а) *если* $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) *если* $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)};$$

в) *если, кроме того,* $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, где $d > 1$, $p \in (0,1)$, то $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$, *т.е. метод* (6) *с правилом останова* (7) *сходится к точному решению операторного уравнения.*

Список цитированных источников

1. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.
2. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38-43.
3. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕАВТОНОМНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Каримова Т.И.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Одной из причин активного развития стохастического анализа и теории стохастических дифференциальных уравнений в последнее время является то, что большинство случайных процессов, встречающихся в приложениях, не являются дифференцируемыми. Задачи с недифференцируемыми функциями можно рассматривать при помощи теории распределений Л.Шварца, однако она применима лишь к линейным задачам, что не всегда удовлетворяет требованиям практики. Поэтому построение Ж.Коломбо (см., напр., [1]) алгебры новых обобщенных функций позволило изучать стохастические дифференциальные уравнения методами классического анализа. В работах многих авторов были предложены различные конструкции алгебр обобщенных случайных процессов. В дальнейшем будем использовать алгебру, введенную Н.В. Лазаковичем в статье [2]. В ней на основе аппарата алгебры обобщенных случайных процессов предложен единый подход к исследованию стохастических дифференциальных уравнений. Суть его состоит в замене исходного стохастического уравнения на уравнение в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. При этом возникает естественный вопрос о существовании и единственности решений уравнений в дифференциалах. В данной статье эта задача рассматривается для систем неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов.

Напомним некоторые понятия работы [2].

Пусть везде далее $T=[0,a]$ – отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}$, $a>0$, а $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – полное вероятностное пространство.

Расширенной прямой $\widetilde{\mathbb{R}}$ называется следующее фактор-множество $\widetilde{\mathbb{R}}=\overline{\mathbb{R}}/M$, где $\overline{\mathbb{R}}=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:\forall n\in\mathbb{N}\ \ x_n\in\mathbb{R}\}$ и $M=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\overline{\mathbb{R}}:\exists n_0\ \forall n>n_0\ \ x_n=0\}$.

Аналогичным образом определяется $\widetilde{T}$, где $T=[0,a]\subset\mathbb{R}$, $a>0$, $\overline{T}=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:\forall n\in\mathbb{N}\ \ x_n\in T\}$.

Рассмотрим множество $G(T,\Omega)$ последовательностей случайных функций $f_n:T\times\Omega\to\mathbb{R}$ со следующими свойствами: 1) $f_n(t,\cdot)$ является случайной величиной на $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ для всех $t\in T$ и $n\in\mathbb{N}$; 2) $f_n(\cdot,\omega)\in J^{\infty}(T)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и почти всех $\omega\in\Omega$.

Будем говорить, что последовательности $F=(f_n(t,\omega))$ и $G=(g_n(t,\omega))$ эквивалентны, если существует такой номер n_0, что для любых $t\in T$ и почти всех $\omega\in\Omega$ $f_n(t,\omega)=g_n(t,\omega)$ при $n>n_0$.

Обозначим $G(\widetilde{T},\Omega)$ множество классов эквивалентности множества $G(T,\Omega)$. Очевидно, что $G(\widetilde{T},\Omega)$ – алгебра с покоординатным сложением и умножением.

Определение 1. *Множество $G(\widetilde{T},\Omega)$ – алгебра обобщенных случайных процессов, а ее элементы – обобщенные случайные процессы.*

Будем говорить, что обобщенный случайный процесс $\widetilde{F}=[(f_n)]\in G(\widetilde{T},\Omega)$ ассоциирует классический случайный процесс f из некоторого пространства, если $f_n\to f$ при $n\to\infty$ в этом пространстве.

Пусть $B(t)=(B^1(t),\ldots,B^m(t))$, $t\in T$ – m-мерный стандартный процесс броуновского движения. Обозначим через $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ поток σ-алгебр, порожденный броуновским движением B. Причем считаем, что $\mathcal{F}_0$ содержит все события нулевой вероятности из $\mathcal{F}$.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$dX^i(t)=f^i(t,X(t))dB(t)+g^i(t,X(t))dt,\ \ i=\overline{1,r},\ \ t\in T, \tag{1}$$

с начальным условием $X^i(0)=x^i$.

