2. Земов, Д.В. Формирование архитектурной среды атриумных пространств общественно-торговых и деловых центров средствами мобильных компонентов: автореф. дис. ... канд. архитектуры: 18.00.01 / Д.В. Земов. – Екатеринбург, 2006. – 19 с.
3. Маклакова, Т.Г. Высотные здания / Т.Г. Маклакова. – М.: Ассоциации строительных вузов, 2006. – С. 48.
4. Васильев, Е.Н. Современные модели офиса / Е.Н. Васильев, И.Ю. Водопьянов // Архитектура и строительство России. – 2003. – № 3.

УДК 681.3:519.3

Калита Р.О.
Научный руководитель: к.т.н., доцент Игнатюк В.И.

К РАСЧЕТУ БАЛОЧНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА НЕПОДВИЖНЫЕ НАГРУЗКИ

В последние годы одним из основных и наиболее мощных инструментов численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений при действии различных нагрузок и воздействий является метод конечных элементов (МКЭ). Это объясняется тем, что МКЭ позволяет решать задачи с очень большим числом неизвестных, возможностью высокой степени автоматизации всех процессов при использовании этого метода, особенно при использовании современной компьютерной техники и при наличии компьютерных программ, реализующих этот метод. При этом метод конечных элементов отличают достаточная простота, физическая наглядность, высокая логичность и универсальность.

В работе рассматривается расчет балочных систем на неподвижные нагрузки методом конечных элементов в форме метода перемещений.

Разрешающие уравнения метода конечных элементов записываются в виде:

$$[E_1]\cdot\{-[K]\cdot\{\Delta\}+\{P\}\}=0, \tag{1}$$

где $\{P\}$ – вектор действующих в узлах системы нагрузок; $\{\Delta\}$ – вектор перемещений узлов системы; $[K]$ – матрица жесткости системы, имеющая вид

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где n – число перемещений узлов системы (в каждом узле балочной системы будем иметь по два перемещения).

Элемент матрицы жесткости k_{mj} представляет собой реакцию в m-ом направлении (величину реакции r_m) от смещения узла в j-ом направлении на единичную величину – $\Delta_j = 1$. Смещение узла вызывает, естественно, деформации всех примыкающих к этому узлу стержней, и, следовательно, величина возникающей в этом узле реакции должна включать реакции от всех этих стержней. Поэтому коэффициент k_{mj} вычисляют, задаваясь смещением $\Delta_j = 1$ и суммируя реакции от всех элементов, примыкающих к узлу i_m, к которому относится m-ое направление реакции (и перемещения):

$$k_{mj} = \sum_{s \in i_m} r^s_{mj}. \qquad (3)$$

Здесь i_m – номер узла, к которому относится m-ое направление реакции. Величины k_{mj} и r^s_{mj} здесь определяются в общей системе координат, $[E_1]$ – диагональная матрица вида

$$[E_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Число элементов этой матрицы по диагонали равно общему числу элементов вектора $\{\Delta\}$, причем каждому ее диагональному элементу соответствует узел и направление его перемещения в том же порядке, как и в матрице $\{\Delta\}$. Диагональные элементы матрицы $[E_1]$ могут принимать два значения – 0 либо 1. Единичные значения принимают элементы, соответствующие перемещениям узлов по направлениям, по которым перемещения возможны. Нулевые значения принимают элементы, соответствующие перемещениям узлов в направлениях, по которым перемещения явно отсутствуют (вследствие наличия опорных связей).

Балочные системы представляют собой стержневые сооружения, в которых конечные элементы располагаются на одной прямой, соединяясь последовательно друг с другом (рис. 7). При соответствующем выборе глобальной системы координат (при направлении оси x вдоль осей балок) для балочных систем будут совпадать общая и местная системы координат.

