4 – кососимметричными. После такого преобразования, называемого **группировкой неизвестных**, в расчете могут быть применены все вышерассмотренные упрощения.

3.5. Разложение внешней нагрузки на симметричную и кососимметричную

Любая внешняя нагрузка, действующая на симметричную систему, может быть представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной (обратносимметричной) нагрузок. И делается это следующим образом:

1) заданную нагрузку (см., например, рис. 25а) представляют в виде двух одинаковых половинок (рис. 25б);

2) в симметричных точках относительно оси симметрии рамы по отношению к тем, в которых действует заданная внешняя нагрузка, прикладываем такие же половинки нагрузок (рис. 25б), но только в разные стороны (рис. 25в); добавленные таким образом половинки нагрузок в сумме взаимно уничтожаются и, таким образом, не изменяют заданного нагружения;

3) группируем эти половинки с одной и с другой сторон относительно оси симметрии рамы, получая сумму симметричной (рис. 25г) и кососимметричной (рис. 25д) нагрузок.

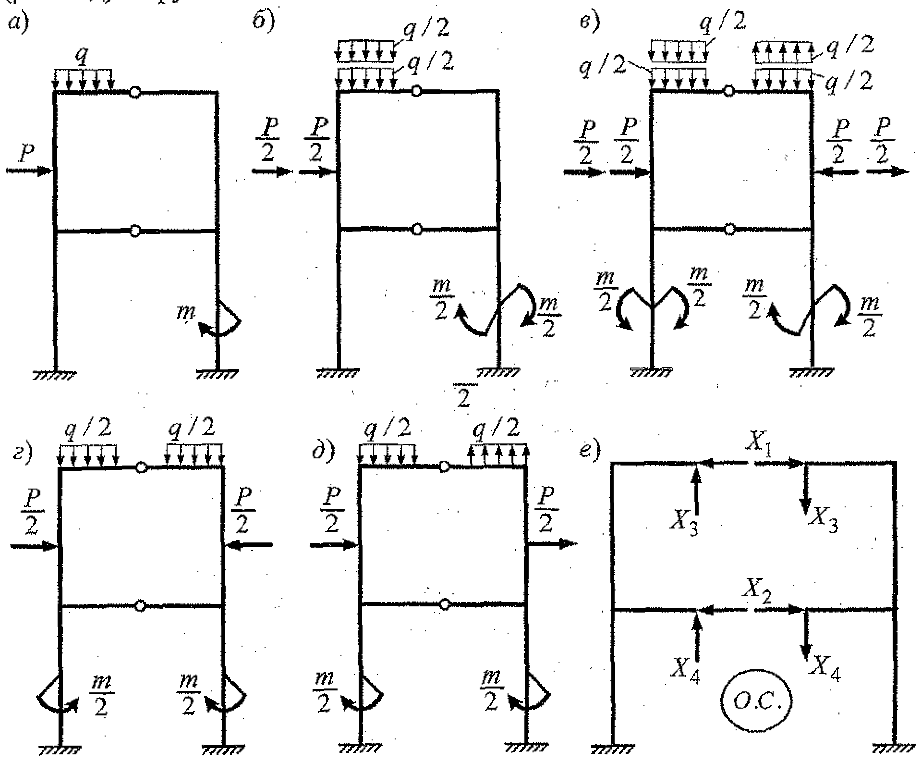


Рис. 25

Если теперь для рассматриваемой рамы (рис. 25а), имеющей четыре лишних связи
$$Л = 3К - Ш = 3 \cdot 2 - 2 = 4,$$
выбрать симметричную основную систему метода сил, например, в виде, показанном на рис. 25е, то в соответствии с вышеизложенными положениями (упрощениями расчета симметричных рам) и принципом независимости действия сил, расчет рассматриваемой рамы разделится по существу на два расчета. Отдельно можно выполнить расчет **на симметричную нагрузку**, в котором будем иметь систему двух уравнений вида

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P}^{сим} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P}^{сим} = 0, \end{cases}$$

