УДК 517.44

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ

Крищик Н.А.
УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», г. Гродно
Научный руководитель – Вувуникян Ю.М., профессор

При исследовании кратно-масштабных представлений функций $f(x)$ необходимо производить вычисление аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов. В случае, когда масштабирующая функция и вейвлет не имеют аналитического задания, вычисление этих коэффициентов производится с помощью численных методов.

Настоящая работа посвящена построению квадратурных формул для вычисления скалярного произведения произвольной функции и масштабирующей функции Добеши, используя исследования [1].

Идея формулы квадратуры состоит в том, чтобы найти веса ω_k и абсциссы x_k таким образом, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \approx Q[f(x)] = \sum_{k=1}^{r} \omega_k f(x_k), \tag{1}$$

где $f(x)$ – заданная функция, а φ – масштабирующая функция Добеши порядка $L \in \mathrm{Z}$.

Как известно, функция φ обладает свойствами [2]:

$$\varphi = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{2L-1} h_k \varphi(2x-k), \ x \in R, \tag{2}$$

$$\operatorname{supp}\varphi = [0, 2L-1]. \tag{3}$$

В работе [3] для построения данной квадратурной формулы был разработан алгоритм. На основании данной работы, для поиска весов ω_k и абсцисс x_k была написана программа на языке C# “Алгоритм” (рис.1).

Перед началом использования программы необходимо ввести начальные данные. Здесь r – порядок точности квадратурной формулы, L – порядок масштабирующей функции Добеши $\varphi(x) \in [0, 2L-1]$.

В таблицу вручную вводим значение коэффициентов низкочастотного фильтра h_k, $k = \overline{0, 2L-1}$. Автоматически заполняется таблица при $L = 2, 3, 4$.

По умолчанию программа рассматривает масштабирующую функцию Добеши второго порядка точности $L = 2$. Количество весов и абсцисс - 3. Коэффициенты, используемые по умолчанию, определяют простейший вейвлет *Db2* из известного семейства ортонормальных вейвлетов Добеши с конечным носителем.

Для масштабирующей функции Добеши второго порядка имеем

$$\begin{gathered} h_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}), h_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(3+\sqrt{3}), \\ h_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(3-\sqrt{3}), h_3 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\sqrt{3}). \end{gathered} \tag{4}$$

Для изменения введённых данных необходимо нажать кнопку “Принять”.

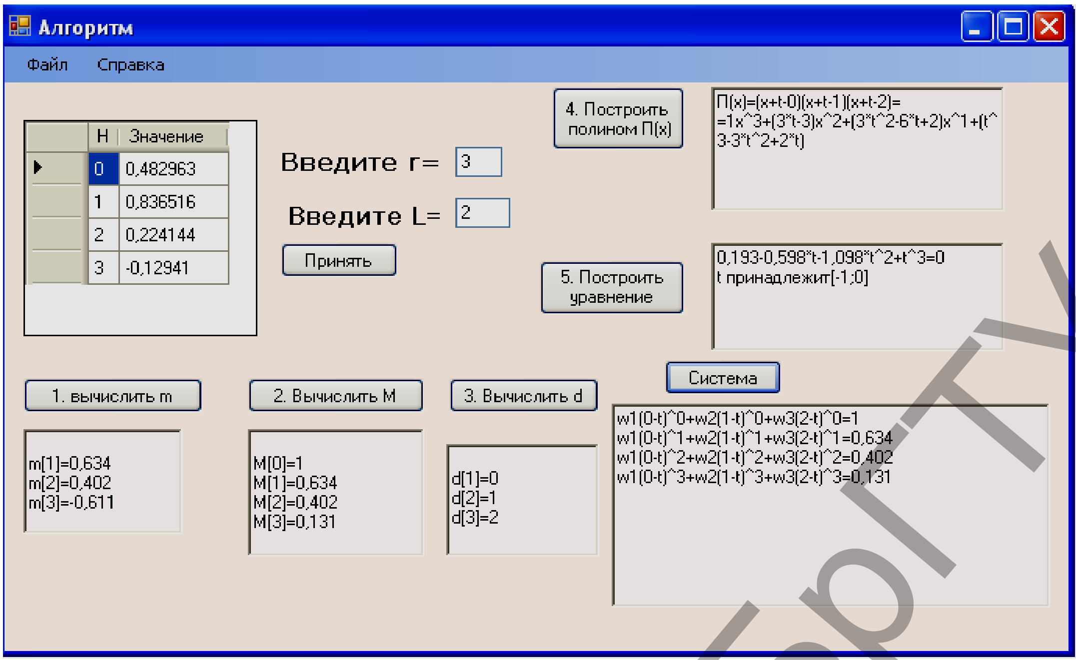

Рисунок 1 – Форма программы

Данная программа помогает вычислить дискретные моменты последовательности (h_k), моменты функции масштабирования M_k, значения d_k, построить полином $\Pi(x)$, составить уравнение $\sum_{i=0}^{r} p_i(\tau)M_i = 0$ и систему $\sum_{k=1}^{r} \omega_k [d_k - \tau]^i = M_i, \quad 0 \le i \le r$.