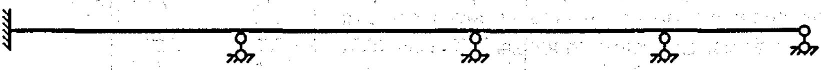


Рисунок 1

В связи с этим в расчетах балочных систем методом конечных элементов в сравнении с расчетом рам будут иметь место следующие упрощения:

1) углы поворота конечных элементов относительно глобальной системы координат будут равны нулю, поэтому матрица преобразования координат вырождается в единичную диагональную матрицу, и во всех зависимостях, где она в общем случае присутствует, ее можно просто опустить;

2) перемещения и реакции в узлах дискретной модели и по концам конечных элементов будут одинаковы в общей и в местных системах координат (поэтому далее штрихи в обозначениях соответствующих величин в местных системах координат опущены);

3) матрицы жесткости КЭ в общей системе координат будут равны матрицам жесткости их в местных системах координат;

4) в связи с последовательным соединением конечных элементов между собой в балочной системе матрица жесткости системы в целом, если узлы и КЭ нумеровать последовательно, что и нужно делать, будет иметь ленточный характер – матрицы жесткости КЭ в ней будут располагаться друг за другом по диагонали.

Следует заметить, что балочные системы обычно работают только на вертикальные нагрузки, и в этом случае в них будут отсутствовать продольные деформации и соответственно перемещения узлов вдоль осей балок. В связи с этим возникнет еще ряд упрощений:

1) число неизвестных перемещений в узлах уменьшается и будет равно двум, а число перемещений и усилий по концам балочных КЭ становится соответственно равным четырем:

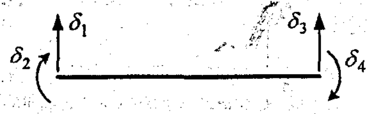
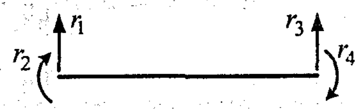


Рисунок 2



2) соответственно упрощаются и матрицы жесткости конечных элементов, они уменьшаются в размере и их можно получить из соответствующих матриц жесткости КЭ для произвольных плоских стержневых систем [1], вычеркнув первый и четвертый столбцы и соответственно первую и четвертую строки; размер их будет 4х4 элемента, и они будут иметь вид:

<u>Тип 2</u>

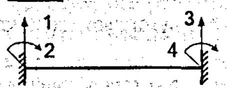


Рисунок 3

$$[K'_э]=\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ \hline -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{array}\right]. \qquad (5)$$

<u>Тип 2</u>

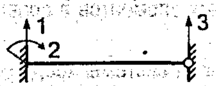


Рисунок 4

$$[K'_э]=\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} & \frac{3EJ}{l^2} & 0 \\ \hline -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \qquad (6)$$

Тип 3

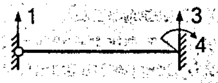


Рисунок 5

$$[K'_э]=\left[\begin{array}{cc|cc}\dfrac{3EJ}{l^3} & 0 & -\dfrac{3EJ}{l^3} & -\dfrac{3EJ}{l^2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline -\dfrac{3EJ}{l^3} & 0 & \dfrac{3EJ}{l^3} & \dfrac{3EJ}{l^2}\\ -\dfrac{3EJ}{l^2} & 0 & \dfrac{3EJ}{l^2} & \dfrac{3EJ}{l}\end{array}\right]. \qquad (7)$$

После определения перемещений узлов расчетной модели из решения системы уравнений (2.34) усилия по концам КЭ могут быть определяются с помощью выражения:

$$\{r'_s\}=[K'_s]\cdot\{\Delta_s\}-\{P'_{qs}\}. \qquad (8)$$

Найденные по концам КЭ усилия прикладываем к соответствующим стержням с учетом их знаков (рис. 7) и определяем от их действия по обычным правилам строительной механики растянутые волокна (для изгиба) и знаки поперечных и продольных сил в крайних сечениях стержневого конечного элемента.

