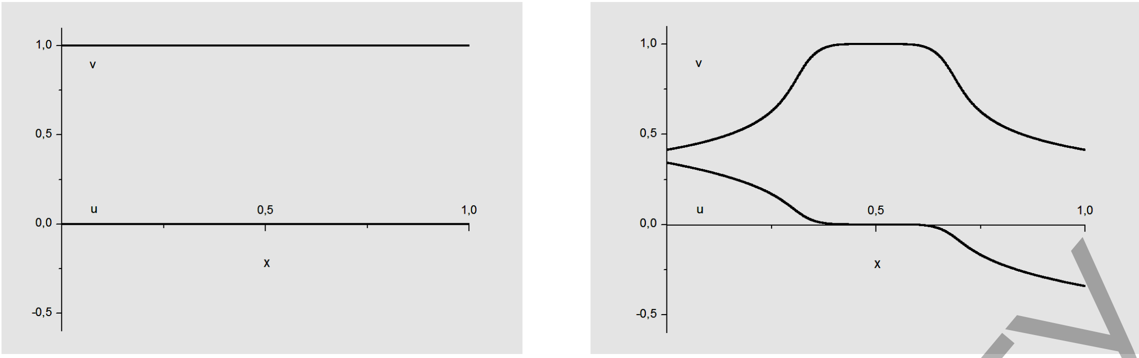

(а) **(б)**

Рисунок 1 – Профили удельного объема и скорости в начальный момент $t = 0$ (а); решение разностной схемы (13) – (15) с входными данными (16) в момент времени $t = 1{,}25$ (б)

Таким образом, вычислительный эксперимент проиллюстрировал необходимость условия (10) для существования глобального гладкого решения.

6. Выводы

В этой работе были сформулированы необходимые условия для существования глобального гладкого решения для начально-краевой задачи для системы уравнений газовой динамики. Построены разностные схемы, для которых эти же условия являются необходимыми для классической устойчивости. При этом полученные ограничения на граничные условия проиллюстрированы вычислительным экспериментом.

Список цитированных источников

1. Lax, P.D. Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations / P.D. Lax // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5, № 5. – P. 611–613.

2. Nishida, T. Mixed problems for nonlinear conservation laws / T. Nishida, J. Smoller // Journal of Differential Equations – 1977. – Vol. 23, № 2. – P. 244–269.

УДК 330.43(075.8)

ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ИНФЕРЕНЦИИ, ПОЛУЧЕННОЙ МЕТОДОМ БУТСТРАПИРОВАНИЯ

Пролиско Е.Е.
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест

Точная инференция[1] в современном эконометрическом анализе практически недостижима, если модель хоть сколь-нибудь замысловатая, а вовлеченные распределения не являются гауссовскими. Обычно используют асимптотический подход, когда при инференции используются приближения, свойственные теории больших выборок. Но асимптотическая теория часто разочаровывает неточностью предоставляемых приближений или трудностью аналитического вывода асимптотических результатов [1]. В этих случаях используют метод бутстрапирования, предоставляющий альтернативные асимптотическим приближения или возможность обходиться без сложных аналитических выводов.

[1] Инференция включает в себя построение доверительных областей и проверку статистических гипотез.

В основе бутстраповского подхода лежит та идея, что истинное распределение данных можно хорошо приблизить эмпирическим, то есть тем, как данные легли в выборке. На самом деле, эмпирическое распределение – единственный источник информации об истинном распределении данных, что у исследователя есть помимо спецификации модели. Идеологически бутстрап как раз и подразумевает это приближение истинного распределения эмпирическим; техническая же сторона дела – трансформировать приближение для распределения данных в приближенное распределение интересующих исследователя статистик, где используются симуляции. Идея того, что распределение самих данных используются вместо их истинного распределения, нашла отражение в названии метода[2].

Чаще всего бутстраповское распределение используют для получения бутстраповских квантилей, для чего нужно лишь отсортировать бутстраповские статистики в порядке возрастания и в качестве квантилей $q^*_{\alpha_1}$, $q^*_{1-\alpha_2}$ взять значения $\widehat{\varphi}^*_{[B\alpha_1]}$, $\widehat{\varphi}^*_{[B(1-\alpha_2)+1]}$ (здесь $[\cdot]$ означает взятие целой части выражения).

Если в выборке n наблюдений, то количество вариантов значений бутстраповской статистки имеет порядок n^n. Таким образом, в вычислительном плане задача сильно усложняется по мере роста n. Даже если бы компьютер справился с этой сложной комбинаторной задачей за разумное время, полученный результат окажется для наших целей точным сверх необходимого. Гораздо выгодней воспользоваться дополнительным приближением с помощью симуляций. Эта идея прекрасна тем, что как раз из эмпирического распределения, присваивающего всем наблюдениям выборки равные веса, вытягивать «наблюдения» (ресэмплировать) просто и удобно.