и в котором эпюра изгибающих моментов в статически неопределимой системе может быть построена по формуле:

$$M^{сим} = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + M_P^{сим}.$$

И отдельно можно рассчитать раму на кососимметричную нагрузку, и в этом расчете система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P}^{кос} = 0; \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P}^{кос} = 0, \end{cases}$$

а эпюра изгибающих моментов будет строиться по формуле:

$$M^{кос} = \overline{M}_3 \cdot X_3 + \overline{M}_4 \cdot X_4 + M_P^{кос}.$$

Эпюра изгибающих моментов, соответствующая исходной нагрузке, произвольной с точки зрения симметрии, в итоге может быть получена по формуле:

$$M = M^{сим} + M^{кос}.$$

Анализ изложенной процедуры расчета в сравнении с вариантом без разложения внешних нагрузок показывает, что упрощение в рассматриваемом варианте связано с уменьшением (приблизительно в два раза) объема вычислений свободных членов (грузовых перемещений) системы канонических уравнений метода сил. А учитывая, что вычисление грузовых перемещений по формуле Мора обычно является наиболее трудоемким в сравнении с вычислением единичных перемещений (так как грузовые эпюры M_P в большинстве случаев существенно сложнее единичных эпюр $\overline{M}_i$), то разложение внешних нагрузок на симметричные и кососимметричные (обратносимметричные) часто имеет смысл.

3.6. О переходе в расчетах симметричных рам к расчету половин рам

При действии на симметричную раму симметричной внешней нагрузки эпюры внутренних усилий в ней будут симметричными, и рама соответственно будет симметрично деформироваться. Это наталкивает на мысль, что если выполнить расчет и получить эпюры усилий для половины такой рамы, то затем можно отобразить их симметрично на вторую ее половину.

Аналогично при кососимметричной нагрузке эпюры внутренних усилий и деформаций в симметричных рамах будут кососимметричными и, если здесь выполнить расчет и получить эпюры усилий для половины рамы, их нужно будет отобразить на вторую половину рамы кососимметрично.

Представление (формирование) половины симметричной рамы для расчета на симметричную либо кососимметричную нагрузки в рассматриваемом подходе должно быть выполнено на уровне расчетной схемы рамы – рама разрезается по оси симметрии на две части и для расчета выбирается одна из половин, к которой в месте разреза необходимо приложить связи, заменяющие действие отброшенной части. Выбор вида устанавливаемых связей производится на основе анализа деформирования полной рамы, в результате которого определяется возможность (или невозможность) деформирования стержней и перемещений точек (сечений), лежащих на оси симметрии рамы. При этом рассматриваются только изгибные деформации, так как поперечные и продольные деформации в рассматриваемой форме метода сил не учитываются (разд. 2.4). Исходя из этого анализа для рассматриваемой половины рамы по линии разреза (на оси симметрии полной рамы), устанавливаются связи в тех направлениях, в которых перемещения невозможны. При этом стержни, лежащие на оси симметрии рамы, при симметричном нагружении не деформируются, и их можно вообще отбросить, учтя их действие на рассматриваемую половину рамы путем установки соответствующих связей в узлах. При кососимметричном нагружении стержни, лежащие на оси симметрии рамы, будут деформироваться и должны присутствовать в расчетной половине рамы, однако жесткости их здесь должны быть приняты равными половинам жесткостей исходных стержней ($EJ_{cm}/2$). Полученная таким образом половина рамы рассчитывается методом сил как обычная рама.

Покажем примеры выбора половин симметричных рам для расчетов на симметричную и кососимметричную нагрузки.

