МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»
Факультет инновационной деятельности, управления и финансов

Кафедра информатики и прикладной математики

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ №2

по дисциплине **«Информатика»**
и краткие методические указания по их выполнению
для студентов инженерно-технической специальности
70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»
заочной формы обучения

БРЕСТ 2011

УДК 004.9

Задания по дисциплине «*Информатика*» к контрольной работе № 2 предназначены для студентов первого курса специальности «*Промышленное и гражданское строительство*» заочной формы обучения.

Методические рекомендации содержат сведения о требованиях к содержанию, структуре и оформлению контрольных работ, примеры решения типовых задач, приведенные для выполнения в среде EXCEL и системе компьютерной математики MATHCAD. Методические рекомендации имеют целью оказать помощь студентам в подготовке контрольной работе по названной дисциплине.

Составители: Хомицкая Т.Г., ст. преподаватель
Кофанов В.А., ст. преподаватель

Вариант всех заданий выбирается студентом по *таблице 1* следующим образом. Пусть студент Иванов П.С. имеет шифр 8453217. Тогда отыскиваем в *таблице 1* столбец с буквой **И** (первая буква фамилии) и строку с номером **7** (последняя цифра шифра). На пересечении столбца **И** со строкой **7** находим числа ***4*** и ***15***. Первое число (***4***) означает номер варианта в *разделе А* задания, второе число (***15***) – номер варианта в *разделе Б* того же задания.

Таким образом, задание 2 КР №2 у Иванова П.С. формулируется следующим образом:

ЗАДАНИЕ 2.

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$3 \cdot y''(x) + 0 \cdot y'(x) - 1 \cdot y(x) = 3 - 7 \cdot x;\ y(-3) = -1,\ y'(-3) = 0.$$

I. Найти решение $y(x)$, $x \in [-3, -1]$, задачи Коши, используя

1) аналитический способ (рекомендуется использовать MATHCAD);
2) метод Рунге-Кутты IV порядка точности: вычислить «вручную» значения $y(-3+h)$, $y'(-3+h)$, где $h = \frac{2}{N}$ при разбиении $N = 10$;
3) встроенные возможности системы MATHCAD.

II. Построить графики функции $y(x)$, $x \in [-3, -1]$, для всех пунктов 1 , 3.

Аналогично формируются другие задания контрольных работ.

ТАБЛИЦА 1. I – начальная буква фамилии; II – последняя цифра шифра.

I / II	А Б	В Г	Д Е,Ё Ж	З И,Й К	Л М Н	О П Р	С Т У	Ф Х Ц	Ч Ш Щ,Ы	Э Ю Я
0	3,14	1,8	2,11	4,20	5,5	2,7	3,4	1,13	4,3	5,9
1	4,5	3,2	5,7	2,6	1,14	3,13	5,10	2,8	1,4	4,12
2	2,4	4,10	3,12	1,1	5,19	5,1	1,16	4,11	3,15	2,15
3	1,20	2,16	4,17	5,16	2,12	3,7	4,18	1,3	5,2	3,5
4	4,14	5,18	1,19	2,20	3,16	4,1	5,14	3,1	2,14	1,15
5	2,18	4,19	1,6	3,18	4,6	1,12	2,17	5,6	3,9	5,3
6	5,4	3,17	4,9	1,10	3,3	4,16	1,2	2,3	5,17	2,9
7	1,9	2,10	5,15	4,15	2,1	5,12	3,8	4,2	1,5	3,19
8	3,6	5,20	2,5	3,20	4,8	1,11	2,2	5,13	4,13	1,17
9	5,11	1,7	3,10	5,8	1,18	2,13	4,7	3,11	2,19	4,4

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Студент должен выполнить контрольную работу, строго придерживаясь указанных ниже требований. Работа, выполненная без их соблюдения, к защите не допускается и возвращается студенту на доработку.

1. Контрольная работа должна быть выполнена строго по варианту. Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, возвращается студенту без проверки и к защите не допускается.
2. Контрольная работа должна быть оформлена на отдельных пронумерованных листах формата А4, на каждом из которых должна стоять личная подпись.
3. Для выполнения заданий контрольной работы рекомендуется использовать версии ***Microsoft Excel 2003*** и ***MathCAD 13***;
4. Контрольная работа должна содержать:
   - **титульный лист** (см. приложение);
   - **номер варианта** (раздел А, раздел Б);
   - **полное условие каждого задания**;
   - **распечатки** на принтере в соответствии с заданием **документов** MathCAD, **рабочих листов** Excel с результатами вычислений (с выводом заголовков строк и столбцов, без сетки) и **отчетов по результатам** (для заданий, выполненных с помощью *Поиск решений*); **программ из редактора** VBA;
   - **описание** действий, применяемых для решения каждого задания;
   - **перечень** используемой литературы.
5. **Формат** вывода всех числовых результатов должен быть в обычном виде и не менее чем с 8 (*восемью*) цифрами после десятичного разделителя.
6. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена на проверку **за две недели** до начала сессии. Студент обязан учесть все замечания рецензента и, не переписывая работу, внести в нее необходимые исправления.
7. Документы Excel и MathCAD должны быть оформлены в виде файлов на рабочем диске (R:) ЛВС БрГТУ **к началу сессии**.

При условии правильности выполнения контрольная работа **допускается к защите**. Студенты, допущенные к защите и успешно выполнившие лабораторные работы в сессию, допускаются к сдаче зачета по дисциплине.

Зачет предполагает полные ответы на любые вопросы из списка вопросов к зачету или выполнение аналогичного задания за компьютером в присутствии преподавателя.

Методические материалы (конспект и примеры из лекций, лабораторные работы, вопросы и примеры к контролю знаний), связанные с выполнением контрольных работ и подготовкой к успешной сдаче зачета, находятся в локальной вычислительной сети БрГТУ в папке:

U:\ VT&PM \ IPK \ Информатика \ ПГС

или на сайте кафедры ИиПМ: **iipm.bstu.by**

Для консультаций по дисциплине «*Информатика*»: **bstu_zf@mail.ru**

Внимание! Во избежание использования серийного шаблона, ***нельзя*** применять переменные для ***всех*** исходных числовых значений. Контрольная работа, выполненная с нарушением этого требования, ***автоматически не допускается к защите***.

ЗАДАНИЕ №1:

В результате экспериментальных исследований при различных значениях $x_i,\ i=\overline{1,N}\ (N \le 15)$, переменной X (*раздел А*) были получены значения $y_i,\ i=\overline{1,N}\ (N \le 15)$, переменной **Y** (*раздел Б*).

<u>Замечание:</u> Значение N выбирается по количеству значений переменной **X** в таблице *раздела А*.

I. По экспериментальным данным $\{x_i, y_i\},\ i=\overline{1,N}$ с помощью метода наименьших квадратов найти параметры зависимости $\varphi(x)$ (*раздел А*), используя
   1) решение экстремальной задачи (в EXCEL и MATHCAD);
   2) решения СЛАУ (в EXCEL и MATHCAD);
   3) встроенные функции (в EXCEL и MATHCAD).

