МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра информатики и прикладной математики

ЗАДАНИЯ и МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению

КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ №3 и №4

по дисциплине «**Информатика**»
для студентов инженерно-технической специальности
1 - 70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение
и охрана водных ресурсов»
заочной формы обучения

БРЕСТ 2012

УДК 004.9

Задания по дисциплине «*Информатика*» к контрольным работам № 3 и № 4 предназначены для студентов второго курса специальности «*Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов*» заочной формы обучения.

Методические рекомендации содержат сведения о требованиях к содержанию, структуре и оформлению контрольных работ, примеры решения типовых задач, приведенные для выполнения в среде EXCEL + VBA и системе компьютерной математики MATHCAD. Методические рекомендации имеют целью оказать помощь студентам в подготовке к контрольной работе по названной дисциплине.

Составители: Хомицкая Т.Г., ст. преподаватель
Кофанов В.А., ст. преподаватель

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Студент должен выполнить контрольную работу, строго придерживаясь указанных ниже требований. Работа, выполненная без их соблюдения, к защите не допускается и возвращается студенту на доработку.

1. Контрольная работа должна быть выполнена **строго по варианту**. Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, возвращается студенту без проверки и к защите не допускается.
2. Контрольная работа должна быть оформлена на отдельных листах формата А4.
3. Для выполнения заданий контрольной работы рекомендуется использовать версии ***Microsoft Excel 2003*** и ***MathCAD 13***.
4. Контрольная работа должна содержать:
   - **титульный лист**, на котором должно быть название дисциплины, Фамилия, Имя, Отчество студента, номер группы, шифр;
   - **бланк с данными по заданиям** (выдается во время установочной сессии) с личной подписью студента;
   - **полное условие** каждого задания;
   - **распечатка** на принтере **документов** MATHCAD, **рабочих листов** EXCEL с результатами вычислений (с выводом заголовков строк и столбцов, без сетки) и отчетов по результатам (для заданий, выполненных с помощью *Поиск решений*); **программ из редактора** VBA [1];
   - **описание** действий или **пояснения** к представленным программам, применяемым при выполнении заданий, **в письменном виде**.
5. **Формат** вывода всех числовых результатов должен быть в обычном виде и не менее чем с **8 (*восемью*) цифрами** после десятичного разделителя.
6. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена на проверку **за две недели** до начала сессии. Студент обязан учесть все замечания рецензента и выполнить **работу над ошибками**, которая прилагается к контрольной работе.
7. Документы EXCEL и MATHCAD должны быть оформлены в виде файлов на рабочем диске (R:) ЛВС БРГТУ **к началу сессии**.

При условии правильности выполнения контрольная работа **допускается к защите**. Студенты, допущенные к защите и успешно выполнившие лабораторные работы в сессию, допускаются к сдаче зачета.

Для консультаций по дисциплине «*Информатика*»:

bstu_zf@mail.ru

[1] В целях экономии бумаги при представлении печатного материала рекомендуется выполнять экранные копии требуемых результатов и оформлять их (выполнив необходимую обрезку) в текстовом редакторе WORD.

Контрольная работа №3

Задание №1:

В результате экспериментальных исследований при различных значениях x_i, $i=\overline{1,N}$ переменной ***X*** были получены значения y_i, $i=\overline{1,N}$ переменной ***Y***.

I. По экспериментальным данным $\{x_i, y_i\}$, $i=\overline{1,N}$ с помощью метода наименьших квадратов найти параметры зависимости $\varphi(x)$, используя
   a) решение экстремальной задачи (в Excel и MathCAD);
   b) решения СЛАУ (в Excel и MathCAD);
   c) встроенные функции (в Excel и MathCAD).

II. Провести анализ построенной зависимости с помощью коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \varphi(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}, \text{ где } \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i .$$

Задание №2:

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$p \cdot y''(x) + q \cdot y'(x) + r \cdot y(x) = F(x);\ y(a) = y0,\ \ y'(a) = y1.$$

I. Найти решение $y(x)$, $x \in [a,b]$ задачи Коши, используя
   1) аналитический способ (рекомендуется использовать MathCAD);
   2) метод Рунге-Кутты IV порядка точности:
      (а) вычислить «вручную» значения $y(a+h)$, $y'(a+h)$, где $h = \dfrac{b-a}{N}$ при разбиении N;
      (б) составить макрос (процедуру) в VBA и выполнить его в Excel с выводом результатов на рабочий лист при разбиении N;
   3) встроенные возможности системы MathCAD.

II. Построить графики функции $y(x)$, $x \in [a,b]$ для пунктов 1, 2(б) и 3.

Задание №3:

Груз **D** массой ***m***, получив в точке ***A*** начальное ускорение, начинает движение из состояния покоя в изогнутой трубе ***ABC***, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы либо оба наклонные, либо один горизонтальный, а другой наклонный.

На участке ***AB*** длиной S_p на груз кроме силы тяжести (g принять равной 9,8) действуют движущая сила ***F*** и сила сопротивления среды F_c.

В точке ***B*** груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок ***BC*** трубы, где на него кроме силы тяжести действует сила сопротивления среды. На участке торможения ***BC*** груз двигается до полной остановки за счет накопленной при разгоне кинетической энергии.

Требуется:

- определить скорость, ускорение и время на участке **AB**, используя метод Рунге-Кутты решения дифференциальных уравнений (при числе разбиений $N = 4 \cdot n$);
- установить время T_p прохождения грузом D участка **AB**;
- определить скорость, ускорение и время на участке **BC** в **n** точках с шагом **h = 0,1**;
- установить время T_T прохождения грузом D участка **BC** (с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$), используя анализ экспериментальных данных методом наименьших квадратов и встроенные возможности для решения уравнений в вычислительных системах;
- построить графики $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ в диапазоне от начала до окончания движения.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ №1:

Пусть требуется выполнить задание:

В результате экспериментальных исследований были получены следующие данные:

X	1,0	1,5	2,0	2,8	3,0
Y	0,5	1,7	1,5	2,1	2,3

I. По экспериментальным данным $\{x_i, y_i\}$, $i = \overline{1,5}$ найти параметры зависимости $\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot \ln(x)$ с помощью метода наименьших квадратов, используя
   a) решение экстремальной задачи (в EXCEL и MATHCAD);
   b) решения СЛАУ (в EXCEL и MATHCAD);
   c) встроенные функции (в EXCEL и MATHCAD).

II. Провести анализ построенных зависимостей с помощью коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \varphi(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}, \text{ где } \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i .$$

Пример выполнения задания:

I. С помощью метода наименьших квадратов вычислим параметры a_0, a_1 и a_2 зависимости $\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot \ln(x)$.

Экстремальная задача примет вид:

$$\Phi(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{N}(\varphi(x_i, a_0, a_1, a_2) - y_i)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}((a_0 + a_1 \cdot x_i^2 + a_2 \cdot \ln(x_i)) - y_i)^2 \to \min$$

Для того, чтобы получить решение данной задачи, необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi(a_0,a_1,a_2)}{\partial a_0}=0; \\ \dfrac{\partial\Phi(a_0,a_1,a_2)}{\partial a_1}=0; \\ \dfrac{\partial\Phi(a_0,a_1,a_2)}{\partial a_2}=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\left[(\varphi(x_i,a_0,a_1,a_2)-y_i)\left.\dfrac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_0}\right|_{x=x_i}\right]=0; \\ \sum_{i=1}^{N}\left[(\varphi(x_i,a_0,a_1,a_2)-y_i)\left.\dfrac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_1}\right|_{x=x_i}\right]=0; \\ \sum_{i=1}^{N}\left[(\varphi(x_i,a_0,a_1,a_2)-y_i)\left.\dfrac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_2}\right|_{x=x_i}\right]=0. \end{cases}$$

Определим составляющие системы уравнений:

$$\psi_1(x)=\frac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{a_0}=1;\ \psi_2(x)=\frac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{a_1}=x^2;$$

$$\psi_3(x)=\frac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{a_2}=\ln(x).$$

Параметры искомой зависимости находятся из системы:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}[((a_0+a_1\cdot x_i^2+a_2\cdot\ln(x_i))-y_i)\cdot 1]=0; \\ \sum_{i=1}^{N}[((a_0+a_1\cdot x_i^2+a_2\cdot\ln(x_i))-y_i)\cdot x_i^2]=0; \\ \sum_{i=1}^{N}[((a_0+a_1\cdot x_i^2+a_2\cdot\ln(x_i))-y_i)\cdot\ln(x_i)]=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}(a_0+a_1\cdot x_i^2+a_2\cdot\ln(x_i)-y_i)=0; \\ \sum_{i=1}^{N}(a_0\cdot x_i^2+a_1\cdot x_i^4+a_2\cdot x_i^2\cdot\ln(x_i)-y_i\cdot x_i^2)=0; \\ \sum_{i=1}^{N}(a_0\cdot\ln(x_i)+a_1\cdot x_i^2\cdot\ln(x_i)+a_2\cdot\ln^2(x_i)-y_i\cdot\ln(x_i))=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_0\cdot N & +a_1\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i^2 & +a_2\cdot\sum_{i=1}^{N}\ln(x_i) & =\sum_{i=1}^{N}y_i; \\ a_0\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i^2 & +a_1\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i^4 & +a_2\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i^2\cdot\ln(x_i) & =\sum_{i=1}^{N}x_i^2\cdot y_i; \\ a_0\cdot\sum_{i=1}^{N}\ln(x_i) & +a_1\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i^2\cdot\ln(x_i) & +a_2\cdot\sum_{i=1}^{N}\ln^2(x_i) & =\sum_{i=1}^{N}\ln(x_i)\cdot y_i. \end{cases}$$

Реализация в EXCEL.

1. Вносим экспериментальные данные на рабочий лист, в диапазон **A5:B9**.

2. Пусть искомые параметры зависимости $\varphi(x)$ будут определены в ячейках **F4** (свободный параметр a_0), **F5** (параметр a_1 при функции x^2) и **F6** (параметр a_2 при функции $\ln(x)$).

3. Введем формулу, определяющую зависимость $\varphi(x)$, в ячейку **C5**: **=$F$4 + $F$5 * A5^2 + $F$6 * LN(A5)**. Используя автозаполнение, тиражируем формулу на соответствующий диапазон: **C5** → **C6:C9**.

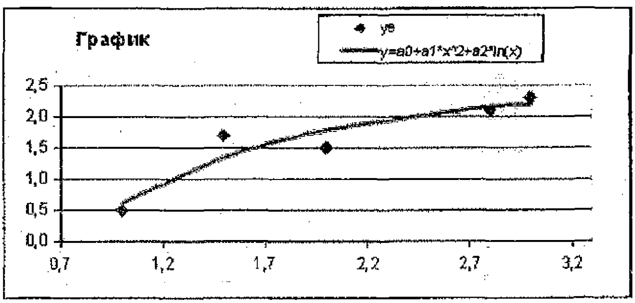
4. В соответствии с функционалом экстремальной задачи введем формулу в ячейку **F8**: **=СУММКВРАЗН(C5:C9 ; B5:B9)**.

5. Введем параметры диалогового окна надстройки *Поиск решения* (*Сервис → Поиск решения*):

установить целевую ячейку	**F8**
равной	**◉ минимальному значению**
изменяя ячейки	**F4:F6**

В результате выполнения будут получены значения искомых параметров, расчетные значения линейной зависимости и сумма квадратов отклонений экспериментальных и расчетных значений:

	A	B	C	D	E	F
1	**Подбор параметров расчетной функции:**					
2	***пункт 1***					
3	*Экспериментальные данные:*		*Расчетные значения:*		*Решение экстремальной задачи*	
4	xe	ye	y=a0+a1*x^2+a2*ln(x)		a0=	0,699488873
5	1,0	0,5	0,619865958		a1=	-0,079622914
6	1,5	1,7	1,339683184		a2=	2,020755552
7	2,0	1,5	1,761678229			
8	2,8	2,1	2,155854379		S=	0,236084952
9	3,0	2,3	2,202909526			
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						



6. Построим точечный график функций по экспериментальным и расчетным значениям.

