МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра интеллектуальных информационных технологий

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

“ИМИТАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ОБЪЕКТОВ”

для студентов специальностей
1 – 40 02 01 и 1 – 40 03 01
дневной формы обучения

БРЕСТ 2012

УДК 681.3 (075.8)

Методические рекомендации предназначены для знакомства с основами программной имитации случайных величин. Рассмотрены подходы и алгоритмы имитации базовых случайных величин, произвольных случайных величин с заданными вероятностными свойствами с использованием как универсальных, так и специальных методов.

Составители: Г.Л. Муравьев, доцент, к.т.н.,
Ю.В. Савицкий, доцент, к.т.н.,
С.В. Мухов, доцент, к.т.н.

Рецензент: Козинский А.А., доцент, к.п.н., Брестский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

В имитационном моделировании систем, при моделировании систем методом Монте-Карло требуется воспроизводить, имитировать, генерировать значения случайных объектов с заданными вероятностными свойствами.

Это значения таких объектов, как случайные события, системы событий, случайные величины и системы случайных величин, случайные последовательности и процессы.

Количество случайных чисел, требуемых для получения, прогнозирования статистически устойчивых оценок характеристик функционирования систем, изменяется в широких пределах в зависимости от особенностей моделируемой системы, вычисляемых характеристик и процедур их оценки, требуемой точности результатов моделирования.

При этом характеристики модели существенно зависят от качества используемых имитаторов случайных объектов. Соответственно быстродействие средств имитации случайных объектов в значительной степени определяет трудоемкость модели, а ее адекватность зависит, в том числе, от качества генерируемых последовательностей.

Наличие простых и экономичных способов формирования последовательностей случайных чисел требуемого качества во многом определяет возможность практического использования машинного моделирования систем.

1. АЛГОРИТМЫ ПОЛУЧЕНИЯ КВАЗИРАВНОМЕРНЫХ ЧИСЕЛ

При программной реализации моделирования систем имитация случайных объектов любого типа сводится, как правило, к генерированию последовательностей значений некоторых стандартных, базовых случайных величин и к их последующему функциональному преобразованию.

Базовые случайные величины равномерно распределены на интервале (0; 1). Известно, что непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале (a; b), имеет аналитически описанные функцию плотности и функцию распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x<a, x>b\end{cases}\qquad F(X)=\begin{cases}0 & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b,\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

Ее основные числовые характеристики приведены ниже:

$$M[\varepsilon]=\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}$$

$$D[\varepsilon]=\int_a^b (x-M[\varepsilon])^2 f(x)dx=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma_\varepsilon=\sqrt{D[\varepsilon]}=\frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$$

Соответственно функция плотности и функция распределения базовой случайной величины имеют вид:

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x<0, x>1\end{cases}\qquad F(X)=\begin{cases}0 & x\le 0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

А значения математического ожидания и дисперсии определяются формулами: $M[\varepsilon]=1/2$ и $D[\varepsilon]=1/12$ соответственно.

При имитационном моделировании и использовании вычислительных средств типовых компьютеров общего назначения, включая персональные компьютеры, приходится иметь дело с ограниченной разрядностью (n-разрядов) процессоров и эффектами замены непрерывных значений на дискретные, цифровые. Соответственно вместо значений непрерывной равномерно распределенной случайной величины в диапазоне (0; 1) приходится использовать выборку дискретной последовательности случайных чисел того же интервала, распределенных так же равномерно. Такие значения называют квазиравномерными.

Математическое ожидание и дисперсия квазиравномерной случайной величины имеют вид:

$$M[\varepsilon]=\sum_{i=0}^{2^n-1}\left(\frac{i}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^n}\right)=1/2$$

$$D[\varepsilon]=\sum_{i=0}^{2^n-1}\left(\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{i}{2^n-1}-\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{12}\cdot\frac{2^n+1}{2^n-1}$$

Видно, что если математическое ожидание квазиравномерной случайной величины совпадает с математическим ожиданием непрерывной равномерно распределенной случайной величины, то уже дисперсия принимает отличное значение.

Таким образом, производимые с помощью "идеального" генератора квазиравномерные числа должны иметь равномерное распределение, быть статистически независимыми и воспроизводимыми. Соответствующие последовательности должны иметь максимально возможный период повторяемости. Их генерация должна отличаться минимальным использованием вычислительных ресурсов компьютера.

1.1. Метод серединных квадратов

Указанный метод исторически является одной из первых процедур получения квазиравномерных чисел.

Алгоритм имитации последовательности квазиравномерных чисел приведен ниже:

1. Выбирается число разрядов - целое значение n.
2. Задается 2n-разрядное число $x_0 = a_1, a_2, \ldots a_{2n}$, меньшее единицы.
3. Текущее число x_0 возводится в квадрат $(x_0)^2 = b_1, b_2 \ldots b_{4n}$.
4. Определяется новое значение искомого числа $x_1 = b_{n+1}, b_{n+2} \ldots b_{3n}$, путем выделения 2n средних разрядов из квадрата исходного числа $(x_0)^2$.
5. В качестве $x_0 = x_1$ берется полученное число.
6. Возврат на пункт 3.

Пример использования алгоритма.

Пусть начальное число $x_0 = 0.2152$, тогда $(x_0)^2 = 0.04\underline{6311}04$, соответственно первое полученное число $x_1 = 0.6311$.

На следующем шаге значение $x_0 = 0.6311$, тогда $(x_0)^2 = 0.39\underline{8287}21$, соответственно второе полученное число $x_1 = 0.8287$.

Недостаток метода состоит в наличии корреляции между числами последовательности, причем в ряде случаев случайность вообще может отсутствовать. Кроме этого, при имитации последовательности может наблюдаться ее вырождение.

Например, если исходное число $x_0 = 0.0009$, то $(x_0)^2 = 0{,}00\underline{0000}81$, а значение $x_1 = 0{,}0000$ и т.д.

Указанное существенно ограничивает возможности использования метода серединных квадратов.

1.2. Мультипликативный и смешанный (конгруэнтные) методы

Наибольшее применение в практике имитационного моделирования на ЭВМ для программной генерации последовательностей псевдослучайных чисел нашли алгоритмы на базе рекуррентных соотношений, например, первого порядка

$$x_{i+1} = \Phi(x_i)$$

и их модификации. Здесь начальное значение числа x_0 и постоянные параметры функции Ф задаются пользователем.

Ниже рассматриваются некоторые процедуры получения последовательностей квазиравномерно распределённых чисел, которые нашли применение в практике имитационного моделирования систем при программной реализации генераторов.

Это, в частности, процедуры (метод вычетов) генерации на базе арифметических операций, в основе которых лежит понятие конгруэнтности.

Два целых числа α и β конгруэнтны (сравнимы) по модулю m, где m является целым числом, тогда, когда существует целое число k такое, что $\alpha - \beta = k \cdot m$. То есть указанная разность делится на m, числа имеют одинаковые остатки от деления на абсолютную величину числа m.

Например, конгруэнтны значения $1984 \equiv 4 \pmod{10}$, $5008 \equiv 8 \pmod{103}$ и т.д.

Сами конгруэнтные процедуры являются детерминированными, так как описываются рекуррентными соотношениями. Например, функция Ф может быть записана как

$$x_{i+1} = (\lambda \cdot x_i + \mu) mod\ M,$$

где значения x_i, множитель λ, аддитивная константа μ, модуль M представляют собой произвольные неотрицательные целые числа.

При этом, если задано начальное значение параметров x, λ и μ, то рекуррентное выражение определяет детерминированную (повторяющуюся) последовательность целых чисел $\{x_i\}$, где для любого $i \geq 1$ справедливо неравенство $x_i < M$.

На основе полученной ранее последовательности целых случайных чисел {xi} далее можно вычислить последовательность значений квазиравномерной случайной величины $\{x_i^{0..1}\} = \{x_i/M\}$, представляющих собой вещественные (рациональные) числа из интервала (0; 1).

В настоящее время практически все библиотечные функции языков высокого уровня, применяемые для вычисления последовательностей квазиравномерных случайных чисел, основаны на конгруэнтных процедурах.

Вычислительный алгоритм Лемера. Указанный алгоритм основан на применении рекуррентного соотношения

$$x_{i+1} = (a \cdot x_i) mod\ M,$$

где *a* и *M* положительные целые числа (M > a), и является вычислительной основой как смешанного, так и мультипликативного методов, применяемых при программной реализации на ЭВМ.

Таким образом, вначале задаются значения *a* и *M*, а также исходное число x_0. Далее согласно указанному соотношению результат произведения $a \cdot x_i$ берется по модулю M - определяется остаток от деления $a \cdot x_i$ на M. Полученное значение, находящееся в диапазоне $0 \leq x_{i+1} < M$, принимается в качестве значения "промежуточного" числа x_{i+1}.

На основе полученных целых чисел последовательности { xi } далее вычисляется последовательность значений квазиравномерной величины $\{ x_i^{0..1} \} = \{ x_i / M \}$ в интервале (0; 1).

Качество генерируемых квазиравномерных чисел $\{ x_i^{0..1} \}$ определяется удачным выбором значений "настроечных" параметров a, M, x_0. Здесь параметры a и x_0 влияют на статистические свойства получаемых чисел, а параметр M на период их повторения. Следовательно, выбор параметров a, M, x_0 должен осуществляться таким образом, чтобы обеспечить требуемые статистические свойства последовательности и наибольший период повторения.

Исходное значение x_0 должно быть достаточно большим, но меньше, чем 2^M-1. Рекомендуется в его качестве использовать простое число с большим количеством единичных бит *в двоичном представлении.*

Алгоритм имитации квазиравномерных чисел сводится к выполнению следующих операций:

1. Выбирается в качестве начального значения x_0 произвольное положительное целое число.

2. Выбираются целые положительные числа в качестве значений параметров a и M ($M > a$).

3. Находится произведение $a \cdot x_0$.

4. Вычисляется остаток от деления произведения $a \cdot x_0$ на M и принимается в качестве нового значения x_1.

5. Полученное значение преобразуется в вещественное значение из интервала (0; 1), то есть вычисляется квазиравномерное значение $x_1^{0..1} = x_1 / M$.

7. Возврат на пункт 3.

Пример использования алгоритма.

Для случая g = 4 для нахождения каждого числа ($x_1^{0..1}$) выполняются следующие действия:

1. Выбирается в качестве x_0 произвольное нечетное положительное целое число, например 7.

2. Выбираются $a = 3$ и $M = 5$ как целые положительные числа, где $M > a$.

3. Рассчитывается значение $a \cdot x_0 = 21$.

4. В качестве искомого значения x_1 берется остаток от деления $a \cdot x_0$ на M, то есть $x_1 = 21 \bmod 5 = 1$.

5. Определяется значение квазиравномерной величины из интервала (0; 1) как результат $x_1^{0..1} = x_1 / M = 1/5 = 0{,}2$.

6. Новое значение x_0 устанавливается как $x_0 = 3$.

7. Возврат на пункт 3.

Указанным образом может быть получено необходимое количество значений квазиравномерной величины. Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$$x_o = 7; \quad a = 3; \quad M = 5;$$

$$a \cdot x_0 = 3 \cdot 7 = 1; \qquad x_1 = 3\, mod\, 5 = 1; \qquad x_1^{0..1} = 1/5 = 0.2$$

$$a \cdot x_1 = 3 \cdot 1 = 3; \qquad x_2 = 3\, mod\, 5 = 3; \qquad x_2^{0..1} = 3/5 = 0.6;$$

$$a \cdot x_2 = 3 \cdot 3 = 9; \qquad x_3 = 9\, mod\, 5 = 4; \qquad x_3^{0..1} = 4/5 = 0.8$$

$$a \cdot x_3 = 3 \cdot 4 = 12; \qquad x_4 = 12\, mod\, 5 = 2; \qquad x_4^{0..1} = 2/5 = 0.4\ .$$

Указанная процедура получения квазиравномерных чисел может быть реализована мультипликативным либо смешанным методом. Ниже показаны особенности соответствующих алгоритмов с учетом ограниченной разрядности цифровых компьютеров и учетом используемой в них системы счисления.

Мультипликативный метод представляет собой частный случай использования приведенной конгруэнтной процедуры при $\mu = 0$. Соответственно формула принимает вид

$$x_{i+1} = (\lambda \cdot x_i)\, mod\, M$$

Для машинной реализации наиболее удобен случай, когда $M = p^g$, где переменная p - число цифр в системе счисления, принятой в ЭВМ, а переменная g - число символов (битов для двоичных слов) в машинном слове.

Тогда процедура вычисления остатка от деления на M сводится к выделению g младших разрядов делимого, а преобразование целого числа x_i в рациональную дробь из интервала $x \in (0; 1)$ осуществляется простой "подстановкой" слева от полученного целого значения x_i запятой.

Алгоритм имитации квазиравномерных чисел (для случая использования двоичной системы счисления с $M = 2^g$) сводится к выполнению следующих операций:

1. Выбирается в качестве начального значения x_0 произвольное нечетное число.

2. Вычисляется коэффициент λ, например, по правилу $\lambda = 8^t \cdot t \pm 3$, где t - любое целое положительное число.

3. Находится произведение $\lambda \cdot x_0$, содержащее не более $2g$ значащих разрядов.

4. Берется g младших разрядов произведения в качестве искомого значения x_1, остальные разряды отбрасываются.

5. Полученное значение приводится к вещественному из интервала (0; 1), то есть вычисляется квазиравномерное значение $x_1^{0..1} = x_1 / 2^g$.

6. В качестве нового значения x_0 берется полученное число $x_0 = x_1$.

7. Возврат на пункт 3.

Пример использования алгоритма.

Для случая $g = 4$ (это значение g выбрано в целях упрощения расчетов в демонстрационном примере) для нахождения каждого числа ($x_1^{0..1}$) выполняются следующие действия:

1. Выбирается в качестве x_0 произвольное нечетное число, например 7.

2. Выбирается $t = 1$ и вычисляется коэффициент λ. Из двух вариантов $\lambda = 5$ и $\lambda = 11$ выберем $\lambda = 5$.

3. Рассчитывается $\lambda \cdot x_0 = 35$, что в двоичной системе счисления составляет $35_{10} = 00100011_2$. Полученное число содержит $6 \leq 8$ значащих разрядов.

4. В качестве искомого значения x_1 берется 4 младших разряда $x_1 = 0011 = 3_{10}$, а остальные разряды отбрасываются.

5. Определяется значение квазиравномерной величины из интервала (0; 1) как результат $x_1^{0..1} = 3 / 2^4 = 0{,}1875$.

6. Новое значение устанавливается как $x_0 = 3$.

7. Возврат на пункт 3.

Указанным образом может быть получено необходимое количество значений квазиравномерной случайной величины. Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$x_o = 7; \quad \lambda = 5;$

$\lambda \cdot x_0 = 5 \cdot 7 = 35; \qquad 35_{10} = 00100011_2; \qquad x_1 = 0011_2 = 3_{10}; \qquad x_1^{0..1} = \dfrac{3}{2^4} = 0.1875.$

$\lambda \cdot x_1 = 5 \cdot 3 = 15; \qquad 15_{10} = 00001111_2; \qquad x_2 = 1111_2 = 15_{10}; \qquad x_2^{0..1} = \dfrac{15}{2^4} = 0.9375.$

$\lambda \cdot x_2 = 5 \cdot 15 = 75; \qquad 75_{10} = 01001011_2; \qquad x_2 = 1011_2 = 11_{10}; \qquad x_3^{0..1} = \dfrac{11}{2^4} = 0.6875.$

$\lambda \cdot x_3 = 5 \cdot 11 = 55; \qquad 55_{10} = 00110111_2; \qquad x_2 = 0111_2 = 7_{10}; \qquad x_2^{0..1} = \dfrac{7}{2^4} = 0.4375.$

Смешанный метод базируется на использовании исходной формулы

$$x_{i+1} = (\lambda \cdot x_i + \mu) mod\ M \ .$$

С вычислительной точки зрения смешанный метод сложнее мультипликативного на операцию сложения, но при этом возможность выбора дополнительного параметра позволяет повысить качество имитации, уменьшить возможную корреляцию получаемых чисел.

Алгоритм имитации квазиравномерных чисел (для случая использования двоичной системы счисления с $M = 2^g$) сводится к выполнению следующих операций:

1. Выбирается в качестве начального значения x_0 произвольное нечетное число.

2. Выбирается в качестве μ произвольное неотрицательное целое число ($0 < \mu < M$).

3. Вычисляется коэффициент $\lambda = \lambda = 8^t \cdot t \pm 3$, где t - любое целое положительное число.

4. Находится значение $\lambda \cdot x_0 + \mu$, содержащее не более 2g значащих разрядов.

5. Берется g младших разрядов значения $\lambda \cdot x_0 + \mu$ в качестве искомого значения x_1, остальные разряды отбрасываются.

6. Полученное значение приводится к вещественному из интервала (0; 1), то есть вычисляется квазиравномерное значение $x_1^{0..1} = x_1 / 2^g$

7. В качестве $x_0 = x_1$ берется полученное число.

8. Возврат на пункт 3.

Пример использования алгоритма.

Для случая g = 4 (это значение g выбрано в целях упрощения расчетов в демонстрационном примере) для нахождения каждого числа ($x_1^{0..1}$) выполняются следующие действия:

1. Выбирается в качестве x_0 произвольное нечетное число 7.

2. Выбирается в качестве μ произвольное неотрицательное целое число 3.

3. Выбирается $t = 1$ и вычисляется коэффициент λ. Из двух вариантов $\lambda = 5$ и $\lambda = 11$ выберем $\lambda = 5$.

4. Рассчитывается $\lambda \cdot x_0 + \mu = 38$, что в двоичной системе счисления составляет $38_{10} = 00100110_2$. Полученное число содержит $6 \le 8$ значащих разрядов.

5. В качестве искомого значения x_1 берется 4 младших разряда $x_1 = 0110_2 = 6_{10}$, а остальные разряды отбрасываются.

6. Определяется значение квазиравномерной величины из интервала (0; 1) как результат $x_1^{0..1} = 6 / 2^4 = 0{,}75$.

7. Новое значение устанавливается как $x_0 = 6$.

8. Возврат на пункт 3.

Указанным образом может быть получено необходимое количество значений квазиравномерной величины. Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$$x_0 = 7; \quad \mu = 3; \quad \lambda = 5;$$

$$\lambda \cdot x_0 + \mu = 5 \cdot 7 + 3 = 38; \quad 38_{10} = 00100110_2; \quad x_1 = 0110_2 = 6_{10}; \quad x_1^{0..1} = \frac{6}{2^4} = 0.375.$$

$$\lambda \cdot x_1 + \mu = 5 \cdot 6 + 3 = 33; \quad 33_{10} = 00100001_2; \quad x_2 = 0001_2 = 1_{10}; \quad x_2^{0..1} = \frac{1}{2^4} = 0.0625.$$

$$\lambda \cdot x_2 + \mu = 5 \cdot 1 + 3 = 8; \quad 8_{10} = 00001000_2; \quad x_3 = 1000_2 = 8_{10}; \quad x_3^{0..1} = \frac{8}{2^4} = 0.5.$$

$$\lambda \cdot x_3 + \mu = 5 \cdot 8 + 3 = 43; \quad 43_{10} = 00101011_2; \quad x_4 = 1011_2 = 11_{10}; \quad x_4^{0..1} = \frac{11}{2^4} = 0.6875.$$

1.3. Рекурсивный метод

Рекурсивный метод получения квазиравномерных чисел основан на применении следующих формул

$$Z_i = a_0 \cdot Z_{i-2} + a_1 \cdot Z_{i-1}, \quad x_i = Z_i \bmod M,$$

где a_0, a_1 – целые положительные коэффициенты;

M – целое положительное число, модуль;

Z_i – рассчитываемые целые положительные числа;

x_i – рассчитываемые квазиравномерные числа.

Таким образом, в качестве исходных параметров задаются значения a_0, a_1, M, Z_{-1} и Z_0.

Алгоритм имитации квазиравномерных чисел сводится к выполнению следующих операций:

1. Выбираются произвольные целые положительные числа в качестве начального значения Z_{-1} и Z_0.

2. Выбираются целые положительные числа в качестве значений a_0, a_1, M.

3. Вычисляется значение $Z_1 = a_0 \cdot Z_{-1} + a_1 \cdot Z_0$.

4. Вычисляется остаток от деления Z_1 на M и принимается в качестве искомого промежуточного значения x_1.

5. Полученное значение приводится к вещественному из интервала (0; 1), то есть вычисляется квазиравномерное значение $x_1^{0..1} = x_1 / M$.

6. Возврат на пункт 3.

Пример использования алгоритма.

1. Выбираются в качестве Z_{-1} и Z_0 произвольные целые положительные числа, например, 12345 и 97531 соответственно.

2. Выбираются целые положительные числа в качестве значений $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, M = 5000.

3. Рассчитывается значение $Z_1 = 109876$.

4. В качестве искомого значения x_1 берется $x_1 = 109876 \bmod 5000 = 4876$.

5. Определяется значение квазиравномерной величины из интервала (0; 1) как результат $x_1^{0..1} = 4876 / 5000 = 0{,}9752$.

6. Возврат на пункт 3.

Указанным образом может быть получено необходимое количество значений квазиравномерной величины. Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad Z_{-1} = 12345, \quad Z_0 = 97531, \quad M = 5000;$$

$$Z_{-1} = 12345, \quad Z_0 = 97531, \quad Z_1 = 109876, \quad x_1 = 4876, \quad x_1^{0..1} = 0.9752$$

$$Z_0 = 97531, \quad Z_1 = 109876, \quad Z_2 = 207407, \quad x_2 = 2407, \quad x_2^{0..1} = 0.4814$$

$$Z_1 = 109876, \quad Z_2 = 207407, \quad Z_3 = 317283, \quad x_3 = 2283, \quad x_3^{0..1} = 0.4566$$

$$Z_2 = 207407, \quad Z_3 = 317283, \quad Z_4 = 524690, \quad x_4 = 4690, \quad x_4^{0..1} = 0.9380$$

1.4. Метод Таусворта

Метод получения квазиравномерных случайных чисел Таусворта основан на применении следующих формул:

$$B_0 = b_1 b_2 .. b_q b_{q+1} b_{q+2} ... b_{2q} \,,$$

$$b_j = (b_{j-r} + b_{j-q}) \bmod 2 = \begin{cases} 0, & \text{если } b_{j-r} = b_{j-q} \\ 1, & \text{если } b_{j-r} \neq b_{j-q} \end{cases} \quad \text{для} \quad q+1 \le j \le 2q$$

$$x_{i+1} = b_{q+1} b_{q+2} ... b_{2q} \,.$$

Здесь используются следующие переменные:

- r, q целые положительные числа;
- B_0 бинарный (двоичный) вектор длины 2q;
- b_i компоненты бинарного вектора B_0;
- x_{i+1} генерируемое квазиравномерное число с двоичным представлением $b_{q+1}\, b_{q+2} \ldots b_{2q}$.

В качестве параметров задаются значения r и q, а также первые q компонентов бинарного вектора B_0, то есть значения q начальных бит с номерами 1- q.

Алгоритм имитации квазиравномерных чисел сводится к выполнению следующих операций:

1. Выбираются в качестве r и q произвольные целые положительные числа, вычисляется значение $M = 2^q$.

2. Задаются первые q компонент бинарного вектора B_0.

3. Вычисляются вторые q компонент бинарного вектора B_0, то есть значения битов b_{q+1} $b_{q+2} \ldots b_{2q}$ по формуле $b_j = (b_{j-r} + b_{j-q}) \bmod 2$, где $q + 1 \le j \le 2q$.

4. Выполняется перевод полученного бинарного вектора $b_{q+1}b_{q+2}...b_{2q}$ из двоичного представления в десятичное. Полученное значение принимается в качестве искомого значения x_1.

5. Полученное значение приводится к вещественному из интервала (0; 1), то есть вычисляется квазиравномерное значение $x_1^{0.1}$ как x_1 / M.

6. Модифицируются первые q компонент бинарного вектора B_0 путем соответствующего переприсваивания значений битов $b_j = b_{q+j}$ для $1 \le j \le q$.

7. Возврат на пункт 3.

<u>Пример использования алгоритма.</u>

1. Выбираются в качестве r = 3 и q = 8 произвольные целые положительные числа, вычисляется $M = 2^8 = 256$.

2. Задаются первые q компонентов бинарного вектора B_0 $b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 = 11010010$.

3. Вычисляются вторые q компонентов вектора B_0 как

$b_9 = (b_6 + b_1) \, mod\, 2 = (0+1) \, mod\, 2 = 1$,

$b_{10} = (b_7 + b_2) \, mod\, 2 = (1+1) \, mod\, 2 = 0$,

$b_{11} = (b_8 + b_3) \, mod\, 2 = (0+0) \, mod\, 2 = 0$,

$b_{12} = (b_9 + b_4) \, mod\, 2 = (1+1) \, mod\, 2 = 0$,

$b_{13} = (b_{10} + b_5) \, mod\, 2 = (0+0) \, mod\, 2 = 0$,

$b_{14} = (b_{11} + b_6) \, mod\, 2 = (0+0) \, mod\, 2 = 0$,

$b_{15} = (b_{12} + b_7) \, mod\, 2 = (0+1) \, mod\, 2 = 1$,

$b_{16} = (b_{13} + b_8) \, mod\, 2 = (0+0) \, mod\, 2 = 0$.

Соответственно значение $b_9b_{10}b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}b_{15}b_{16} = 10000010$.

4. Вычисляется $x_1 = 10000010_2 = 130_{10}$;

5. Полученное значение приводится к вещественному из интервала (0; 1), то есть вычисляется квазиравномерное значение $x_1^{0.1} = 130/256 = 0.5078125$.

6. Модифицируются первые q компонент $b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 = 10000010$ бинарного вектора B_0 путем соответствующего переприсваивания значений бит.

7. Возврат на пункт 3.

Указанным образом может быть получено необходимое количество значений квазиравномерной величины. Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$r = 3, \quad q = 8, \quad b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 = 11010010, \quad M = 2^q = 2^8 = 256$

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 = 11010010,\ b_9b_{10}b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}b_{15}b_{16} = 10000010,\ x_1 = 130,\ x_1^{0.1} = \frac{130}{256} = 0.508$

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 = 10000010,\ b_9b_{10}b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}b_{15}b_{16} = 11011001,\ x_2 = 217,\ x_2^{0.1} = \frac{217}{256} = 0.848$

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 = 11011001,\ b_9b_{10}b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}b_{15}b_{16} = 11100101,\ x_3 = 229,\ x_3^{0.1} = \frac{229}{256} = 0.895$

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 = 11100101,\ b_9b_{10}b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}b_{15}b_{16} = 01001100,\ x_4 = 76,\ x_4^{0.1} = \frac{76}{256} = 0.297$.

1.5. Сложный метод

Сложный метод основан на применении следующих формул:

$$Z_{t1} = (|a_0 \cdot Z_1^0 - b_0 \cdot Z_1^1|) \ mod \ c_0 ;$$

$$Z_{t2} = (|a_1 \cdot Z_2^0 - b_1 \cdot Z_2^1|) \ mod \ c_1 ;$$

$$x_i = (|Z_{t1} - Z_{t2}|) \ mod \ c_0 .$$

Здесь используются следующие переменные:

- a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 целые положительные коэффициенты;
- Z_{t1}, Z_{t2}, Z^0_1, Z^1_1, Z^0_2, Z^1_2 вспомогательные целые числа;
- x_i рассчитываемые квазиравномерные числа.

В качестве параметров задаются значения a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, Z^0_1, Z^0_2.

Алгоритм имитации квазиравномерных чисел сводится к выполнению следующих операций:

1. Выбираются произвольные целые положительные числа в качестве значения a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1.
2. Выбираются произвольные целые положительные числа в качестве начального значения Z^0_1, Z^0_2, вычисляются значения $Z^1_1 = Z^0_1$ и $Z^1_2 = Z^0_2$.
3. Вычисляются значения Z_{t1}, Z_{t2} по формулам:

$$Z_{t1} = (|a_0 \cdot Z_1^0 - b_0 \cdot Z_1^1|) \ mod \ c_0 ,$$

$$Z_{t2} = (|a_1 \cdot Z_2^0 - b_1 \cdot Z_2^1|) \ mod \ c_1 .$$

4. Вычисляется искомое промежуточное значение x_1 по формуле
$x_i = (|Z_{t1} - Z_{t2}|) \bmod c_0$.
5. Полученное значение приводится к вещественному из интервала (0; 1), то есть вычисляется квазиравномерное значение $x_1^{0..1} = x_1 / c_0$.
6. Модифицируются значения $Z^0_1 = Z^1_1$, $Z^1_1 = Z_{t1}$, $Z^0_2 = Z^1_2$, $Z^1_2 = Z_{t2}$.
7. Возврат на пункт 3.

Пример использования алгоритма.

1. Выбираются значения параметров $a_0 = 14$, $a_1 = 5$, $b_0 = 81$, $b_1 = 139$, $c_0 = 4294$, $c_1 = 9494$.
2. Задаются Z^0_1, Z^0_2, вычисляются $Z^1_1 = Z^0_1$ и $Z^1_2 = Z^0_2$ как $Z^0_1 = Z^1_1 = 13511$, $Z^0_2 = Z^1_2 = 1477$.
3. Вычисляются значения Z_{t1}, Z_{t2} как

$$Z_{t1} = (| 14 \cdot 13511 - 81 \cdot 13511 |) \bmod 4294 = 3497,$$

$$Z_{t2} = (| 5 \cdot 1477 - 139 \cdot 1477 |) \bmod 9494 = 8038.$$

4. Вычисляется значение x_1 по формуле $(| 3497 - 8038 |) \bmod 4294 = 247$.
5. Определяется $x_1^{0..1} = 247 / 4294 = 0{,}05752212$.
6. Модифицируются значения $Z^0_1 = 13511$, $Z^1_1 = 3497$, $Z^0_2 = 1477$, $Z^1_2 = 8038$.
7. Возврат на пункт 3.

Указанным образом может быть получено необходимое количество значений квазиравномерной величины. Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$$Z_1^0 = 13511, \quad a_0 = 14, \quad b_0 = 81, \quad c_0 = 4294,$$

$$Z_2^0 = 1477, \quad a_1 = 5, \quad b_1 = 139, \quad c_1 = 9494$$

$$Z_1^0 = 13511,\ Z_1^1 = 13511,\ Z_2^0 = 1477,\ Z_2^1 = 1477,\ Z_{t1} = 3497,\ Z_{t2} = 8038,\ x_1 = 247,\ x_1^{0..1} = 0.058$$

$$Z_1^0 = 13511,\ Z_1^1 = 3497,\ Z_2^0 = 1477,\ Z_2^1 = 8038,\ Z_{t1} = 3929,\ Z_{t2} = 8593,\ x_2 = 370,\ x_2^{0..1} = 0.086$$

$$Z_1^0 = 3497,\ Z_1^1 = 3929,\ Z_2^0 = 8038,\ Z_2^1 = 8593,\ Z_{t1} = 3063,\ Z_{t2} = 5463,\ x_3 = 2400,\ x_3^{0..1} = 0.559$$

$$Z_1^0 = 3929,\ Z_1^1 = 3063,\ Z_2^0 = 8593,\ Z_2^1 = 5463,\ Z_{t1} = 4161,\ Z_{t2} = 4342,\ x_4 = 181,\ x_4^{0..1} = 0.042$$

2. АЛГОРИТМЫ ПОЛУЧЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Случайные числа с заданным распределением программно имитируются на базе использования квазиравномерных случайных чисел R. Существует много вычислительных процедур, позволяющих имитировать как непрерывные, так и дискретные вероятностные распределения, заданные плотностью распределения f(x) либо функцией распределения F(x).

Для имитации случайных величин широко применяется метод обратных функций. Пусть требуется имитировать значения случайной величины X с функцией распределения F(x). Доказано что, если значения квазиравномерных чисел R брать в качестве значений функции распределения $F(x) = R$, то соответствующие им значения x аргумента функции F(x) (значения обратной функции) $X = F^{-1}(R)$ образуют выборку чисел, распределенных в соответствии с законом F(x).

Обратная функция в ряде случаев может быть получена аналитически. В противном случае, а также для дискретных распределений используются соответствующие алгоритмы.

Схема генерации значений случайной величины для случая, когда указанное уравнение не удается решить, иллюстрируется на рисунке 1. На рисунке показана функция распределения дискретной случайной величины X ($\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$). Действительно, значениям величины X - $x_1, x_2, \ldots x_n$ можно поставить в соответствие вероятности $p_1, p_2, \ldots p_n$, рассчитанные по значениям функции распределения как $p_k = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$.

Указанные значения образуют полную группу событий $X = x_1$, ..., $X = x_n$, а задача генерации сводится к задаче моделирования полной группы независимых элементарных событий и графически означает "набрасывание" значений квазиравномерной случайной величины R_i на отрезок единичной длины по оси 0-Y.

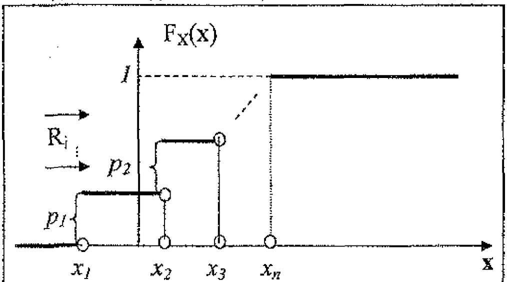

Рисунок 1 – Генерация случайных величин методом обратных функций

Для многих законов распределений существуют специальные алгоритмы генерации, основанные на свойствах и особенностях этих распределений. Качество таких алгоритмов, как правило, выше качества универсальных алгоритмов.

2.1. Равномерное распределение

Равномерное распределение непрерывной случайной величины X описывается функциями плотности и распределения, представленными в § 1 и ниже на рисунках 1, 2.

Параметрами распределения являются произвольные значения a и b (a < b), которые задают интервал распределения.

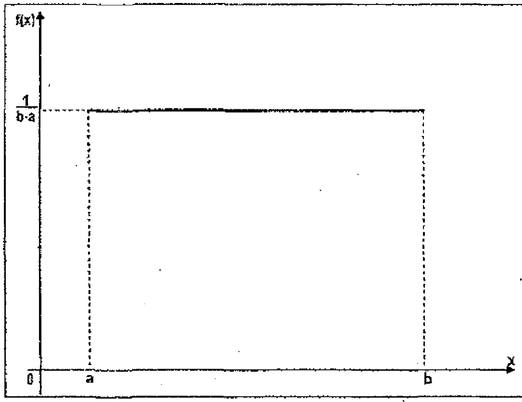

Рисунок 2 – Функция плотности равномерного распределения

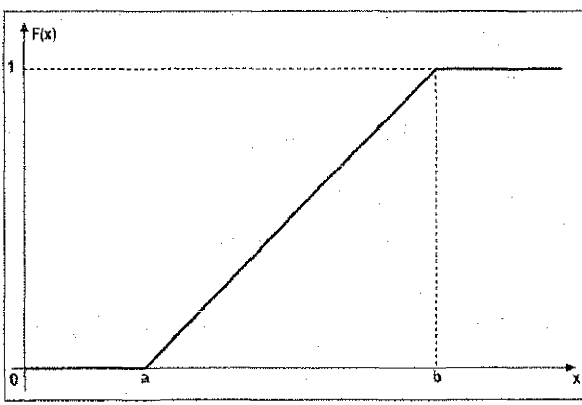

Рисунок 3 – Функция распределения равномерного распределения

Используем метод обратных функций и аналитическое описание функции распределения

$$f(x) \to F(x) = \frac{x-a}{b-a}, (x \in [a,b])$$

и запишем соответствующее уравнение

$$\frac{x_i - a}{b-a} = R_i \ .$$

Решив уравнение, получим аналитическое выражение для имитации значений равномерно распределенных случайных величин в заданном диапазоне значений как $x_i = a + (b-a)R_i$.

<u>Алгоритм имитации</u> сводится к выполнению следующих операций:

1. Генерируется значение R_i квазиравномерной случайной величины (в диапазоне 0-1).
2. Вычисляется по формуле искомое значение x_i.
3. Возврат на пункт 1.

Пример использования алгоритма для имитации равномерно распределенных величин на интервале от a =-3 до b=7.

Пусть сгенерированы значения квазиравномерной величины R: 0.43, 0.80, 0.29, 0.67, 0.19.

Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$$R_1 = 0.43, \quad x_1 = -3 + (7 - (-3)) \cdot 0.43 = 1.3;$$
$$R_2 = 0.80, \quad x_2 = -3 + (7 - (-3)) \cdot 0.80 = 5.0;$$
$$R_3 = 0.29, \quad x_3 = -3 + (7 - (-3)) \cdot 0.29 = -0.1;$$
$$R_4 = 0.67, \quad x_4 = -3 + (7 - (-3)) \cdot 0.67 = 3.7;$$
$$R_5 = 0.19, \quad x_5 = -3 + (7 - (-3)) \cdot 0.19 = -1.1.$$

2.2. Нормальное распределение

Нормальное (Гауссовское) распределение является одним из наиболее распространенных непрерывных распределений. Описывается функцией плотности, представленной ниже и изображенной на рисунке 4.

Параметрами распределения являются значения m_x и σ_x - соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение распределения. Стандартным нормальным распределением называется распределение с математическим ожиданием, равным нулю, и стандартным отклонением – единица.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}$$

Изменение параметра нормального распределения m_x приводит к сдвигу графика по оси x. Изменение параметра нормального распределения σ_x приводит к масштабированию формы графика по оси x.

Алгоритм для имитации нормального распределения может быть получен на основе центральной предельной теоремы, согласно которой сумма независимых случайных величин с произвольными распределениями имеет асимптотически гауссовское распределение.

При этом сходимость к нормальному распределению проявляется быстрее, если суммируются величины с одинаковым распределением.

Рисунок 4 – Функции плотности нормального распределения

Соответственно в основе имитационного алгоритма лежит суммирование значений случайной квазиравномерной величины R. Соответствующая формула приведена ниже

$$x = m_x + \sigma_x \cdot \sqrt{\frac{12}{n}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} R_i - \frac{n}{2} \right)$$

В ряде практических приложений удовлетворительные результаты могут быть получены уже для значений n = 6, тогда соответствующая формула принимает вид

$$x_i = m_x + \sigma_x \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{6} R_i - 3 \right)$$

Пример использования алгоритма для имитации гауссовского распределения с параметрами $m_x = 5.6$ и $\sigma_x = 0.02$.

Пусть сгенерированы следующие значения квазиравномерной величины R: 0.43, 0.80, 0.29, 0.67, 0.19, 0.96, 0.02, 0.73, 0.50, 0.33 0.14, 0.71.

Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$$\sum_{i=1}^{6} R_i = 0.43 + 0.80 + 0.29 + 0.67 + 0.19 + 0.96 = 3.34$$

$$x_1 = 5.6 + 0.02 \cdot \sqrt{\frac{12}{6}} \cdot \left(3.34 - \frac{6}{2} \right) = 5.6096$$

$$\sum_{i=7}^{12} R_i = 0.02 + 0.73 + 0.50 + 0.33 + 0.14 + 0.71 = 2.43$$

$$x_1 = 5.6 + 0.02 \cdot \sqrt{\frac{12}{6}} \cdot \left(2.43 - \frac{6}{2} \right) = 5.5839 \ .$$

2.3. Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное распределение непрерывной случайной величины X описывается функциями плотности и распределения, представленными ниже и изображенными на рисунках 5, 6

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & при\, x \geq 0, \\ 0 & при\, x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \ .$$

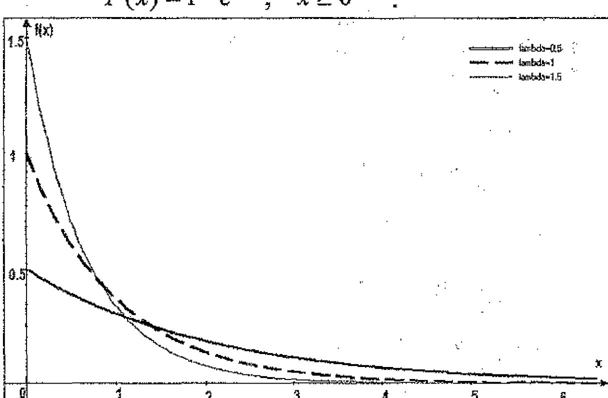

Рисунок 5 – Функция плотности экспоненциального распределения

Параметром распределения является значение λ – интенсивность (или обратный коэффициент масштаба), λ > 0. Соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины X определяется соотношениями:

$$m_x = \frac{1}{\lambda}, \; D_x = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Используем метод обратных функций и аналитическое описание функции распределения экспоненциального закона $f(x) \to F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, (x \geq 0)$. Соответственно получим уравнение $1 - e^{-\lambda x} = R_i$.

Решив уравнение, получим аналитическое выражение для имитации значений равномерно распределенных случайных величин

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - R_i) \text{ или } x_i = -\frac{1}{\lambda} ln\, R_i.$$

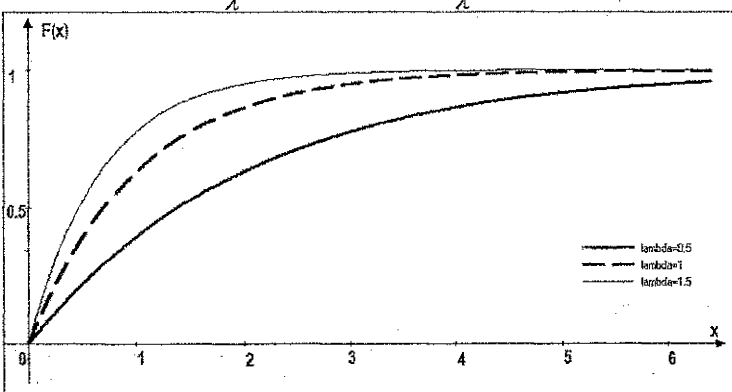

Рисунок 6 – Функция распределения экспоненциального распределения

<u>Пример использования алгоритма</u> для имитации экспоненциального распределения с параметром λ = 0,8.

Пусть сгенерированы значения квазиравномерной величины R: 0.43, 0.80, 0.29, 0.67, 0.19.

Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$$R_1 = 0.43, \quad x_1 = -\frac{1}{0.8} \cdot ln(0.43) = 1.055;$$

$$R_2 = 0.80, \quad x_2 = -\frac{1}{0.8} \cdot ln(0.80) = 0.279;$$

$$R_3 = 0.29, \quad x_3 = -\frac{1}{0.8} \cdot ln(0.29) = 1.547;$$

$$R_4 = 0.67, \quad x_4 = -\frac{1}{0.8} \cdot ln(0.67) = 0.501;$$

$$R_5 = 0.19, \quad x_5 = -\frac{1}{0.8} \cdot ln(0.19) = 2.076.$$

2.4. Гамма-распределение

Гамма-распределение представляет собой двухпараметрическое семейство непрерывных распределений (положительных значений случайной величины). Описывается функцией плотности, представленной ниже и изображенной на рисунке 7,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\eta}}{(\eta - 1)!} x^{\eta - 1} e^{-\lambda x} & при\ x \geq 0 \\ 0 & при\ x < 0 \end{cases}$$

Гамма-распределение задается двумя параметрами: параметром формы η и λ, где оба параметра вещественные положительные числа ($\eta > 0$ и $\lambda > 0$).

Если η принимает только целочисленные значения, то гамма-распределение сводится к распределению Эрланга η-го порядка.

Соответственно при $\eta = 1$ гамма-распределение сводится к экспоненциальному распределению.

Указанные параметры определяют характеристики случайной величины. Соответственно математическое ожидание и дисперсия определяются как

$$m_x = \frac{\eta}{\lambda}, \quad D_x = \frac{\eta}{\lambda^2}.$$

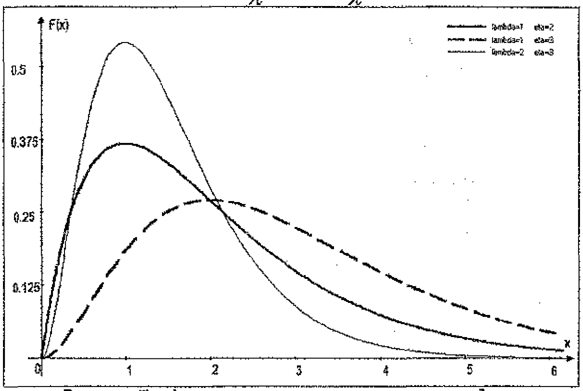

Рисунок 7 – Функция плотности гамма-распределения

Вид функции распределения для некоторых значений параметра η представлен ниже:

$\eta = 1$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$\eta = 2$

$$F(x) = 1 + \frac{1}{(2-1)!} e^{-\lambda x} \cdot \left(-\frac{(2-1)!}{0!} - \lambda x \right)$$

$\eta = 3$

$$F(x) = 1 + \frac{1}{(3-1)!} e^{-\lambda x} \cdot \left(-\frac{(3-1)!}{0!} - \lambda x \cdot \left(\frac{(3-1)!}{1!} + \lambda x \right) \right)$$

$\eta = 4$

$$F(x) = 1 + \frac{1}{(4-1)!} e^{-\lambda x} \cdot \left(-\frac{(4-1)!}{0!} - \lambda x \cdot \left(\frac{(4-1)!}{1!} + \lambda x \cdot \left(\frac{(4-1)!}{2!} + \lambda x \right) \right) \right)$$

Алгоритм имитации основан на следующем свойстве распределения. Сумма независимых экспоненциально распределенных случайных величин $X = \sum_{i=1}^{\eta} X_i$ имеет асимптотически гамма-распределение. Соответственно имитационный алгоритм базируется на формуле

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{\eta} \ln R_i \ .$$

Пример использования алгоритма для имитации гамма-распределения с параметрами η = 3 и λ = 0,8.

Пусть сгенерированы значения квазиравномерной величины R: 0.43, 0.80, 0.29, 0.67, 0.19, 0.96, 0.02, 0.73, 0.50, 0.33 0.14, 0.71.

Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений распределения:

$$\sum_{i=1}^{3} R_i = 0.43 + 0.80 + 0.29 = 1.52, \qquad x_1 = -\frac{1}{0.8}\cdot ln(1.52) = -0.523;$$

$$\sum_{i=4}^{6} R_i = 0.67 + 0.19 + 0.96 = 1.82, \qquad x_2 = -\frac{1}{0.8}\cdot ln(1.82) = -0.749;$$

$$\sum_{i=7}^{9} R_i = 0.02 + 0.73 + 0.50 = 1.25, \qquad x_3 = -\frac{1}{0.8}\cdot ln(1.25) = -0.279;$$

$$\sum_{i=10}^{12} R_i = 0.33 + 0.14 + 0.71 = 1.18, \qquad x_4 = -\frac{1}{0.8}\cdot ln(1.18) = -0.207\,.$$

2.5. Треугольное распределение

Произвольное треугольное распределение имеет функцию плотности соответствующего "треугольного" вида и задается следующими параметрами: произвольными значениями a и b (a < b) , которые задают интервал распределения и параметром c – модой распределения.

В частном случае используется левостороннее, правостороннее, симметричное треугольное распределение случайной величины.

Математическое ожидание треугольного распределения составляет (a + b + c) / 3, а дисперсия ($a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$) / 18.

Распределение Симпсона. Распределение Симпсона или треугольное распределение описывается функцией плотности распределения, представленной ниже и изображенной на рисунке 8,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Параметрами распределения являются произвольные значения a и b (a < b) , которые определяют интервал распределения и положение моды как a + b.

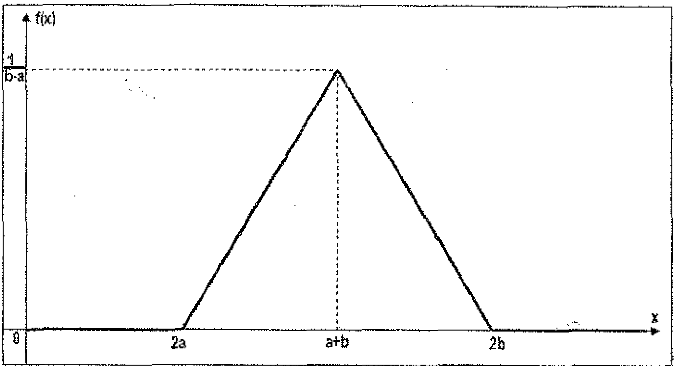

Рисунок 8 – Функция плотности распределения Симпсона

Математическое ожидание и дисперсия могут быть рассчитаны по вышеприведенным формулам. Например, значение математического ожидания здесь составляет (a + b).

Алгоритм имитации базируется на следующем свойстве распределения.

Сумма $x = y + z$, где y и z независимые случайные величины, распределенные равномерно на интервале $\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$, имеет распределение Симпсона. То есть распределение Симпсона можно рассматривать как композицию двух одинаковых законов равномерного распределения.

Соответственно алгоритм имитации сводится к выполнению следующих операций:

1. Генерируется пара значений квазиравномерной случайной величины.
2. Генерируется пара значений, распределенный равномерно на интервале $\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$.
3. Вычисляется искомое значение как сумма двух равномерно-распределенных значений.
4. Возврат на пункт 1.

Пример использования алгоритма для имитации распределения Симпсона с параметрами a = 6 и b = 7.

Пусть сгенерированы значения квазиравномерной величины R: 0.6445, 0.0898, 0.9883, 0.8711, 0.5820, 0.4023, 0.4258, 0.6836.

Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$R_1 = 0.6445$ $R_2 = 0.0898$ $y_1 = 3 + (3.5 - 3) \cdot 0.6445 = 3.322$ $z_1 = 3 + (3.5 - 3) \cdot 0.0898 = 3.045$ $x_1 = 6.367$

$R_3 = 0.9883$ $R_4 = 0.8711$ $y_2 = 3 + (3.5 - 3) \cdot 0.9883 = 3.494$ $z_2 = 3 + (3.5 - 3) \cdot 0.8711 = 3.436$ $x_2 = 6.929$

$R_5 = 0.5820$ $R_6 = 0.4023$ $y_3 = 3 + (3.5 - 3) \cdot 0.5820 = 3.291$ $z_3 = 3 + (3.5 - 3) \cdot 0.4023 = 3.201$ $x_3 = 6.492$

$R_7 = 0.4258$ $R_8 = 0.6836$ $y_4 = 3 + (3.5 - 3) \cdot 0.4258 = 3.213$ $z_4 = 3 + (3.5 - 3) \cdot 0.6836 = 3.342$ $x_4 = 6.555$

"Левостороннее" треугольное распределение. В частном случае (когда мода совпадает с одной из границ интервала) треугольное распределение может представлять собой линейно нарастающее (левостороннее распределение) либо убывающее (правостороннее распределение) распределение случайной величины X и описывается функциями плотности, представленными ниже и изображенными на рисунке 9 (для левостороннего распределения),

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)^2} & при\, x\in[a,b],\\ 0 & при\, x\notin[a,b].\end{cases}$$

и

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(b-x)}{(b-a)^2} & при\, x\in[a,b],\\ 0 & при\, x\notin[a,b].\end{cases}$$

Параметрами распределения являются произвольные значения a и b (a < b) , которые задают интервал распределения.

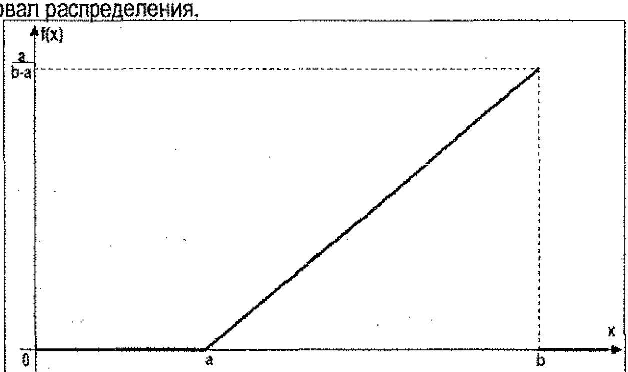

Рисунок 9 – Функция плотности треугольного распределения

Математическое ожидание и дисперсия могут быть рассчитаны по вышеприведенным формулам. Соответственно здесь их значения определяются выражениями

$$M[X]=\frac{a+2b}{3} \text{ и } D[X]=\frac{(b-a)^2}{18}\ ;$$

Алгоритм имитации может быть построен на методе исключения И. Неймана. Тогда для имитации треугольного распределения следует:

1. Генерировать пару квазиравномерных случайных чисел R_1 и R_2.
2. Проверить условие $R_2 < R_1$. Если условие выполняется, то искомое значение находится по формуле $x=a+(b-a)R_1$. В противном случае пара R_1 , R_2 отбрасывается.
3. Повторяется шаг 1.

Для имитации треугольного распределения с функцией плотности, заданной второй формулой, следует:

1. Генерировать пару квазиравномерных случайных чисел R_1 и R_2.
2. Проверить условие $R_1 < R_2$. Если условие выполняется, то искомое значение находится по формуле $x=a+(b-a)R_1$. В противном случае пара R_1 , R_2 отбрасывается.
3. Повторяется шаг 1.

Альтернативный алгоритм имитации основан на использовании формул:

$$x=a+(b-a)\cdot max(R_1,R_2),$$
$$x=a+(b-a)\cdot min(R_1,R_2).$$

Пример использования алгоритма для имитации "левостороннего" треугольного распределения с параметрами a = -3 и b = 7.

Пусть сгенерированы значения квазиравномерной величины R: 0.43, 0.80, 0.29, 0.67, 0.19, 0.96, 0.02, 0.73, 0.50, 0.33 0.14, 0.71.

Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации начальных значений:

$$R_1 = 0.43,\ \ R_2 = 0.80,\ \ \max(R_1,R_2) = 0.80,\ \ x_1 = -3 + (7-(-3))\cdot 0.08 = 5.0$$
$$R_3 = 0.29,\ \ R_4 = 0.67,\ \ \max(R_3,R_4) = 0.67,\ \ x_1 = -3 + (7-(-3))\cdot 0.67 = 3.7$$
$$R_5 = 0.19,\ \ R_6 = 0.96,\ \ \max(R_5,R_6) = 0.96,\ \ x_1 = -3 + (7-(-3))\cdot 0.96 = 6.6$$
$$R_7 = 0.02,\ \ R_8 = 0.73,\ \ \max(R_7,R_8) = 0.73,\ \ x_1 = -3 + (7-(-3))\cdot 0.73 = 4.3$$
$$R_9 = 0.50,\ \ R_{10} = 0.33,\ \ \max(R_9,R_{10}) = 0.50,\ \ x_1 = -3 + (7-(-3))\cdot 0.50 = 2.0$$
$$R_{10} = 0.14,\ \ R_{11} = 0.71,\ \ \max(R_{10},R_{11}) = 0.71,\ \ x_1 = -3 + (7-(-3))\cdot 0.71 = 4.1.$$

2.6. Распределение Эрланга k-го порядка

Распределением Эрланга k-го порядка называется распределение, описывающее непрерывную случайную величину X, принимающую положительные значения в интервале (0; + ∞) и представляющую собой сумму k независимых случайных величин, распределенных по одному и тому же экспоненциальному закону с параметром λ.

При k = 1 распределение Эрланга вырождается в экспоненциальное, а при k -> ∞ – приближается к нормальному распределению.

Распределение Эрланга представляет собой частный случай гамма-распределения при целочисленном значении параметра формы k (см. § 2.4). Функция плотности распределения представлена ниже

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}$$

Здесь параметры: k ≥ 1 – целое число, λ > 0 - интенсивность (или обратный коэффициент масштаба). Математическое ожидание $M[X] = \frac{k}{\lambda}$ и дисперсия $D[X] = \frac{k}{\lambda^2}$.

Алгоритм имитации основан на использовании формулы

$$x = -\frac{1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n} R_i$$

Пример использования алгоритма для имитации распределения Эрланга с параметрами $к = 3$ и $\lambda = 1{,}3$.

Пусть сгенерированы значения квазиравномерной случайной величины R на интервале: 0.43, 0.80, 0.29, 0.67, 0.19, 0.96, 0.02, 0.73, 0.50, 0.33 0.14, 0.71.

Ниже для выбранных в примере исходных установок представлены результаты имитации первых значений последовательности:

$$\prod_{i=1}^{3} R_i = 0.43\cdot 0.80\cdot 0.29 = 0.099 \qquad x_1 = -\frac{1}{1.3}\ln(0.099) = 1.78$$
$$\prod_{i=1}^{3} R_i = 0.67\cdot 0.19\cdot 0.96 = 0.12 \qquad x_2 = -\frac{1}{1.3}\ln(0.12) = 1.62$$
$$\prod_{i=1}^{3} R_i = 0.02\cdot 0.73\cdot 0.50 = 0.0073 \qquad x_3 = -\frac{1}{1.3}\ln(0.0073) = 3.78$$
$$\prod_{i=1}^{3} R_i = 0.33\cdot 0.14\cdot 0.71 = 0.032 \qquad x_4 = -\frac{1}{1.3}\ln(0.032) = 2.63$$

2.7. Гиперэкспоненциальное распределение

Гиперэкспоненциальное распределение непрерывной случайной величины, принимающей неотрицательные значения, представляет собой аддитивную композицию разных экспоненциальных распределений. Характерной особенностью распределения является то, что коэффициент вариации принимает значения, большие единицы.

Описывается функцией плотности, представленной ниже,

$$f(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\lambda_k e^{-\lambda_k x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Соответственно гиперэкспоненциальное распределение задается параметрами:

$$(n;\alpha_1,\alpha_2,...,a_n;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n),\ \ \alpha_k\lambda_k\geq 0,\ \sum_{k=1}\alpha_k=1$$

Здесь n - количество "смешиваемых" экспоненциально распределённых случайных величин с отличающимися параметрами $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, а вектор $(\alpha_1,\alpha_2,...,a_n)$ задает вес каждой случайной величины в виде вероятности использования ее значения.

Математическое ожидание и дисперсия распределения определяются соответственно выражениями

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\ \text{ и }\ D[X]=2\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\alpha_i^2}-(M[X])^2.$$

Алгоритм имитации случайных величин с гиперэкспоненциальным распределением. Пусть имеется n генераторов экспоненциально распределённых случайных величин с отличающимися параметрами $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, и пусть вероятность взятия числа с i-го генератора задается распределением вероятностей $(\alpha_1,\alpha_2,...,a_n)$.

Тогда в результате одного опыта с вероятностью α_i вырабатывается только одна случайная величина, а именно - полученная i-м генератором. Совокупность таких случайных величин, полученных в результате проведения множества опытов, и будет подчиняться гиперэкспоненциальному закону:

Соответственно:

- по равномерному закону "разыгрывается" номер генератора (см. § 2.1);
- генерируется экспоненциально-распределенное значение с использованием параметра выбранного генератора (см. § 2.3);
- полученное число является искомым, а процесс повторяется сначала.

3. ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты имитационного моделирования, как правило, представляют собой наборы случайных чисел - реализаций случайных процессов, описывающих качество функционирования моделируемого объекта.

К типовому набору обычно оцениваемых характеристик относят статистические оценки точечных характеристик, моментов случайных величин.

В качестве статистической оценки измеряемой величины используют результаты вычислительных процедур, формул, обладающих свойствами несмещённости, состоятельности и эффективности.

Несмещённость означает, что оценка не содержит методическую ошибку. Состоятельность означает, что точность оценки растет с увеличением числа опытов, а эффективность, что оценка обладает лучшей "сходимостью" - минимальным разбросом значений по сравнению с другими оценками той же величины.

Оценка математического ожидания. Математическое ожидание относится к числу наиболее важных и часто используемых точечных характеристик случайных величин. Если в результате наблюдений, проведения экспериментов, в ходе имитационного моделирования получена совокупность N численных значений случайной величины X - $x_1, x_2, \ldots, x_N$, то в качестве оценки математического ожидания используется среднее арифметическое наблюдаемых значений (выборочное среднее)

$$m^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Эта оценка является несмещенной, так как ее математическое ожидание в точности совпадает с реальным значением m

$$M[m^*] = M\left[\left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N} M[X_i] = \left(\frac{1}{N}\right) N\, M[X] = M[X] = m .$$

Оценка дисперсии. Другой важной точечной характеристикой случайных величин является дисперсия, позволяющая оценивать степень рассеивания возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания (средневзвешенного значения). В качестве оценки дисперсии принимается значение, определяемое формулой

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - m^*)^2}{N-1}$$

Рекуррентное вычисление оценок. В ряде случаев необходимо вычислять текущие значения оценок, например, прямо в ходе проведения моделирования, и уточнять их по мере появления новых значений. Для "скользящей" оценки математического ожидания и дисперсии используют следующие рекуррентные формулы

$$m_N^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{N-1}{N} m_{N-1}^* + \frac{1}{N} x_N, \qquad D_N^* = \frac{N-1}{N} D_{N-1}^* + \frac{1}{N}(x_n - m_N^*)^2 .$$

Здесь значение m_N^* представляет собой оценку математического ожидания, полученную по выборке из N первых значений случайной величины.

Доверительные интервалы. При работе со статистическими оценками необходимо располагать данными о их надежности, точности. Такие данные в виду случайного поведения самих оценок могут иметь только предсказательный, вероятностный характер. В математической статистике в их качестве применяют доверительные интервалы $I = (a^* - \varepsilon, a^* + \varepsilon)$ и соответствующие доверительные вероятности β.