II. Провести анализ построенной зависимостей с помощью коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \varphi(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}, \text{ где } \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i .$$

Раздел А

<table>
<tr><th>№ вар</th><th colspan="16">Таблица значений xx_i переменной X и вариант функции $\varphi(x)$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1.</td><td>X</td><td>1,0</td><td>1,2</td><td>1,5</td><td>1,9</td><td>2,0</td><td>2,4</td><td>2,5</td><td>3,0</td><td>3,1</td><td>3,4</td><td>3,7</td><td>3,8</td><td>3,9</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="16">$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot \sqrt{x} + a_2 \cdot \sin(x^2 + 1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td>X</td><td>0,4</td><td>0,5</td><td>0,7</td><td>0,9</td><td>1,0</td><td>1,2</td><td>1,3</td><td>1,6</td><td>1,8</td><td>2,0</td><td>2,3</td><td>2,7</td><td>2,8</td><td>2,9</td><td>3,3</td></tr>
<tr><td colspan="16">$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot \ln(x^2 + 1) + a_2 \cdot \cos(x)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td>X</td><td>0,8</td><td>1,0</td><td>1,3</td><td>1,7</td><td>1,8</td><td>2,1</td><td>2,2</td><td>2,4</td><td>2,5</td><td>2,9</td><td>3,3</td><td>3,4</td><td>3,5</td><td>3,9</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="16">$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot \sin^2(x + 1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4.</td><td>X</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,6</td><td>0,9</td><td>1,1</td><td>1,2</td><td>1,4</td><td>1,6</td><td>1,7</td><td>1,8</td><td>2,3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="16">$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot \cos(x - 1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5.</td><td>X</td><td>0,6</td><td>0,7</td><td>0,9</td><td>1,2</td><td>1,3</td><td>1,6</td><td>1,7</td><td>1,9</td><td>2,1</td><td>2,4</td><td>2,5</td><td>2,9</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="16">$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot e^x + a_2 \cdot \sin(x + 1)$</td></tr>
</table>

Раздел Б

№ вар	*Экспериментальные значения* y_i *переменной Y*														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1.	2,0	2,5	2,7	2,8	3,3	3,7	3,8	3,9	4,1	4,3	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5
2.	0,8	1,5	2,2	2,3	2,9	3,2	3,3	3,4	3,2	3,1	3,2	3,4	3,6	3,8	3,7
3.	0,6	0,9	1,4	2,0	2,5	2,6	2,7	2,8	2,6	2,4	2,3	2,0	1,8	1,7	1,5
4.	0,4	0,9	1,1	1,3	1,9	2,0	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,5	3,2	2,7	2,5
5.	0,8	1,4	1,8	2,0	2,8	3,0	3,5	3,8	3,9	4,2	5,1	4,8	4,7	4,4	3,8

№ вар	Экспериментальные значения y_i переменной Y														
6.	0,2	0,3	1,0	1,1	1,3	1,5	1,9	2,2	2,3	2,4	2,6	2,7	2,6	2,5	2,0
7.	1,8	2,1	2,3	2,4	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	1,9	1,6	1,1	1,0	0,7	0,2
8.	5,6	5,4	5,3	5,2	5,1	4,9	4,7	4,6	4,2	4,0	3,5	3,0	2,4	1,6	0,6
9.	1,8	2,4	3,1	3,6	3,7	4,1	4,5	4,9	5,2	5,3	5,6	6,0	6,5	7,3	7,5
10.	1,9	2,4	3,0	3,3	3,5	3,8	3,9	4,2	4,0	3,9	3,8	3,7	3,5	3,7	3,3
11.	0,4	0,7	1,0	1,5	2,2	2,4	2,8	2,9	2,5	2,8	3,0	3,3	3,6	3,9	4,0
12.	0,2	0,5	0,8	1,4	2,0	2,7	3,3	3,5	3,6	3,7	4,0	4,1	4,5	4,4	4,2
13.	1,8	2,0	2,4	2,6	2,8	2,9	3,0	3,2	2,9	2,6	2,4	2,3	2,1	2,0	1,6
14.	3,1	3,0	3,5	4,1	3,8	3,3	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,1	2,0	1,4	0,7
15.	5,0	4,7	4,4	4,3	4,2	4,0	4,1	3,9	3,8	3,4	2,9	2,6	1,8	1,3	0,4
16.	1,1	1,2	1,5	1,6	1,8	3,0	3,9	4,6	4,9	5,1	5,2	5,4	5,5	5,9	5,3
17.	0,6	1,2	1,5	1,9	2,0	2,1	2,3	2,4	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,8	1,5
18.	2,0	2,4	3,3	4,0	4,4	4,7	5,0	5,1	5,3	5,5	5,6	5,7	6,0	6,1	6,2
19.	6,2	5,9	5,8	5,5	5,3	4,9	4,7	4,5	3,7	3,4	2,5	1,9	1,6	1,1	0,9
20.	5,2	5,0	4,9	4,4	4,1	3,9	3,5	3,4	3,2	3,5	3,1	3,0	2,5	2,0	1,8

ЗАДАНИЕ №2:

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$p \cdot y''(x) + q \cdot y'(x) + r \cdot y(x) = F(x);\ y(a) = y0,\ \ y'(a) = y1.$$

I. Найти решение $y(x)$, $x \in [a, b]$, задачи Коши, используя

1) аналитический способ (рекомендуется использовать MATHCAD);
2) метод Рунге-Кутты IV порядка точности: вычислить «вручную» значения $y(a+h)$, $y'(a+h)$, где $h = \dfrac{b-a}{N}$ при разбиении N;
3) встроенные возможности системы MATHCAD.

II. Построить графики функции $y(x)$, $x \in [a, b]$, для пунктов 1 и 3.

Замечание: Значения ***a***, ***b*** и ***N*** выбираются из *раздела А*, а значения ***p***, ***q***, ***r***, ***y0***, ***y1*** и функция ***F(x)*** выбираются из *раздела Б*.

Раздел А

№ вар	1.	2.	3.	4.	5.
a	-2	0	1	-3	-1
b	0	2	3	-1	1
N	14	12	18	10	16

Раздел Б

№ вар	***p***	***q***	***r***	***y0***	***y1***	***F(x)***
1.	1	3	0	-2	0	$-6+2\cdot x^2$
2.	-1	5	0	-2	2	$5+2\cdot x$
3.	2	0	-1	3	3	$9-4\cdot x^2$
4.	-3	3	0	3	1	$-3+3\cdot x$
5.	-1	-2	0	2	-1	$7+2\cdot x$
6.	1	0	4	3	2	$-2+3\cdot x$

№ вар	p	q	r	y0	y1	F(x)
7.	-1	3	0	-1	3	$-5+4\cdot x$
8.	-2	0	2	-4	-2	$8-3\cdot x^2$
9.	3	0	-4	-3	0	$-1+2\cdot x$
10.	2	-4	0	-1	-3	$-8+x^2$
11.	-1	0	3	-2	4	$8-2\cdot x$
12.	3	4	0	-3	1	$-6+5\cdot x^2$
13.	3	0	5	-4	1	$9-x^2$
14.	-3	-2	0	3	-3	$4+7\cdot x$
15.	3	0	-1	-1	0	$3-7\cdot x$
16.	1	1	0	-2	-1	$5-3\cdot x^2$
17.	-2	0	-3	0	2	$2-9\cdot x$
18.	-1	4	0	-1	3	$-3+4\cdot x^2$
19.	-1	0	2	-4	4	$-7+x^2$
20.	2	0	-2	-3	1	$3-2\cdot x^2$

ЗАДАНИЕ №3:

Груз D массой m, получив в точке A начальное ускорение, начинает движение из состояния покоя в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы либо оба наклонные, либо один горизонтальный, а другой наклонный.

На участке AB длиной S_p на груз кроме силы тяжести (g принять равной 9,8) действуют движущая сила F и сила сопротивления среды F_c.

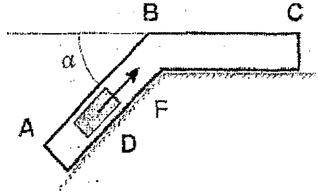
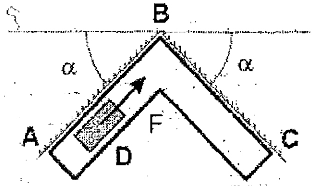
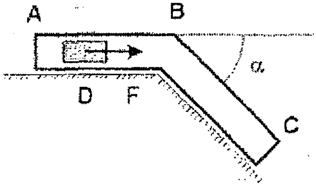
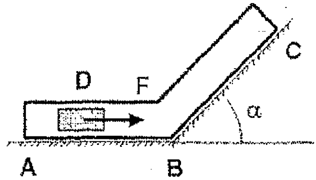
В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действует сила сопротивления среды. На участке торможения BC груз двигается до полной остановки за счет накопленной при разгоне кинетической энергии.

