В качестве второго метода исследования уравнения (1) рассматривается процедура создания соответствующего объекта DifferentialRoot. Строится модуль с использованием функции Manipulate, позволяющий рассматривать полюсы как параметры визуализации.

Список цитированных источников

1. Чичурин, А.В. Решение системы Шази и интегрирование дифференциального уравнения Шази с шестью постоянными полюсами с помощью системы Mathematica // Веснік Брэсцкага універсітэта Серыя 4, Фізіка,Матэматыка. – 2010, № 2. – С. 134-141.

УДК 517.983+519.6

СХОДИМОСТЬ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ НЕЯВНОГО МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Мороз Ю.А.

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест

Научный руководитель – Савчук В.Ф., к. ф.- м. н., доцент

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – неограниченный линейный и самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением, но нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача неустойчива, и, значит, некорректна. Пусть при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения применяется итерационный метод

$$x_{n+1} = \left(A^2 + B\right)^{-1}\left(Bx_n + Ay\right), x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряжённый оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмём оператор $B = bE$, $b > 0$, E – тождественный оператор. В случае приближённой правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta,$ итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1,\delta} = \left(A^2 + B\right)^{-1}\left(Bx_{n,\delta} + Ay_\delta\right), x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

2. Сходимость метода в энергетической норме

Изучим сходимость метода (3) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. Используя интегральное представление неограниченного самосопряжённого оператора A, получим $\|x - x_n\|_A^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\frac{b}{\lambda^2 + b}\right)^{2n} d(E_\lambda x, x)$,

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1}\left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^2 + b)^n}\right]^2 d\left(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta\right).$$

Оценив подынтегральные функции, нетрудно показать, что при условии $b>0$ $\|x-x_n\|_A \le \left(\frac{b}{4n}\right)^{\frac{1}{4}}\|x\|$, $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{n}{2b}\right)^{\frac{1}{4}}\delta$, $n\ge1$. Таким образом, оценка погрешности для метода (3) в энергетической норме запишется в виде $\|x-x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{b}{4n}\right)^{\frac{1}{4}}\|x\| + \left(\frac{n}{2b}\right)^{\frac{1}{4}}\delta$, $n\ge1$. Следовательно, если в процессе (3) выбирать число итераций $n=n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{\frac{1}{4}}\delta\to0$, $n\to\infty$, $\delta\to0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме.

Теорема *При условии $b>0$ метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $n^{\frac{1}{4}}\delta\to0$, $n\to\infty$, $\delta\to0$. Для метода (3) справедлива оценка погрешности*

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{b}{4n}\right)^{\frac{1}{4}}\|x\| + \left(\frac{n}{2b}\right)^{\frac{1}{4}}\delta,\ n\ge1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим её правую часть в точке, в которой производная от неё равна нулю; в результате получим $\|x-x_{n,\delta}\|_A^{опт} \le 2^{\frac{5}{8}}\delta^{\frac{1}{2}}\|x\|^{\frac{1}{2}}$ и $n_{опт} = 2^{-\frac{1}{2}}b\delta^{-2}\|x\|^2$.

Отметим, что для сходимости метода (3) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n=n(\delta)$ так, чтобы $n^{\frac{1}{4}}\delta\to0$, $n\to\infty$, $\delta\to0$. Однако $n_{опт}=O(\delta^{-2})$, т. е. $n_{опт}$ относительно δ имеет порядок δ^{-2}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода итераций (3).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (3) и априорный момент останова $n_{опт}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (3) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения *x* уравнения (1).

Предложенный метод может быть успешно применён для решения следующих задач: обратной задачи теории гравиметрии, обратной задачи теории потенциала, задачи спектроскопии, задачи определения формы радиоимпульса, излучённого источником и т.д.

УДК 621.316

ВОЗМОЖНОСТИ СВОБОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММЫ MAXIMA

Новикова Т.А., Мовчан В.О.

УО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк

Научный руководитель – Алексеев Е.Р., к. т. н., доцент каф. ВМиП

В современном образовании растёт спрос на математические методы исследования и на развитие творческого мышления, опирающегося на соответствующий математический