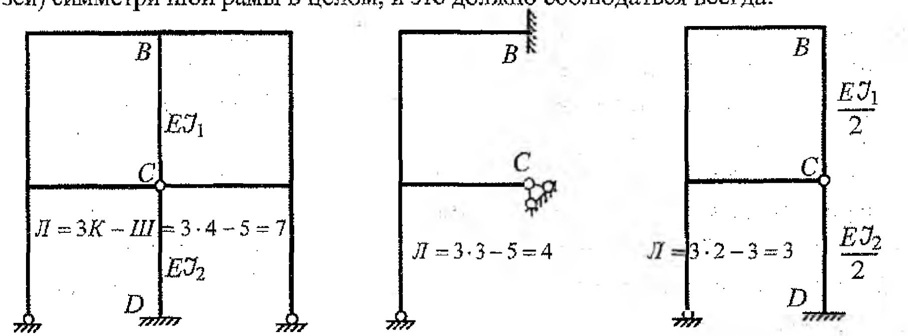
Пример 1. Рама на рис. 26а имеет 7 лишних связей. Ось симметрии рамы проходит по линии *BD*, разрезав раму по которой, рассмотрим левую ее часть.

После этого условия работы сечений и стержней, лежащих на оси симметрии, определяются для симметричного и кососимметричного нагружений отдельно, и при этом учитываются и анализируются только изгибные деформации.

При симметричном нагружении стержни *BC* и *CD* изгибаться не будут, так как такая деформация не является для рамы симметричной, и поэтому эти стержни здесь можно отбросить вообще. Точка (сечение) *B* не может, не нарушая симметрии деформирования, перемещаться горизонтально и поворачиваться, а также не может перемещаться по вертикали в связи с наличием стержней *BC*, *CD* и опоры в точке *D*. Поэтому в точке *B* здесь должна быть поставлена заделка. Шарнир *C* аналогично не может перемещаться ни по вертикали, ни по горизонтали и должен быть закреплен в этом случае с помощью шарнирно неподвижной опоры. Половина рамы для расчета рассматриваемой симметричной рамы на симметричное нагружение показана на рис. 26б.

При кососимметричном нагружении точки *B* и *C* могут смещаться по горизонтали, а стержни *BC* и *CD* могут изгибаться, так как эти деформации для них являются кососимметричными; при этом жесткости стержней *BC* и *CD* следует принять равными половинам от заданных. Вертикально же все эти точки здесь перемещаться не могут, так как они закреплены от этих смещений с помощью опоры в точке *D* и стержней *CD* и *BC*, продольными деформациями в которых пренебрегается. Расчетная схема половины рассматриваемой рамы для расчета на кососимметричную нагрузку показана на рис. 26в.

Как несложно заметить, общее число лишних связей в обоих вариантах половин рамы равно степени статической неопределимости (числу лишних связей) симметричной рамы в целом, и это должно соблюдаться всегда.



а) расчетная схема симметричной рамы

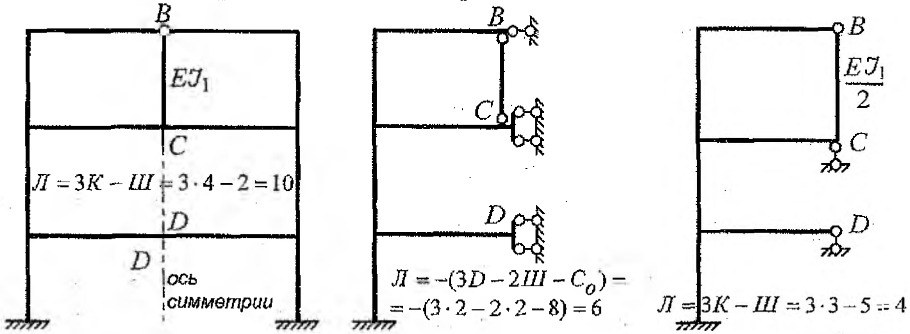
б) половина рамы при расчете на симметричную нагрузку

в) половина рамы при расчете на кососимметричную нагрузку

Рис. 26

__Пример 2.__ Симметричная рама на рис. 27а имеет 10 лишних связей.

При симметричном ее нагружении шарнир B не может горизонтально перемещаться, поэтому в нем ставим связь от горизонтального смещения (рис. 27б); точки C и D также не могут смещаться горизонтально, но еще не могут и поворачиваться (эти перемещения не являются симметричными), поэтому в этих точках устанавливаются соответствующие опоры, закрепляющие их от горизонтальных перемещений и от поворотов.