7. Сформируем СЛАУ для решения задачи:

- введем экспериментальные данные[1] в диапазон **B29:C33**;
- проведем предварительные расчеты

ячейка **D29**:	**=B29^2**	→	**D30:D33**
ячейка **E29**:	**=LN(B29)**	→	**E30:E33**

- зададим матрицу коэффициентов при неизвестных (A) в диапазон **B37:D39** и вектор свободных коэффициентов (B) в диапазон **F37:F39**, используя функции **СУММ()** и **СУММПРОИЗВ()**. Например,

  ячейка **C37**: **=СУММ(D29:D33)**

  ячейка **C38**: **=СУММПРОИЗВ(D29:D33 ; D29:D33)** и т.д.

8. Решим СЛАУ, используя, например, матричный способ:

[1] Экспериментальные данные можно скопировать из диапазона A5:B9

- вычислим обратную матрицу A^{-1}, т.е. введем формулу массивов в диапазон ячеек **B42:D44**: **=МОБР(B37:D39)**
- найдем вектор-решение в диапазон ячеек **F42:F44**: **=МУМНОЖ(B42:D44 ; F37:F39)**

В результате выполнения будут получены значения искомых параметров:

	A	B	C	D	E	F
1	**Подбор параметров расчетной функции:**					
26	***пункт 2***					
27		*Экспериментальные данные:*		*Расчетные значения:*		
28	**n**	**xe**	**ye**	**xe^2**	**ln(xe)**	
29	1	1,0	0,5	1,00	0,00	
30	2	1,5	1,7	2,25	0,41	
31	3	2,0	1,5	4,00	0,69	
32	4	2,8	2,1	7,84	1,03	
33	5	3,0	2,3	9,00	1,10	
34						
35	*Решение СЛАУ:*					
36		A=				B=
37		5	24,09	3,23		8,1
38		24,09	164,52810	21,64461		47,48900
39		3,23	21,64461	2,91192		6,41802
40						
41		A^(-1)=				Решение:
42		0,70364423	-0,02019786	-0,62961047	a0=	0,69948931
43		-0,02019786	0,27519993	-2,0232081	a1=	-0,07962446
44		-0,62961047	-2,0232081	16,0798401	a2=	2,02076900

9. *Определим параметры зависимости $\varphi(x)$ с помощью встроенной* функции **ЛИНЕЙН()**:

- введем экспериментальные данные в диапазон **A49:B53**;
- поскольку зависимость $\varphi(x)$ есть линейная комбинация функций $\{1, x^2, \ln(x)\}$ и параметров $\{a_0, a_1, a_2\}$, то проведем расчет необходимых данных

  ячейка **D49**: **=A49^2** → **D50:D53**

  ячейка **E49**: **=LN(A49)** → **E50:E53**
- проведем расчет с помощью статистической функции

  диапазон **G49:I53**: **=ЛИНЕЙН(B49:B53;D49:E53;;1)**

Замечание: Функция **ЛИНЕЙН()** является формулой массивов. При требовании вывода статистических данных (параметр *статистика* = **ИСТИНА**), результат есть диапазон 5 строк на $m+1$ столбец, где $m+1$ – количество параметров исследуемой зависимости.

В выводимой функцией **ЛИНЕЙН()** таблице результатов представлены следующие значения:

a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	...	a_1	a_0
$\sigma(a_m)$	$\sigma(a_{m-1})$	$\sigma(a_{m-2})$		$\sigma(a_1)$	$\sigma(a_0)$
R^2	$\sigma(y)$	#Н/Д		#Н/Д	#Н/Д
Fрасч	df	#Н/Д		#Н/Д	#Н/Д
SSper	SSрасч	#Н/Д		#Н/Д	#Н/Д

Здесь

$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m$	– параметры исследуемой зависимости;
$\sigma(a_0),\ \sigma(a_1),\ \ldots,\ \sigma(a_m)$	– стандартные отклонения параметров;
$\sigma(y)$	– стандартное отклонение y;
R^2	– коэффициент детерминации;
Fрасч	– F-статистика;
df	– число степеней свободы;
SSper	– регрессионная сумма квадратов;
SSрасч	– остаточная сумма квадратов.

В результате выполнения будут получены значения искомых параметров и данные для анализа:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Подбор параметров расчетной функции:**								
46	***пункт 3***								
47	*Экспериментальные данные:*			*Расчетные значения:*			*Встроенные функции*		
48	**xe**	**ye**		**xe^2**	**ln(xe)**		**a2**	**a1**	**a0**
49	1,0	0,5		1,00	0,00		2,0207691	-0,0796624	0,6994893
50	1,5	1,7		2,25	0,41		1,377717	0,1802367	0,2882012
51	2,0	1,5		4,00	0,69		0,8800381	0,3435731	#Н/Д
52	2,8	2,1		7,84	1,03		7,3359824	2	#Н/Д
53	3,0	2,3		9,00	1,10		1,731915	0,236085	#Н/Д

Реализация в MathCAD.

ORIGIN := 1

Исходные данные:

$$xe := \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \\ 2.8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad ye := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.7 \\ 1.5 \\ 2.1 \\ 2.3 \end{pmatrix}$$

индекс последнего элемента $\quad n := \text{length}(xe) \qquad n = 5$

Подбор параметров зависимости ϕ(x)

пункт 1

$\phi(x, a0, a1, a2) := a0 + a1\cdot x^2 + a2\cdot \ln(x)$ - расчетная функция

$\Phi(a0, a1, a2) := \sum_{i=1}^{n} \left(\phi\left(xe_i, a0, a1, a2\right) - ye_i\right)^2$ - экстремальная функция

решение экстремальной задачи

$a0 := 0 \qquad a1 := 0 \qquad a2 := 0$ - начальные значения

$\begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} := \text{Minimize}(\Phi, a0, a1, a2)$ - решение задачи

$a0 = 0.699489 \qquad a1 = -0.079624 \qquad a2 = 2.020769$ - вывод результатов

$\Phi(a0, a1, a2) = 0.236085$

пункт 2

определение параметров СЛАУ
(матрицы при неизвестных и вектора свободных членов)

$$A := \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} (xe_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} \ln(xe_i) \\ \sum_{i=1}^{n} (xe_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} (xe_i)^4 & \sum_{i=1}^{n} \left[(xe_i)^2 \cdot \ln(xe_i)\right] \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(xe_i) & \sum_{i=1}^{n} \left[(xe_i)^2 \cdot \ln(xe_i)\right] & \sum_{i=1}^{n} \ln(xe_i)^2 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} ye_i \\ \sum_{i=1}^{n} \left[ye_i \cdot (xe_i)^2\right] \\ \sum_{i=1}^{n} (ye_i \cdot \ln(xe_i)) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 24.09 & 3.226844 \\ 24.09 & 164.5281 & 21.644612 \\ 3.226844 & 21.644612 & 2.91192 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8.1 \\ 47.489 \\ 6.41802 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} := \mathrm{lsolve}(A, B)$ - решение СЛАУ

$a0 = 0.699489 \quad a1 = -0.079624 \quad a2 = 2.020769$ - вывод результатов

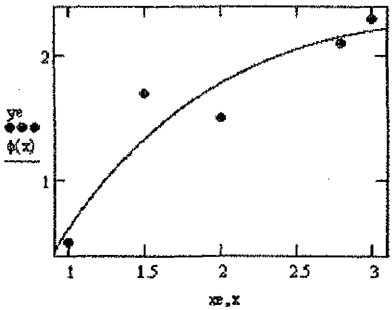
пункт 3

$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \\ \ln(x) \end{pmatrix}$ - определения набора функций

$\begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} := \mathrm{linfit}(xe, ye, F) \quad \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.699489 \\ -0.079624 \\ 2.020769 \end{pmatrix}$ - определение параметров расчетной функции

__Графическое представление результатов__

Расчетная функция: $\phi(x) := a0 + a1 \cdot x^2 + a2 \cdot \ln(x)$



__Коэффициенты детерминации для исследуемых зависимостей:__

$$R2 := 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (ye_i - \phi(xe_i))^2}{\sum_{i=1}^{n} (ye_i - \mathrm{mean}(ye))^2}$$

$R2 = 0.880038$

II. Проведем анализ построенной зависимости с помощью коэффициента детерминации.

Данный показатель является статистической мерой согласия, с помощью которой можно определить, насколько исследуемая зависимость соответствует реальным данными.

Поскольку коэффициент детерминации $0{,}7 \le R^2 < 0{,}9$ для исследуемой зависимости, то исследуемая модель имеет высокую зависимость, а следовательно, может быть использована для расчета.

Задание №2:

Пусть требуется выполнить задание:

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$y''(x) - 2\cdot y'(x) + 3\cdot y(x) = 1 + x;\quad y(-2) = -1,\ y'(-2) = 0.$$

I. Найти решение $y(x)$, $x \in [-2{,}0]$ задачи Коши, используя
   1) аналитический способ (рекомендуется использовать MathCAD);
   2) метод Рунге-Кутты IV порядка точности:
      (а) вычислить «вручную» значения $y(-2+h)$, $y'(-2+h)$, где $h = \dfrac{0-(-2)}{N} = \dfrac{2}{N}$ при разбиении $N = 10$;
      (б) составить макрос (процедуру) в VBA и выполнить его в Excel с выводом результатов на рабочий лист при разбиении $N = 10$;
   3) встроенные возможности системы MathCAD.

II. Построить графики функции $y(x)$, $x \in [-2{,}0]$ для всех пунктов 1, 3.

Пример выполнения задания:

1. Найдем решение $y(x)$ аналитическим способом (для удобства расчетов используем математическую систему MathCAD).

Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\cdot\frac{d}{dx}y(x) + 3\cdot y(x) = 1 + x$$

$$y(-2) = -1 \qquad y'(-2) = 0$$

1) Общее решение соответсвующего однородного дифференциального уравнения

$$kf := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - вектор коэффициентов характеристического уравнения λ^2-2 λ+3=0

$$\begin{pmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \end{pmatrix} := \mathrm{polyroots}(kf)$$ - решение характеристического уравнения

$$\begin{pmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1.41421i \\ 1 - 1.41421i \end{pmatrix}$$ - корни характеристического уравнения

$\alpha := \mathrm{Re}(\lambda 1)$ $\qquad \alpha = 1$ $\qquad$ - действительная часть комплексного числа

$\beta := \mathrm{Im}(\lambda 1)$ $\qquad \beta = 1.41421$ $\qquad$ - мнимая часть комплексного числа

Поскольку решение характеристического уравнения есть комплексные корни, то общее решение однородного дифференциального уравнения принимает вид

$$yo(x, c1, c2) := e^{\alpha \cdot x} \cdot (c1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + c2 \cdot \sin(\beta \cdot x))$$

2) Частное решение дифференциального уравнение

Поскольку правая часть дифференциального уравнения имеет вид 1+x, то частное решение принимает вид

$$yc(x, k1, k2) := k1 + k2 \cdot x$$

Подставим частное решение в левую часть дифференциального уравнения

$$F(x, k1, k2) := \frac{d^2}{dx^2} yc(x, k1, k2) - 2 \cdot \frac{d}{dx} yc(x, k1, k2) + 3 \cdot yc(x, k1, k2)$$

в левой части после подстановки частного решения:

$$F(x, k1, k2) \rightarrow (-2) \cdot k2 + 3 \cdot k1 + 3 \cdot k2 \cdot x$$

сгруппируем коффициенты:

$$F(x, k1, k2) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{bmatrix} (-2) \cdot k2 + 3 \cdot k1 \\ 3 \cdot k2 \end{bmatrix}$$

Определим коэффициенты k1 и k2, приравняв коэффиценты в левой и правой частях дифференциального уравнения:

$k1 := 0 \qquad k2 := 0$

Given

$$(-2) \cdot k2 + 3 \cdot k1 = 1$$

$$3 \cdot k2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(k1, k2) \qquad k1 = 0.55556 \qquad k2 = 0.33333$$

3) Найдем решение y(x), удовлетворяющее начальным условиям

Решение дифференциального уравнения (сумма общего и частного решений)

$$y(x, c1, c2) := yo(x, c1, c2) + yc(x, k1, k2)$$

$$y1(x, c1, c2) := \frac{d}{dx} y(x, c1, c2)$$

Найдем коэффициенты c1 и c2, исходя из начальных условий $y(-2) = -1$, $y'(-2) = 0$

$c1 := 0 \qquad c2 := 0$

Given

$$y(-2, c1, c2) = -1$$

$$y1(-2, c1, c2) = 0$$

$\begin{pmatrix} c1 \\ c2 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(c1, c2)$ $\qquad c1 = 7.14284 \qquad c2 = -0.73809$

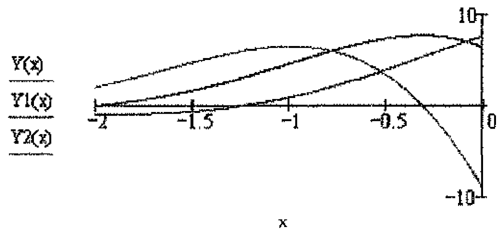
Формируем решение y(x) дифференциального уравнения и вычисляем значения в контрольных точках:

$Y(x) := y(x, c1, c2) \qquad Y1(x) := y1(x, c1, c2) \qquad Y2(x) := \frac{d^2}{dx^2} Y(x)$

$Y(-2) = -1 \qquad Y1(-2) = 1.43832 \times 10^{-14} \qquad Y2(-2) = 2$

$Y(0) = 7.69839 \qquad Y1(0) = 6.43236 \qquad Y2(0) = -9.23046$

График функций на отрезке [-2,0]



2. Найдем решение $y(x)$ методом Рунге-Кутты IV порядка точности.