В алгебре $G(\widetilde{T},\Omega)$ ([2]) ей будет соответствовать следующая задача Коши:

$$\begin{cases} d_{\tilde h}\widetilde{X}^i(\tilde t)=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\tilde f^{ij}(\tilde t,\widetilde{X}(\tilde t))\,d_{\tilde h}\widetilde{B}^j(\tilde t)+\tilde g^i(\tilde t,\widetilde{X}(\tilde t))\,d_{\tilde h}\tilde t,\\ \widetilde{X}^i(\tilde t)\big|_{[\tilde 0,\tilde h)}=\widetilde{X}^{0i}(\tilde t),\quad i=\overline{1,r}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\tilde 0=[(0)]$, $\tilde h=[(h_n)]\in\widetilde{T}$, $\tilde f^{ij}=[(f_n^{ij})]\in G(\widetilde{\mathbb{R}}^{r+1})$ и $\tilde g^i=[(g_n^i)]\in G(\widetilde{\mathbb{R}}^{r+1})$ ассоциируют функции f^{ij} и g^i, $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{1,m}$ соответственно, а $\widetilde{B}^j=[(B_n^j)]\in G(\widetilde{T},\Omega)$ – обобщенный процесс, ассоциирующий процесс броуновского движения и «начальное условие» $\widetilde{X}^{0i}=[(X_n^{0i})]\in G(\widetilde{T},\Omega)$ – ассоциирует $x^i\in\mathbb{R}$.

На уровне представителей задача (2) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n)-X_n^i(t)=\sum_{j=1}^{m} f_n^{ij}(t,X_n(t))[B_n^j(t+h_n)-B_n^j(t)]+g_n^i(t,X_n(t))h_n, \\ X_n^i(t)\,|_{[0,h_n)}=X_n^{0i}(t), \quad i=\overline{1,r}, \quad t\in[0;a], \end{cases} \tag{3}$$

где $B_n^j=(B^j*\rho_n^j)(t)=\int_0^{1/n}B^j(t+s)\rho_n^j(s)ds, \quad \rho_n^j(t)\in \mathrm{J}^{\infty}(\text{Ў}), \quad \rho_n^j\ge 0,$

$supp\ \rho_n^j(t)\subset[0,1/n] \quad \int_0^{1/n}\rho_n^j(s)ds=1, \quad j=\overline{1,m}, \quad f_n^{ij}=(f^{ij}*\bar\rho_n), \ g_n^i=(g^i*\bar\rho_n),$

$f^{ij}\in \mathrm{J}_B^2(\text{Ў}^{r+1}), \quad g^i\in \mathrm{J}_B^1(\text{Ў}^{r+1})$, а $\bar\rho_n$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в $[0,1/n]^{r+1}$ и $\int_0^{1/n}...\int_0^{1/n}\bar\rho(s,s_1,...s_r)dsds_1...ds_r=1.$

Наряду с задачей (1) рассмотрим следующую систему

$$X^i(t)=x^i+\sum_{j=1}^{m}(\theta_j)\int_0^t f^{ij}(s,X(s))dB^j(s)+\int_0^t g^i(s,X(s))ds, i=\overline{1,r}, \tag{4}$$

с начальным условием $X(0)=x$, где $X(t)=(X^1(t),X^2(t),...,X^r(t))$, $x=(x^1,x^2,...,x^r)$, $g^i\in \mathrm{J}_B^1(\text{Ў}^{r+1})$, $f^{ij}\in \mathrm{J}_B^2(\text{Ў}^{r+1})$, $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{1,m}$, стохастические интегралы в правой части (4) – это стохастические θ-интегралы, $\theta\in[0,1]$.

Теорема. *В алгебре $G(\tilde{T},\Omega)$ решение задачи Коши (2) существует и единственно тогда и только тогда, когда для любых представителей $(f_n^{ij})\in\tilde f^{ij}$, $(g_n^i)\in\tilde g^i$, $(B_n^j)\in\tilde B^j$, $(X_n^i)\in\tilde X^i$, $(X_n^{0i})\in\tilde X^{0i}$ для достаточно больших номеров n выполняется условие:*

$$\frac{d^l}{ds^l}X_n^{0i}(h_n-s)-\frac{d^l}{ds^l}X_n^{0i}(s)-\sum_{j=1}^{m}\frac{d^l}{ds^l}[f_n^{ij}(s,X_n^0(s))[B_n^j(h_n+s)-B_n^j(s)]]-$$

$$-\frac{d}{ds^l}g_n^i(s,X_n^0(s))h_n\to 0,$$

при $s\to+0$ почти наверное для любых $l=0,1,2,...,$ $i=1,2,\ldots,r$ ..

