

Далее приведены примеры решения дифференциального уравнения (1) и системы методом Рунге-Кутты четвертого порядка в Scilab.

```
%Решение дифференциального уравнения (1).
function y=f(t,x)
y=6*x-13*t^3-22*t^2+17*t-11+sin(t);
endfunction;
x0=2; t0=0; t=0:0.05:0.5; y=ode('rk', x0, t0, t, f); plot(t,y,'g'); xgrid();

%Решение системы дифференциальных уравнений (2).
function dx=syst2(t,x)
dx=zeros(2,1); dx(1)=cos(x(1)+2*x(2)); dx(2)=sin(3*x(1)-4*x(2));
endfunction
x0=[2;1];t0=0;t=0:0.01:5; y=ode('rk',x0,t0,t,syst2); plot(t,y); xgrid()
```

Все рассмотренные пакеты достаточно точно решают дифференциальные уравнение и системы с помощью встроенных функций. Кроме того, пакеты оснащены мощным языком программирования, который дает возможность пользователю самостоятельно запрограммировать любой алгоритм решения дифференциального уравнения или системы.

Опыт решения дифференциальных уравнений и систем в *Scilab* и *Octave* показывает, что эти пакеты можно рассматривать, как серьезную альтернативу проприетарному пакету *MatLab*. Так, в *Octave*, кроме рассмотренных стандартных функций решения дифференциальных уравнений общего типа, входящих в состав ядра пакета, содержится специализированный модуль расширения *odepkg*, в котором представлено огромное количество специальных функций, предназначенных для решения дифференциальных уравнений различного вида. С другой стороны, наличие в *Scilab* одной функции для решения дифференциальных уравнений и систем позволяет быстро освоить пакет и использовать его для решения конкретных научных и инженерных задач.

Список цитированных источников

1. Алексеев, Е.Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах MathCad 12, MATLAB 7, Maple 9. Самоучитель / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова. – М.: ИТ Пресс, 2005. – 496 с.
2. Алексеев, Е.Р. Решение инженерных и математических задач в пакете Scilab / Е.Р. Алексеев, Е.А. Чеснокова, Е.А. Рудченко. – М.: ALT Linux, 2008. – 257 с.
3. Алексеев, Е.Р. Черновик книги "GNU OCTAVE для преподавателя и студента" / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова. – URL: <http://gnu-octave.narod2.ru> – Дата доступа: 08.08.2011.

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕУПРАВЛЯЕМЫХ ПО КАЛМАНУ

Хомицкая Т.Г.

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Рассматривается неустойчивая динамическая система

$$\dot{x} = Ax, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ – n -вектор состояния системы в момент времени t , $t \geq 0$, $A \in R^{n \times n}$ – постоянная матрица.

Считаем, что система (1) допускает целенаправленные воздействия $u(t)$, $t \geq 0$, вместе с которыми её поведение описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad b \in R^n. \quad (2)$$

Имея в виду использование для управления дискретных устройств, в качестве управляющих воздействий возьмем дискретные функции $u_h(t)$, $t \geq 0$, с периодом квантования $h > 0$:

$$u_h(t) = u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h = \{0, h, 2h, \dots\}.$$

В этом классе система (2) эквивалентна дискретной системе

$$x(t+h) = A_h x(t) + b_h u_h(t), \quad t \in T_h, \quad (3)$$

$$\left(A_h = e^{Ah}, \quad b_h = \int_0^h e^{At} dt b \right),$$

т.е. траектория $x(t)$, $t \geq 0$, системы (2) с начальным условием $x(0) = x_0$ и управляющим воздействием $u = u_h(t)$, $t \geq 0$, совпадает в моменты $\tau \in T_h$ с траекторией дискретной системы (3) с тем же начальным условием.

Будем рассматривать систему (2), которая в классе дискретных управляющих воздействий неуправляема в смысле Калмана, т.е.

$$\text{rank}\{b_h, A_h b_h, \dots, A_h^{n-1} b_h\} = m < n,$$

но является в том же классе асимптотически управляемой.