Наиболее значимыми в настоящее время, характеризуемое бурным развитием вычислительной техники, являются численные методы решения дифференциальных уравнений. Семейство методов Рунге – Кутты – важные численные алгоритмы решения (систем) обыкновенных дифференциальных уравнений. Данные итеративные методы явного и неявного приближенного вычисления были разработаны около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М.В. Куттой. Наиболее часто используется и реализована в различных математических пакетах стандартная схема четвёртого порядка.

<u>Схема решения</u>:

Как правило, вычисления проводятся с *расчетным шагом* $h = \frac{b-a}{n}$, а *расчетными узлами* служат точки $x_i = x_0 + i \cdot h$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ промежутка $[a, b]$. Целью использования метода является построение таблицы приближенных значений y_i решения $y = y(x)$ в расчетных точках x_i:

x	$x_0 = a$	x_1	x_2	...	$x_n = b$
y	$y_0 = y(a)$	y_1	y_2	...	$y_n \approx y(b)$

Преобразуем дифференциальное уравнение второго порядка

$$p \cdot y''(x) + q \cdot y'(x) + r \cdot y(x) = F(x); \; y(a) = y0, \; y'(a) = y1$$

в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

- введем замену $z(x) = y'(x)$, тогда $z'(x) = y''(x)$;

- дифференциальное уравнение примет вид

$$p\cdot z'(x)+q\cdot z(x)+r\cdot y(x)=F(x);\ y(a)=y0,\ \ z(a)=y1$$

- сформируем систему

$$\begin{cases} y'(x)=z(x), \\ z'(x)=\dfrac{F(x)-q\cdot z(x)-r\cdot y(x)}{p}; \end{cases}$$

$$y(a)=y0,\ \ z(a)=y1.$$

Введем обозначение $D(x,y(x),z(x))=\dfrac{F(x)-q\cdot z(x)-r\cdot y(x)}{p})$.

На *начальном* ($i=0$) *шаге* полагаем:

$$x_0=a, y_0=y(a), z_0=z(a).$$

Тогда формулы метода Рунге-Кутты, применяемые на *одном* ($i=1,2,\ldots,n$) *шаге*, имеют вид:

$$k_1^{(i)}=h\cdot z_i,\ m_1^{(i)}=h\cdot D(x_i,y_i,z_i)$$

$$k_2^{(i)}=h\cdot\left(z_i+\frac{m_1^{(i)}}{2}\right),\ m_2^{(i)}=h\cdot D\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2},z_i+\frac{m_1^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_3^{(i)}=h\cdot\left(z_i+\frac{m_2^{(i)}}{2}\right),\ m_3^{(i)}=h\cdot D\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_2^{(i)}}{2},z_i+\frac{m_2^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_4^{(i)}=h\cdot\left(z_i+m_3^{(i)}\right),\ m_4^{(i)}=h\cdot D\left(x_i+h,y_i+k_3^{(i)},z_i+m_3^{(i)}\right)$$

$$\Delta y_i=\frac{1}{6}\cdot\left(k_1^{(i)}+2\cdot k_2^{(i)}+2\cdot k_3^{(i)}+k_4^{(i)}\right)\quad \Delta z_i=\frac{1}{6}\cdot\left(m_1^{(i)}+2\cdot m_2^{(i)}+2\cdot m_3^{(i)}+m_4^{(i)}\right)$$

$$x_{i+1}=x_i+h,\ y_{i+1}=y_i+\Delta y_i,\ z_{i+1}=z_i+\Delta z_i$$

В результате будет получена таблица приближенных значений y_i искомой функции $y(x)$, а также приближенные значения z_i функции $z(x)=y'(x)$.

Рассмотрим заданное дифференциальное уравнение второго порядка. Преобразуем его в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

- введем замену $z(x)=y'(x)$, тогда $z'(x)=y''(x)$;
- дифференциальное уравнение примет вид

$$z'(x)-2\cdot z(x)+3\cdot y(x)=1+x;\quad y(-2)=-1,\ \ z(-2)=0;$$

- сформируем систему

$$\begin{cases} y'(x)=z(x), \\ z'(x)=\dfrac{1+x+2\cdot z(x)-3\cdot y(x)}{1}; \end{cases}$$

$$y(-2)=-1,\ \ z(-2)=0.$$

Вспомогательная функция примет вид:

$$D(x,y(x),z(x))=1+x+2\cdot z(x)-3\cdot y(x).$$

(а) Используя формулы метода Рунге-Кутты IV порядка, вычислим значения функции $y(-2+h)$, $y'(-2+h)$ при $h=2/10=1/5$.

На *начальном шаге* полагаем: $x_0=-2$, $y_0=-1$, $z_0=0$.

Тогда на *следующем шаге* имеем:

$$k_1^{(0)}=\frac{1}{5}\cdot 0=0,$$

$$m_1^{(0)}=\frac{1}{5}\cdot D(-2,-1,0)=\frac{1}{5}\cdot(1-2+2\cdot 0-3\cdot(-1))=\frac{1}{5}\cdot 2=\frac{2}{5}=0.4,$$

$$k_2^{(0)}=\frac{1}{5}\cdot\left(0+\frac{2/5}{2}\right)=\frac{1}{25}=0.04,$$

$$m_2^{(0)}=\frac{1}{5}\cdot D\left(-2+\frac{1}{10},-1+\frac{0}{2},0+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}\cdot D\left(-\frac{19}{10},-1,\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{19}{10}+2\cdot\frac{1}{5}-3\cdot(-1)\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{1}{2}=0.5,$$

$$k_3^{(0)}=\frac{1}{5}\cdot\left(0+\frac{1/2}{2}\right)=\frac{1}{20}=0.05,$$

$$m_3^{(0)}=\frac{1}{5}\cdot D\left(-2+\frac{1}{10},-1+\frac{1/25}{2},0+\frac{1/2}{2}\right)=\frac{1}{5}\cdot D\left(-\frac{19}{10},-\frac{49}{50},\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{19}{10}+2\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\left(-\frac{49}{50}\right)\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{127}{50}=\frac{127}{250}=0.508,$$

$$k_4^{(0)}=\frac{1}{5}\cdot\left(0+\frac{127}{250}\right)=\frac{127}{1250}=0.1016,$$

$$m_4^{(0)}=\frac{1}{5}\cdot D\left(-2+\frac{1}{5},-1+\frac{1}{20},0+\frac{127}{250}\right)=\frac{1}{5}\cdot D\left(-\frac{9}{5},-\frac{19}{20},\frac{127}{250}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{9}{5}+2\cdot\frac{127}{250}-3\cdot\left(-\frac{19}{20}\right)\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1533}{500}=\frac{1533}{2500}=0.6132,$$

$$\Delta y_0=\frac{1}{6}\cdot\left(0+2\cdot\frac{1}{25}+2\cdot\frac{1}{20}+\frac{127}{1250}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{176}{625}=\frac{88}{1875}\approx 0.04693333,$$

$$\Delta z_0=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{127}{250}+\frac{1533}{2500}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{7573}{2500}=\frac{7573}{15000}\approx 0.50486667,$$

$$x_1=-2+\frac{1}{5}=-\frac{9}{5}=-1.8,$$

$$y\left(-\frac{9}{5}\right)=y_1=-1+\frac{88}{1875}=-\frac{1787}{1875}\approx -0.95306667,$$

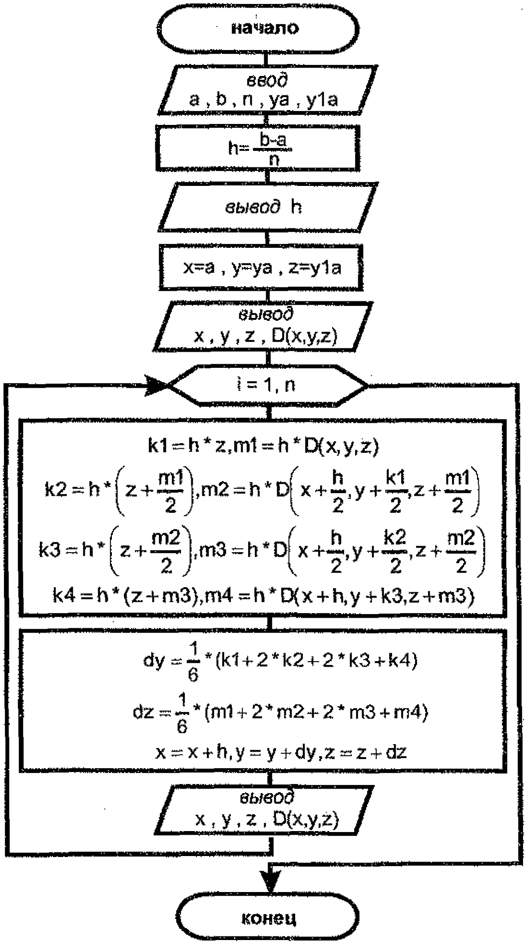
$$y'\left(-\frac{9}{5}\right)=z_1=0+\frac{7573}{15000}=\frac{7573}{15000}\approx 0.50486667.$$

(б) Для программной реализации метода Рунге-Кутты решения дифференциального уравнения второго порядка необходимо сформировать процедуру типа Sub с именем **Met_RK** по приведенной ниже блок-схеме. Кроме того, желательно использовать вспомогательную функцию, записанную в виде процедуры типа Function с именем **Fun_D**.

В частности для рассматриваемого примера вспомогательная функция примет вид:

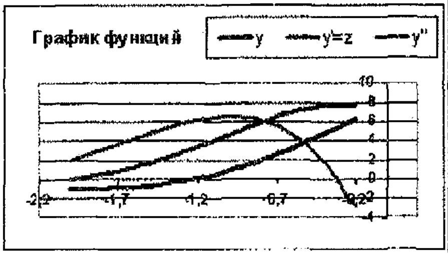
```
Function Fun_D(x, y, z)
    Fun_D = 1 + x + 2 * z - 3 * y
End Function
```

Блок-схема алгоритма реализации метода Рунге-Кутты:



Результат выполнения процедуры-подпрограммы **Met_RK**:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a=	-2	ya=	-1					
2	b=	0	y1a=	0					
3	n=	10							
4	h=	0,2							
5	**x**	**y**	**y'=z**	**y''**					
6	-2	-1	0	2					
7	-1,8	-0,95307	0,504867	3,068933					
8	-1,6	-0,78308	1,232986	4,215214					
9	-1,4	-0,44462	2,187777	5,309403					
10	-1,2	0,10548	3,341224	6,166009					
11	-1	0,900664	4,622506	6,543019					
12	-0,8	1,956037	5,907287	6,149463					
13	-0,6	3,251767	7,009574	4,663848					
14	-0,4	4,730331	7,678553	1,766112					
15	-0,2	6,273872	7,60336	-2,8149					
16	-2,8E-16	7,698564	6,428966	-9,23776					



3. Найдем решение $y(x)$, используя встроенные возможности MathCAD.