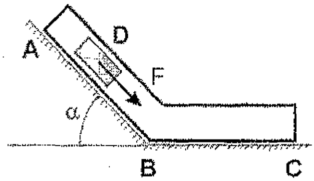
Требуется:

- определить скорость, ускорение и время на участке AB, используя метод Рунге-Кутты решения дифференциальных уравнений (при числе разбиений $N = 4\cdot n$);
- установить время T_p прохождения грузом D участка AB (с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$);
- определить скорость, ускорение и время на участке BC в n точках с шагом $h = 0{,}1$;
- установить время T_T прохождения грузом D участка BC (с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$), используя анализ экспериментальных данных методом наименьших квадратов и встроенные возможности для решения уравнений в вычислительных системах;
- построить графики $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ в диапазоне от начала до окончания движения.

Замечание: Вариант изогнутой трубы ABC выбирается из *раздела А*, а значения m, F_0, c, F_c, S_p, n, α, $F_d(s)$ из *раздела Б*.

Раздел А: *варианты труб* **ABC**.

№ вар	Рисунок	№ вар	Рисунок
1.		3.	
2.		4.	

№ вар	Рисунок
5.	

Раздел Б: *варианты параметров задачи.*

№ вар	m, кг	F_0, Н	c	F_c, Н	S_p, м	α, град	n	$F_d(s)$, Н
1.	3	51	0,25	21	0,8	27	6	$F_0+11\cdot c\cdot S^2$
2.	4	48	0,30	27	0,2	25	6	$F_0+15\cdot c\cdot S$
3.	3	53	0,26	25	0,6	31	5	$F_0+7\cdot c$
4.	2	46	0,34	18	0,5	29	8	$F_0+7\cdot c$
5.	4	51	0,26	27	0,4	30	8	$F_0+8\cdot c\cdot S^2$
6.	2	42	0,35	23	0,1	27	8	$F_0+4\cdot c\cdot\sqrt{S}+\sin(S)$
7.	1	38	0,25	15	0,5	38	6	$F_0+6\cdot c\cdot\sin(S)+S$
8.	4	47	0,28	19	0,2	23	7	$F_0+3\cdot c\cdot\sin(S)$
9.	3	52	0,34	26	0,7	39	8	$F_0+c\cdot\lg(S+2)+c\cdot\sqrt{S}$
10.	2	34	0,23	15	0,4	31	6	$F_0+5\cdot c\cdot\sin(S)$
11.	4	43	0,32	17	0,3	24	8	$F_0+10\cdot c$
12.	2	49	0,21	18	0,2	40	7	$F_0+c\cdot\lg(S+2)$
13.	3	57	0,22	23	0,9	41	5	$F_0+c\cdot\lg(S+3)$

№ вар	m, кг	F_0, Н	c	F_c, Н	S_p, м	α, град	n	$F_d(s)$, Н
14.	1	40	0,32	22	0,4	32	6	$F_0 + 2 \cdot c \cdot cos(S) + S$
15.	3	34	0,25	17	0,9	27	8	$F_0 + c \cdot lg(S+4) + c \cdot \sqrt{S}$
16.	5	48	0,29	26	0,7	23	5	$F_0 + 7 \cdot c \cdot \sqrt{S} + sin(S)$
17.	1	54	0,26	22	0,8	44	7	$F_0 + 4 \cdot c \cdot sin(S)$
18.	3	46	0,35	25	0,6	29	5	$F_0 + 5 \cdot c \cdot S + 2 \cdot sin(S)$
19.	2	29	0,27	14	0,2	34	8	$F_0 + c \cdot \sqrt{S}$
20.	4	41	0,31	15	0,5	18	6	$F_0 + c \cdot \sqrt{S} + cos(S)$

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ №1:

Пусть требуется выполнить задание:

В результате экспериментальных исследований были получены следующие данные:

X	1,0	1,5	2,0	2,8	3,0
Y	0,5	1,7	1,5	2,1	2,3

I. По экспериментальным данным $\{x_i, y_i\}$, $i = \overline{1,5}$ найти параметры зависимости $\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot ln(x)$ с помощью метода наименьших квадратов, используя
   1) решение экстремальной задачи (в EXCEL и MATHCAD);
   2) решения СЛАУ (в EXCEL и MATHCAD);
   3) встроенные функции (в EXCEL и MATHCAD).

II. Провести анализ построенных зависимостей с помощью коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \varphi(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2}, \text{ где } \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i .$$

Пример выполнения задания:

I. С помощью метода наименьших квадратов вычислим параметры a_0, a_1 и a_2 зависимости $\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot ln(x)$.

Экстремальная задача примет вид:

$$\Phi(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{N}(\varphi(x_i, a_0, a_1, a_2) - y_i)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}((a_0 + a_1 \cdot x_i^2 + a_2 \cdot ln(x_i)) - y_i)^2 \to min$$

Для того, чтобы получить решение данной задачи, необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi(a_0,a_1,a_2)}{\partial a_0}=0;\\ \dfrac{\partial\Phi(a_0,a_1,a_2)}{\partial a_1}=0;\\ \dfrac{\partial\Phi(a_0,a_1,a_2)}{\partial a_2}=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum_{i=1}^{N}\left[(\varphi(x_i,a_0,a_1,a_2)-y_i)\left.\dfrac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_0}\right|_{x=x_i}\right]=0;\\ \sum_{i=1}^{N}\left[(\varphi(x_i,a_0,a_1,a_2)-y_i)\left.\dfrac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_1}\right|_{x=x_i}\right]=0;\\ \sum_{i=1}^{N}\left[(\varphi(x_i,a_0,a_1,a_2)-y_i)\left.\dfrac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_2}\right|_{x=x_i}\right]=0.\end{cases}$$

Определим составляющие системы уравнений:

$$\psi_1(x)=\frac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{a_0}=1;\ \ \psi_2(x)=\frac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{a_1}=x^2;$$

$$\psi_3(x)=\frac{\partial\varphi(x,a_0,a_1,a_2)}{a_2}=\ln(x).$$

Параметры искомой зависимости находятся из системы:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}((a_0+a_1\cdot x_i^2+a_2\cdot\ln(x_i))-y_i)\cdot 1=0;\\ \sum_{i=1}^{N}((a_0+a_1\cdot x_i^2+a_2\cdot\ln(x_i))-y_i)\cdot x_i^2=0;\\ \sum_{i=1}^{N}((a_0+a_1\cdot x_i^2+a_2\cdot\ln(x_i))-y_i)\cdot\ln(x_i)=0,\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}(a_0+a_1\cdot x_i^2+a_2\cdot\ln(x_i)-y_i)=0;\\ \sum_{i=1}^{N}(a_0\cdot x_i^2+a_1\cdot x_i^4+a_2\cdot x_i^2\cdot\ln(x_i)-y_i\cdot x_i^2)=0;\\ \sum_{i=1}^{N}(a_0\cdot\ln(x_i)+a_1\cdot x_i^2\cdot\ln(x_i)+a_2\cdot\ln^2(x_i)-y_i\cdot\ln(x_i))=0,\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_0\cdot N & +a_1\cdot\sum_i^N x_i^2 & +a_2\cdot\sum_{i=1}^N\ln(x_i) & =\sum_{i=1}^N y_i;\\ a_0\cdot\sum_i^N x_i^2 & +a_1\cdot\sum_i^N x_i^4 & +a_2\cdot\sum_i^N x_i^2\cdot\ln(x_i) & =\sum_{i=1}^N x_i^2\cdot y_i;\\ a_0\cdot\sum_{i=1}^N\ln(x_i) & +a_1\cdot\sum_i^N x_i^2\cdot\ln(x_i) & +a_2\cdot\sum_{i=1}^N\ln^2(x_i) & =\sum_{i=1}^N\ln(x_i)\cdot y_i.\end{cases}$$

Реализация в EXCEL.

