где $f_{abab}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ *– семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка,* $\mu_i \in \Pi, i=1,2,3,$ *а функции* $\Phi_T(x,y)$, $\varphi_T(x)$, $\Phi_T(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ *задаются соответственно равенствами (3), (4), (2).*

Теорема 5. *Если семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена, выполнены условия теоремы 3 и*

$$\iiint\limits_{\Pi^3} |\Phi_T(\mu_1,\mu_2,\mu_3)| d\mu_1 d\mu_2 \mu_3 \le D < \infty,$$

то для $\lambda_1 \pm \lambda_2 \ne 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{cov}\{I^T_{a_1b_1}(\lambda_1), I^T_{a_2b_2}(\lambda_2)\} = 0 .$$

Список цитированных источников

1. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Мн.: БГУ, 1999. – 218 с.

УДК 518.948

НЕЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ОПЕРАТОРОМ

Ступкин А.А., Харитонюк А.А.
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Мадорский В.М. к. ф.- м. н., доцент

Пусть необходимо решить уравнение

$$F(x) = f(x) + g(x) = 0, \quad f \in C_D^2,\ g \in C_D . \tag{1}$$

Для решения уравнения (1) применим следующую итерационную процедуру:

Шаг 1. Последовательное приближения находятся по формуле

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k \frac{\overline{f'}(x_k) f(x_k)(\|f(x_k)\|^2 + \beta_{k-1}\|g(x_k)\|^2)}{\left\|\overline{f'}(x_k) f(x_k)\right\|^2} \tag{2}$$

Шаг 2. Если $\|f(x_k) + g(x_k)\| < \varepsilon$, то приближенное решение уравнения (1) найдено, иначе пересчитывается шаговая длина по формуле

$$\beta_{k+1} = min\left\{1, \frac{\beta_k(\|f(x_k)\|^2 + \beta_{k-1}\|g(x_k)\|^2)}{\|f(x_{k+1})\|^2 + \beta_k\|g(x_{k+1})\|^2}\right\},\ \beta_0, \beta_{-1}, \in [10^{-3}, 10^{-1}], \tag{3}$$

и переходим на шаг 1.

Относительно операторов f и g полагаем, что имеют место соотношения:

$$\|f''(x)\| \le K,\ \|\beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n)\| \le \beta_n L \|x_{n+1} - x_n\|.$$

Теорема.

Пусть в интересующей нас области D существует решение уравнения (1). Тогда при выполнении перечисленных выше условий, накладываемых на операторы f *и* g, если начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что выполняется соотношение $\varepsilon_0 = (KB^2 + LB)\beta_0 f(x_0) < 1$, итерационный процесс (2)-(3) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к решению уравнения (1).

Доказательство теоремы вполне аналогично тому, как это проводится в работе [2].

Вычислительный эксперимент и его обсуждение

Для тестирования использовались системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2^{\,2} + x_3 + x_4^{\,3} = a_1; \\ x_1 + |x_2| + x_3 - x_4 = a_2; \\ x_1 + 2\,x_2 + x_3^{\,3} + |x_4| = a_3; \\ x_1 + x_2 + 5\,x_3 + |x_4| = a_4; \end{cases}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – некоторые константы.

Меняя значения a_1, a_2, a_3, a_4, получаем три системы:

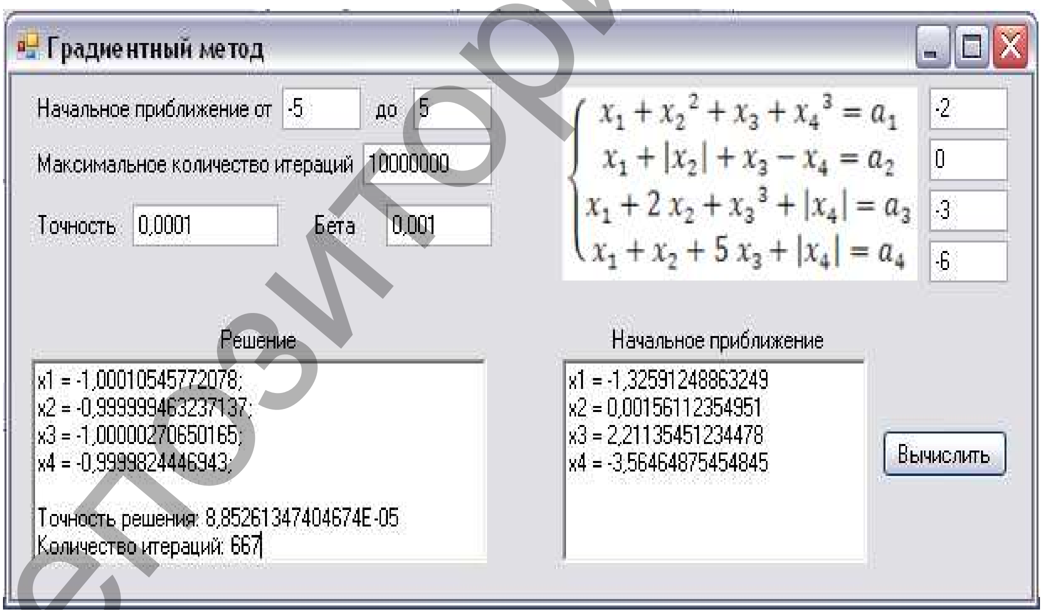
1. $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -3$, $a_4 = -6$, тогда одним из точных решений этой системы является вектор $(-1,-1,-1,-1)^T$