Пусть мы бутстрапируем разность $\widehat{\theta}-\theta$, где $\widehat{\theta}$ – аналоговая оценка параметра θ. При бутстрапировании $\widehat{\theta}$ мы создаем бутстраповские статистики $\widehat{\theta}^*$, подсчитываемые по той же формуле, что и $\widehat{\theta}$, но на бутстраповских выборках. При этом бутстраповским аналогом параметра θ является не он сам, а первоначальная статистика $\widehat{\theta}$. Действительно, если при приближении бутстрапом истинное распределение искривляется в эмпирическое, то и истинный параметр искривляется в свою оценку. Таким образом, правильным бутстраповским аналогом разности $\widehat{\theta}-\theta$ является, $\widehat{\theta}^*-\widehat{\theta}$, но не $\widehat{\theta}^*-\theta$. Это называют *рецентрированием*.

Если известна спецификация зависимости как парная линейная регрессия, то $m=2$ и исходный набор данных можно представить как выборку пар $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$, $\dots$, $z_n=(x_n,y_n)$. Тогда, полагая компоненту *x* как независимый фактор, а *y* – как зависимый, по имеющимся данным можно построить регрессию вида $y_t=\beta_0+\beta_1\cdot x_t+\varepsilon_t,\ t=\overline{1,n},$ где ε_t – ошибка t-го измерения, а β_0 и β_1 – оцениваемыемые параметры модели.

Применяя к имеющейся выборке, например, стандартный метод наименьших квадратов (МНК), получаем выборочные оценки $\widehat{\beta}_0$ и $\widehat{\beta}_1$, а применяя МНК к бутстраповским подвыборкам, получаем бутстраповские оценки $\widehat{\beta}^*_{0b}$ и $\widehat{\beta}^*_{1b}$, $b=\overline{1,B},$ на основе которых и строится инференция.

[2] «Бутстрапами» называются ремешки на обуви, ухватясь за которые, барон Мюнхаузен, в английской версии книги, вытащил себя из болота.

Рассмотрим предлагаемые в литературных источниках (например [2, 3]) несколько вариантов бутстраповских статистик, используемых для построения доверительных интервалов. Пусть нас интересует построение статистических выводов относительно параметра β_i из ее оценки $\widehat{\beta}_i, i = 0,1.$

1. *Эфроновский доверительный интервал*. В данном случае бутстрапируемой статистикой является сама оценка, т.е. $\widehat{\theta} = \widehat{\beta}_i, i = 0,1.$ Мы получаем бутстраповское распределение $\widehat{\theta}_b^* = \widehat{\beta}_{ib}^*$. Соответствующие квантили распределения $-q_{\alpha/2}^*, q_{1-\alpha/2}^*$, а доверительный интервал –

$$CI_E = [q_{\alpha/2}^*, q_{1-\alpha/2}^*].$$

Этот доверительный интервал дает плохую аппроксимацию для истинных уровней значимости, поскольку сохраняет смещение исходной выборки.

2. *Холловский доверительный интервал*. Для построения доверительного интервала используется рецентрированная статистика $\widehat{\theta} = \widehat{\beta}_i - \beta_i, i = 0,1$, что снимает проблему смещения, связанного с конечностью выборки. Таким образом, получается бутстраповское распределение $\{\widehat{\theta}_b^* = \widehat{\beta}_{ib}^* - \widehat{\beta}_i^*\}_{b=1}^B$, из которого берем соответствующие квантили $q_{\alpha/2}^*, q_{1-\alpha/2}^*$,, а доверительный интервал –

$$CI_H = [\widehat{\beta}_i - q_{1-\alpha/2}^*, \widehat{\beta}_i - q_{\alpha/2}^*].$$

Холловский доверительный интервал дает лучшую, чем Эфроновский, аппроксимацию уровней значимости, но он не учитывает влияние стандартных ошибок оцениваемых параметров.

