ности. В связи с этим можно сделать следующие выводы: процесс (2)-(3) имеет широкую область сходимости и является достаточно быстрым.

Список цитированных источников

1. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.

УДК 517.988

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Таныгина А.Н.
УО «Белорусский государственный университет», г. Минск

Пусть *X* и *Y* – банаховы пространства, $D \subset X$ – выпуклое множество, *f* и *g* – определенные на *D* и принимающие значения из *Y* нелинейные операторы, причем *f* дифференцируем в каждой внутренней точке множества *D*, а *g* – недифференцируемый оператор. Одним из наиболее эффективных методов решения операторного уравнения вида

$$f(x) + g(x) = 0 \tag{1}$$

является обобщенный метод Ньютона–Канторовича, последовательные приближения в котором задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

где $x_0 \in D$ – заданное начальное приближение.

В случае, когда *g = 0*, наиболее точные из известных оценки скорости сходимости процесса (2) были получены в работах [1, 2] при предположении о гладкости оператора *f*, названном авторами регулярной гладкостью. Цель настоящей работы – обобщение основного результата о сходимости последовательных приближений из [2] на уравнения вида (1) при предположении, что оператор *f* является регулярно гладким, а оператор *g* удовлетворяет модифицированному условию Липшица:

$$\|g(x'') - g(x')\| \le \psi(t)\|x'' - x'\|, \quad \forall x',\ x'' \in \overline{B(x_0, t)} \subseteq D, \tag{3}$$

где $\psi(t)$ – неубывающая функция неотрицательного аргумента.

Пусть $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – непрерывная строго монотонно возрастающая вогнутая функция, причем $\omega(0) = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $f'(x_0) = I$. Обозначим $h(f) = \inf\limits_{x \in D} \| f'(x)\|$. Согласно [2] оператор *f* называется *ω-регулярно гладким* на *D* (или ω является *модулем регулярной гладкости* для оператора *f* на *D*), если существует число $h \in [0, h(f)]$ такое, что для любых $x',\ x'' \in D$ имеет место неравенство

$$\omega^{-1}\left(h_f(x', x'') + \| f'(x'') - f'(x')\|\right) - \omega^{-1}\left(h_f(x', x'')\right) \le \|x'' - x'\|, \tag{4}$$

где

$$h_f(x', x'') = \min\left\{\| f'(x')\|, \| f'(x'')\|\right\} - h.$$

Оператор *f* называется *регулярно гладким* на *D*, если он является ω-регулярно гладким на *D* для некоторого ω, обладающего указанными выше свойствами.

Условие (4) для большей наглядности можно переписать в виде

$$\| f'(x'') - f'(x')\| \le \omega\big(\xi(x', x'') + \|x'' - x'\|\big) - \omega(\xi(x', x'')),$$

где $\xi(x', x'') = \omega^{-1}(h_f(x', x''))$.

Схема доказательства теоремы о сходимости последовательных приближений (2) к решению уравнения (1) основывается на использовании мажорантных скалярных уравнений. Данный способ был предложен Л.В. Канторовичем [3, гл. XVIII]. В процессе доказательства существенную роль играет приводимая ниже лемма.

Пусть $\Omega(t) = \int\limits_0^t \omega(\tau)d\tau$, $\Psi(t) = \int\limits_0^t \psi(\tau)d\tau$, $\chi = \omega^{-1}(1-h)$, *a* – положительное число, удовлетворяющее неравенству $\| f(x_0) + g(x_0)\| \le a$. Определим числовую последовательность $\{t_n\}$ следующим рекуррентным соотношением:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n h + \Psi(t_n)}{h + \omega(\chi - t_n)}, \tag{5}$$