Определение изменения усилий внутри конечных элементов (построение эпюр этих усилий) можно выполнить используя функции Эрмита [1].

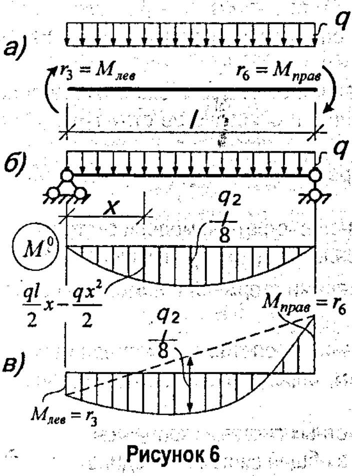


Рисунок 6

Заметим, что для стержневых конечных элементов, которые мы здесь рассматриваем, зависимости изменения внутренних усилий в них нам хорошо известны:

– в стержнях, нагруженных только по торцам (в узлах), изгибающие моменты изменяются по линейным законам, а поперечные и продольные силы постоянны;

– в стержнях, на которые действуют равномерно распределенные нагрузки, поперечные и продольные силы изменяются по линейным законам, а изгибающие моменты – по параболическим законам.

Зная величины усилий по концам конечных элементов и используя указанные закономерности изменений внутренних усилий, несложно построить эпюры этих усилий в каждом из конечных элементов и соответственно во всей системе в целом.

При этом для стержней, на которые действует равномерно распределенная нагрузка (рис. 6*а*), при построении эпюры изгибающих моментов (рис. 6*в*) необходимо к линейной эпюре, полученной соединением прямой линией ординат по концам стержня, добавить (подвесить) балочную эпюру.

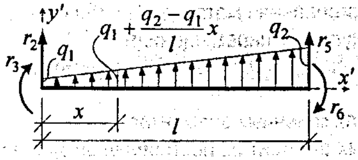


Рисунок 7

Перемещения сечений внутри конечных элементов можно получить с использованием функций Эрмита или на основе известных дифференциальных зависимостей.

Например, для конечного элемента, на который действует нагрузка, распределенная по трапециидальному закону (рис. 7), для поперечных перемещений будем иметь зависимость

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EJ}=\frac{1}{EJ}\left(r_3+r_2x+\frac{q_1}{2}x^2+\frac{q_2-q_1}{6l}x^3\right),$$

проинтегрировав которую два раза

$$\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{EJ}\left(r_3x+r_2\frac{x^2}{2}+\frac{q_1}{6}x^3+\frac{q_2-q_1}{24l}x^4\right)+C_1,$$

$$y=\frac{1}{EJ}\left(r_3\frac{x^2}{2}+r_2\frac{x^3}{6}+\frac{q_1}{24}x^4+\frac{q_2-q_1}{120l}x^5\right)+C_1x+C_2$$

и найдя после подстановки в эти выражения граничных условий (при $x=0$ – $y=\delta_2$, $\frac{dy}{dx}=-\delta_3$) постоянные интегрирования ($C_1=-\delta_3$; $C_2=\delta_2$), получим

$$u_2=y=\delta_2-\delta_3x+\frac{1}{EJ}\left(r_3\frac{x^2}{2}+r_2\frac{x^3}{6}+\frac{q_1}{24}x^4+\frac{q_2-q_1}{120l}x^5\right);$$

$$u_3=\varphi=\frac{dy}{dx}=-\delta_3+\frac{1}{EJ}\left(r_3x+r_2\frac{x^2}{2}+\frac{q_1}{6}x^3+\frac{q_2-q_1}{24l}x^4\right). \qquad (9)$$

На основе изложенного можно сформулировать следующий порядок расчета балочных систем методом конечных элементов:

1. Определение расчетной дискретной модели заданной стержневой системы (разделение ее на конечные элементы (КЭ), назначение узлов) и описание ее структуры (нумерация узлов и стержней, определение их числа).
2. Выбор общей и местных систем координат и определение координат узлов в общей системе координат.
3. Составление вектора перемещений узлов расчетной дискретной модели системы.
4. Идентификация конечных элементов (определение их длин l_s, жесткостей EA_s и EJ_s, типов, установление соответствия между номерами стержней и номерами начального и конечного узлов для этих стержней).
5. Преобразование внешних нагрузок (преобразование пролетных равномерно распределенных нагрузок на стержни к узловым нагрузкам, определение суммарных узловых сил в каждом узле дискретной модели).
6. Построение матриц жесткости КЭ элементов в местных системах координат.
7. Формирование матрицы жесткости всей системы в общей системе координат.
8. Получение системы разрешающих уравнений путем учета граничных условий (опорных связей) при этом может быть использована диагональная матрица (1) либо простое вычеркивание строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям.
9. Решение системы разрешающих уравнений и определение узловых перемещений системы.
10. Определение узловых перемещений и усилий для конечных элементов.
11. Определение усилий и перемещений в конечных элементах, построение эпюр внутренних сил в системе и определение ее деформированного вида.

Заключение

В работе представлены особенности и алгоритм расчета балочных систем на неподвижные нагрузки методом конечных элементов в форме метода перемещений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Игнатюк, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем. – Брест, 2007. – 172 с.

УДК 681.3:519.3

Калита Р.О.
Научный руководитель: к.т.н., доцент Игнатюк В.И.

УЧЕБНАЯ КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА РАСЧЕТА БАЛОЧНЫХ СИСТЕМ НА НЕПОДВИЖНЫЕ НАГРУЗКИ

Сегодня метод конечных элементов (МКЭ) является мощным инструментом численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений при действии различных нагрузок и воздействий и позволяет решать задачи с очень большим числом неизвестных. Однако его реальное применение требует автоматизации процессов расчёта, то есть создания современных компьютерных программ, реализующих этот метод применительно к конкретным задачам и сооружениям.

В работе рассматривается создание учебной компьютерной программы расчета балочных систем на неподвижные нагрузки. Задача расчёта заключается в определении внутренних сил в сечениях балки и их перемещений (и соответственно деформированного вида балки).

Методика и алгоритм расчёта балочных систем, разработанные на основе метода конечных элементов [1], изложены в статье «К расчету балочных систем методом конечных элементов на неподвижные нагрузки», представленной в данном сборнике.

Для создания программы использована современная среда визуального программирования Delphi, позволяющая в полной мере использовать возможности и ресурсы современных ПЭВМ, создавать качественные и надежные Windows-приложения [2].

Основное окно программы имеет вид, представленный на рис. 1.

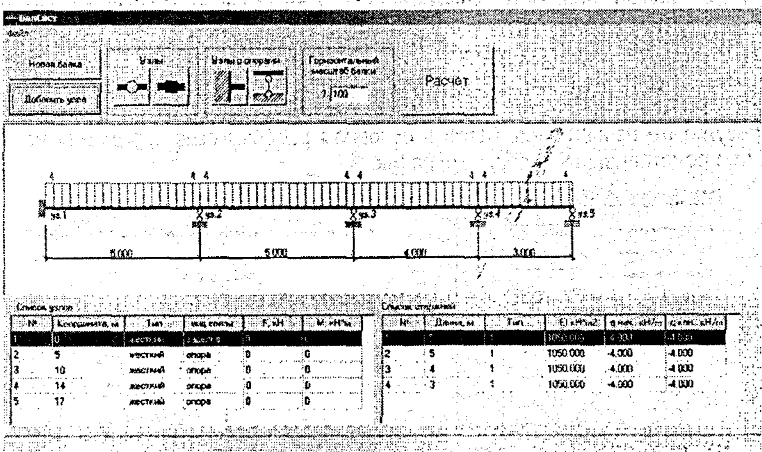


Рисунок 1 – Основное окно программы