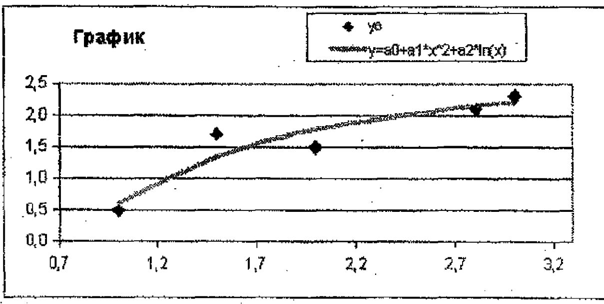
1. Вносим экспериментальные данные на рабочий лист, в диапазон **A5:B9**.
2. Пусть искомые параметры зависимости $\varphi(x)$ будут определены в ячейках **F4** (свободный параметр a_0), **F5** (параметр a_1 при функции x^2) и **F6** (параметр a_2 при функции $\ln(x)$).
3. Введем формулу, определяющую зависимость $\varphi(x)$, в ячейку **C5**: **=F4 + F5 * A5^2 + F6 * LN(A5)**. Используя автозаполнение, тиражируем формулу на соответствующий диапазон: **C5 → C6:C9**.
4. В соответствии с функционалом экстремальной задачи введем формулу в ячейку **F8**: **=СУММКВРАЗН(C5:C9 ; B5:B9)**.

5. Введем параметры диалогового окна надстройки *Поиск решения* (*Сервис → Поиск решения*):

установить целевую ячейку	**F8**
равной	**◉ минимальному значению**
изменяя ячейки	**F4:F6**

В результате выполнения будут получены значения искомых параметров, расчетные значения линейной зависимости и сумма квадратов отклонений экспериментальных и расчетных значений:

	A	B	C	D	E	F
1	**Подбор параметров расчетной функции:**					
2	***пункт 1***					
3	*Экспериментальные данные:*		*Расчетные значения:*		*Решение экстремальной задачи*	
4	**xe**	**ye**	**y=a0+a1*x^2+a2*ln(x)**		**a0=**	0,699488873
5	1,0	0,5	0,619865958		**a1=**	-0,079622914
6	1,5	1,7	1,339683184		**a2=**	2,020755552
7	2,0	1,5	1,781678229			
8	2,8	2,1	2,155854379		**S=**	0,236084952
9	3,0	2,3	2,202909526			
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						



6. Построим точечный график функций по экспериментальным и расчетным значениям.
7. Сформируем СЛАУ для решения задачи:
   - введем экспериментальные данные[1] в диапазон **B29:C33**;
   - проведем предварительные расчеты

     ячейка **D29**: **=B29^2** → **D30:D33**

     ячейка **E29**: **=LN(B29)** → **E30:E33**
   - зададим матрицу коэффициентов при неизвестных (А) в диапазон **B37:D39** и вектор свободных коэффициентов (В) в диапазон **F37:F39**, используя функции **СУММ()** и **СУММПРОИЗВ()**. Например,

     ячейка **C37**: **=СУММ(D29:D33)**

     ячейка **C38**: **=СУММПРОИЗВ(D29:D33 ; D29:D33)** и т.д.
8. Решим СЛАУ, используя, например, матричный способ:
   - вычислим обратную матрицу A^{-1}, т.е. введем формулу массивов в диапазон ячеек **B42:D44**: **=МОБР(B37:D39)**
   - найдем вектор-решение в диапазон ячеек **F42:F44**: **=МУМНОЖ(B42:D44 ; F37:F39)**

[1] Экспериментальные данные можно скопировать из диапазона A5:B9

В результате выполнения будут получены значения искомых параметров:

	A	B	C	D	E	F
1	**Подбор параметров расчетной функции:**					
26	*пункт 2*					
27		*Экспериментальные данные:*		*Расчетные значения:*		
28	**n**	**xe**	**ye**	**xe^2**	**ln(xe)**	
29	1	1,0	0,5	1,00	0,00	
30	2	1,5	1,7	2,25	0,41	
31	3	2,0	1,5	4,00	0,69	
32	4	2,8	2,1	7,84	1,03	
33	5	3,0	2,3	9,00	1,10	
34						
35	*Решение СЛАУ:*					
36		A=				B=
37		5	24,09	3,23		8,1
38		24,09	164,52810	21,64461		47,48900
39		3,23	21,64461	2,91192		6,41802
40						
41		A^(-1)=				**Решение**
42		0,70364423	-0,02019786	-0,62961047	**a0=**	0,69948931
43		-0,02019786	0,27519993	-2,0232081	**a1=**	-0,07962445
44		-0,62961047	-2,0232081	16,0798401	**a2=**	2,02076908

9. Определим параметры зависимости $\varphi(x)$ с помощью встроенной функции **ЛИНЕЙН()**:
   - введем экспериментальные данные в диапазон **A49:B53**;
   - поскольку зависимость $\varphi(x)$ есть линейная комбинация функций $\{1, x^2, \ln(x)\}$ и параметров $\{a_0, a_1, a_2\}$, то проведем расчет необходимых данных

     ячейка **D49**: **=A49^2** → **D50:D53**

     ячейка **E49**: **=LN(A49)** → **E50:E53**
   - проведем расчет с помощью статистической функции

   диапазон **G49:I53**: **=ЛИНЕЙН(B49:B53;D49:E53;;1)**

Замечание: Функция **ЛИНЕЙН()** является формулой массивов. При требовании вывода статистических данных (параметр *статистика* = **ИСТИНА**), результат есть диапазон 5 строк на $m + 1$ столбец, где $m + 1$ – количество параметров исследуемой зависимости.

В выводимой функцией **ЛИНЕЙН()** таблице результатов представлены следующие значения:

a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	...	a_1	a_0
$\sigma(a_m)$	$\sigma(a_{m-1})$	$\sigma(a_{m-2})$		$\sigma(a_1)$	$\sigma(a_0)$
R^2	$\sigma(y)$	#Н/Д		#Н/Д	#Н/Д
Fрасч	df	#Н/Д		#Н/Д	#Н/Д
SSрег	SSрасч	#Н/Д		#Н/Д	#Н/Д

Здесь

$a_0, a_1, \ldots, a_m$ – параметры исследуемой зависимости;

$\sigma(a_0), \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m)$ – стандартные отклонения параметров;

$\sigma(y)$	– стандартное отклонение y;
R^2	– коэффициент детерминации;
Fрасч	– F-статистика;
df	– число степеней свободы;
SSрег	– регрессионная сумма квадратов;
SSрасч	– остаточная сумма квадратов.

В результате выполнения будут получены значения искомых параметров и данные для анализа:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Подбор параметров расчетной функции:**								
46	*пункт 3*								
47	*Экспериментальные данные:*			*Расчетные значения:*			*Встроенные функции*		
48	**xe**	**ye**		**xe^2**	**ln(xe)**		**a2**	**a1**	**a0**
49	1,0	0,5		1,00	0,00		2,0207691	-0,079624	0,6994893
50	1,5	1,7		2,25	0,41		1,377717	0,1802367	0,2882012
51	2,0	1,5		4,00	0,69		0,8800381	0,3435731	#Н/Д
52	2,8	2,1		7,84	1,03		7,3359824	2	#Н/Д
53	3,0	2,3		9,00	1,10		1,731915	0,236086	#Н/Д

Реализация в MATHCAD.

$ORIGIN := 1$

Исходные данные:

$$xe := \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \\ 2.8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad ye := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.7 \\ 1.5 \\ 2.1 \\ 2.3 \end{pmatrix}$$

индекс последнего элемента $n := \mathrm{length}(xe)$ $n = 5$

Подбор параметров зависимости ϕ(x)

пункт 1

$\phi(x, a0, a1, a2) := a0 + a1\cdot x^2 + a2\cdot \ln(x)$ - расчетная функция

$\Phi(a0, a1, a2) := \sum_{i=1}^{n} \left(\phi\left(xe_i, a0, a1, a2\right) - ye_i\right)^2$ - экстремальная функция

решение экстремальной задачи

$a0 := 0$ $a1 := 0$ $a2 := 0$ - начальные значения

$\begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(\Phi, a0, a1, a2)$ - решение задачи

$a0 = 0.699489$ $a1 = -0.079624$ $a2 = 2.020769$ - вывод результатов

$\Phi(a0, a1, a2) = 0.236085$

пункт 2

определение параметров СЛАУ

(матрицы при неизвестных и вектора свободных членов)

$$A := \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} (xe_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} \ln(xe_i) \\ \sum_{i=1}^{n} (xe_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} (xe_i)^4 & \sum_{i=1}^{n} \left[(xe_i)^2 \cdot \ln(xe_i)\right] \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(xe_i) & \sum_{i=1}^{n} \left[(xe_i)^2 \cdot \ln(xe_i)\right] & \sum_{i=1}^{n} \ln(xe_i)^2 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} ye_i \\ \sum_{i=1}^{n} \left[ye_i \cdot (xe_i)^2\right] \\ \sum_{i=1}^{n} (ye_i \cdot \ln(xe_i)) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 24.09 & 3.226844 \\ 24.09 & 164.5281 & 21.644612 \\ 3.226844 & 21.644612 & 2.91192 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8.1 \\ 47.489 \\ 6.41802 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} := \mathrm{lsolve}(A,B)$$ - решение СЛАУ

$a0 = 0.699489 \quad a1 = -0.079624 \quad a2 = 2.020769$ - вывод результатов

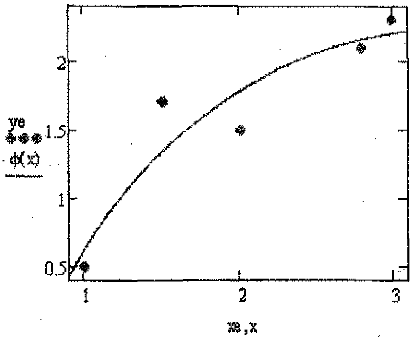
пункт 3

$$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \\ \ln(x) \end{pmatrix}$$ - определения набора функций

$$\begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} := \mathrm{linfit}(xe, ye, F) \quad \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.699489 \\ -0.079624 \\ 2.020769 \end{pmatrix}$$ - определение параметров расчетной функции

Графическое представление результатов

Расчетная функция: $\phi(x) := a0 + a1 \cdot x^2 + a2 \cdot \ln(x)$



Коэффициенты детерминации для исследуемых зависимостей:

$$R2 := 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(ye_i - \phi(xe_i)\right)^2}{n \cdot \mathrm{mean}(ye)^2}$$

$R2 = 0.880038$

II. Проведем анализ построенной зависимости с помощью коэффициента детерминации.

Данный показатель является статистической мерой согласия, с помощью которой можно определить, насколько исследуемая зависимость соответствует реальным данными.

Поскольку коэффициент детерминации $R^2 \geq 0.75$ для исследуемой зависимости, то исследуемая модель имеет высокую значимость.

Задание №2:

Пусть требуется выполнить задание:

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$y''(x)-2\cdot y'(x)+3\cdot y(x)=1+x;\quad y(-2)=-1,\ y'(-2)=0.$$

I. Найти решение $y(x)$, $x\in[-2,0]$, задачи Коши, используя

1) аналитический способ (рекомендуется использовать MathCAD);
2) метод Рунге-Кутты IV порядка точности:
   (а) вычислить «вручную» значения $y(-2+h)$, $y'(-2+h)$, где $h=\dfrac{0-(-2)}{N}=\dfrac{2}{N}$ при разбиении N = 10;
   (б) составить макрос (процедуру) в VBA и выполнить его в Excel с выводом результатов на рабочий лист при разбиении N = 10;
3) встроенные возможности системы MathCAD.

II. Построить графики функции $y(x)$, $x\in[-2,0]$ для всех пунктов 1 , 3.

Пример выполнения задания:

1. Найдем решение $y(x)$ аналитическим способом (для удобства расчетов используем математическую систему MathCAD).

Дано дифференциальное уравнение (ДУ)

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)-2\cdot\frac{d}{dx}y(x)+3\cdot y(x)=1+x\qquad y(-2)=-1\quad y'(-2)=0$$

1) Общее решение соответсвующего однородного ДУ

$$kf:=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$ - вектор коэффициентов характеристического уравнения λ^2-2 λ+3=0

$$\begin{pmatrix}\lambda1\\\lambda2\end{pmatrix}:=\mathrm{polyroots}(kf)$$ - решение характеристического уравнения

$$\begin{pmatrix}\lambda1\\\lambda2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1.41421i\\1-1.41421i\end{pmatrix}$$ - корни характеристического уравнения

$\alpha:=\mathrm{Re}(\lambda1)\qquad \alpha=1$ - действительная часть комплексного числа

$\beta:=\mathrm{Im}(\lambda1)\qquad \beta=1.41421$ - мнимая часть комплексного числа

Поскольку решение характеристического уравнения есть комплексные корни, то общее решение однородного дифференциального уравнения принимает вид

$$yo(x,c1,c2):=e^{\alpha\cdot x}\cdot(c1\cdot\cos(\beta\cdot x)+c2\cdot\sin(\beta\cdot x))$$

2) Частное решение дифференциального уравнение

Поскольку правая часть дифференциального уравнения имеет вид 1+x, то частное решение принимает вид

$$vc(x,k1,k2):=k1+k2\cdot x$$

Подставим частное решение в левую часть дифференциального уравнения

$$F(x,k1,k2) := \frac{d^2}{dx^2}yc(x,k1,k2) - 2\cdot\frac{d}{dx}yc(x,k1,k2) + 3\cdot yc(x,k1,k2)$$

в левой части после подстановки частного решения:

$$F(x,k1,k2) \rightarrow 3\cdot k1 - 2\cdot k2 + 3\cdot k2\cdot x$$

сгруппируем коффициенты: $F(x,k1,k2)\ \text{coeffs},x \rightarrow \begin{pmatrix} 3\cdot k1 - 2\cdot k2 \\ 3\cdot k2 \end{pmatrix}$

Определим коэффициенты k1 и k2, приравняв коэффиценты в левой и правой частях дифференциального уравнения:

$k1 := 0 \qquad k2 := 0$

Given

$(-2)\cdot k2 + 3\cdot k1 = 1$

$3\cdot k2 = 1$

$\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \end{pmatrix} := \text{Find}(k1,k2) \qquad k1 = 0.55556 \qquad k2 = 0.33333$

3) Найдем решение y(x), удовлетворяющее начальным условиям

Решение дифференциального уравнения (сумма общего и частного решений)

$$y(x,c1,c2) := yo(x,c1,c2) + yc(x,k1,k2)$$

$$y1(x,c1,c2) := \frac{d}{dx}y(x,c1,c2)$$

Найдем коэффициенты c1 и c2, исходя из начальных условий $y(-2) = -1$, $y'(-2) = 0$

$c1 := 0 \qquad c2 := 0$

Given

$y(-2,c1,c2) = -1$

$y1(-2,c1,c2) = 0$

$\begin{pmatrix} c1 \\ c2 \end{pmatrix} := \text{Find}(c1,c2) \qquad c1 = 7.14284 \qquad c2 = -0.73809$

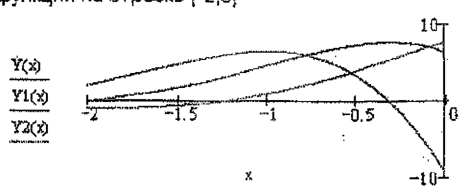
Формируем решение y(x) дифференциального уравнения и вычисляем значения в контрольных точках:

$Y(x) := y(x,c1,c2) \qquad Y1(x) := y1(x,c1,c2) \qquad Y2(x) := \frac{d^2}{dx^2}Y(x)$

$Y(-2) = -1 \qquad Y1(-2) = 1.43832\times10^{-14} \qquad Y2(-2) = 2$

$Y(0) = 7.69839 \qquad Y1(0) = 6.43236 \qquad Y2(0) = -9.23046$

График функций на отрезке [-2,0]



2. Найдем решение $y(x)$ методом Рунге-Кутты IV порядка точности.

Наиболее значимыми в настоящее время являются численные методы решения дифференциальных уравнений. Методы Рунге – Кутты – являются важными численными алгоритмами решения (систем) обыкновенных дифференциальных уравнений. Данные итеративные методы явного и неявного приближенного вычисления были разработаны около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М.В. Куттой. Наиболее часто используется и реализована в различных математических пакетах стандартная схема четвёртого порядка.

<u>Схема решения</u>:

Как правило, вычисления проводятся с *расчетным шагом* $h = \dfrac{b-a}{n}$, а *расчетными узлами* служат точки $x_i = x_0 + i \cdot h \ (i = 0,1,\dots,n)$ промежутка $[a,b]$. Целью использования метода является построение таблицы приближенных значений y_i решения $y = y(x)$ в расчетных точках x_i:

x	$x_0 = a$	x_1	x_2	...	$x_n = b$
y	$y_0 = y(a)$	y_1	y_2	...	$y_n \approx y(b)$

Преобразуем дифференциальное уравнение второго порядка

$$p \cdot y''(x) + q \cdot y'(x) + r \cdot y(x) = F(x);\ y(a) = y0,\ y'(a) = y1$$

в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

- введем замену $z(x) = y'(x)$, тогда $z'(x) = y''(x)$;
- дифференциальное уравнение примет вид

$$p \cdot z'(x) + q \cdot z(x) + r \cdot y(x) = F(x);\ y(a) = y0,\ z(a) = y1$$

- сформируем систему

$$\begin{cases} y'(x) = z(x), \\ z'(x) = \dfrac{F(x) - q \cdot z(x) - r \cdot y(x)}{p}; \end{cases}$$

$$y(a) = y0,\ z(a) = y1.$$

Введем обозначение $D(x, y(x), z(x)) = \dfrac{F(x) - q \cdot z(x) - r \cdot y(x)}{p}$.

На *начальном* ($i = 0$) *шаге* полагаем:

$$x_0 = a, y_0 = y(a), z_0 = z(a).$$

Тогда формулы метода Рунге-Кутты, применяемые на *одном* ($i = 1,2,\dots,n$) *шаге*, имеют вид:

$$k_1^{(i)} = h \cdot z_i\ ,\ m_1^{(i)} = h \cdot D(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_2^{(i)} = h \cdot \left(z_i + \frac{m_1^{(i)}}{2}\right),\ m_2^{(i)} = h \cdot D\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{m_1^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot \left(z_i + \frac{m_2^{(i)}}{2}\right),\ m_3^{(i)} = h \cdot D\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{m_2^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_4^{(i)} = h \cdot \left(z_i + m_3^{(i)}\right),\ m_4^{(i)} = h \cdot D\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + m_3^{(i)}\right)$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\cdot\left(k_1^{(i)} + 2\cdot k_2^{(i)} + 2\cdot k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$$

$$\Delta z_i = \frac{1}{6}\cdot\left(m_1^{(i)} + 2\cdot m_2^{(i)} + 2\cdot m_3^{(i)} + m_4^{(i)}\right)$$

$$x_{i+1} = x_i + h,\ y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,\ z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$$

В результате будет получена таблица приближенных значений y_i искомой функции $y(x)$, а также приближенные значения z_i функции $z(x) = y'(x)$.

Рассмотрим заданное дифференциальное уравнение второго порядка. Преобразуем его в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

- введем замену $z(x) = y'(x)$, тогда $z'(x) = y''(x)$;
- дифференциальное уравнение примет вид
  $$z'(x) - 2\cdot z(x) + 3\cdot y(x) = 1 + x;\quad y(-2) = -1,\ z(-2) = 0;$$
- сформируем систему

$$\begin{cases} y'(x) = z(x), \\ z'(x) = \dfrac{1 + x + 2\cdot z(x) - 3\cdot y(x)}{1}; \end{cases}$$

$$y(-2) = -1,\ z(-2) = 0.$$

Вспомогательная функция примет вид:

$$D(x, y(x), z(x)) = 1 + x + 2\cdot z(x) - 3\cdot y(x).$$

Используя формулы метода Рунге-Кутты IV порядка, вычислим значения функции $y(-2+h)$, $y'(-2+h)$ при $h = 2/10 = 1/5$.

На *начальном шаге* полагаем: $x_0 = -2,\ y_0 = -1,\ z_0 = 0.$

Тогда на *следующем шаге* имеем:

$$k_1^{(0)} = \frac{1}{5}\cdot 0 = 0,$$

$$m_1^{(0)} = \frac{1}{5}\cdot D(-2,-1,0) = \frac{1}{5}\cdot(1-2+2\cdot 0-3\cdot(-1)) = \frac{1}{5}\cdot 2 = \frac{2}{5} = 0.4,$$

$$k_2^{(0)} = \frac{1}{5}\cdot\left(0 + \frac{2/5}{2}\right) = \frac{1}{25} = 0.04,$$

$$m_2^{(0)} = \frac{1}{5}\cdot D\left(-2+\frac{1}{10}, -1+\frac{0}{2}, 0+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}\cdot D\left(-\frac{19}{10}, -1, \frac{1}{5}\right) =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\left(1 - \frac{19}{10} + 2\cdot\frac{1}{5} - 3\cdot(-1)\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2} = \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$k_3^{(0)} = \frac{1}{5}\cdot\left(0 + \frac{1/2}{2}\right) = \frac{1}{20} = 0.05,$$

$$m_3^{(0)} = \frac{1}{5}\cdot D\left(-2+\frac{1}{10}, -1+\frac{1/25}{2}, 0+\frac{1/2}{2}\right) = \frac{1}{5}\cdot D\left(-\frac{19}{10}, -\frac{49}{50}, \frac{1}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\left(1 - \frac{19}{10} + 2\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\left(-\frac{49}{50}\right)\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{127}{50} = \frac{127}{250} = 0.508,$$

$$k_4^{(0)}=\frac{1}{5}\cdot\left(0+\frac{127}{250}\right)=\frac{127}{1250}=0.1016,$$

$$m_4^{(0)}=\frac{1}{5}\cdot D\left(-2+\frac{1}{5},-1+\frac{1}{20},0+\frac{127}{250}\right)=\frac{1}{5}\cdot D\left(-\frac{9}{5},-\frac{19}{20},\frac{127}{250}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{9}{5}+2\cdot\frac{127}{250}-3\cdot\left(-\frac{19}{20}\right)\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1533}{500}=\frac{1533}{2500}=0.6132,$$

$$\Delta y_0=\frac{1}{6}\cdot\left(0+2\cdot\frac{1}{25}+2\cdot\frac{1}{20}+\frac{127}{1250}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{176}{625}=\frac{88}{1875}\approx 0.04693333,$$

$$\Delta z_0=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{127}{250}+\frac{1533}{2500}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{7573}{2500}=\frac{7573}{15000}\approx 0.50486667,$$

$$x_1=-2+\frac{1}{5}=-\frac{9}{5}=-1.8,$$

$$y\left(-\frac{9}{5}\right)=y_1=-1+\frac{88}{1875}=-\frac{1787}{1875}\approx -0.95306667,$$

$$y'\left(-\frac{9}{5}\right)=z_1=0+\frac{7573}{15000}=\frac{7573}{15000}\approx 0.50486667.$$

3. Найдем решение $y(x)$, используя встроенные возможности MathCAD.

Замена: $z(x)=\frac{d}{dx}y(x)$

Система двух дифференциальных уравнений первого порядка .

$$\frac{d}{dx}y(x)=z(x) \qquad y(-2)=-1$$

$$\frac{d}{dx}z(x)=1+x+2\cdot z(x)-3\cdot y(x) \qquad z(-2)=0$$

$u:=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ - вектор начальных условий

$u_0=-1 \qquad u_1=0$

$D(x,u):=\begin{pmatrix}u_1\\1+x+2\cdot u_1-3\cdot u_0\end{pmatrix}$ - вектор, содержащий правые части системы дифференциальных уравнений

$ZY:=\mathrm{rkfixed}(u,-2,0,10,D)$ - формирование решения с помощью функции

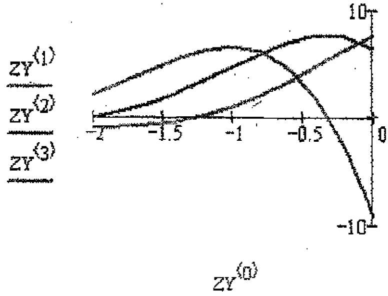
$i:=0..10$

$ZY_{i,3}:=1+ZY_{i,0}+2\cdot ZY_{i,2}-3\cdot ZY_{i,1}$ - вычисление значений функции $y''(x)$

Таблица результатов {x, y(x), y'(x), y"(x)}   График функций

ZY =

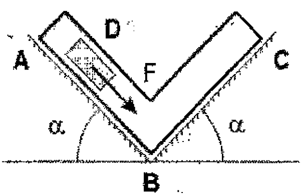
	0	1	2	3
0	-2	-1	0	2
1	-1.8	-0.95307	0.50487	3.06893
2	-1.6	-0.78308	1.23299	4.21521
3	-1.4	-0.44462	2.18778	5.3094
4	-1.2	0.10549	3.34122	6.16601
5	-1	0.90066	4.62251	6.54302
6	-0.8	1.95504	5.90729	6.14946
7	-0.6	3.25177	7.00957	4.66385
8	-0.4	4.73033	7.67855	1.76611
9	-0.2	6.27397	7.60336	-2.8149
10	0	7.69856	6.42897	-9.23776



ЗАДАНИЕ №3:

Пусть требуется выполнить задание:

Груз **D** массой **m = 2 кг**, получив в точке ***A*** начальное ускорение, начинает движение из состояния покоя в изогнутой трубе ***ABC***, расположенной в вертикальной плоскости ($\alpha = 30°$):



На участке ***AB*** длиной S_p **= 0,4 м** на груз кроме силы тяжести действуют движущая сила

$$F(s) = 15 + 2 \cdot 0{,}8 \cdot s^2 \text{ Н}$$

и сила сопротивления среды

$$F_c = 13 \text{ Н.}$$

В точке ***B*** груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок ***BC*** трубы, где на него кроме силы тяжести действует сила сопротивления среды. На участке торможения ***BC*** груз двигается до полной остановки за счет накопленной при разгоне кинетической энергии.

Требуется:

- определить скорость, ускорение и время на участке ***AB***, используя метод Рунге-Кутты решения дифференциальных уравнений (при числе разбиений ***N* = 4·5 = 20**);
- установить время T_p прохождения грузом **D** участка ***AB*** (с точностью ε = 0,00001);
- определить скорость, ускорение и время на участке ***BC*** в ***n* = 5** точках с шагом ***h* = 0,1**;
- установить время T_t прохождения грузом **D** участка ***BC*** (с точностью ε = 0,00001), используя анализ экспериментальных данных методом наименьших квадратов и встроенные возможности для решения уравнений в вычислительных системах;
- построить графики $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ в диапазоне от начала до окончания движения.

Пример выполнения задания:

Исходные данные задачи:

$m := 2$ — масса груза

$Sp := 0.4$ — длина участка AB

$\alpha := \frac{30}{180}\cdot\pi \qquad \alpha = 0.52359878$ — угол наклона

$Fd(s) := 15 + 2\cdot 0.8\cdot s^2$ — движущая сила

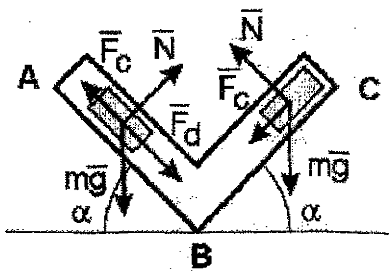
$Fc := 13$ — сила сопротивления

$n := 5$ — количество разбиений

$N := 4\cdot n \qquad N = 20$

$g := 9.8$

Распределение сил на участках:



Уравнение движения
(второй закон Ньютона)

на участке AB

$$m\cdot a = F_d(s) - F_c + m\cdot g\cdot \sin(\alpha)$$

на участке BC

$$m\cdot a = -F_c - m\cdot g\cdot \sin(\alpha)$$

1. Определить скорость, ускорение и время во всех точках участка *AB* и установить время T_p прохождения грузом **D** участка *AB* (с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$).

Поскольку $v(t) = s'(t)$, $a(t) = v'(t) = s''(t)$, *то дифференциальное уравнение примет вид:*

$$s''(t) = \frac{Fd(s(t)) - Fc + m\cdot g\cdot \sin(\alpha)}{m}$$

$$s(0) = 0 \qquad v(0) = 0$$

Определить параметры функции rkfixed():

$usl := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — начальные условия

$D(t, usl) := \begin{pmatrix} usl_1 \\ \dfrac{Fd(usl_0) - Fc + m\cdot g\cdot \sin(\alpha)}{m} \end{pmatrix}$ — вектор-функция из правых частей системы дифференциальных уравнений

$Tp := 0.3679648$

ПОДОБРАТЬ такое значение времени разгона (прохождения участка *AB*) при котором путь станет равным Sp

$zAB := rkfixed(usl, 0, Tp, 20, D)$ — формирование решения

$i := 0..20$

$zAB_{i,3} := \dfrac{Fd(zAB_{i,1}) - Fc + m\cdot g\cdot \sin(\alpha)}{m}$ — значения ускорения на участке *AB*

Результат вычислений:

$zAB := stack[("t"\ \ "s"\ \ "v"\ \ "a"), zAB]$

zAB =

	0	1	2	3
0	"t"	"s"	"v"	"a"
1	0	0	0	5.9
2	0.01839824	0.00099856	0.10854962	5.9000008
3	0.03679648	0.00399424	0.21709933	5.90001276
4	0.05519472	0.00898706	0.32564956	5.90006461
5	0.07359296	0.01597701	0.43420147	...

Контроль значения Тр:

$|zAB_{21,1} - Sp| < 0.00001 = 1$

$sp := zAB_{21,1}$ $sp = 0.40000097$

$vp := zAB_{21,2}$ $vp = 2.18040021$

$Tp := zAB_{21,0}$ $Tp = 0.3679648$ — время разгона (прохождения участка *AB*)

$sp := zAB_{21,1}$ $sp = 0.40000097$ — задать значения расстояния, скорости в начале участка *BC*

$vp := zAB_{21,2}$ $vp = 2.18040021$

2. Определить скорость, ускорение и время во всех точках участка ***BC*** и установить время T_t прохождения грузом **D** участка ***BC*** (с точностью $\varepsilon = 0,00001$).

1) На отрезке $[T_p, T_p + n \cdot h]$, где $n = 5$ и $h = 0.1$, сформировать решение задачи

$$s''(t) = \frac{-F_c - m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{m}$$

с начальными условиями $s(T_p) = s_p$, $v(T_p) = v_p$.

используя функцию **rkfixed()**.

Определить параметры функции rkfixed():

$usl := \begin{pmatrix} sp \\ vp \end{pmatrix}$ — начальные условия

$D(x, usl) := \begin{pmatrix} usl_1 \\ \dfrac{-Fc - m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{m} \end{pmatrix}$ — вектор-функция из правых частей системы дифференциальных уравнений

$Tt := Tp + 5 \cdot 0.1$ $Tt = 0.8679648$ — правая граница отрезка

$y := rkfixed(usl, Tp, Tt, 5, D)$ — формирование решения

Результат вычислений:

$$y = \begin{pmatrix} 0.3679648 & 0.40000097 & 2.18040021 \\ 0.4679648 & 0.56104099 & 1.04040021 \\ 0.5679648 & 0.60808101 & -0.09959979 \\ 0.6679648 & 0.54112103 & -1.23959979 \\ 0.7679648 & 0.36016105 & -2.37959979 \\ 0.8679648 & 0.06520107 & -3.51959979 \end{pmatrix}$$

2) Для полученной совокупности **{x, y}** определить параметры квадратичной зависимости[1] $\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$ с помощью функции **linfit()**:

---

[1] Поскольку a(t) есть константа, то необходимо подобрать параметры квадратичной зависимости.

Определить параметры квадратичной функции ϕ(t):

$$F(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} := \mathrm{linfit}\left(y^{\langle 0\rangle}, y^{\langle 1\rangle}, F\right) \qquad \begin{aligned} a0 &= -1.17407869 \\ a1 &= 6.37519893 \\ a2 &= -5.7 \end{aligned}$$

Определить вспомогательные функции:

$$\phi(t) := a2 \cdot t^2 + a1 \cdot t + a0 \qquad \phi1(t) := \frac{d}{dt}\phi(t) \qquad \phi2(t) := \frac{d^2}{dt^2}\phi(t)$$

3) Поскольку в момент торможения T_t выполняется условие $\mathbf{s}(T_t) = \mathbf{0}$, то для определения момента T_t необходимо решить уравнение $\varphi'(x) = 0$.

Найти значение Tt

$$Tt := \mathrm{root}(\phi1(Tt), Tt)$$

$$Tt = 0.55922798 \qquad \phi1(Tt) = -2.58121296 \times 10^{-15}$$

4) Сформировать на отрезке $[T_p, T_t]$ при количестве разбиений N таблицу значений функций $\{\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)\}$:

Сформировать таблиц значений функций:

$$i := 0..20 \qquad t_i := Tp + \frac{Tt - Tp}{20} \cdot i$$

$$\phi_i := \phi(t_i) \qquad \phi1_i := \phi1(t_i) \qquad \phi2_i := \phi2(t_i)$$

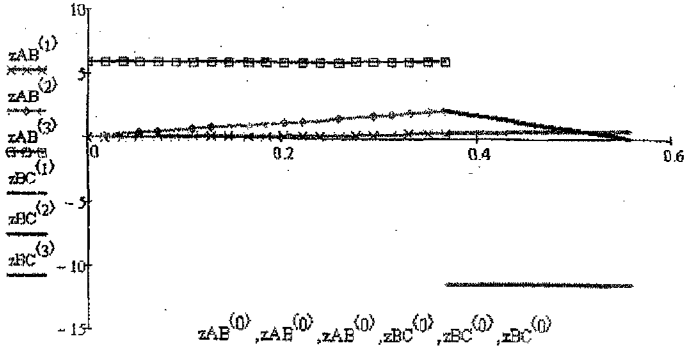
zBC := augment(t, ϕ, ϕ1, ϕ2) — объединение массивов

zBC =

	0	1	2	3
0	0.3679648	0.40000097	2.18040021	-11.4
1	0.37752796	0.4203312	2.0713802	-11.4
2	0.38709112	0.43961885	1.96236019	-11.4
3	0.39665428	0.45786392	1.85334018	-11.4
4	0.40621744	0.47506642	1.74432017	-11.4
5	0.41578059	0.49122634	1.63530016	...

3. Построить графики $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ в диапазоне от начала до окончания движения.

Графики функций s(t), v(t) и a(t) на участках *AB* и *BC*:



ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином, 2006. – 636 с.
2. Плис, А.Н. MathCAD: Математический практикум для инженеров и экономистов: учеб. пособие / А.Н. Плис, Н.А. Сливина. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.
3. Половко, А.М. MathCAD для студента / А.М. Половко, И.В. Ганичев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 336 с.
4. Рудикова, Л. Microsoft Excel для студента. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 368с.
5. Турчак, Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М.: Физматлит, 2002. – 304 с.
6. Черняк, А.А. Высшая математика на базе MathCAD. Общий курс / А.А. Черняк, Ж.А. Черняк, Ю.А. Доманова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 608 с.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО КУРСУ «ИНФОРМАТИКА»

Теоретическая часть.

1. Определения из теории дифференциальных уравнений (ДУ): ДУ, решение ДУ, виды ДУ, общее и частное решения ДУ.
2. Методы решения ДУ.
3. Суть численных методов решения ДУ.
4. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка методом Эйлера.
5. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка методом Рунге-Кутты четвертого порядка.
6. Решение задачи Коши для ОДУ второго порядка методом Рунге-Кутты четвертого порядка.
7. Метод наименьших квадратов (МНК): постановка задачи отыскания параметров эмпирических формул и основная схема её решения.
8. Классы эмпирических формул. МНК для линейной зависимости.
9. Способы оценки качества подгонки эмпирических формул.

Система компьютерной математики (СКМ) MathCAD.

10. Аналитические вычисления. Работа с выражениями (Simplify, Expand, Factor, Collect).
11. Аналитические вычисления. Вычисление рядов и произведений.
12. Аналитические вычисления. Дифференцирование (Differentiate), интегрирование (Integrate).
13. Аналитические вычисления. Разложение в ряд (Expand to Series).
14. Аналитические вычисления. Решение уравнений (Solve).
15. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) первого порядка. Вычислительный блок Given/OdeSolve.
16. ОДУ первого порядка. Встроенные функции RkFixed(), RkAdapt(), Bulstoer().
17. Системы ОДУ. Встроенные функции для решения систем ОДУ.
18. МНК. Встроенные функции Line(), Slope(), Intercept(), Linfit().

Табличный процессор Excel.

19. Статистические функции Наклон(), Отрезок(), Линейн().
20. Инструмент "*Поиск решения*" и его использование для отыскания экстремумов.
21. Использование надстройки "*Поиск решения*" для подбора параметров эмпирической функции методом наименьших квадратов.
22. Построение линий тренда и прогнозов. Получение прогнозных значений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра информатики и прикладной математики

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2
по дисциплине **«ИНФОРМАТИКА»**

Выполнил студент

____
(Группа, факультет шифр)

____
(Фамилия И.О)

____
(Вариант: раздел А, раздел Б)

____
(Подпись)

Допущен к защите

____
(Фамилия И.О. преподавателя)

____
(Дата Подпись)

БРЕСТ 20__

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Татьяна Георгиевна Хомицкая
Валерий Анатольевич Кофанов

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ №2

по дисциплине **«Информатика»**
и краткие методические указания по их выполнению
для студентов инженерно-технической специальности
70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»
заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Хомицкая Т.Г.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная верстка: Кармаш Е.Л.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 08.12.2011 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Arial.
Усл. печ. л. 1,63. Уч. изд. л. 1,75. Тираж 50 экз. Заказ № 1132.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.