Замена: $z(x) = \frac{d}{dx}y(x)$

Система двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dx}y(x) = z(x) \qquad y(-2) = -1$$

$$\frac{d}{dx}z(x) = 1 + x + 2\cdot z(x) - 3\cdot y(x) \qquad z(-2) = 0$$

$u := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор начальных условий

$D(x,u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ 1 + x + 2\cdot u_1 - 3\cdot u_0 \end{pmatrix}$ - вектор, содержащий правые части системы дифференциальных уравнений

$ZY := \mathrm{rkfixed}(u, -2, 0, 10, D)$ - формирование решения с помощью функции

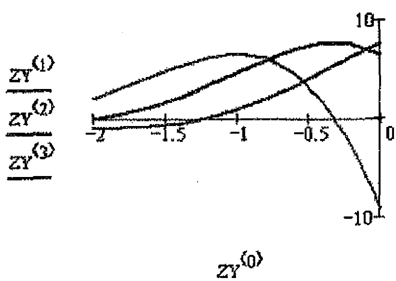
$i := 0 .. 10$

$ZY_{i,3} := 1 + ZY_{i,0} + 2\cdot ZY_{i,2} - 3\cdot ZY_{i,1}$ - вычисление значений функции y''(x)

Таблица результатов {x, y(x), y'(x), y''(x)} **График функций**

ZY =

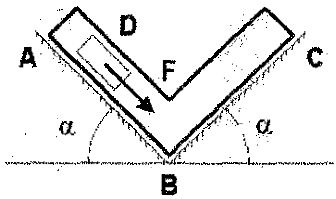
	0	1	2	3
0	-2	-1	0	2
1	-1.8	-0.95307	0.50487	3.06893
2	-1.6	-0.78308	1.23299	4.21521
3	-1.4	-0.44462	2.18778	5.3094
4	-1.2	0.10548	3.34122	6.16601
5	-1	0.90066	4.62251	6.54302
6	-0.8	1.95504	5.90729	6.14946
7	-0.6	3.25177	7.00957	4.66385
8	-0.4	4.73033	7.67855	1.76611
9	-0.2	6.27387	7.60336	-2.8149
10	0	7.69856	6.42897	-9.23776



ЗАДАНИЕ №3:

Пусть требуется выполнить задание:

Груз **D** массой $m = 2$ **кг**, получив в точке *A* начальное ускорение, начинает движение из состояния покоя в изогнутой трубе *ABC*, расположенной в вертикальной плоскости ($\alpha = 30°$):



На участке *AB* длиной $S_p = 0{,}4$ м на груз кроме силы тяжести действуют движущая сила

$$F(s) = 15 + 2 \cdot 0{,}8 \cdot s^2 \text{ Н}$$

и сила сопротивления среды

$$F_c = 13 \text{ Н}.$$

В точке *B* груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок *BC* трубы, где на него кроме силы тяжести действует сила сопротивления среды. На участке торможения *BC* груз двигается до полной остановки за счет накопленной при разгоне кинетической энергии.

Требуется:

- определить скорость, ускорение и время на участке *AB*, используя метод Рунге-Кутты решения дифференциальных уравнений (при числе разбиений $N = 4 \cdot 5 = 20$);
- установить время T_p прохождения грузом **D** участка *AB* (с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$);
- определить скорость, ускорение и время на участке *BC* в $n = 5$ точках с шагом $h = 0{,}1$;
- установить время T_t прохождения грузом **D** участка *BC* (с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$), используя анализ экспериментальных данных методом наименьших квадратов и встроенные возможности для решения уравнений в вычислительных системах;
- построить графики $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ в диапазоне от начала до окончания движения.

Пример выполнения задания:

Исходные данные задачи:

$m := 2$		-- масса груза
$Sp := 0.4$		-- длина участка AB
$\alpha := \frac{30}{180} \cdot \pi$	$\alpha = 0.52359878$	-- угол наклона
$Fd(s) := 15 + 2 \cdot 0.8 \cdot s^2$		-- движущая сила
$Fc := 13$		-- сила сопротивления
$n := 5$		-- количество разбиений

$N := 4 \cdot n \qquad N = 20$

$g := 9.8$

Уравнение движения
(второй закон Ньютона)

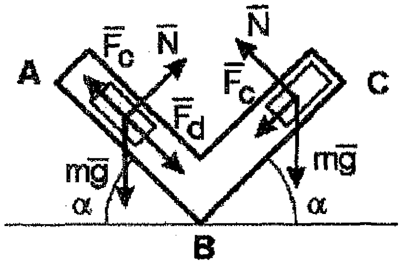
на участке AB

$$m \cdot a = F_d(s) - F_C + m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

на участке BC

$$m \cdot a = -F_C - m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

Распределение сил на участках:



Рассмотрим пример решения для нечетных вариантов:

1. Определить скорость, ускорение и время во всех точках участка *AB* и установить время T_p прохождения грузом D участка *AB* (с точностью ε = 0,00001).

Поскольку $v(t) = s'(t)$, $a(t) = v'(t) = s''(t)$, *то дифференциальное уравнение примет вид:*

$$s''(t) = \frac{Fd(s(t)) - Fc + m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{m}$$

$$s(0) = 0 \qquad v(0) = 0$$

Определить параметры функции rkfixed():

$$usl := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ — начальные условия

$$D(t, usl) := \begin{pmatrix} usl_1 \\ \dfrac{Fd(usl_0) - Fc + m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{m} \end{pmatrix}$$ — вектор-функция из правых частей системы дифференциальных уравнений

$Tp := 0.3679648$

ПОДОБРАТЬ такое значение времени разгона (прохождения участка *AB*) при котором путь станет равным Sp

$zAB := rkfixed(usl, 0, Tp, 20, D)$ — формирование решения

$i := 0..20$

$$zAB\_a_i := \frac{Fd(zAB_{i,1}) - Fc + m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{m}$$ — значения ускорения на участке *AB*

Результат вычислений:

$zAB := augment(zAB, zAB\_a)$ — формирование таблицы

$zAB := stack[(\text{"t"} \quad \text{"s"} \quad \text{"v"} \quad \text{"a"}), zAB]$

		0	1	2	3
zAB =	0	"t"	"s"	"v"	"a"
	1	0	0	0	5.9
	2	0.01839824	0.00099856	0.10854962	5.9000008
	3	0.03679648	0.00399424	0.21709933	5.90001276
	4	0.05519472	0.00898706	0.32564956	5.90006461
	5	0.07359296	0.01597701	0.43420147	5.90020421

Контроль значения Тр:

$|zAB_{21,1} - Sp| < 0.00001 = 1$

$sp := zAB_{21,1}$ $sp = 0.40000097$

$vp := zAB_{21,2}$ $vp = 2.18040021$

2. Определить скорость, ускорение и время во всех точках участка ***ВС*** и установить время T_t прохождения грузом **D** участка ***ВС*** (с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$).

Экспортировать данные таблицы **zAB** в Excel:

- в MathCAD выделить данные таблицы **zAB**;
- выбрать пункт *Export...* из контекстного меню;
- в диалоговом окне *File Options* указать формат файла (*File Format: Microsoft Excel*), его имя и месторасположение (*Browse...*).

Продолжить решение в сформированном файле[1]:

1) На отрезке $[T_p, T_p + n \cdot h]$, где $n = 5$ и $h = 0.1$, сформировать решение задачи

$$s''(t) = \frac{-F_c - m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{m}$$

с начальными условиями $s(T_p) = s_p$, $v(T_p) = v_p$,

используя процедуру **Met_RK** (из задания 2).

Для данной задачи вспомогательная функция **Fun_D** примет вид:

```
Function Fun_D(x, y, z)
    Pi = 4 * Atn(1): alfa = 30 / 180 * Pi
    Fc = 13
    m = 2
    g = 9.8
    Fun_D = (-Fc - m * g * Sin(alfa)) / m
End Function
```

Результат выполнения процедуры-подпрограммы **Met_RK**:

	A	B	C	D
1	a=	0,3679648	ya=	0,4
2	b=	0,8679648	y1a=	2,1804002
3	n=	5		
4	h=	0,1		
5	x	y	y'=z	y''
6	0,3679648	0,400001	2,1804002	-11,4
7	0,4679648	0,561041	1,0404002	-11,4
8	0,5679648	0,608081	-0,0996	-11,4
9	0,6679648	0,541121	-1,2396	-11,4
10	0,7679648	0,3601611	-2,3796	-11,4
11	0,8679648	0,0652011	-3,5196	-11,4

[1] Рекомендуется выполнить расчеты на отдельном листе файла, а результат вычислений с помощью *Правка → Специальная вставка (значения)* скопировать на лист с экспортированными значениями из MathCAD.

2) Для полученной совокупности **{x, y}** определить параметры квадратичной зависимости[1] $\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$ с помощью функции **ЛИНЕЙН()**:

	A	B	C	D	E	F	G
13	x	x^2	y		a2	a1	a0
14	0,3679648	0,1353981	0,400001		[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	0,4679648	0,2189911	0,561041		2,3894E-15	2,9736E-15	8,7195E-16
16	0,5679648	0,322584	0,608081		1	1,4599E-16	#Н/Д
17	0,6679648	0,446177	0,541121		4,6862E+30	3	#Н/Д
18	0,7679648	0,5897699	0,3601611		0,19975968	6,3941E-32	#Н/Д
19	0,8679648	0,7533629	0,0652011				

3) Поскольку в момент торможения T_t выполняется условие $s(T_t) = 0$, то для определения момента T_t необходимо решить уравнение $\varphi'(x) = 0$:

$$a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x = 0 \Rightarrow x = -\frac{a_1}{2 \cdot a_2}.$$

В результате вычислений:

	A	B	C
21	***Момент торможения***		
22	Tt=	0,559228	

4) Сформировать на отрезке $[T_p, T_t]$ при количестве разбиений N таблицу значений функций $\{\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)\}$:

	A	B	C	D
24	a=	0,3676687		
25	b=	0,559116		
26	n=	20		
27	h=	0,0095724		
28	x	φ(x)	φ'(x)	φ''(x)
29	0,3676687	0,4	2,182499	-11,4
30	0,377241	0,4203694	2,073374	-11,4
48	0,5495436	0,6083945	0,1091249	-11,4
49	0,559116	0,6089167	0	-11,4

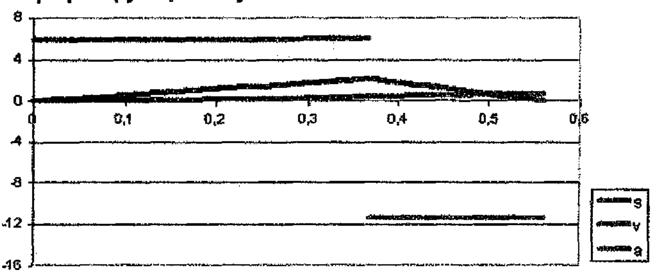
3. Построить графики $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ в диапазоне от начала до окончания движения.

На основе полученных данных (экспортированных из MATHCAD и таблицы значений функций $\{\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)\}$, объединенных в одну таблицу) построить графики функций $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$:

[1] Поскольку a(t) есть константа, то необходимо подобрать параметры квадратичной зависимости.