а) расчетная схема симметричной рамы

б) половина рамы при расчете на симметричную нагрузку

в) половина рамы при расчете на кососимметричную нагрузку

Рис. 27

По вертикали точки B, C и D перемещаться здесь могут (эта деформация симметрична), однако точки B и C будут перемещаться по вертикали на одну и ту же величину, как соединенные между собой нерастяжимым (и не сжимаемым) стержнем BC (рис. 27а), который при этом при симметричном нагружении, как и в предыдущем примере, не будет изгибаться (так как это кососимметричная деформация) и поэтому может быть опущен; точки же B и C в половине рамы должны быть соединены связью (стержнем), которая зафиксирует возможность их перемещаться по вертикали только на одну и ту же величину (рис. 27б).

При кососимметричном нагружении рамы (рис. 27а) стержень BC может изгибаться и поэтому должен присутствовать на схеме половины рамы, правда, с половинной жесткостью ($EJ_1 / 2$); узлы B, C и D могут перемещаться по горизонтали, а узлы C и D могут еще и поворачиваться (это кососимметричные деформации для этих точек); все эти точки (B, C и D) не могут здесь перемещаться только по вертикали, для фиксирования чего в точках C и D необходимо установить вертикальные связи (шарнирно подвижные опоры).

Расчетная схема половины рамы в этом случае показана на рис. 27в.

3.7. Пример расчета симметричной рамы

Рассмотрим раму, представленную на рис. 28а. Несмотря на то, что в точке А стоит шарнирно неподвижная опора, а в симметричной ей относительно оси симметрии рамы точке В стоит шарнирно подвижная опора, данная рама, с точки зрения рассматриваемой классической формы метода сил, в которой не учитываются продольные деформации стержней, а учитываются только изгибные их деформации (раздел 2.4.), будет симметричной (точка В, как и точка А, смещаться горизонтально не может). Внешняя нагрузка на раму в данном случае является кососимметричной.

1. Степень статической неопределимости рамы равна

$$Л = 3К - Ш = 3 \cdot 5 - 10 = 5,$$

то есть рама имеет пять лишних связей.

2. Основная система метода сил может быть выбрана в виде, показанном на рис. 28б, где неизвестные X_2', X_3' и X_4' удовлетворяют полностью условиям симметрии, являясь либо симметричными (X_3', X_4'), либо кососимметричными (X_2'), а неизвестные X_1' и X_5' не удовлетворяют условиям симметрии, но действуют они в симметричных точках и направлениях. Поэтому можно выполнить их группировку, произведя замену

$$\begin{cases} X_1' = X_1 + X_5; \\ X_5' = X_1 - X_5. \end{cases}$$

Основная система с учетом данной замены показана на рис. 28в. Теперь сгруппированное неизвестное X_1 будет симметричным, а неизвестное X_5 – кососимметричным. Учитывая, что внешняя нагрузка кососимметрична, симметричные неизвестные должны быть равны нулю, то есть

$$X_1 = 0; \qquad X_3 = 0; \qquad X_4 = 0.$$

С учетом этого упрощения в основной системе метода сил для данной рамы останется только два неизвестных метода сил X_2 и X_5 (см. рис. 28г).

3. И система канонических уравнений метода сил с учетом указанных выше упрощений будет иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{22}X_2 + \delta_{25}X_5 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{52}X_2 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{5P} = 0. \end{cases} \qquad (24)$$

<u>Физический смысл уравнений:</u>

<u>1-ое уравнение</u> – представляет собой взаимное расхождение в О.С. сечений слева и справа от разреза в точке С (см. рис. 28а, г) по вертикали от действия сил X_2, X_5 и внешних нагрузок, которое должно равняться нулю, так как в исходной рассматриваемой раме эти сечения жестко соединены друг с другом и значит разойтись не смогут;

