Метод решения задачи (1)-(6) основан на использовании теории сложения для волновых функций и парных уравнений. Выполняя граничные условия (1)-(3), и учитывая представления для потенциалов (7)-(11) получим бесконечную СЛАУ второго рода с вполне непрерывным оператором [3]. Для некоторых геометрических параметров задачи найдено значение давления в области $D_3$. Проведен вычислительный эксперимент.

**Список цитированных источников**

1. Иванов, Н.И. Инженерная акустика. Теория и практика борьбы с шумом / Н.И. Иванов. – М.: Университетская книга, Логос. – 2008. – 424 с.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / М. Абрамовица [и др.]; под ред. М. Абрамовица. – М.: Наука, 1979.
3. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Мн.: Наука и техника, 1968. – 584 с.

УДК 517.983+519.6

## НЕЯВНЫЙ МЕТОД ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ 1 РОДА

***Комарчук А.В.***
*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест*
*Научный руководитель – Савчук В.Ф., к. ф.-м. н., доцент*

В гильбертовом пространстве $H$ решается операторное уравнение 1 рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором $A$, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора $A$, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный итерационный метод

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + 2\alpha Ay,\ x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью $\delta$, т.е. известно $y_\delta$, такое, что $\| y - y_\delta \| \le \delta$ тогда метод (2) примет вид

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2)x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Изучена сходимость метода (2) при точной правой части *y* уравнения (1). Справедлива

<u>Теорема 1</u> Итерационный метод (2) при условии $\alpha > 0$ сходится в исходной норме гильбертова пространства.

<u>Теорема 2</u> При условии $\alpha > 0$ итерационный метод (3) сходится, если число итераций $n$ выбирать из условия $n^{1/2}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

<u>Теорема 3</u> Если решение $x$ уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии $\alpha > 0$ для метода (3) справедлива оценка погрешности

$$\| x - x_{n,\delta} \| \le s^{s/2}(2n\alpha e)^{-s/2} \| z \| + 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta, n \ge 1. \tag{4}$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть оценки (4) в точке, в которой производная от нее равна нулю: в результате получим априорный момент останова

$$n_{опт} = 2^{-2/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1}e^{-s/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)} \| z \|^{2/(s+1)}. \tag{5}$$

Подставив $n_{опт}$ в оценку (4), имеем

$$\| x - x_{n,\delta} \|_{опт} \le (1+s)\cdot 2^{s/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{-s/(2(s+1))} e^{-s/(2(s+1))}\delta^{s/(s+1)} \| z \|^{1/(s+1)} . \qquad (6)$$

Замечание 1 Оценка погрешности (6) имеет порядок $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, и он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями $x = A^s z, s > 0.$

Замечание 2 Оптимальная оценка (6) не зависит от $\alpha$, но от параметра $\alpha$ зависит $n_{опт}$, поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать $\alpha$, удовлетворяющим условию $\alpha > 0$, и так, чтобы $n_{опт} = 1$. Для этого достаточно выбрать

$$\alpha_{опт} = 2^{-2/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)} \cdot e^{-s/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)} \| z \|^{2/(s+1)} .$$

Сравнение метода (3) с широко известным явным методом итераций

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), x_{0,\delta} = 0 \qquad (7)$$

показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (7) предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод (3) обладает следующим важным достоинством. В явном методе (7) на шаг $\alpha$ накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \frac{5}{4\| A \|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\| A \|$). В связи с чем оптимальную оценку для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

Рассмотрим погрешность метода при счете с округлением. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, получаемое по формуле (3), а $z_n$ – значение с учетом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha A^2\right)z_n + 2\alpha A y_\delta\right] + \alpha\gamma_n, z_0 = 0. \qquad (8)$$

Здесь $\gamma_n$ – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (8) равенство (3). Имеем $\varepsilon_{n+1} = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(E - \alpha A^2\right)\varepsilon_n + \alpha\gamma_n, \varepsilon_0 = 0.$ Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(E + \alpha A^2\right)^{-(n-1-i)}\left(E - \alpha A^2\right)^{n-1-i}\alpha\gamma_i .$$

В силу $\alpha > 0$ и тому, что $0 \in SpA$ справедливо $\left\|\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(E - \alpha A^2\right)\right\| \le 1,$ поэтому $\left\|\varepsilon_n\right\| \le n\alpha\gamma,\ \gamma = \sup\left|\gamma_i\right|.$

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности метода (3) запишется в виде

$$\left\|x - z_n\right\| \le \left\|x - x_{n,\delta}\right\| + \left\|x_{n,\delta} - z_n\right\| \le s^{s/2}(2n\alpha e)^{-s/2}\left\|z\right\| + 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta + n\alpha\gamma, n \ge 1.$$