	A	B	C	D
1	t	s	v	a
2	0	0	0	5,9
3	0,01839824	0,000998561	0,10854962	5,900000798
...				
21	0,34956656	0,360904273	2,069720188	6,004201516
22	0,3679648	0,40000097	2,180400211	6,028000621
23	0,3679648	0,40000097	2,180400211	-11,4
24	0,377527959	0,420331195	2,0713802	-11,4
...				
42	0,549664818	0,607994817	0,109020011	-11,4
43	0,559227976	0,608516105	0	-11,4

График функции на участках AB и BC



Рассмотрим пример решения для четных вариантов:

1. Определить скорость, ускорение и время во всех точках участка *AB* и установить время T_p прохождения грузом **D** участка *AB* (с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$).

   Поскольку $v(t) = s'(t)$, $a(t) = v'(t) = s''(t)$, то для выполнения задачи надо сформировать решение дифференциального уравнения

$$s''(t) = \frac{F_d(s(t)) - F_c + m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{m}$$

с начальными условиями $s(0) = 0$, $v(0) = 0$.

Используя процедуру **Met_RK** (из задания 2), построить таблицу значений функций $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ на отрезке $[0, T_p]$, где момент времени T_p необходимо подобрать так, чтобы выполнялось условие **s(** T_p **)** = S_p.

Для данной задачи вспомогательная функция **Fun_D** примет вид:

```
Function Fun_D(x, y, z)
    Pi = 4 * Atn(1): alfa = 30 / 180 * Pi
    Fc = 13
    m = 2
    g = 9.8
    Fd = 15 + 2 * 0.8 * y ^ 2
    Fun_D = (Fd - Fc + m * g * Sin(alfa)) / m
End Function
```

Результат выполнения процедуры-подпрограммы **Met_RK**:

	A	B	C	D	E	F
1	a=	0	ya=	0		
2	b=	0,3679644	y1a=	0		
3	n=	20				
4	h=	0,0183982				
5	x	y	y'=z	y''		
6	0	0	0	5,9		
7	0,0183982	0,0009986	0,1085495	5,9000008		
		• • •				
25	0,3495661	0,3609034	2,0697177	6,004201		
26	0,3679644	0,4	2,1803975	6,028		
27						
28	*Проверка условия:*		**ИСТИНА**			
29						
30				=ABS(B26-0,4)<0,00001		
31						

Для импорта данных в MATHCAD диапазону **A6:D26** с помощью *Вставка → Имя → Присвоить…* необходимо присвоить имя **zAB**.

2. Определить скорость, ускорение и время во всех точках участка ***BC*** и установить время T_t прохождения грузом **D** участка ***BC*** (с точностью ε = 0,00001).

Импортировать данные таблицы **zAB** в MATHCAD:

- в MATHCAD выбрать *Insert → Data → Data Import Wizard…*;
- в диалоговом окне *File Options* выбрать файл, т.е. указать формат файла (*File Format: Microsoft Excel*), его имя и месторасположение (*Browse…*);
- на следующем шаге (кнопка *Далее*) в диалоговом окне *Excel Options* указать имя диапазона (*Named range:* ***zAB***);
- задать имя **zAB** таблице.

<u>Замечание</u>: Для установления требуемого формата чисел (в частности числа цифр после десятичного разделителя) использовать *Properties…* из контекстного меню.

В результате получим следующие данные:

Импорт данных из Excel:

zAB :=

	0	1	2	3
0	0	0	0	5.9
1	0.01839822	0.00039856	0.10854949	5.9000008
2	0.03679644	0.00399423	0.21709907	5.90001276
3	0.05519465	0.00898703	0.32564917	5.90006461
4	0.07359287	0.01597697	0.43420095	5.90020421
5	0.09199109	0.0249641	0.5427566	5.90049857

$Tp := zAB_{20,0}$ $\quad Tp = 0.36796436$ — время разгона (прохождения участка *AB*)

$sp := zAB_{20,1}$ $\quad sp = 0.4$ — задать значения расстояния, скорости в начале участка *BC*

$vp := zAB_{20,2}$ $\quad vp = 2.18039753$

Продолжить решение:

1) На отрезке $[T_p, T_p + n \cdot h]$, где $n = 5$ и $h = 0.1$, сформировать решение задачи

$$s''(t) = \frac{-F_c - m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{m}$$

с начальными условиями $s(T_p) = s_p$, $v(T_p) = v_p$, используя функцию **rkfixed()**.

Определить параметры функции rkfixed():

$$usl := \begin{pmatrix} sp \\ vp \end{pmatrix}$$ — начальные условия

$$D(x, usl) := \begin{pmatrix} usl_1 \\ \dfrac{-Fc - m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{m} \end{pmatrix}$$ — вектор-функция из правых частей системы дифференциальных уравнений

$Tt := Tp + 5 \cdot 0.1$ $\quad Tt = 0.86796436$ — правая граница отрезка

$y := rkfixed(usl, Tp, Tt, 5, D)$ — формирование решения

Результат вычислений:

$$y = \begin{pmatrix} 0.36796436 & 0.4 & 2.18039753 \\ 0.46796436 & 0.56103975 & 1.04039753 \\ 0.56796436 & 0.60807951 & -0.09960247 \\ 0.66796436 & 0.54111926 & -1.23960247 \\ 0.76796436 & 0.36015901 & -2.37960247 \\ 0.86796436 & 0.06519877 & -3.51960247 \end{pmatrix}$$

2) Для полученной совокупности **{x, y}** определить параметры квадратичной зависимости[1] $\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$ с помощью функции **linfit()**:

Определить параметры квадратичной функции $\phi(t)$:

$$F(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} := linfit\left(y^{\langle 0 \rangle}, y^{\langle 1 \rangle}, F\right)$$

$a2 = -5.7$ $\quad a1 = 6.37519119$ $\quad a0 = -1.17407585$

[1] Поскольку a(t) есть константа, то необходимо подобрать параметры квадратичной зависимости.

Определить вспомогательные функции:

$$\phi(t) := a2 \cdot t^2 + a1 \cdot t + a0 \qquad \phi1(t) := \frac{d}{dt}\phi(t) \qquad \phi2(t) := \frac{d^2}{dt^2}\phi(t)$$

3) Поскольку в момент торможения T_t выполняется условие $s(T_t) = 0$, то для определения момента T_t необходимо решить уравнение $\varphi'(x) = 0$.

Найти значение Tt:

$$Tt := root(\phi1(Tt), Tt)$$

$$Tt = 0.5592273 \qquad \phi1(Tt) = 6.4333927 \times 10^{-15}$$

4) Сформировать на отрезке $[T_p, T_t]$ при количестве разбиений N таблицу значений функций $\{\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x)\}$:

Сформировать таблицу значений функций:

$$i := 0..20 \qquad t_i := Tp + \frac{Tt - Tp}{20} \cdot i$$

$$\phi_i := \phi(t_i) \qquad \phi1_i := \phi1(t_i) \qquad \phi2_i := \phi2(t_i)$$

$zBC := augment(t, \phi, \phi1, \phi2)$ --- объединение массивов

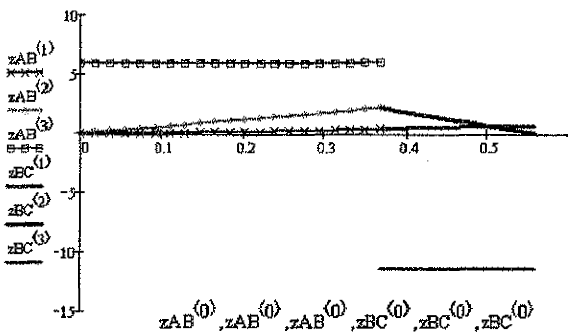
zBC =

	0	1	2	3
0	0.36796436	0.4	2.18039753	-11.4
1	0.3775275	0.42033018	2.07137766	-11.4
2	0.38709065	0.43961778	1.96235778	-11.4
3	0.3966538	0.45786281	1.8533379	-11.4
4	0.40621694	0.47506527	1.74431803	-11.4
5	0.41578009	0.49122515	1.63529815	-11.4

3. Построить графики $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ в диапазоне от начала до окончания движения.

На основе полученных данных (импортированных из Excel и таблицы значений функций $\{\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x)\}$) построить графики функций $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$:

Графики функций s(t), v(t) и a(t) на участках *AB* и *BC*:



Контрольная работа №4

Задание №1:

1. Создать в Excel <u>таблицу</u> в соответствии с вариантом. По столбцам, указанным в строке «*Статистика*», рассчитать значения в соответствии с <u>условием</u>.
2. Построить <u>диаграмму</u> соответствующего типа по одному из расчетных столбцов таблицы.
3. Используя функции Excel и возможности для анализа данных выполнить задания по обработке полученных результатов.

<u>Требования к выполнению задания:</u>

1. Таблица должна содержать 35 (*тридцать пять*) записей.
2. Данные в столбцы таблицы заносятся по следующим правилам:

обозначения в таблице	*условия на значения, которыми заполняется таблица*
✓	значение, подходящее по смыслу
☑	числовое значение или дата из некоторого диапазона, подходящего по смыслу
🗐	значение из списка, содержащего не более 5 элементов, подходящего по смыслу
×	значения вычисляются с помощью формул, указанных под таблицей
⊗	значения вычисляется с помощью формулы, содержащей встроенную логическую функцию ЕСЛИ()
☒	значения вычисляются с помощью формулы, содержащей встроенную статистическую функцию
(I, II или III)	значение столбца принимает вид 1, 2 или 3

3. Вместо $\Sigma1$, $\Sigma2$ и $\Sigma3$ в формулах подставить значения, исходя из данных в таблице.
4. Таблица должна быть представлена в отформатированном виде.
5. Диаграмма должна содержать надписи (заголовок таблицы, легенда, подписи к осям) и размещена на отдельном листе.

Задание №2:

Дана задача линейного программирования с двумя переменными:

$$Z(x,y) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot y \to extr \text{ (max } \textit{или} \text{ min)}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y \le b_1; \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \le b_2; \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y \ge b_3; \\ \quad x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу:

(1) графическим методом (на максимум и на минимум);
(2) используя блок *Given...Maximize* (*Given...Minimize*) в СКМ MathCAD;
(3) используя инструмент *Поиск решения* в ЭТ Excel.

Задание №3:

Решить транспортную задачу в следующей постановке:

На производстве имеется m цехов (A_1, ..., A_m), в результате деятельности которых происходит загрязнение воды. Для ее очистки может быть использовано n очистительных пунктов (B_1, ..., B_n). Задана стоимость c_{ij} у.е. очистки 1 м^3 воды из i-го ($i = 1, \ldots, m$) цеха в j-м ($j = 1, \ldots, n$) пункте очистки. Кроме того, для каждого i-го цеха известен объем подлежащей очистке воды за смену (a_1, ..., a_m м^3), а для каждого j-го очистного сооружения – его предельная мощность (b_1, ..., b_n м^3 за смену). Простои всех очистительных сооружений обходятся **p** у.е. за смену, а штраф за неочищенный кубометр воды составляет **s** у.е.

<u>Требуется</u>

(а) составить план использования очистных сооружений цехами, при котором суммарные расходы предприятия на очистку воды будут минимальными;

(б) провести анализ полученного решения.

Данные задачи представляются в табличном виде:

Стоимость в у.е. очистки 1 м^3 воды		*Пункты очистки*			*Объем воды для очистки*
		B_1	...	B_n	
Цеха	A_1	c_{11}	...	c_{1n}	a_1
	...	...	...	...	...
	A_m	c_{m1}	...	c_{mn}	a_m
Мощности очистных сооружений		b_1	...	b_n	*штраф за простой* – **p у.е.** *штраф за неочистку* – **s у.е.**

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание №1:

<u>Пусть требуется выполнить задание:</u>

1. Создать в Excel таблицу «*Реализация товара*» из десяти записей:

курс $					
наименование товара	категория (I, II или III)	цена, руб	количество	стоимость, руб	стоимость, $
✓	🗐	⊗	☑	×	×
статистика			☒	☒	☒

Формулы:

цена = 5200 руб, если категория = I,
3400 руб, если категория = II,
2700 руб, если категория = III

общая стоимость в руб = цена * количество

общая стоимость в $ = общая стоимость в руб / курс $

2. По столбцам, указанным в строке «*Статистика*», рассчитать максимальное и среднее арифметическое значение.
3. Построить диаграмму столбикового типа по одному из расчетных столбцов таблицы.
4. Используя функции EXCEL и возможности для анализа данных выполнить *задание*:
   (1) определить
      (1.а) количество товаров с категорией I;
      (1.б) количество товаров, стоимость которых меньше 70 000 руб;
      (1.в) стоимость в руб для товаров, реализация которых составила в количестве от 15 до 20 единиц;
      (1.г) стоимость в руб для товаров с категорией II или III;
   (2) вывести информацию о товаре
      (2.а) реализованном в количестве больше 18 единиц, а стоимость в руб которого меньше среднего значения по этому полю;
      (2.б) либо с II категорией, либо стоимость в $ которого не больше 25.