3. *t-процентный доверительный интервал*. Такой интервал использует в качестве бутстрапируемой статистики *t*-статистику, т.е. $(\widehat{\beta}_i - \beta_i) / s(\widehat{\beta}_i), i = 0,1$, где $s(\widehat{\beta}_i)$ – оценка стандартного отклонения параметра $\widehat{\beta}_i$. Затем находят бутстраповское распределение статистики $\{\widehat{\theta}_b^* = (\widehat{\beta}_{ib}^* - \widehat{\beta}_i^*) / s(\widehat{\beta}_{ib}^*)\}_{b=1}^B$ и соответствующие квантилии $q_{\alpha/2}^*, q_{1-\alpha/2}^*$, а сам *t*-процентный доверительный интервал строят как

$$CI_t = [\widehat{\beta}_i - s(\widehat{\beta}_{ib}^*) \cdot q_{1-\alpha/2}^*, \widehat{\beta}_i - s(\widehat{\beta}_{ib}^*) \cdot q_{\alpha/2}^*].$$

t-процентный доверительный интервал еще лучше аппроксимирует истинные уровни значимости, чем Холловский доверительный интервал, но использовать его рекомендуется, только если оценку стандартного отклонения можно построить качественно.

4. *Симметричный t-процентный доверительный интервал*. Такой интервал использует в качестве бутстрапируемой «симметризованную *t*-статистику» $\left|\widehat{\beta}_i - \beta_i\right| / s(\widehat{\beta}_i^*)$. Распределение бутстраповской статистики есть $\{\widehat{\theta}_b^* = \left|\widehat{\beta}_{ib}^* - \widehat{\beta}_i\right| / s(\widehat{\beta}_{ib}^*)\}_{b=1}^B$, правый квантиль которой равен $q_{1-\alpha}^*$. Симметричный *t*-процентный доверительный интервал получаем в виде

$$CI_{|t|} = [\widehat{\beta}_i - s(\widehat{\beta}_{ib}^*) \cdot q_{1-\alpha/2}^*, \widehat{\beta}_i - s(\widehat{\beta}_{ib}^*) \cdot q_{1-\alpha}^*].$$

Симметричный *t*-процентный доверительный интервал имеет преимущество перед *t*-процентным доверительным интервалом если асимптотическое распределение статистики $\widehat{\beta}_i - \beta_i$ симметрично (как раз как в случае асимптотической нормальности), что $CI_{|t|}$ дает наилучшую аппроксимацию уровней значимости.

Для качественной проверки результатов желательно иметь «доступ» к генеральной совокупности с известными параметрами. Указанную возможность может предоставить метод имитационного моделирования. Были построены имитационные модели, реализующие процессы получения выборок из генеральных совокупностей с известными параметрами и построения на их основе бутстраповских выборок. Используя эти модели, были получены результаты, которые не согласуются с объявленными в указанных источниках.

Во-первых все методы построения доверительных интервалов дают один и тот же результат. Это не является удивительным, так как, например, при устранении смещения, используя рецентрирование, мы вновь вносим его при построении доверительного интервала.

Во-вторых все предлагаемые методы дают более узкие доверительные интервалы, которые растут с ростом объема выборки.

Список цитированных источников

1. Анатольев, С.А. Асимптотические приближения в современной эконометрике // Экономика и математические методы. – 2005. – № 41. – С. 84–94.
2. Анатольев, С.А. Основы бутстрапирования // Квантиль. – 2007. – № 3. – С. 1–12.
3. Дэвидсон, Р. Бутстрапирование эконометрических моделей // Квантиль. – 2007. – № 3. – С. 13–36.

УДК 519.24

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ МНОГОМЕРНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Стасюк Т.Г.
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Мирская Е.И., к. ф.- м. н., доцент

Спектральный анализ временных рядов является одним из основных направлений в исследованиях ученых многих стран мира, причем особое внимание уделяется методам спектрального анализа стационарных случайных процессов с дискретным временем.

В настоящее время существует большое количество различных методов и алгоритмов спектрального анализа временных рядов, касающихся в основном стационарных случайных процессов и однородных случайных полей с конечными вторыми моментами.

В данной работе исследованы первые два момента модифицированной периодограммы многомерного временного ряда. Вычислены математическое ожидание, дисперсия и ковариация модифицированной периодограммы, которая исследована в качестве оценки взаимной спектральной плотности процесса. Исследовано асимптотическое поведение математического ожидания и ковариации оценки.

Пусть $X^r(t),\ t \in Z$ – r-мерный действительный стационарный случайный процесс. Будем предполагать, что $MX_a(t)=0,$ а $f_{ab}(\lambda),\ \lambda \in \Pi = [-\pi, \pi],\ a,b=\overline{1,r}$ неизвестная взаимная спектральная плотность процесса.

Пусть $X_a(0), X_a(1), ..., X_a(T-1)$ – T последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за составляющей $X_a(t),\ a=\overline{1,r}$ процесса $X^r(t), t \in Z$.