2. $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, тогда одним из точных решений этой системы является вектор $(1,1,1,1)^T$

3. $a_1 = -14$, $a_2 = 4$, $a_3 = -128$, $a_4 = -24$, тогда одним из точных решений этой системы является вектор $(2,-4,-5,-3)^T$

Каждая система тестировалась при значениях случаемым образом полученных из интервалов $[-2,2]$, $[-5,5]$,$[-10,10]$ и запускалась на тестирование 100 раз. В качестве точности ε использовалась 0,0001. В случае, если заданная точность не достигнута за 10000000 итераций, запуск считался неудавшимся.

Тестирование проводилось на компьютере: процессор 2.2 Ггц, ОЗУ 1024 Mb, программа написана на Visual C#. Программа имеет внешний вид:



Результаты тестирования сведены в таблице:

Таблица – Связь между эффективностью процесса и начальными данными

Интервал начальных приближений	Система		
	1.	2.	3.
$[-2,2]$	99% (31ms)	98% (32 ms)	98% (34 ms)
$[-5,5]$	80% (209 ms)	78% (224 ms)	77% (235 ms)
$[-10,10]$	75% (1291 ms)	74% (1321 ms)	75% (1306 ms)

В ячейках таблицы показан процент удавшихся запусков, в скобках указано среднее время (в миллисекундах), понадобившееся программе, чтобы достигнуть заданной точности. В связи с этим можно сделать следующие выводы: процесс (2)-(3) имеет широкую область сходимости и является достаточно быстрым.

Список цитированных источников

1. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.

2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.

УДК 517.988

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Таныгина А.Н.

УО «Белорусский государственный университет», г. Минск

Пусть *X* и *Y* – банаховы пространства, $D \subset X$ – выпуклое множество, *f* и *g* – определенные на *D* и принимающие значения из *Y* нелинейные операторы, причем *f* дифференцируем в каждой внутренней точке множества *D*, а *g* – недифференцируемый оператор. Одним из наиболее эффективных методов решения операторного уравнения вида

$$f(x) + g(x) = 0 \tag{1}$$

является обобщенный метод Ньютона–Канторовича, последовательные приближения в котором задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

где $x_0 \in D$ – заданное начальное приближение.

В случае, когда *g = 0*, наиболее точные из известных оценки скорости сходимости процесса (2) были получены в работах [1, 2] при предположении о гладкости оператора *f*, названном авторами регулярной гладкостью. Цель настоящей работы – обобщение основного результата о сходимости последовательных приближений из [2] на уравнения вида (1) при предположении, что оператор *f* является регулярно гладким, а оператор *g* удовлетворяет модифицированному условию Липшица:

$$\|g(x'') - g(x')\| \le \psi(t)\|x'' - x'\|, \quad \forall x',\ x'' \in \overline{B(x_0, t)} \subseteq D, \tag{3}$$

где $\psi(t)$ – неубывающая функция неотрицательного аргумента.

Пусть $\omega\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ – непрерывная строго монотонно возрастающая вогнутая функция, причем $\omega(0) = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $f'(x_0) = I$. Обозначим $h(f) = \inf\limits_{x \in D} \| f'(x)\|$. Согласно [2] оператор *f* называется ω*-регулярно гладким* на *D* (или ω является *модулем регулярной гладкости* для оператора *f* на *D*), если существует число $h \in [0, h(f)]$ такое, что для любых $x',\ x'' \in D$ имеет место неравенство

$$\omega^{-1}\left(h_f(x', x'') + \| f'(x'') - f'(x')\|\right) - \omega^{-1}\left(h_f(x', x'')\right) \le \|x'' - x'\|, \tag{4}$$

где

$$h_f(x', x'') = \min\left\{\| f'(x')\|, \| f'(x'')\|\right\} - h.$$