<u>Порядок выполнения задания:</u>

1. Создаем таблицу по предлагаемой форме (рис. 1) (задаем заголовок, шапку таблицы). Вносим текстовые и числовые значения в указанные столбцы. Форматируем ячейки (задаем формат чисел, стиль выравнивания, формат шрифта и определяем вид рамки).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Реализация товара**						
2							
3	курс $	2 450р.					
4	*№ п/п*	*наименование товара*	*категория*	*цена, руб*	*количество*	*стоимость, руб*	*стоимость, $*
5	1	гречневая крупа	1		15		
6	2	манная крупа	2		20		
7	3	овсяная крупа	2		14		
8	4	пшеничная мука	3		25		
9	5	пшенная крупа	1		15		
10	6	ржаная мука	2		27		
11	7	рис пропаренный	3		18		
12	8	рис шлифованный	1		24		
13	9	ячменная крупа	1		22		
14	10	ячменная мука	3		19		
15							
16	***статистика:***		максимальное значение				
17			среднее арифметическое значение				

Рисунок 1

2. Заполняем соответствующие ячейки формулами:

 в ячейку **D5**: **=ЕСЛИ(C5=1;5200;ЕСЛИ(C5=2;3400;2700))**
 в ячейку **F5**: **=D5*E5**
 в ячейку **G5**: **=F5/$B$3**

 Используя автозаполнение, тиражируем формулы на соответствующие диапазоны:

 D5 → D6:D14 F5 → F6:F14 G5 → G6:G14

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Реализация товара**						
2							
3	курс $	2 450р.					
4	*№ п/п*	*наименование товара*	*категория*	*цена, руб*	*количество*	*стоимость, руб*	*стоимость, $*
5	1	гречневая крупа	1	5 200р.	15	78 000р.	31,84
6	2	манная крупа	2	3 400р.	20	68 000р.	27,76
7	3	овсяная крупа	2	3 400р.	14	47 600р.	19,43
8	4	пшеничная мука	3	2 700р.	25	67 500р.	27,55
9	5	пшенная крупа	1	5 200р.	15	78 000р.	31,84
10	6	ржаная мука	2	3 400р.	27	91 800р.	37,47
11	7	рис пропаренный	3	2 700р.	18	48 600р.	19,84
12	8	рис шлифованный	1	5 200р.	24	124 800р.	50,94
13	9	ячменаая крупа	1	5 200р.	22	114 400р.	46,69
14	10	ячменная мука	3	2 700р.	19	51 300р.	20,94
15							
16	*статистика:*		максимальное значение		27	124 800р.	50,94
17		средне арифметическое значение			18,9	77 000р.	31,43

Рисунок 2

3. Зададим формулы в соответствующие ячейки для статистического анализа. Сначала введем формулы:

 в ячейку **E16**: **=МАКС(E5:E14)**
 в ячейку **E17**: **=СРЗНАЧ(E5:E14)**

 Затем копируем формулы из диапазона **E16:E17** в ячейки диапазона **F16:G17**.

4. Определив соответствующие форматы чисел, получим результат (рис. 2)

5. Выполним построение диаграммы (рис. 3) с помощью мастера диаграмм:

 - тип диаграммы – гистограмма, вид – объемная;
 - на вкладке *Диапазон данных* задаем диапазон, по которому будет строиться диаграмма, например **F5:F14**, на вкладке *Ряд* указываем подписи оси X (диапазон **B5:B14**) и имя ряда (ячейка **F4**);
 - на вкладке *Заголовки* задаем названия диаграммы (Реализация товара), оси X (наименование), оси Y (руб), на вкладке *Легенда* определяем положение легенды вверху;
 - помещаем диаграмму на отдельном листе.

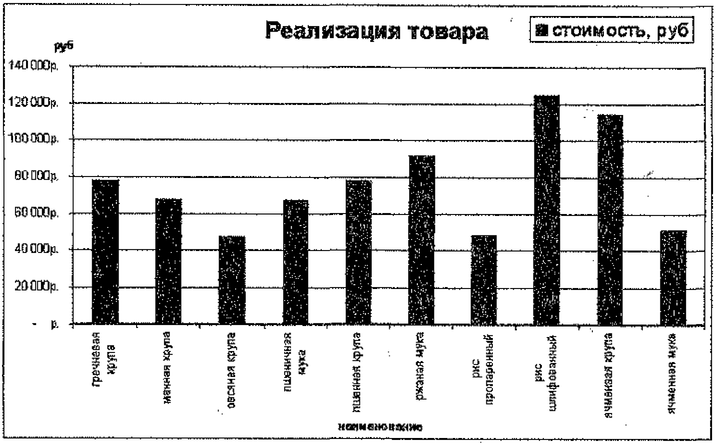


Рисунок 3

6. Для выполнения первой группы дополнительного задания (рис. 4) зададим формулы:

   в ячейку **D20**: **=СЧЁТЕСЛИ(C5:C14;1)**
   в ячейку **D21**: **=СЧЁТЕСЛИ(F5:F14;"<=70000")**
   в ячейку **F20**:
   =СУММ(ЕСЛИ((E5:E14>=15)*(E5:E14<=20);F5:F14;0))
   в ячейку **F21**: **=СУММ(ЕСЛИ((C5:C14=2)+(C5:C14=3);F5:F14;0))**

	A	B	C	D	E	F
1				Реализация товара		
19	*задание:*					
20			1.а	4	1.в	323 900р.
21			1.б	5	1.г	374 800р.

Рисунок 4

Замечание: Формулы, используемые для выполнения заданий (1.в) и (1.г), являются формулами массивов. Поэтому их ввод осуществляется комбинацией клавиш **CTRL + SHIFT + ENTER**.

7. Для выполнения второй группы дополнительного задания (рис. 5) используем расширенный критерий. Предварительно необходимо составить критерии для каждого пункта.

   * Поскольку критерий выбора данных из таблицы для задания (2.а) подразумевает для каждой строки таблицы одновременное выполнение условий *количество* > *18* и *стоимость в руб* < *среднего значения по этому полю*, то условия критерия записываются в одну строку, причем второе условие является примером вычисляемого критерия:

     а) заголовок условия «*стоимость*» отличается от заголовков столбцов таблицы;

     б) ячейка **D25** содержит формулу **=F5<СРЗНАЧ($F$5:$F$14)**.

* Поскольку критерий выбора данных из таблицы для задания (2.б) подразумевает для каждой строки таблицы выполнение одного из условий *категория* = *2* или *стоимость в $* <= *25*, то условия критерия записываются в разные строки.

Затем введем параметры диалогового окна *Расширенный фильтр* (*Данные* → *Фильтр* → *Расширенный фильтр*). В частности, для выполнения задания (2.а):

обработка ◉ **скопировать результат в другое место**
исходный диапазон **$A$4:$G$14**
диапазон условий **$C$24:$D$25**
поместить результат в диапазон **$A$28**

В результате будет сформирована новая таблица, строки которой содержат данные о товарах, удовлетворяющие условию.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Реализация товара**						
23	***задание:***		критерий 2.а			критерий 2.б	
24			*количество*	*стоимость*		*категория*	*стоимость, $*
25			>18	ЛОЖЬ		2	
26							<=25
27	2.а						
28	*№ п/п*	*наименование товара*	*категория*	*цена, руб*	*количество*	*стоимость, руб*	*стоимость, $*
29	2	манная крупа	2	3 400р.	20	68 000р.	27,76
30	4	пшеничная мука	3	2 700р.	25	67 500р.	27,55
31	10	ячменная мука	3	2 700р.	19	51 300р.	20,94
32							
33	2.б						
34	*№ п/п*	*наименование товара*	*категория*	*цена, руб*	*количество*	*стоимость, руб*	*стоимость, $*
35	2	манная крупа	2	3 400р.	20	68 000р.	27,78
36	3	овсяная крупа	2	3 400р.	14	47 600р.	19,43
37	6	ржаная мука	2	3 400р.	27	91 800р.	37,47
38	7	рис пропаренный	3	2 700р.	18	48 600р.	19,84
39	10	ячменная мука	3	2 700р.	19	51 300р.	20,94

Рисунок 5

8. Оформим колонтитулы (*Вид* → *Колонтитулы*).
9. Целесообразно разместим результаты работы на оптимальном количестве листов (*Вид* → *Разметка страницы*).
10. Подготовим таблицу и диаграмму к печати:

   чтобы добавить заголовки строк и столбцов при печати таблицы в формульном виде, выбираем

   Файл → Параметры страницы → Лист → ☑ заголовки строк и столбцов.

Задание №2:

Пусть требуется выполнить задание:

Дана задача линейного программирования с двумя переменными:

$$Z(x,y) = 2x + y \to extr \text{ (max } \textit{или} \text{ min)}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y \ge 10; \\ 2x - y \le 9; \\ x - 3y \ge -4; \\ x \ge 0;\ y \ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу:

(1) графическим методом (на максимум и на минимум);

(2) используя блок *Given...Maximize* (*Given...Minimize*) в СКМ MathCAD;

(3) используя инструмент *Поиск решения* в ЭТ Excel.

Порядок выполнения задания:

(1) Графический метод решения задачи.

1. Построение области допустимых решений (ОДР).

(1) *прямая*	(2) *прямая*	(3) *прямая*
$3x + 4y = 10$	$2x - y = 9$	$x - 3y = -4$
$x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 4y = 10$	$y = 0 \Rightarrow 2x - 0 = 9$	$x = 0 \Rightarrow 0 - 3y = -4$
$4y = 10$	$2x = 9$	$-3y_2 = -4$
$y = \frac{10}{4} = 2{,}5$	$x = \frac{9}{2} = 4{,}5$	$y = \frac{-4}{-3} \approx 1{,}3$
$y = 0 \Rightarrow 3x + 4 \cdot 0 = 10$	$y = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 9$	$x = 2 \Rightarrow 2 - 3y = -4$
$3x = 10$	$2x = 10$	$-3y = -6$
$x = \frac{10}{3} \approx 3{,}3$	$x = \frac{10}{2} = 5$	$y = \frac{-6}{-3} = 2$
точки: (0; 2,5) и (3,3; 0)	точки: (4,5; 0) и (5; 1)	точки: (0; 1,3) и (2; 2)

В силу условия $x \ge 0;\ y \ge 0$ рассматриваем только I координатный угол.

ОДР есть четырехугольник ABCD.

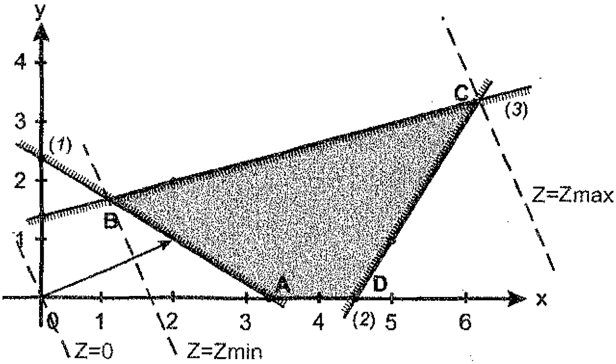
2. Определим вектор наискорейшего возрастания целевой функции:

$$grad\ Z(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и построим линию уровня при $Z = 0$

$$2x + y = 0,$$

перпендикулярно вектору градиента.