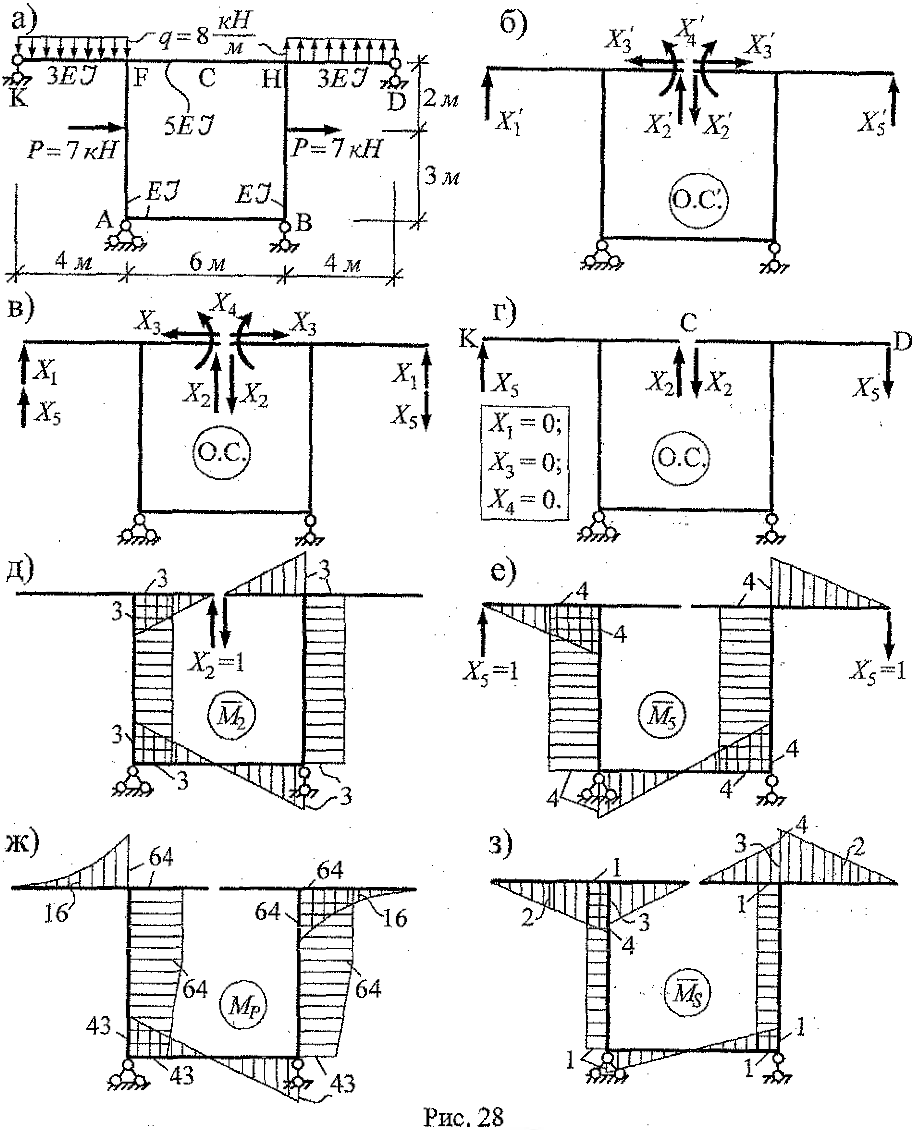


Рис. 28

2-ое уравнение – представляет собой взаимное расхождение в О.С. по вертикали от горизонтальной линии KD точек K и D (см. рис. 28а, г) от действия сил X_2, X_5 и внешних нагрузок, которое должно равняться нулю, так как в точках K и D стоят шарнирно подвижные опоры, закрепляющие эти точки от вертикальных перемещений вообще.

4. В расчетной основной системе метода сил (рис. 28г) строим единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов от действия единичных значений неиз-

вестных и внешних нагрузок – эпюры $\overline{M}_2$, $\overline{M}_5$ и M_P, которые представлены соответственно на рис. 28д ÷ 28ж.