При нажатии кнопки “1. Вычислить m” программа вызывает процедуру function.zapolnenie_m(m, r, kol_H) , которая производит вычисление

$$m_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k k^i . \tag{5}$$

Обработчик событий кнопки “2. Вычислить M” вызывает процедуру function.zapolnenie_MM(MM, r, kol_H), которая производит вычисление

$$M_k = \frac{1}{(2^k - 1)} \sum_{i=1}^{k} C_k^i m_i M_{k-i} . \tag{6}$$

Кнопка “3. Вычислить d” вызывает процедуру, которая отвечает за вычисление

$$d_k = (k-1)2^s . \tag{7}$$

Обработчик событий кнопки “4. Построить полином $\Pi(x)$” строит данный полином и преобразует его следующим образом

$$\Pi(x) = \prod_{k=1}^{r} (x - x_k) = \prod_{k=1}^{r} (x + \tau - d_k) = \sum_{i=0}^{r} p_i(\tau) x^i . \tag{8}$$

При нажатии кнопки “5. Построить уравнение ” программа вызывает процедуру polin_x.sostav_yravn_t(MM, x_t, r, mnogochlen_t); которая преобразовывает уравнение

$$\sum_{i=0}^{r} p_i(\tau) M_i = 0 . \tag{9}$$

Кнопка “Система” вызывает процедуру, которая строит систему вида

$$\sum_{k=1}^{r} \omega_k [d_k - \tau]^i = M_i, \quad 0 \le i \le r . \tag{10}$$

В итоге программа выводит уравнение (9) и систему уравнений (10), решая которые, можно найти весы ω_k и абсциссы x_k,

$$\text{где} \qquad x_k = d_k - \tau . \tag{11}$$

Список цитированных источников

1. Deytseva, A. On quadrature formulas for calculation of approximation wavelet coefficients / A. Deytseva, N. Semenchuk // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Mathematical modeling in physics, civil engineering, economics and finance / Wydawnictwo Collegium Mazovia, ed.: L. Gadomski [et al.]. – Siedlce, 2011. – P. 36 – 41.
2. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 464 с.
3. Sweldens, W. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximations of smooth functions / W. Sweldens, R. Piessens // SIAM J. Numer. Anal. – 1994. – Vol. 31(4). – P. 1240.

УДК 519.24

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ОПЕРАТОРОМ

Курак А.Н.
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Мадорский В.М., к. ф.- м. н., доцент

Рассмотрим аналог задачи Дуффинга следующего вида, с недифференцируемым оператором:

$$X'' + \alpha X' + \beta |X| + \gamma X^3 = F(\sin(t), \cos(t))$$
$$x(0) = A, \quad x(2\pi) = B$$

Введем на отрезке [a, b] сетку $\mathrm{a} = \mathrm{x}_0 < \mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2 < \ldots < \mathrm{x}_{N-1} < \mathrm{x}_N = \mathrm{b}$. Для каждого узла сетки составим разностное уравнение, причем в крайних узлах $\mathrm{x}_0 = \mathrm{a}$, $\mathrm{x}_N = \mathrm{b}$ используем краевые условия. В узлах, достаточно удаленных от начала и конца отрезка [a, b], аппроксимации производных строятся по 3-м точкам. Заменим задачу её сеточным аналогом:

$$\frac{Y_{k+1} - 2Y_k + Y_{k-1}}{h^2} + \alpha \frac{Y_{k+1} - Y_{k-1}}{2h} + + \beta |Y_k| + \gamma Y_k{}^3 = F(\sin t_k, \cos t_k),$$

где $k = 0,1,\ldots n-1$.

В результате получим нелинейную систему F(x), состоящую из N+1 нелинейных уравнений с не дифференцируемым оператором:

$$F(Y_{0,} Y_1, \ldots Y_{n+1}) = \begin{cases} Y_0 = 0, \\ \dfrac{Y_2 - 2Y_1 + Y_0}{h^2} + \alpha \dfrac{Y_2 - Y_0}{2h} + \beta |Y_1| + \gamma Y_1{}^3 - F(\sin t_1, \cos t_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{Y_{k+1} - 2Y_k + Y_{k-1}}{h^2} + \alpha \dfrac{Y_{k+1} - Y_{k-1}}{2h} + \beta |Y_k| + \gamma Y_k{}^3 - F(\sin t_k, \cos t_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{n+1} = 0, \end{cases}$$

где $k = 0,1,\ldots n-1$.