3. Определение крайнего положения линии уровня $Z = Z_0$ при решении задачи на максимум.

Перемещая линию уровня в направлении вектора градиента, определяем крайнюю точку ОДР – точка С. Найдем её координаты:

$$\begin{cases} (2)\ \textit{прямая} \\ (3)\ \textit{прямая} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 9; \\ x - 3y = -4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{31}{5} = 6\dfrac{1}{5} = 6{,}2; \\ y = \dfrac{17}{5} = 3\dfrac{2}{5} = 3{,}4. \end{cases}$$

Вычислим значение целевой функции в точке С:

$$Z_{max} = Z(C) = 2x + y = 2 \cdot 6{,}2 + 3{,}4 = 15{,}8$$

4. При решении задачи на минимум, перемещая линию уровня в противоположном направлении – направлении антиградиента – определяем крайнюю точку ОДР – точка В. Найдем её координаты и вычислим значение целевой функции в точке В:

$$B: \ x = \frac{14}{13} \approx 1{,}08; \ \ y = \frac{22}{13} \approx 1{,}69;$$

$$Z_{min} = Z(B) = 2x + y = 2 \cdot \frac{14}{13} + \frac{22}{13} = \frac{50}{13} \approx 3{,}85$$

(2) Реализация решения задачи в СКМ MathCAD.

Целевая функция: $fZ(x,y) := 2 \cdot x + y$

Решение
задачи линейного программирования
на максимум с использованием
блока Given ... Maximize:

$x := 0 \qquad y := 0$

Given

$3x + 4y \geq 10$

$2x - y \leq 9$

$x - 3y \geq -4$

$x \geq 0 \qquad y \geq 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(fZ, x, y)$

Искомые координаты:

$x = 6.2 \qquad y = 3.4$

Значение целевой функции:

$fZ(x,y) = 15.8$

Решение
задачи линейного программирования
на минимум с использованием
блока Given ... Minimize:

$x := 0 \qquad y := 0$

Given

$3x + 4y \geq 10$

$2x - y \leq 9$

$x - 3y \geq -4$

$x \geq 0 \qquad y \geq 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(fZ, x, y)$

Искомые координаты:

$x = 1.07692308 \qquad y = 1.69230769$

Значение целевой функции:

$fZ(x,y) = 3.84615385$

(3) Реализация решения задачи в ЭТ Excel.

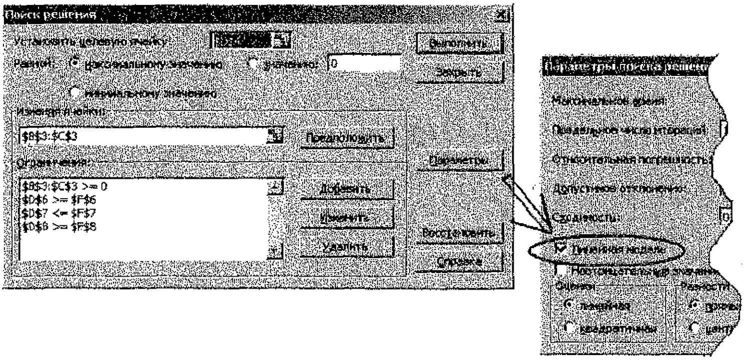
Рассмотрим решение задачи на максимум.

1 шаг: сформировать таблицу, ввести значения и формулы

	A	B	C	D	E	F
1	**Переменные**					
2	наименование	**x**	**y**			
3	**план (значение)**			**ЦФ**	направление	
4	коэффициенты	2	1	0	max	
5	**Ограничения**			**левая часть**	**знак**	**правая часть**
6	коэф. огр. 1	3	4	0	>=	10
7	коэф. огр. 2	2	-1	0	<=	8
8	коэф. огр. 3	1	-3	0	>=	-4

	A	B	C	D	E	F
1	**Переменные**					
2	наименование	**x**	**y**			
3	**план (значение)**			**ЦФ**	направление	
4	коэффициенты	2	1	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B4:C4)	max	
5	**Ограничения**			**левая часть**	**знак**	**правая часть**
6	коэф. огр. 1	3	4	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B6:C6)	>=	10
7	коэф. огр. 2	2	-1	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B7:C7)	<=	8
8	коэф. огр. 3	1	-3	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B8:C8)	>=	-4

2 шаг: задать данные в полях надстройки «*Поиск решения*»



3 шаг: сформировать *отчет по результатам*

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [ЗЛП.xls]Задача ЛП
Отчет создан: 23.01.2011 12:22:33

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$4	коэффициенты ЦФ	0	15,8

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	план (значение) x	0	6,2
$C$3	план (значение) y	0	3,4

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$D$6	коэф. огр. 1 левая часть	32,2	$D$6>=$F$6	не связан.	22,2
$D$7	коэф. огр. 2 левая часть	9	$D$7<=$F$7	связанное	0
$D$8	коэф. огр. 3 левая часть	-4	$D$8>=$F$8	связанное	0
$B$3	план (значение) x	6,2	$B$3>=0	не связан.	6,2
$C$3	план (значение) y	3,4	$C$3>=0	не связан.	3,4

Аналогично решается задача на минимум. Результирующая таблица для рассматриваемой задачи примет вид:

	A	B	C	D	E	F
1	**Переменные**					
2	наименование	***x***	***y***			
3	**план (значение)**	1,0769231	1,6923077	**ЦФ**	направление	
4	коэффициенты	2	1	3,846153846	min	
5	**Ограничения**			**левая часть**	**знак**	**правая часть**
6	коэф. огр 1	3	4	10	>=	10
7	коэф. огр 2	2	-1	0,461538462	<=	9
8	коэф. огр 3	1	-3	-4	>=	-4

Задание №3:

Пусть требуется выполнить задание:

Решить транспортную задачу в следующей постановке:

Корпорация осуществляет производство продукции на **двух** предприятиях (A_1 и A_2), а затем осуществляет её транспортировку в **три** пункта потребления (B_1, B_2, и B_3). Предприятия могут выпускать в день **267** и **315** ед. продукции, а пункты потребления готовы принимать ежедневно **165**, **158** и **182** ед. продукции соответственно. Производство единицы продукции в корпорации обходится в **1,75 у.е.**, штраф за недопоставленную продукцию – **315 у.е.** в день. Стоимость перевозки ед. продукции (в у.е.) с предприятий в пункты потребления приведена в таблице.

	B_1	B_2	B_3
A_1	8	6	5
A_2	4	3	2

Требуется

(а) составить план реализации продукции с предприятий в пункты потребления за день, при котором суммарные расходы корпорации будут минимальными,

(б) провести анализ полученного решения.

Данные задачи можно представить в табличном виде:

Стоимость в у.е. перевозки 1 ед. продукции		*Пункты потребления*			*Объем выпуска продукции*
		B_1	B_2	B_3	
Предприятие	A_1	8	6	5	**267**
	A_2	4	3	2	**315**
Потребность в продукции		**165**	**158**	**182**	*цена производства* – ***1,75 у.е.*** *штраф за невыполнение* – ***315 у.е.***

Пример выполнения задания:

1. Построить *математическую модель* исходя из данных задачи:
   - определить переменные;
   - сформировать целевую функцию (ЦФ);
   - задать ограничения.

Замечание:

Модель транспортной задачи называют ***закрытой***, если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей, т.е. выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Модель транспортной задачи называют ***открытой***, если выполняется одно из условий:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ или } \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Для *разрешимости* транспортной задачи с открытой моделью необходимо преобразовывать ее в закрытую путем ввода

в первом случае фиктивного поставщика A_{m+1} (дополнительные параметры $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$; $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$);

во втором случае фиктивного потребителя B_{n+1} (дополнительные параметры $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$; $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1,m}$).

Построим математическую модель задачи.

Общий объем выпуска предприятий **267 + 315 = 582**, а потребность предприятий **165 + 158 + 182 = 505**. Поскольку **582 > 505**, то преобразуем задачу к закрытой модели, т.е. введем фиктивного потребителя B_4, дополнительные параметры в этом случае примут вид:

$$b_4 = 582 - 505 = 77 \; ; \; c_{1,4} = c_{2,4} = 0.$$

а) переменные задачи

x_{ij} $(i = 1,2,\ j = 1,2,3,4)$ – количество единиц продукции, перевозимых от поставщика A_i в пункт потребления B_j;

б) целевая функция (ЦФ) задачи

$1{,}75 \cdot x_{ij}$ $(i = 1,2,\ j = 1,2,3,4)$ – стоимость производства продукции на предприятии A_i, предназначенного для пункта потребления B_j;

$Z1 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} 1{,}75 x_{ij}$ – общая стоимость производства продукции, т.е.

$$Z1 = 1{,}75 \cdot x_{11} + 1{,}75 \cdot x_{12} + 1{,}75 \cdot x_{13} + 1{,}75 \cdot x_{14} + \\ + 1{,}75 \cdot x_{21} + 1{,}75 \cdot x_{22} + 1{,}75 \cdot x_{23} + 1{,}75 \cdot x_{24};$$

$c_{ij} \cdot x_{ij}$ $(i = 1,2,\ j = 1,2,3,4)$ – стоимость перевозки продукции от предприятия A_i в пункт потребления B_j;

$Z2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$ – общая стоимость перевозки продукции, т.е.

$$Z2 = 8 \cdot x_{11} + 6 \cdot x_{12} + 5 \cdot x_{13} + 0 \cdot x_{14} + 4 \cdot x_{21} + 3 \cdot x_{22} + 2 \cdot x_{23} + 0 \cdot x_{24};$$

Т.о. $Z = Z1 + Z2$ – общие суммарные расходы корпорации, т.е.

$$Z = 9{,}75 \cdot x_{11} + 7{,}75 \cdot x_{12} + 6{,}75 \cdot x_{13} + 1{,}75 \cdot x_{14} +$$
$$+ 5{,}75 \cdot x_{21} + 4{,}75 \cdot x_{22} + 3{,}75 \cdot x_{23} + 1{,}75 \cdot x_{24};$$

в) <u>ограничения</u> задачи

$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4}$ – общее количество единиц продукции, поставляемых от поставщика A_i;
поскольку объем выпуска продукции поставщика A_i равен a_i, то ограничение примет вид

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = a_i.$$

Таким образом можно записать

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 267,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 315.$$

$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} = x_{1j} + x_{2j}$ – общее количество единиц продукции, поставляемой в пункт потребления B_j;
поскольку потребность пункта B_j равна b_j, то ограничение примет вид

$$9{,}75 \cdot x_{11} + 7{,}75 \cdot x_{12} + 6{,}75 \cdot x_{13} + 1{,}75 \cdot x_{14} +$$
$$+ 5{,}75 \cdot x_{21} + 4{,}75 \cdot x_{22} + 3{,}75 \cdot x_{23} + 1{,}75 \cdot x_{24} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 267, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 315, \\ x_{11} + x_{21} = 165, \\ x_{12} + x_{22} = 158, \\ x_{13} + x_{23} = 182, \\ x_{14} + x_{24} = 77, \\ x_{ij} > 0 \ (i = 1,2, \ j = 1,2,3,4). \end{cases}$$

Таким образом можно записать

$$x_{11} + x_{21} = 165, \ x_{12} + x_{22} = 158,$$
$$x_{13} + x_{23} = 182, \ x_{14} + x_{24} = 77.$$

Кроме того, из постановки задачи ясно, что

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2, \ j = 1,2,3,4).$$

<u>*Математическая модель*</u> после преобразования к закрытой модели:

$$9{,}75 \cdot x_{11} + 7{,}75 \cdot x_{12} + 6{,}75 \cdot x_{13} + 1{,}75 \cdot x_{14} +$$
$$+ 5{,}75 \cdot x_{21} + 4{,}75 \cdot x_{22} + 3{,}75 \cdot x_{23} + 1{,}75 \cdot x_{24} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 267, & x_{11} + x_{21} = 165, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 315, & x_{12} + x_{22} = 158, \\ & x_{13} + x_{23} = 182, \\ & x_{14} + x_{24} = 77, \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2, \ j = 1,2,3,4). \end{cases}$$

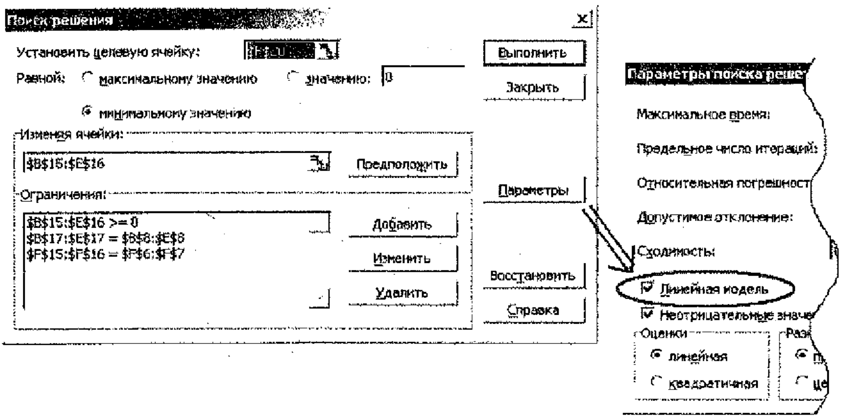
2. В EXCEL оформить условия задачи для решения:
- создать формы для ввода условий задачи;
- ввести исходные данные;
- ввести зависимости из математической модели (формулы)

в ячейку **B10**:	**=СУММ(F6:F7)**		
в ячейку **F10**:	**=СУММ(B8:E8)**		
в ячейку **E8**:	**=B10 – F10**		
в ячейку **B17**:	**=СУММ(B15:B16)**	⇒	**C17:E17**
в ячейку **F15**:	**=СУММ(B15:E15)**	⇒	**F16**
в ячейку **F20**:	**=СУММПРОИЗВ(B6:E7;B15:E16)**		

	A	B	C	D	E	F
1	**Пример для транспортной задачи**					
3		***Матрица тарифов***				
4		*потребители*				
5	*поставщики*	**В1**	**В2**	**В3**	**Вфикт**	**Объем продукции**
6	**А1**	9,75	7,75	6,75	1,75	267
7	**А2**	5,75	4,75	3,75	1,75	315
8	**Потребность в продукции**	165	158	182	77	
10	**Общая добыча**	**582**	**Общая потребность**			**505**
12		***Матрица перевозок X***				
13		*потребители*				
14	*поставщики*	**В1**	**В2**	**В3**	**Вфикт**	**Объем продукции**
15	**А1**					0
16	**А2**					0
17	**Потребность в продукции**	0	0	0	0	
19						***ЦФ***
20					*суммарные издержки:*	**0**

3. Используя надстройку «*Поиск решения*», найти решение задачи.

Задать параметры диалогового окна:



Результат решения:

	A	B	C	D	E	F
1	**Пример для транспортной задачи**					
3		***Матрица тарифов***				
4		*потребители*				
5	*поставщики*	**B1**	**B2**	**B3**	**Вфикт**	**Объем продукции**
6	**A1**	9,75	7,75	6,75	1,75	267
7	**A2**	5,75	4,75	8,75	1,75	315
8	**Потребность в продукции**	165	158	182	77	
10	**Общая добыча**	**582**	**Общая потребность**			**505**
12		***Матрица перевозок X***				
13		*потребители*				
14	*поставщики*	**B1**	**B2**	**B3**	**Вфикт**	**Объем продукции**
15	**A1**	0	158	32	77	267
16	**A2**	165	0	150	0	315
17	**Потребность в продукции**	165	158	182	77	
19						**ЦФ**
20				*суммарные издержки:*		**3086,5**

Анализ решения задачи:

Суммарные издержки корпорации составляют **3 086,5 у.е.**, из них:

расходы на производство продукции – **1 018,5 у.е.**,

транспортные расходы – **2 068 у.е.**

План перевозок от предприятий к потребителям на день:

	B1	**B2**	**B3**
A1	0	158	32
A2	165	0	150

Предприятие A_1 выпустило невостребованных **77 единиц** продукции, что составило **134,75 у.е.** издержек.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ
по курсу «ИНФОРМАТИКА»

СЕМЕСТР III

Теоретическая часть

1. Определения из теории дифференциальных уравнений: дифференциальное уравнение, решение дифференциального уравнения, виды дифференциальных уравнений, общее и частное решения дифференциального уравнения.
2. Методы решения дифференциальных уравнений.
3. Суть численных методов решения дифференциальных уравнений.
4. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка методом Эйлера.
5. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка методом Рунге-Кутты четвертого порядка.
6. Решение задачи Коши для ОДУ второго порядка методом Рунге-Кутты четвертого порядка.
7. Метод наименьших квадратов (МНК): постановка задачи отыскания параметров эмпирических формул и основная схема её решения.
8. Классы эмпирических формул.
9. МНК для линейной зависимостей.
10. Способы оценки качества подгонки эмпирических формул.

Система компьютерной математики (СКМ) MATHCAD

11. Отделение корней функции одной переменной; использование функции Root() для уточнения корней.
12. Использование блока *Given/Minimize/Maximize* для уточнения экстремумов.
13. Аналитические вычисления. Работа с выражениями (*Simplify*, *Expand*, *Factor*, *Collect*).
14. Аналитические вычисления. Вычисление рядов и произведений.
15. Аналитические вычисления. Дифференцирование (Differentiate), интегрирование (*Integrate*).
16. Аналитические вычисления. Разложение в ряд (*Expand to Series*).
17. Аналитические вычисления. Решение уравнений (*Solve*).
18. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) первого порядка. Вычислительный блок *Given/OdeSolve*.
19. ОДУ первого порядка. Встроенные функции *RkFixed*(), *RkAdapt*(), *Bulstoer*().
20. Системы ОДУ. Встроенные функции для решения систем ОДУ.
21. МНК. Встроенные функции *Line*(), *Slope*(), *Intercept*(), *Linfit*().

Табличный процессор EXCEL

22. Ввод и редактирование данных. Ввод серийных данных (дат, чисел). Форматирование ячеек (шрифт, выравнивание, ориентация, фон, рамки, тени).
23. Типы данных, вводимых в ячейки. Форматы числовых данных. Смена форматов. Копирование форматов.
24. Перемещения и копирование ячеек, диапазонов.
25. Операция *Специальная вставка*.
26. Правила записи формул. Ячейка, диапазон ячеек. Адресация ячеек. Абсолютная и относительная адресация ячеек.
27. Статистические функции *Наклон*(), *Отрезок*(), *Линейн*().

28. Инструмент "Поиск решения" и его использование для отыскания экстремумов.
29. Использование надстройки "Поиск решения" для подбора параметров эмпирической функции методом наименьших квадратов.
30. Графическое представление табличных данных. Типы диаграмм.
31. Структура диаграммы: область диаграммы, область построения диаграммы, оси значений и категорий, основные линии сетки, названия осей, заголовок диаграммы, легенда, ряды данных.
32. Построение линий тренда и прогнозов. Получение прогнозных значений.

СЕМЕСТР IV

Теоретическая часть

1. Математическая модель. Этапы математического моделирования.
2. Общая схема исследования математических моделей.
3. Задача линейного программирования (ЗЛП) в скалярной форме.
4. Область допустимых решений задачи. Геометрический смысл неравенства.
5. Градиент функции.
6. Геометрический метод решения ЗЛП.
7. Производственная задача: постановка, математическая модель.
8. Транспортная задача: постановка, математическая модель. Открытая и закрытая модели.

Текстовый редактор Word

9. Колонтитулы, их настройка и использование.
10. Поля формы. Элементы разработки форм в Word.
11. Операция слияния. Понятия основного документа и источника данных. Реализация операции слияния в *Word*.

Табличный процессор Excel

12. Правила записи формул. Ячейка, диапазон ячеек. Адресация ячеек. Абсолютная и относительная адресация ячеек.
13. Статистические функции *Сумм*(), *Макс*(), *Мин*(), *СрЗнач*(), *СчётЕсли*(), *СуммЕсли*().
14. Понятие реляционной базы данных. Столбец таблицы как поле базы данных. Поле и запись.
15. Режим работы через форму (Данные, Форма).
16. Сортировка данных по одному или нескольким полям (Данные, Сортировка).
17. Выдача промежуточных итогов (Данные, Итоги).
18. Назначение и виды фильтров (Данные, Фильтр). Организация автофильтра. Организация расширенного фильтра.
19. Понятие расширенного фильтра.
20. Построение сводных таблиц.
21. Консолидация данных.

Компьютерные коммуникации и Интернет-технологии

22. Навигация в WWW. Работа с браузером MS Internet Explorer.
23. Понятие почтовой службы в Интернет. Работа с почтовой системой The Bat. Регистрация почтовых ящиков, прием и отправка электронных писем.
24. Поиск информации в Интернет.
25. Характеристика языка гипертекстовых ссылок HTML.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином, 2006. – 636 с.
2. Васильев, А. Excel 2007 на примерах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 656 с.
3. Гурский, Д.А. Вычисления в MathCAD 12 / Д.А. Гурский, Е.С. Турбина. – СПб.: Питер, 2006. – 544 с.
4. Корнелл, П. Анализ данных в Excel. Просто как дважды два. – М.: ЭКСМО, 2007. – 224 с.
5. Курицкий, Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. – СПб: БХВ-Петербург, 1997. – 384 с.
6. Макаров, Е.Г. Инженерные расчеты в MathCAD. Учебный курс. – СПб: Питер, 2004. – 448 с.
7. Плис, А.Н. MathCAD: Математический практикум для инженеров и экономистов: учеб. пособ. / А.Н. Плис, Н.А. Сливина. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.
8. Половко, А.М. MathCAD для студента / А.М. Половко, И.В. Ганичев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 336 с.
9. Попов, А.А. Excel: Практическое руководство: учебное пособие для вузов. – М.: ДессКом, 2000. – 301 с.
10. Рудикова, Л. Microsoft Excel для студента. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 368 с.
11. Саймон, Дж. Анализ данных в Excel. – М.: Вильямс, 2004. – 528 с.
12. Самарский, А.А. Введение в численные методы. – М.: Лань, 2009. – 288 с.
13. Соколенко, А. Microsoft Office Excel 2007. Просто как дважды два. – М.: ЭКСМО, 2007. – 256 с.
14. Соломенчук, В. Excel 2007. Начали! – СПб.: Питер, 2007. – 128 с.
15. Турчак, Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М.: Физматлит, 2002. – 304 с.
16. Черняк, А.А. Высшая математика на базе MathCAD. Общий курс / А.А. Черняк, Ж.А. Черняк, Ю.А. Доманова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 608 с.

Методические материалы (конспект и примеры с лекций, лабораторные работы, вопросы и примеры к контролю знаний), связанные с выполнением контрольных работ и подготовкой к успешной сдаче зачета (экзамена), находятся в локальной вычислительной сети БрГТУ в папке:

U:\ VT&PM \ ZAOCH_F \ Информатика ВиГ

или на сайте кафедры ИиПМ: **iipm.bstu.by**

ПРИЛОЖЕНИЕ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №___

по дисциплине **«ИНФОРМАТИКА»**

Выполнил студент

____
(Группа, факультет шифр)

____
(Фамилия И.О.)

____
(Номер бланка)

____
(Подпись)

Допущен к защите

____
(Фамилия И.О. преподавателя)

____
(Дата Подпись)

БРЕСТ 20__

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:
Татьяна Георгиевна Хомицкая
Валерий Анатольевич Кофанов

ЗАДАНИЯ и МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению
КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ №3 и №4
по дисциплине **«Информатика»**
для студентов инженерно-технической специальности
1 - 70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение
и охрана водных ресурсов»
заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Хомицкая Т.Г.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Кармаш Е.Л.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 28.12.2012 г. Бумага «Снегурочка». Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Гарнитура Arial. Усл. печ. л. 2,55. Уч. изд. л. 2,75. Заказ № 1377. Тираж 50 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет»
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.