УДК 551.492

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Латий О.О., Гладкий И.И.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
Научный руководитель – Махнист Л.П., к.т.н., доцент

В работе рассматривается модель процесса многолетних колебаний речного стока, представленная в виде системы дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_1}{d\xi}=-1,\ \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_2}{d\xi}=-2\theta_1 \qquad (1)$$

с начальными условиями $\dfrac{d\theta_i}{d\xi}(\infty)=0,\ \theta_i(\xi_*)=0,\ i=\overline{1,2}$.

Эта модель, широко используемая в стохастической гидрологии, получена на основе уравнения Фоккера-Планка, при некоторых условиях на переходную функцию плотности вероятности [1]. Для решения системы (1) использовались численные методы, например, в [1], [2]. В данной работе рассматривается решение системы (1), записанное в виде степенных рядов [3], [4]:

$\theta_1(\xi)=S_1(\xi)-S_1(\xi_*)$, $\theta_2(\xi)=2\left(S_2(\xi)-S_2(\xi_*)-S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right)$, где

$$S_1(\xi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}, \qquad (2)$$

$$S_2(\xi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\left(\ln\left(2-2\left\{\frac{k-1}{2}\right\}\right)-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{1}{m-\left\{\frac{k}{2}\right\}}\right)\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}, \qquad (3)$$

а $[t]$ и $\{t\}$ – целая и дробная часть числа t соответственно.

Степенной ряд (2) получен в [3]. Предлагаемая в [3] методика решения уравнений вида (1) обобщена на более широкий класс уравнений такого типа, для чего исследовались функции специального вида, связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией [4].

Рассмотрим ряды $S_1(\xi)$, $S_2(\xi)$.

Ряд $S_1(\xi)$ можно записать в виде $S_1(\xi)=A_1(\xi)-B_1(\xi)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}-$ $-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$, где общие члены этих рядов $a_n^{(1)}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ и $b_n^{(1)}=\dfrac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$a_{n+1}^{(1)}=\dfrac{(2n+1)\xi^2}{(2n+2)(2n+3)}a_n^{(1)}$, $a_0^{(1)}=\xi\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ и $b_{n+1}^{(1)}=\dfrac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)}b_n^{(1)}$, $b_0^{(1)}=\dfrac{\xi^2}{2}$.

Для ряда $S_2(\xi) = A_2(\xi) - B_2(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\ln 2 - \sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{1}{2m-1} \right) \dfrac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} +$ $+ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{1}{2m} \right) \dfrac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ общие члены рядов $a_n^{(2)} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \left(\ln 2 - \sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{1}{2m-1} \right) \dfrac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ и $b_n^{(2)} = \left(\sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{1}{2m} \right) \dfrac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ удовлетворяют соотношениям $a_n^{(2)} = c_n a_n^{(1)}$, $a_{n+1}^{(2)} = \dfrac{c_{n+1}(2n+1)\xi^2}{c_n(2n+2)(2n+3)} a_n^{(2)}$, $c_{n+1} = c_n - \dfrac{1}{2n+1}$, $a_0^{(2)} = c_0 \xi \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $c_0 = \ln 2$ и $b_n^{(2)} = d_n b_n^{(1)}$, $b_{n+1}^{(2)} = \dfrac{d_{n+1}(2n+2)\xi^2}{d_n(2n+3)(2n+4)} b_n^{(2)}$, $d_{n+1} = d_n + \dfrac{1}{2n+2}$, $b_1^{(2)} = d_1 \dfrac{\xi^4}{12}$, $d_1 = \dfrac{1}{2}$.

Эти соотношения можно использовать для вычисления значений частичных сумм рядов $A_i\ (\xi),\ B_i\ (\xi)\ i = \overline{1,2}$.

Исследуем на сходимость ряды $A_1\ (\xi),\ B_1\ (\xi)$. Используя признак Д'Аламбера, имеем $\left| \dfrac{a_{n+1}^{(1)}}{a_n^{(1)}} \right| = \dfrac{\xi^2(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} < \dfrac{\xi^2}{2n+3} < q < 1$, если $n > \dfrac{\xi^2}{2q} - 1{,}5$ и

$\dfrac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} = \dfrac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)} < \dfrac{\xi^2}{2n+4} < q < 1$, если $n > \dfrac{\xi^2}{2q} - 2$,

Следовательно, для любого числа *q*, 0<*q*<*1*, существует натуральное число, например, $n_0 = \left[\dfrac{\xi^2}{2q} \right]$, такое, что для любого *n*≥*n0* выполняются неравенства $\left| \dfrac{a_{n+1}^{(1)}}{a_n^{(1)}} \right| < q$, $\dfrac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} < q$.

Тогда остатки рядов $A_1(\xi), B_1(\xi)$ удовлетворяют неравенствам: $\left| \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k^{(1)} \right| < \dfrac{\left| a_n^{(1)} \right|}{1-q}$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} b_k^{(1)} < \dfrac{b_n^{(1)}}{1-q}$ и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q.

Таким образом, значения рядов $A_1\ (\xi),\ B_1\ (\xi)$, с заданной точностью $\varepsilon > 0$, можно получить, вычисляя n-ые частичные суммы этих рядов $A_n^{(1)}(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^{(1)}$, $B_n^{(1)}(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k^{(1)}$, если выполняются неравенства:

$$\left| a_n^{(1)} \right| < \varepsilon(1-q),\ b_n^{(1)} < \varepsilon(1-q), \text{ и } n \ge n_0 = \left[\frac{\xi^2}{2q} \right]. \qquad (4)$$

Так, например, для $q = 0{,}5$ неравенства принимают вид: $\left| a_n^{(1)} \right| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, $b_n^{(1)} \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, и $n \ge n_0 = \left[\xi^2 \right]$.

Таким образом, точность 2ε вычисления значений $S_1(\xi)$ обеспечивается вычислением n-ых частичных сумм рядов $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^{(1)}(\xi)$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k^{(1)}(\xi)$ при выполнении условий (4), что гарантирует точность 4ε вычисления значения $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$.

Исследуем на сходимость ряды $A_2(\xi),\ B_2(\xi)$.

Заметим, что $\left|\dfrac{c_{n+1}(2n+1)}{c_n(2n+2)}\right| = \dfrac{\left(|c_n| + \dfrac{1}{2n+1}\right)(2n+1)}{|c_n|(2n+2)} = 1 + \dfrac{1-|c_n|}{|c_n|(2n+2)} < 1$ при $|c_n| = \sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{1}{2m-1} - \ln 2 > 1$, что выполняется, если $n \ge 5$ и

$\dfrac{d_{n+1}(2n+2)}{d_n(2n+3)} = \dfrac{\left(d_n + \dfrac{1}{2n+2}\right)(2n+2)}{d_n(2n+3)} = 1 + \dfrac{1-d_n}{d_n(2n+3)} < 1$ при $d_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{1}{2m} > 1$, что выполняется, если $n \ge 4$.

Используя признак Д′Аламбера, имеем

$\left|\dfrac{a_{n+1}^{(2)}}{a_n^{(2)}}\right| = \left|\dfrac{c_{n+1}a_{n+1}^{(1)}}{c_n a_n^{(1)}}\right| = \dfrac{|c_{n+1}|\xi^2(2n+1)}{|c_n|(2n+2)(2n+3)} < \dfrac{\xi^2}{2n+3} < q < 1$, если $n \ge \max\left(\dfrac{\xi^2}{2q} - 1,5; 5\right)$ и

$\dfrac{b_{n+1}^{(2)}}{b_n^{(2)}} = \dfrac{d_{n+1}b_{n+1}^{(1)}}{d_n b_n^{(1)}} = \dfrac{d_{n+1}(2n+2)\xi^2}{d_n(2n+3)(2n+4)} < \dfrac{\xi^2}{2n+4} < q < 1$, если $n > \max\left(\dfrac{\xi^2}{2q} - 2; 4\right)$.

Следовательно, существует такое число *q*, *0< q <1*, что, начиная с некоторого номера, например, $n_0 = \max\left(\left[\dfrac{\xi^2}{2q}\right]; 5\right)$, выполняются неравенства $\left|\dfrac{a_{n+1}^{(2)}}{a_n^{(2)}}\right| < q$, $\dfrac{b_{n+1}^{(2)}}{b_n^{(2)}} < q$.

Тогда остатки рядов $A_2(\xi), B_2(\xi)$ удовлетворяют неравенствам: $\left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k^{(2)}\right| \le \dfrac{\left|a_n^{(2)}\right|}{1-q}$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} b_k^{(2)} \le \dfrac{b_n^{(2)}}{1-q}$ и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем *q*.

Таким образом, значения рядов $A_2(\xi),\ B_2(\xi)$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$, можно получить, вычисляя n-ые частичные суммы этих рядов $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k^{(2)}$, если выполняются неравенства:

$$\left|a_n^{(2)}\right| \le \varepsilon(1-q),\ b_n^{(2)} \le \varepsilon(1-q), \text{ и } n \ge n_0 = \max\left(\left[\frac{\xi^2}{2q}\right]; 5\right). \qquad (5)$$

Так, например, для $q = 0,5$ неравенства принимают вид: $\left|a_n^{(2)}\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, $b_n^{(2)} \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, и $n \ge n_0 = \max\left(\left[\xi^2\right]; 5\right)$.

Таким образом, точность 2ε вычисления значений $S_2(\xi), S_2(\xi_*)$ обеспечивается вычислением *n*-ых частичных сумм рядов $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}(\xi)$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k^{(2)}(\xi)$ при выполнении условий (5), что гарантирует точность 4ε вычисления значения $S_2(\xi) - S_2(\xi_*)$.

Список цитированных источников

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы.– М., 2002. – Том 29, № 1. – С. 62–67.

2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2006. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 56–60.

3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2008. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 83–87.

4. Волчек, А.А. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Вестник БрГТУ. – Брест, 2010. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 49–54.

УДК 620.22:51-07(075.8)

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Лебедь С.Ф.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Пусть рассматриваемые области не содержат изолированных граничных точек. Если функция $\omega = f(z)$ конформно отображает область *D* на область G, и точка z_0 – изолированная граничная точка области *D*, тогда можно доказать, что точка z_0 должна быть устранимой особой точкой или полюсом первого порядка функции $f(z)$. Более того, если через D_* обозначить область, полученную присоединением к области *D* всех ее изолированных граничных точек, то функция $\omega = f(z)$ будет однолистной в D_*.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть область *D* - *n*-связная область плоскости *z* и функция $\omega = f(z)$ является однолистной мероморфной функцией в *D*, которая отображает *D* в область *G* плоскости *ω*. Тогда *G* так же является *n*-связной областью.

Сформулированная теорема показывает, что *N*-связная область при конформном отображении должна сохранять порядок связности. Но если две многосвязные области имеют одно и то же число связности, означает ли это, что между ними можно построить конформное отображение? В общем случае это неверно. В дальнейшее ограничимся рассмотрением двухсвязных областей. Можно доказать, что существует конформное отображение между любой двухсвязной областью и кольцом.

Теорема 2. Любую двухсвязную область можно конформно отобразить на кольцо.

Теперь рассмотрим вопрос о существовании конформного отображения между двухсвязными областями. С учетом Теоремы 2 достаточно рассмотреть возможность конформного отображения одного концентрического кольца на другое. Напомним, что конформное отображение между двумя односвязными областями существует не всегда. Аналогично, не всегда можно установить конформное отображение между произвольными двухсвязными областями.

Теорема 3 Аналитическая однолистная функция, отображающая кольцо $r_1 < |z| < r_2$ на кольцо $\rho_1 < |\omega| < \rho_2$ существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \tag{1}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < r_1 < r_2 < \infty$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$. В противном случае, как установлено выше, можно свести задачу к за-