Доказательство. Записав задачу (2) на уровне представителей в виде (3), очевидным образом получаем, что для каждого *n* функции X_n существуют и единственны. Покажем, что при выполнении условий теоремы функции X_n бесконечно дифференцируемы для достаточно больших *n*. Из этого факта будет вытекать, что последовательность X_n определяет элемент алгебры $G(\tilde{T},\Omega)$, который и будет искомым решением задачи (2).

Из формулы (3) вытекает, что если $X_n(t)$ бесконечно дифференцируема в точке $t\ne 0$, то она бесконечно дифференцируема в точке $t+h_n$. Поэтому достаточно показать бесконечную дифференцируемость X_n в точках $t \in [0, h_n)$. Если $t \in (0, h_n)$, то $X_n(t) = X_n^0(t)$ и является бесконечно дифференцируемой.

Рассмотрим $t = h_n$. Найдем в этой точке левостороннюю и правостороннюю производную $X_n^i(t)$.

$$\frac{d}{dt} X_n^i(t)\bigg|_{t=h_n+0} = \frac{d}{dt}\left\{ X_n^{0i}(t) + \sum_{j=1}^{m} f_n^{ij}(t, X_n^0(t))\left[B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)\right] + g_n^i(t, X_n^0(t))h_n \right\}\Bigg|_{t=+0}$$

$$\frac{d}{dt} X_n^i(t,\omega)\bigg|_{t=h_n-0} = \frac{d}{dt} X_n^{0i}(t,\omega)\bigg|_{t=h_n-0}.$$

Из условия теоремы вытекает, что левосторонняя и правосторонняя производные равны, поэтому $X_n(t)$ дифференцируема в точке $t = h_n$ и ее производная непрерывна в этой точке.

Существование производных высших порядков в этой точке доказывается аналогично. Теорема доказана.

Список цитированных источников

1. Colombeau, J.F. A multiplication of distributions // J. Math. Anal. And Appl. – 1983. – V. 94, №1. – P. 96–115.
2. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Доклады АН Беларуси. – 1994. – Т.38, №5. – С. 23–27.

УДК 534.26

ПРОНИКНОВЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПЛОСКИЙ ПРОНИЦАЕМЫЙ СЛОЙ

Киселева Н.Н.

УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», г. Гродно

Научный руководитель – Шушкевич Г.Ч., д. ф.-м. н., доцент

Пусть все пространство R^3 разделено «плоскостями Γ_1 $(z_1 = 0)$ и Γ_2 $(z_2 = 0)$ на три области D_1 $(z_1 > 0)$, D_2 $(z_1 < 0 \cup z_2 > 0)$, D_3 $(z_2 < 0)$. Расстояние между плоскостями равно h_2. В области D_1 находится идеально тонкая незамкнутая сферическая оболочка S_1, расположенная на сфере S, радиуса a с центром в точке O. Расстояние от точки O до плоскости Γ_1 равно h_1. Область, ограниченную сферой S, обозначим D_0. Три области заполнены материалом, в котором не распространяются сдвиговые волны. Плотность и волновое число в области D_j равны соответственно ρ_j, k_j, j = 1, 2, 3, $\rho_1 = \rho_3$, $k_1 = k_3$. В точке O расположен точечный сферический источник звукового поля [1].

Постановка задачи: требуется найти вторичное звуковое давление p_j, j = 1, 2, 3, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца $\Delta p_j + k_j p = 0$, граничному условию на поверхности сферической оболочки S_1 (акустически мягкая оболочка):

$$\left(p_c + p_0\right)\Big|_{S_1} = p_1\Big|_{S_1} = 0, \tag{1}$$

граничным условиям на проницаемой плоскости Γ_1: