зать бесконечную дифференцируемость X_n в точках $t \in [0, h_n)$. Если $t \in (0, h_n)$, то $X_n(t) = X_n^0(t)$ и является бесконечно дифференцируемой.

Рассмотрим $t = h_n$. Найдем в этой точке левостороннюю и правостороннюю производную $X_n^i(t)$.

$$\left.\frac{d}{dt} X_n^i(t)\right|_{t=h_n+0} = \frac{d}{dt}\left.\left\{ X_n^{0i}(t) + \sum_{j=1}^{m} f_n^{ij}(t, X_n^0(t))\left[B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)\right] + g_n^i(t, X_n^0(t))h_n \right\}\right|_{t=+0}$$

$$\left.\frac{d}{dt} X_n^i(t,\omega)\right|_{t=h_n-0} = \left.\frac{d}{dt} X_n^{0i}(t,\omega)\right|_{t=h_n-0}.$$

Из условия теоремы вытекает, что левосторонняя и правосторонняя производные равны, поэтому $X_n(t)$ дифференцируема в точке $t = h_n$ и ее производная непрерывна в этой точке.

Существование производных высших порядков в этой точке доказывается аналогично. Теорема доказана.

Список цитированных источников

1. Colombeau, J.F. A multiplication of distributions // J. Math. Anal. And Appl. – 1983. – V. 94, №1. – P. 96–115.
2. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Доклады АН Беларуси. – 1994. – Т.38, №5. – С. 23–27.

УДК 534.26

ПРОНИКНОВЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПЛОСКИЙ ПРОНИЦАЕМЫЙ СЛОЙ

Киселева Н.Н.

УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», г. Гродно

Научный руководитель – Шушкевич Г.Ч., д. ф.-м. н., доцент

Пусть все пространство R^3 разделено «плоскостями Γ_1 $(z_1 = 0)$ и Γ_2 $(z_2 = 0)$ на три области D_1 $(z_1 > 0)$, D_2 $(z_1 < 0 \cup z_2 > 0)$, D_3 $(z_2 < 0)$. Расстояние между плоскостями равно h_2. В области D_1 находится идеально тонкая незамкнутая сферическая оболочка S_1, расположенная на сфере S, радиуса a с центром в точке O. Расстояние от точки O до плоскости Γ_1 равно h_1. Область, ограниченную сферой S, обозначим D_0. Три области заполнены материалом, в котором не распространяются сдвиговые волны. Плотность и волновое число в области D_j равны соответственно ρ_j, k_j, j = 1, 2, 3, $\rho_1 = \rho_3$, $k_1 = k_3$. В точке O расположен точечный сферический источник звукового поля [1].

Постановка задачи: требуется найти вторичное звуковое давление p_j, j = 1, 2, 3, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца $\Delta p_j + k_j p = 0$, граничному условию на поверхности сферической оболочки S_1 (акустически мягкая оболочка):

$$\left.(p_c + p_0)\right|_{S_1} = \left.p_1\right|_{S_1} = 0, \tag{1}$$

граничным условиям на проницаемой плоскости Γ_1:

$$p_1\big|_{\Gamma_1} = p_2\big|_{\Gamma_1}, \quad \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\Gamma_1}, \tag{2}$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности Γ_1,

граничным условиям на проницаемой плоскости Γ_2:

$$p_2\big|_{\Gamma_2} = p_3\big|_{\Gamma_2}, \quad \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial \bar{n}}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_3}{\partial \bar{n}}\bigg|_{\Gamma_2}, \tag{3}$$

где $\vec{n}$ - нормаль к поверхности Γ_2,

условию на бесконечности [1]:

$$\lim_{r_j\to\infty} r_j\left(\frac{\partial p_j}{\partial r_j} - ik_j p_j\right) = 0, \; j = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Потребуем выполнения также условий непрерывности давления на поверхности сферы S и скорости на $S \setminus S_1$:

$$\left(p_c + p_0\right)\big|_S = p_1\big|_S, \quad \frac{\partial\left(p_c + p_0\right)}{\partial \vec{n}}\bigg|_{S\setminus S_1} = \frac{\partial p_1}{\partial \vec{n}}\bigg|_{S\setminus S_1}, \tag{5}$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности $S \setminus S_1$.

Давление исходного звукового поля представим в виде ряда по сферическим волновым функциям [2].

$$p_c = P\frac{e^{ik_1 r}}{r} = ik_1 P h_0^{(1)}\left(k_1 r\right) = ik_1 P\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{0k} h_n^{(1)}\left(k_1 r\right) P_n\left(\cos\theta\right), \tag{6}$$

где $h_n^{(1)}\left(k_1 r\right)$ – функции Ханкеля, $P_n\left(\cos\theta\right)$ – полиномы Лежандра, δ_{0k} – символ Кронекера, P – const, i – мнимая единица.

Давление p_j рассеянного звукового поля в области D_j, $j = 0, 1, 2, 3$ представим в виде суперпозиции базисных решений уравнения Гельмгольца [2], принимая во внимание условие на бесконечности (4),

$$p_0\left(r, \theta\right) = P\sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{j_n\left(k_1 r\right)}{j_n\left(k_1 a\right)} P_n\left(\cos\theta\right) \text{ в } D_0, \tag{7}$$

$$p_1 = p_1^{(1)}\left(r, \theta\right) + p_1^{(2)}\left(\rho_1, z_1\right) \text{ в } D_1,$$

$$p_1^{(1)}\left(r, \theta\right) = P\sum_{n=0}^{\infty} y_n \frac{h_n^{(1)}\left(k_1 r\right)}{h_n^{(1)}\left(k_1 a\right)} P_n\left(\cos\theta\right), \tag{8}$$

$$p_1^{(2)}\left(\rho_1, z_1\right) = P\int_0^{\infty} a\left(\lambda\right) J_0\left(\lambda\rho_1\right) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z_1}\lambda\, d\lambda, \tag{9}$$

$$p_2 = P\int_0^{\infty} b\left(\lambda\right) J_0\left(\lambda\rho_1\right) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}\, z_1}\lambda\, d\lambda + P\int_0^{\infty}\gamma\left(\lambda\right) J_0\left(\lambda\rho_2\right) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}\, z_2}\lambda\, d\lambda \text{ в } D_2, \tag{10}$$

$$p_3\left(\rho_2, z_2\right) = P\int_0^{\infty} c\left(\lambda\right) J_0\left(\lambda\rho_1\right) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z_2}\lambda\, d\lambda \text{ в } D_3. \tag{11}$$

Метод решения задачи (1)-(6) основан на использовании теории сложения для волновых функций и парных уравнений. Выполняя граничные условия (1)-(3), и учитывая представления для потенциалов (7)-(11) получим бесконечную СЛАУ второго рода с вполне непрерывным оператором [3]. Для некоторых геометрических параметров задачи найдено значение давления в области D_3. Проведен вычислительный эксперимент.

Список цитированных источников

1. Иванов, Н.И. Инженерная акустика. Теория и практика борьбы с шумом / Н.И. Иванов. – М.: Университетская книга, Логос. – 2008. – 424 с.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / М. Абрамовица [и др.]; под ред. М. Абрамовица. – М.: Наука, 1979.
3. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Мн.: Наука и техника, 1968. – 584 с.

УДК 517.983+519.6

НЕЯВНЫЙ МЕТОД ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ 1 РОДА

Комарчук А.В.

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест

Научный руководитель – Савчук В.Ф., к. ф.-м. н., доцент

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение 1 рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный итерационный метод

$$(E+\alpha A^2)x_{n+1} = (E-\alpha A^2)x_n + 2\alpha Ay, x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т.е. известно y_δ, такое, что $\| y - y_\delta \| \le \delta$ тогда метод (2) примет вид

$$(E+\alpha A^2)x_{n+1,\delta} = (E-\alpha A^2)x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta, x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Изучена сходимость метода (2) при точной правой части y уравнения (1). Справедлива

Теорема 1 Итерационный метод (2) при условии $\alpha > 0$ сходится в исходной норме гильбертова пространства.

Теорема 2 При условии $\alpha > 0$ итерационный метод (3) сходится, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/2}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

Теорема 3 Если решение x уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии $\alpha > 0$ для метода (3) справедлива оценка погрешности

$$\| x - x_{n,\delta} \| \le s^{s/2}(2n\alpha e)^{-s/2}\| z \| + 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta, n \ge 1. \tag{4}$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть оценки (4) в точке, в которой производная от нее равна нулю: в результате получим априорный момент останова

$$n_{опт} = 2^{-2/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1}e^{-s/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)}\| z \|^{2/(s+1)}. \tag{5}$$