$n = 0, 1, \ldots;\ t_0 = 0.$ Если ввести в рассмотрение функции числового аргумента $t \in [0, \chi]$

$$\Phi_h(t) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t) - th$$

и

$$W(t) = \Phi_h(t) + \Psi(t), \tag{6}$$

то соотношение (5) можно переписать в виде

$$t_{n+1} = t_n - \frac{W(t_n)}{\Phi'_h(t_n)},$$

$n = 0, 1, \ldots;\ t_0 = 0.$

Обозначим для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$r(x_{n-1}, x_n) = \| f(x_n) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})\|.$$

Лемма. Пусть оператор *f* является ω-регулярно гладким на *D* с некоторым *h*, оператор *g* удовлетворяет условию (3), последовательность $\{t_n\}$ определена по правилу (5) и выполнено условие

$$a < \Omega(\chi) + h \cdot \chi - \Psi(\chi). \tag{7}$$

Если для любого $1 \le k \le n$ последовательные приближения x_k определены и удовлетворяют неравенству

$$\|x_k - x_{k-1}\| \le t_k - t_{k-1},$$

то справедлива оценка

$$r(x_{n-1}, x_n) \le a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n h + \Psi(t_{n-1}).$$

Теорема. Пусть оператор *f* является ω-регулярно гладким на *D* с некоторым *h*, оператор *g* удовлетворяет условию (3), функция (6) имеет единственный нуль t_* на отрезке $[0, \chi]$, замкнутый шар $\overline{B(x_0, t_*)}$ содержится во множестве *D* и выполнено условие (7). Тогда:

1) уравнение (1) имеет единственное решение x_* в шаре $\overline{B(x_0, t_*)}$;

2) последовательные приближения (2) определены для всех $n=0,1,\ldots$, принадлежат шару $\overline{B(x_0,t_*)}$ и сходятся к x_*;

3) для всех $n=0,1,\ldots$ справедливы оценки

$$\|x_{n+1}-x_n\| \le t_{n+1}-t_n,$$
$$\|x_*-x_n\| \le t_*-t_n,$$

где последовательность $\{t_n\}$ определена по правилу (5), монотонно возрастает и сходится к t_*.

Список цитированных источников

1. Galperin, A. Newton's method under a weak smoothness assumption / A. Galperin, Z. Waksman // J. Comp. Appl. Math. – 1991. – Vol. 35. – P. 207–215.
2. Galperin, A. Regular smoothness and Newton's method / A. Galperin, Z. Waksman // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1994. – Vol. 15, № 7&8. – P. 813–858.
3. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

УДК 517.977

К ВОПРОСУ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ АВТОНОМНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМИ СИСТЕМАМИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Урбан О.И.

УО «Гродненский государственный университет им. Я. Купалы», г. Гродно

Научный руководитель – Хартовский В.Е., к. ф.- м. н., доцент

Системы с запаздыванием, в смысле их полной управляемости, начали изучаться Н.Н. Красовским в 60-х годах прошлого века, а затем активно исследовались многими математиками. Параллельно начали развиваться методы управления системами неполного ранга (не обладающие свойством полной управляемости). Настоящее исследование представляет собой изучение возможности построения управляющего воздействия для систем нейтрального типа неполного ранга в случае достаточно широкого класса начальных состояний.

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему нейтрального типа, которую назовем системой Σ:

$$\dot{x}(t) = D\dot{x}(t-h) + Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) + B_1u(t-h),\ t \ge 0, \qquad (1)$$

$$x(t) = \eta(t),\ t \in [-h,\ 0],\ u(t) \equiv 0,\ t < 0, \qquad (2)$$

где $x - n$ – вектор-столбец решения уравнения (1), $u - r$ – вектор-столбец кусочно-непрерывного воздействия. $D,\ A,\ A_1,\ B,\ B_1$ – постоянные матрицы соответствующих размеров, $h > 0$ – постоянное запаздывание.

Функцию $\eta(t)$ в (2) будем называть начальной функцией и считать, что $\eta \in D(H,\ Ў^n)$, где $D(H,\ Ў^n)$ – банахово пространство абсолютно непрерывных функций, определенных на H и со значениями в пространстве n-векторов $Ў^n$.