5. Вычисляем коэффициенты и свободные члены системы уравнений:

<u>***а) единичные коэффициенты:***</u>

$$\delta_{22}=\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_2^2\,dx}{EJ}=2\left[\frac{1}{5EJ}\left(\frac{3\cdot3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}3+\frac{1}{EJ}(3\cdot5)\cdot3+\frac{1}{EJ}\left(\frac{3\cdot3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}3\right]=\frac{111{,}6}{EJ};$$

$$\delta_{25}=\delta_{52}=\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_2\overline{M}_5\,dx}{EJ}=2\left[-\frac{1}{EJ}(3\cdot5)\cdot4-\frac{1}{EJ}\left(\frac{3\cdot3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}4\right]=-\frac{144{,}0}{EJ};$$

$$\delta_{55}=\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_5^2\,dx}{EJ}=2\left[\frac{1}{3EJ}\left(\frac{4\cdot4}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}4+\frac{1}{EJ}(4\cdot5)\cdot4+\frac{1}{EJ}\left(\frac{4\cdot3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}4\right]=\frac{206{,}222}{EJ};$$

<u>***б) свободные члены (грузовые перемещения):***</u>

$$\Delta_{2P}=\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_2M_P\,dx}{EJ}=2\left[\frac{1}{EJ}(64\cdot2)\cdot3+\frac{1}{EJ}\left(\frac{64+43}{2}\cdot3\right)\cdot3+\frac{1}{EJ}\left(\frac{43\cdot3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}3\right]=\frac{1989{,}0}{EJ};$$

$$\Delta_{5P}=\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_5M_P\,dx}{EJ}=2\left[\frac{4}{6\cdot3EJ}(-4\cdot16\cdot2-64\cdot4)-\frac{1}{EJ}(64\cdot2)\cdot4-\frac{1}{EJ}\left(\frac{64+43}{2}\cdot3\right)\cdot4-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{EJ}\left(\frac{43\cdot3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}4\right]=-\frac{2822{,}667}{EJ}.$$

6. Для выполнения проверок правильности вычисления единичных коэффициентов и свободных членов системы уравнений построим суммарную единичную эпюру изгибающих моментов в соответствии с формулой $\overline{M}_S=\overline{M}_1+\overline{M}_2$ (см. рис. 28з), после чего выполним проверки:

<u>***а) универсальная проверка:***</u>

$$\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_S^2\,dx}{EJ}=\sum\sum\delta_{ik}\text{, где:}$$

$$\sum\sum\delta_{ik}=\delta_{22}+\delta_{25}+\delta_{52}+\delta_{55}=\frac{111{,}6}{EJ}-\frac{144}{EJ}\cdot2+\frac{206{,}222}{EJ}=\frac{29{,}822}{EJ};$$

$$\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_S^2\,dx}{EJ}=2\left[\frac{1}{3EJ}\left(\frac{4\cdot4}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}4+\frac{1}{5EJ}\left(\frac{3\cdot3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}3+\frac{1}{EJ}(1\cdot5)\cdot1+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1\cdot3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}1\right]=\frac{29{,}822}{EJ};$$

проверка выполняется;

<u>***б) столбцовая проверка:***</u>

$$\sum_1^n\int_0^l\frac{\overline{M}_SM_P\,dx}{EJ}=\sum\Delta_{iP}\text{, где:}\quad\sum\Delta_{iP}=\Delta_{2P}+\Delta_{5P}=\frac{1989{,}0}{EJ}-\frac{2822{,}667}{EJ}=-\frac{833{,}667}{EJ};$$

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_S M_P\,dx}{EJ} = 2\left[\frac{4}{6\cdot 3EJ}(-4\cdot 16\cdot 2 - 64\cdot 4) - \frac{1}{EJ}(64\cdot 2)\cdot 1 - \frac{1}{EJ}\left(\frac{64+43}{2}\right)\cdot 3\cdot 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{EJ}\left(\frac{43\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}1\right] = -\frac{833{,}667}{EJ};\ \text{проверка выполняется.}$$

7. Решаем систему уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \dfrac{111{,}6}{EJ}X_2 - \dfrac{144}{EJ}X_5 + \dfrac{1989}{EJ} = 0; \\ -\dfrac{144}{EJ}X_2 + \dfrac{206{,}222}{EJ}X_5 - \dfrac{2822{,}667}{EJ} = 0. \end{cases} \quad \text{находим:} \quad \begin{aligned} X_2 &= -1{,}63\ (кН); \\ X_5 &= 12{,}55\ (кН). \end{aligned}$$