Здесь a* - статистическая оценка искомой характеристики a, величина ε - погрешность вычисления характеристики, а вероятность β характеризует степень доверия к оценке и ее погрешности. Соответственно указанные величины связаны соотношением

$$P(|a^* - a| < \varepsilon) = \beta$$

Указанное означает, что реальное значение a оцениваемой характеристики окажется в пределах доверительного интервала $I = (a^* - \varepsilon, a^* + \varepsilon)$ с вероятностью β. Здесь значение вероятности $\alpha = 1 - \beta$ называется уровнем значимости.

Для полученной в результате наблюдений оценки среднего m* доверительный интервал вычисляется как $I = (m^* - \varepsilon; m^* + \varepsilon)$, где значение погрешности в зависимости от требуемого уровня доверия - выбранного значения вероятности β рассчитывается как значение $\varepsilon = \sigma^*_{m^*} \cdot t$.

Аналогичным образом рассчитывается доверительный интервал $I = (D^* - \varepsilon; D^* + \varepsilon)$ для оценки дисперсии, где значение $\varepsilon = \sigma^*_{D^*} \cdot t$.

Параметр t для выбранной доверительной вероятности β рассчитывается по формуле $t = \sqrt{2} \cdot \Phi^{-1}(\beta)$ через функцию Лапласа Ф. Табличные значения параметра приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения параметра $t(\beta)$

β	t	β	t	β	t	β	t
0.8	1.282	0.86	1.475	0.92	1.750	0.98	2.325
0.81	1.310	0.87	1.513	0.93	1.810	0.99	2.576
0.82	1.340	0.88	1.539	0.94	1.880	0.998	3.000
0.83	1.371	0.89	1.592	0.95	1.960	0.999	3.290
0.84	1.404	0.90	1.643	0.96	2.053		
0.85	1.439	0.91	1.694	0.97	2.169		

Пример.

Пусть требуется обработать выборку из 30 значений случайной величины X: 10.5, 10.8, 11.2, 10.9, 10.6, 11.0, 10.8, 11.0, 11.6, 10.9, 10.5, 11.8, 10.2, 9.2, 10.2, 11.2, 10.3, 11.1, 11.8, 10.3, 10.7, 10.8, 11.2, 10.9, 10.1, 11.7, 10.8, 11.3, 11.0, 11.9.

Значения оценок математического ожидания, дисперсии, квадратического отклонения

$$m^* = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30} = 10.877, \quad D^* = \frac{\sum_{i=1}^{30} (x_i - 10.877)^2}{29} = 0.343, \quad \sigma^*_{m^*} = \sqrt{\frac{0.343}{30}} = 0.107.$$

Зададимся доверительной вероятностью β = 0,8 и по таблице определим значение параметра t как 1,282.

Вычислим доверительный интервал оценки математического ожидания. Значение $\varepsilon = \sigma^*_{m^*} \cdot t = 0.107 \cdot 1.282 = 0.137$. Тогда границы доверительного интервала составят $m^* - \varepsilon = 10.877 - 0.137 = 10.74$ и $m^* + \varepsilon = 10.877 + 0.137 = 11{,}014$. А сам доверительный интервал $I = (10.74;\ 11.014)$.

Рассчитаем доверительный интервал оценки дисперсии. Для этого вычислим оценку центрального момента четвертого порядка и среднеквадратическое отклонение D* как

$$\mu_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - m^*)^4}{N} = 0.4103 \text{ и } \sigma^*_{D^*} = \sqrt{\frac{1}{N}\mu_4^* - \frac{N-3}{N(N-1)}(D^*)^2} = 0.01.$$

Значение $\varepsilon = \sigma^*_{D^*} \cdot t = 0.0100 \cdot 1.282 = 0.0128$. Тогда границы доверительного интервала составят $D^* - \varepsilon = 0.343 - 0.0128 = 0.3302$ и $D^* + \varepsilon = 0.343 + 0.0128 = 0.3558$. А сам доверительный интервал $I = (0.3302;\ 0.3558)$.

В качестве приближенного значения оценки можно использовать $\sigma^*_{m^*} = \sqrt{\frac{D^*}{N}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Советов, Б.Я. Моделирование систем / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – Изд. 4-е. – М.: Высш. школа, 2005. – 343 с.

2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов. – Изд. 7-е, стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 479 с.

3. Колемаев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для экономических специальностей вузов / В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Библиотечные функции

Здесь описаны прототипы наиболее часто используемых функций, доступных в системе моделирования GPSS World.

Непрерывное бета-распределение. Прототип функции

real Y = **BETA** (Stream, Min, Max, Shape1, Shape2) .

Здесь аргументы функции:

- Stream – номер используемого встроенного датчика равномерно-распределенных чисел в диапазоне 0-1 (произвольное натуральное число от единицы);
- Min – левая граница распределения (вещественное число);
- Max – правая граница распределения (вещественное число).
- Shape1, Shape2 - только вещественное положительное.

Значение функции – одно значение указанного распределения (вещественное число).

Примечание:

- при Shape1 = Shape2 = 1 распределение превращается в равномерное.

Дискретное равномерное распределение. Прототип функции

Integer Y = **DUNIFORM**(Stream, Min, Max) .

Здесь аргументы функции:

- Stream – номер используемого встроенного датчика равномерно-распределенных чисел в диапазоне 0-1 (произвольное натуральное число от единицы);
- Min – левая граница распределения (вещественное число);
- Max – правая граница распределения (вещественное число);

Значение функции – одно значение указанного распределения (целое число).

Непрерывное экспоненциальное распределение. Прототип функции

real Y = **EXPONENTIAL**(Stream, Locate, Scale) .

Здесь аргументы функции:

- Stream – номер используемого встроенного датчика равномерно-распределенных чисел в диапазоне 0-1 (произвольное натуральное число от единицы);
- Min – левая граница распределения (вещественное число);
- Locate – сдвиг распределения (обычно ноль, вещественное число);
- Scale – параметр экспоненциального распределения 1 / λ (только вещественное положительное).

Значение функции – одно значение указанного распределения (вещественное число).

Непрерывное гамма-распределение. Прототип функции

real Y = **GAMMA**(Stream, Locate, Scale, Shape)

Здесь аргументы функции:

- Stream – номер используемого встроенного датчика равномерно-распределенных чисел в диапазоне 0-1 (произвольное натуральное число от единицы);

- Min – левая граница распределения (вещественное число);

- Locate – сдвиг распределения (обычно ноль, вещественное число);

- Scale – параметр экспоненциального распределения 1 / λ (только вещественное положительное);

- Shape - только вещественное положительное.

Значение функции – одно значение указанного распределения (вещественное число).

Примечание:

- при Shape = 1 распределение превращается в экспоненциальное;

- при Shape = m, где m положительное целое число, распределение превращается в распределение Эрланга (параметр m).

Непрерывное нормальное распределение. Прототип функции

real Y = **NORMAL**(Stream, Mean, StdDev) .

Здесь аргументы функции:

- Stream – номер используемого встроенного датчика равномерно-распределенных чисел в диапазоне 0-1 (произвольное натуральное число от единицы);

- Mean – среднее значение распределения (вещественное число);

- StdDev – стандартная девиация распределения (вещественное положительное число).

Значение функции – одно значение указанного распределения (вещественное число).

Непрерывное треугольное распределение. Прототип функции

real Y = **TRIANGULAR**(Stream, Min, Max, Mode) .

Здесь аргументы функции:

- Stream – номер используемого встроенного датчика равномерно-распределенных чисел в диапазоне 0-1 (произвольное натуральное число от единицы);

- Min – левая граница распределения (вещественное число меньшее Mode);

- Max – правая граница распределения (вещественное число большее Mode);

- Mode – мода, наиболее вероятное значение распределения (вещественное).

Значение функции – одно значение указанного распределения (вещественное число).

Непрерывное равномерное распределение. Прототип функции

Real = **UNIFORM**(Stream, Min, Max) .

Здесь аргументы функции:

- Stream – номер используемого встроенного датчика равномерно-распределенных чисел в диапазоне 0-1 (произвольное натуральное число от единицы);

- Min – левая граница распределения (вещественное число меньшее Max);

- Max – правая граница распределения (вещественное число большее Min).

Значение функции – одно значение указанного распределения (вещественное число).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Составители:
Муравьев Геннадий Леонидович
Савицкий Юрий Викторович
Мухов Сергей Владимирович

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

“ИМИТАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ОБЪЕКТОВ”

для студентов специальностей
1 – 40 02 01 и 1 – 40 03 01
дневной формы обучения

Ответственный за выпуск: Г.Л. Муравьев
Редактор Т.В. Строкач
Компьютерный набор: Г.Л. Муравьев
Компьютерная верстка: Е.А. Боровикова
Корректор: Е.В. Никитчик

Подписано в печать 7.02.2012 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Усл. п.л. 1.63. Уч. изд. л. 1.75. Тираж 50 экз. Заказ № 177. Отпечатано на ризографе учреждения образования “Брестский государственный технический университет”.
224017, Брест, ул. Московская, 267.