

3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2008. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 83–87.

4. Волчек, А.А. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Вестник БрГТУ. – Брест, 2010. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 49–54.

УДК 620.22:51-07(075.8)

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Лебедь С.Ф.

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Пусть рассматриваемые области не содержат изолированных граничных точек. Если функция $\omega = f(z)$ конформно отображает область D на область G , и точка z_0 – изолированная граничная точка области D , тогда можно доказать, что точка z_0 должна быть устранимой особой точкой или полюсом первого порядка функции $f(z)$. Более того, если через D_* обозначить область, полученную присоединением к области D всех ее изолированных граничных точек, то функция $\omega = f(z)$ будет однолистной в D_* .

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть область D – n -связная область плоскости z и функция $\omega = f(z)$ является однолистной мероморфной функцией в D , которая отображает D в область G плоскости ω . Тогда G так же является n -связной областью.

Сформулированная теорема показывает, что N -связная область при конформном отображении должна сохранять порядок связности. Но если две многосвязные области имеют одно и то же число связности, означает ли это, что между ними можно построить конформное отображение? В общем случае это неверно. В дальнейшем ограничимся рассмотрением двухсвязных областей. Можно доказать, что существует конформное отображение между любой двухсвязной областью и кольцом.

Теорема 2. Любую двухсвязную область можно конформно отобразить на кольцо.

Теперь рассмотрим вопрос о существовании конформного отображения между двухсвязными областями. С учетом Теоремы 2 достаточно рассмотреть возможность конформного отображения одного концентрического кольца на другое. Напомним, что конформное отображение между двумя односвязными областями существует не всегда. Аналогично, не всегда можно установить конформное отображение между произвольными двухсвязными областями.

Теорема 3 Аналитическая однолистная функция, отображающая кольцо $r_1 < |z| < r_2$ на кольцо $\rho_1 < |\omega| < \rho_2$ существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (1)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < r_1 < r_2 < \infty$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$. В противном случае, как установлено выше, можно свести задачу к за-

даче существования конформного отображения между двумя односвязными областями присоединением изолированной граничной точки области к самой области.

Достаточность части теоремы очевидна, так как, если (1) выполняется, то функция

$$\omega = f(z) = \frac{\rho_1}{r_1} z \text{ или } \omega = f(z) = \frac{r_1 \rho_2}{z}$$

конформно отображает кольцо $r_1 < |z| < r_2$ на кольцо $\rho_1 < |\omega| < \rho_2$.

Используем принцип симметрии для доказательства необходимости. Можно продолжить аналитически функцию $\omega = f(z)$ на кольца:

$$\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1 \text{ и } r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1},$$

которые симметричны кольцу $r_1 < |z| < r_2$ относительно окружностей $|z| = r_1$ и $|z| = r_2$, и более того теорема о соответствии границ так же выполняется для двухсвязных областей. Последнее может быть показано с использованием кривой Жордана для разделения двусвязной области на две односвязные области. Следовательно, $\omega = f(z)$ отображает кольцо $r_1 \leq |z| \leq r_2$ биективно и взаимно непрерывно на кольцо $\rho_1 \leq |\omega| \leq \rho_2$ и отображает окружности $|z| = r_1$ и $|z| = r_2$ на окружности $|\omega| = \rho_1$ и $|\omega| = \rho_2$ соответственно или на окружности $|\omega| = \rho_2$ и $|\omega| = \rho_1$ соответственно. Полученная в результате такого аналитического продолжения функция

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\rho_1^2}{f\left(\frac{r_1^2}{z}\right)}, & \frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1, \\ f(z), & r_1 \leq |z| \leq r_2, \\ \frac{\rho_2^2}{f\left(\frac{r_2^2}{z}\right)}, & r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}. \end{cases}$$

однолистка и аналитична внутри кольца $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$ и отображает его на кольцо

$\frac{\rho_1^2}{\rho_2} < |\omega| < \frac{\rho_2^2}{\rho_1}$. Аналогично строится функция $F(z)$ во втором случае.

Еще раз применим принцип симметрии для аналитического продолжения $\omega = f(z)$

на кольцо $r_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 < |z| < r_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4$, и продолженная функция $\omega = F(z)$ конформно ото-

бражает это кольцо на кольцо $\rho_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^4 < |\omega| < \rho_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^4$.

В результате получим, что построенная с помощью симметрий функция конформно отображает область $0 < |z| < \infty$ на область $0 < |\omega| < \infty$. Более того, в первом случае имеем

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \infty, \quad (2)$$

а во втором:

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = \infty, \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0. \quad (3)$$

Таким образом, функция $\omega = F(z)$ конформно отображает расширенную комплексную плоскость на себя и поэтому функция $F(z)$ является дробно – линейной. С учетом формул (2) и (3) получим $F(z) = az$ или $F(z) = \frac{a}{z}$, где a – комплексное число. В частности, на кольце $r_1 < |z| < r_2$ имеем $f(z) = az$ или $f(z) = \frac{a}{z}$, и, очевидно, что (1) выполняется в обоих случаях. Что и требовалось доказать.

Список цитированных источников

1. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи. – 3-е изд. – М., 1977.
2. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – 2-е изд. – М., 1966.

УДК 517.9, 519.61

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Логвинович В.И.

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест
 Научный руководитель – Чичурин А.В., д. ф.-м. н., доцент (Украина)

В работе исследуются линейное дифференциальное уравнение второго порядка с шестью особыми точками [1]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{x - a_k} \frac{dy}{dx} - 2 \sum_{k=1}^6 \frac{y}{a_k (x - a_k)} + 2 E \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{x - a_k} \right), \quad (1)$$

где a_k ($k = \overline{1,6}$) – действительные числа.

Используя численные методы, для построения частных решений уравнения (1) строится интерполяционная функция. Затем для каждого из интервалов, заключенных между двумя последовательными неподвижными полюсами уравнения (1), расположенными в точках $x = a_k$ ($k = \overline{1,6}$), строятся соответствующие кривые. Например, для уравнения (1) с полюсами

$$a_1 = -2, a_2 = -1, a_3 = -1/2, a_4 = 1/2, a_5 = 1, a_6 = 2 \quad (2)$$

графики частных решений с начальными данными $y(0) = 0, y'(0) = 1$ и $y(3/2) = 0, y'(3/2) = 1$ имеют вид, изображенный на рисунках 1 и 2.

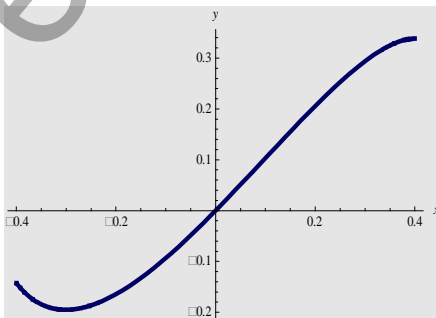


Рисунок 1 – Интегральная кривая уравнения (1), (2) и нач. усл. $y(0) = 0, y'(0) = 1$

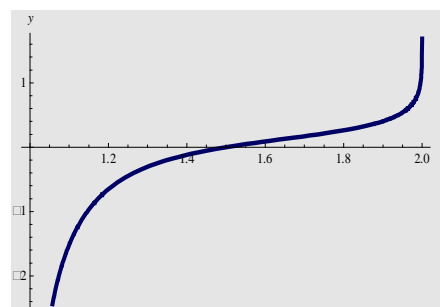


Рисунок 2 – Интегральная кривая уравнения (1), (2) и нач. усл. $y(3/2) = 0, y'(3/2) = 1$