Проверяем решение путем подстановки найденных значений в уравнения:

$$111{,}6\cdot(-1{,}63) - 144\cdot 12{,}55 + 1989{,}0 = 0; \qquad -1989{,}108 + 1989{,}0 \approx 0;$$

$$-144\cdot(-1{,}63) + 206{,}222\cdot 12{,}55 - 2822{,}667 = 0; \qquad 2822{,}806 - 2822{,}667 \approx 0.$$

Погрешности незначительны, проверка выполняется.

8. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов по формуле

$$M = \overline{M}_2\cdot X_2 + \overline{M}_5\cdot X_5 + M_P\ .$$

Отдельно покажем промежуточные (исправленные единичные) эпюры (см. рис. 29а, б). Окончательная эпюра M представлена на рис. 30а.

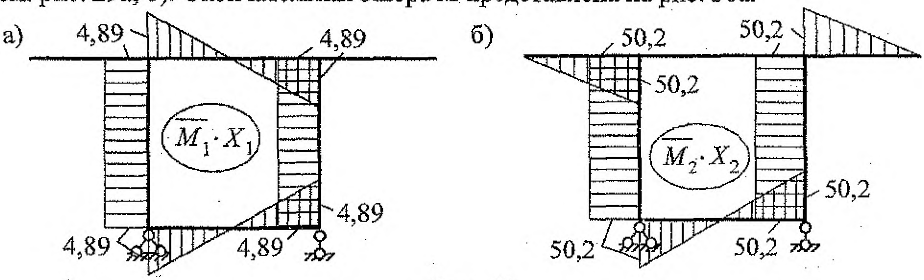


Рис. 29

9. Выполняем деформационную проверку эпюры M:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{M\cdot\overline{M}_S\,dx}{EJ} = 0; \quad 2\left[\frac{4}{6\cdot 3EJ}(4\cdot 9{,}1\cdot 2 - 13{,}8\cdot 4) - \frac{1}{5EJ}\left(\frac{4{,}89\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}3 - \frac{1}{EJ}(8{,}91\cdot 2)\cdot 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{EJ}(1\cdot 3)\cdot 1{,}59 + \frac{1}{EJ}\left(\frac{12{,}09\cdot 3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}1\right] = \frac{1}{EJ}(41{,}542 - 41{,}508) \approx 0;$$

погрешность $\left|\dfrac{41{,}542 - 41{,}508}{41{,}508}\right|\cdot 100\% = 0{,}08\% < 3\%$ незначительна.

10. Эпюру поперечных сил Q строим по эпюре M с использованием формул (17) и (18):

$$Q_{KF} = Q_o - \left|\frac{M_{прав} - M_{лев}}{l}\right| = \pm\frac{8\cdot 4}{2} - \left|\frac{-13{,}8 - 0}{4}\right| = \pm 16 - 3{,}45;$$

$$Q_{KF}^{лев} = +16 - 3{,}45 = +12{,}55\ (кН); \qquad Q_{KF}^{прав} = -16 - 3{,}45 = -19{,}45\ (кН);$$

