

В итоге программа выводит уравнение (9) и систему уравнений (10), решая которые, можно найти веса ω_k и абсциссы x_k ,

$$\text{где } x_k = d_k - \tau. \quad (11)$$

Список цитированных источников

1. Deytseva, A. On quadrature formulas for calculation of approximation wavelet coefficients / A. Deytseva, N. Semenchuk // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Mathematical modeling in physics, civil engineering, economics and finance / Wydawnictwo Collegium Mazovia, ed.: L. Gadomski [et al.]. – Siedlce, 2011. – P. 36 – 41.
2. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 464 с.
3. Sweldens, W. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximations of smooth functions / W. Sweldens, R. Piessens // SIAM J. Numer. Anal. – 1994. – Vol. 31(4). – P. 1240.

УДК 519.24

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ОПЕРАТОРОМ

Курак А.Н.

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест
 Научный руководитель – Мадорский В.М., к. ф.- м. н., доцент

Рассмотрим аналог задачи Дуффинга следующего вида, с недифференцируемым оператором:

$$X'' + \alpha X' + \beta |X| + \gamma X^3 = F(\sin(t), \cos(t))$$

$$x(0) = A, \quad x(2\pi) = B$$

Введем на отрезке $[a, b]$ сетку $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$. Для каждого узла сетки составим разностное уравнение, причем в крайних узлах $x_0 = a, x_N = b$ используем краевые условия. В узлах, достаточно удаленных от начала и конца отрезка $[a, b]$, аппроксимации производных строятся по 3-м точкам. Заменяем задачу её сеточным аналогом:

$$\frac{Y_{k+1} - 2Y_k + Y_{k-1}}{h^2} + \alpha \frac{Y_{k+1} - Y_{k-1}}{2h} + \beta |Y_k| + \gamma Y_k^3 = F(\sin t_k, \cos t_k),$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$.

В результате получим нелинейную систему $F(x)$, состоящую из $N+1$ нелинейных уравнений с не дифференцируемым оператором:

$$F(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n+1}) = \begin{cases} Y_0 = 0, \\ \frac{Y_2 - 2Y_1 + Y_0}{h^2} + \alpha \frac{Y_2 - Y_0}{2h} + \beta |Y_1| + \gamma Y_1^3 - F(\sin t_1, \cos t_1) = 0, \\ \dots, \\ \frac{Y_{k+1} - 2Y_k + Y_{k-1}}{h^2} + \alpha \frac{Y_{k+1} - Y_{k-1}}{2h} + \beta |Y_k| + \gamma Y_k^3 - F(\sin t_k, \cos t_k) = 0, \\ \dots, \\ Y_{n+1} = 0, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Полученную систему решим с помощью нелокального варианта метода Канторовича-Красносельского. Представим $F(x)$ в следующем виде: $F(x) = f(x) + g(x)$, где $f(x)$ дифференцируемая часть, а $g(x)$ недифференцируемая.

Рассмотрим алгоритм решения:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -\beta_n (f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)), \quad n = 0, 1, \dots$$

Шаг 2. Находится очередное приближение:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n.$$

Шаг 3. Проверяется выполнение условия $\|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\| \leq \varepsilon$, ε -малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

Шаг 4. Производится пересчет шаговой длины по формуле: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\| \beta_n}\right),$$

$$\beta_0, \beta_{-1} \in [10^{-6}, 10^{-1}], \quad \beta_{-1} < \beta_0;$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1} \gamma_n \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|}, \quad \gamma_0 = \beta_0^2;$$

и переход на шаг 1.

Теорема: Пусть в интересующей нас области D существует решение уравнения (1). Операторы f и g удовлетворяют условиям:

$$f \in C_D^1, \quad \| [f^1(x)]^{-1} \| \leq B, \quad \| \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n) \| \leq L \| \Delta x_n \|.$$

Начальные приближения x_0 и шаговые длины β_{-1} и β_0 таковы, что

$\varepsilon_0 = \beta_0 B L (1 + B) \|f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0)\| < 1$. Тогда алгоритм шаг1-шаг4 со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к решению уравнения.

Численный эксперимент и его обсуждение.

Система численных уравнений решалась с точностью до $1E-10$, начальное приближение имеет вид $\sin(x) + \cos(x)$. Результаты эксперимента сведены в таблицу 1.

Таблица 1

β, γ	Вид правой части		
1,1	50Sin(x)	50Cos(x)	30Sin(x)+50Cos(x)
2,5	10Sin(x)	50Cos(x)	10Sin(x)+60Cos(x)
3,15	5Sin(x)	60Cos(x)	10Sin(x)+50Cos(x)

Число итераций при этих начальных условиях было в пределах 400.

Задача решалась при начальных приближениях вида $2\sin(x) + 2\cos(x)$. Результаты эксперимента сведены в таблицу 2.

Таблица 2

β, γ	Вид правой части		
1,1	50Sin(x)	50Cos(x)	30Sin(x)+50Cos(x)
2,5	5Sin(x)	50Cos(x)	5Sin(x)+50Cos(x)
3,15	5Sin(x)	60Cos(x)	5Sin(x)+60Cos(x)

Число итераций при новых начальных условиях было в пределах 500.
Общий вид окна программы имеет вид:

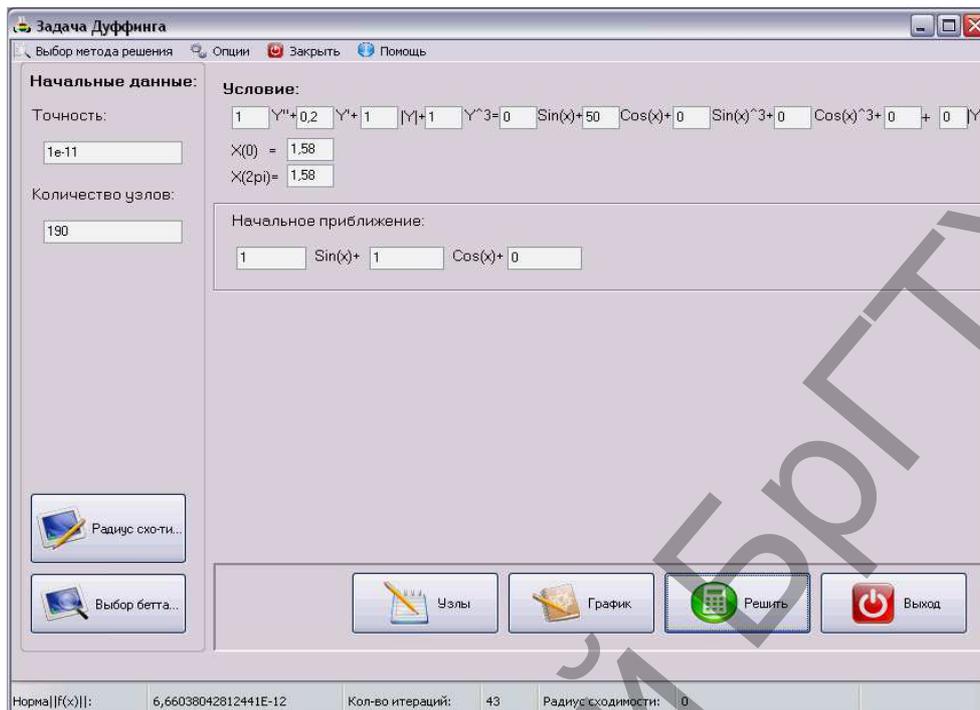


График решения имеет вид:



Выводы: Предлагаемый метод эффективно “работает” в достаточно широком диапазоне начальных данных и с высокой точностью решает нелинейную систему сеточных уравнений с недифференцируемым оператором.

Список цитированных источников

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.
2. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.