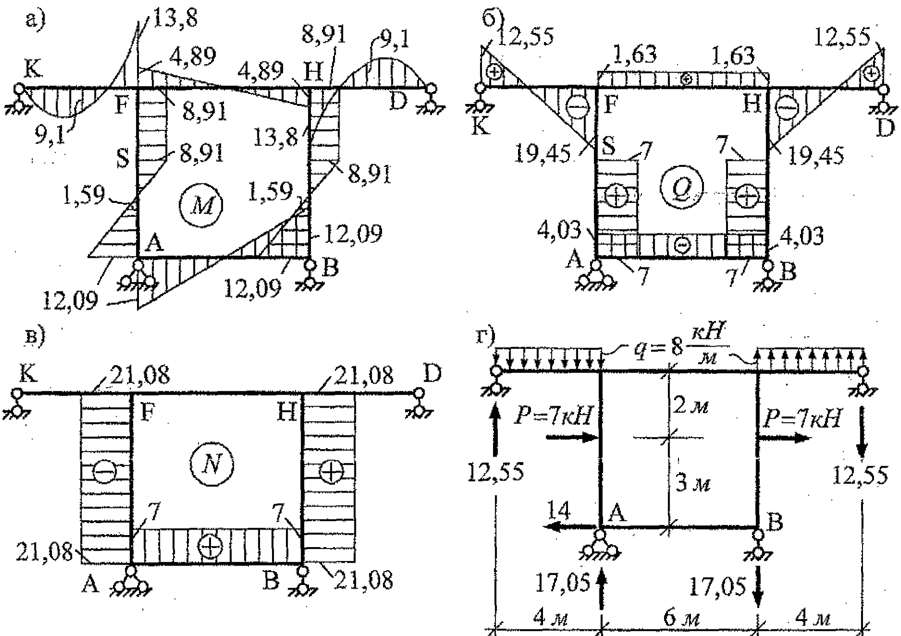


Рис. 30

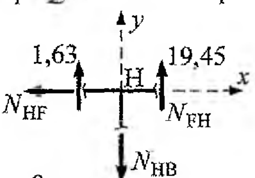
$$Q_{FH}=+\left|\frac{4{,}89-(-4{,}89)}{6}\right|=1{,}63\ (кН);\qquad Q_{FS}=\left|\frac{8{,}91-8{,}91}{2}\right|=0;$$

$$Q_{SA}=+\left|\frac{12{,}09-(-8{,}91)}{3}\right|=+7\ (кН);\qquad Q_{AB}=-\left|\frac{-12{,}09-12{,}09}{6}\right|=-4{,}03\ (кН).$$

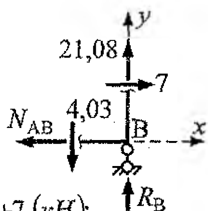
Эпюра поперечных сил показана на рис. 30б.

11. Эпюру продольных сил в заданной статически неопределимой системе строим по эпюре Q способом вырезания узлов:

<u>а) узел H</u>



б) узел B



$\sum X=0;\ N_{FH}=0;$ $\qquad$ $\sum X=0;\ N_{AB}=+7\ (кН);$

$\sum Y=0;\ N_{HB}=+21{,}08\ (кН);$ $\qquad$ $\sum Y=0;\ R_B=-17{,}05\ (кН).$

Узлы F и A вырезаются аналогично. Эпюра N показана на рис. 30в.

12. Статическая проверка равновесия рамы (рис. 30г):

$$\sum X=0;\quad 7+7-14=0;\quad 14-14=0;$$

$$\sum Y=0;\quad 12{,}55+17{,}05-8\cdot4-17{,}05+8\cdot4-12{,}55=0;$$

$$\sum M_A=0;\ (7+7)\cdot3+12{,}55\cdot4+12{,}55\cdot10+17{,}05\cdot6-(8\cdot4)\cdot2-8\cdot4(6+2)=0;$$

$$320-320=0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ, РЕКОМЕНДУЕМОЙ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ

1. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 8-е изд. – М.: Высш. школа, 1986. – 607 с.

2. Строительная механика: учебник для вузов / А.В. Дарков [и др.]; под ред А.В. Даркова. – 7-е изд. – М.: Высш. школа, 1976. – 600 с.

3. Киселев, В.А. Строительная механика. Общий курс: учебник для вузов / В. А. Киселев. – 4-е изд. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.

4. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем: учебник / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Составители: Игнатюк Валерий Иванович
Загуляев Станислав Валерьевич
Молош Виктор Викторович

Методические указания
по дисциплине «Строительная механика»
для студентов строительных специальностей
заочной формы обучения

Часть 2

Статически неопределимые системы. Метод сил

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.

Редактор Строкач Т.В.

Компьютерный набор и верстка Девентейчик А.А.

Корректор Никитчик Е.В.

Подписано к печати 06.01.2008 г. Формат 60×84/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 300 экз. Заказ № 1. Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.