Определение. Система (2) называется асимптотически управляемой в классе дискретных управляющих воздействий, если для каждого вектора $x_0 \in R^n$ и каждого выбранного числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие число $t^*(\varepsilon, x_0) \in T_h$ и дискретное управляющее воздействие $u_h(t)$, $t \in [0, t^*(\varepsilon, x_0)]$, что соответствующая траектория $x(t)$, $t \geq 0$, системы (2) с начальным состоянием $x(0) = x_0$ обладает свойством $\|x(t^*(\varepsilon, x_0))\| < \varepsilon$.

Предположим, что в процессе стабилизации будут доступны точные значения текущих состояний $x(\tau)$, $\tau \in T_h$.

Функция $u(x)$, $x \in R^n$, называется обратной связью по состоянию. Ее подстановка в систему (2)

$$\dot{x} = Ax + bu(x) \quad (4)$$

– замыкание системы управления (2).

Траектория замкнутой системы представляет собой решение уравнения (4) с $x(0) = x_0$, которое не всегда имеет решение, продолжимое на всю ось времени. Функцию $u_h(x)$, $x \in R^n$, назовем дискретной обратной связью с периодом квантования h , непрерывная траектория $x(t)$, $t \geq 0$, замкнутой ею системы

$$\dot{x} = Ax + bu_h(x), \quad x(0) = x_0, \quad (5)$$

строится по решениям линейных уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu_h(x_0), \quad t \in [0, h[, \quad x(0) = x_0;$$

$$\dot{x} = Ax + bu_h(x(h)), \quad t \in [h, 2h[; \dots$$

В этом случае замкнутая система всегда имеет единственную траекторию, продолжимую на всю ось времени.

Пусть $G \subset R^n$ – некоторая окрестность состояния $x = 0$.

Определение. Функцию $u_h(x)$, $x \in G$, будем называть ограниченной стабилизирующей дискретной обратной связью, если

- 1) $u_h(0) = 0$;

2) $u_h(x) \in U = \{u \in R : |u| \leq 1\}$, $x \in G$;

3) для любого $x_0 \in G$ траектория $x(t)$, $t \geq 0$, замкнутой системы (5) с начальным состоянием $x(0) = x_0$ содержится в G ;

4) нулевое решение замкнутой системы (5) асимптотически устойчиво.

Под стабилизацией системы (2) в классе дискретных управляющих воздействий по классическому принципу замкнутого контура понимается построение в явной форме обратной связи $u_h(x)$, $x \in G$, с перечисленными свойствами.

Цель работы – изложить метод стабилизации системы (2) по принципу управления в режиме реального времени. В связи с этим сначала проанализируем использование стабилизирующей обратной связи в конкретном процессе стабилизации.

Предположим, что ограниченная стабилизирующая дискретная обратная связь $u_h(x)$, $x \in G$, построена и в замкнутой системе (5) реализовалось начальное состояние $x(0) = x_0^*$. Оно породит траекторию $x^*(t)$, $t \geq 0$, замкнутой системы (5). В процессе стабилизации на вход объекта управления (2) будут подаваться управляющие воздействия $u_h^*(t) = u_h(x^*(t))$, $t \geq 0$.

Отсюда видно, что в конкретном процессе стабилизации обратная связь используется не полностью, нужны лишь её значения $u_h^*(\tau) = u_h(x^*(\tau))$, $\tau \in T_h$, вдоль отдельной последовательности $x^*(\tau)$, $\tau \in T_h$.

Функцию $u_h^*(t)$, $t \geq 0$, назовем реализацией стабилизирующей обратной связи в конкретном процессе. Следовательно, для стабилизации системы (2) достаточно уметь вычислять значения реализации стабилизирующей обратной связи в реальном времени, т.е. в темпе поступления информации о текущих состояниях системы.

Определение. Устройство, которое на каждом промежутке $[\tau, \tau + h]$, $\tau \in T_h$, способно вычислить значения $u_h^*(\tau)$ за время s ($0 < s < h$), назовем стабилизатором.

Таким образом, проблема стабилизации свелась к построению алгоритма работы стабилизатора. В основу алгоритма работы стабилизатора положен метод [1, 2] и некоторые факты теории устойчивости по Ляпунову [3, 4].

Пример. Пусть поведение неустойчивой динамической системы описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = -x_2; \quad x_1(0) = 10.741, \quad x_2(0) = 0.496276. \quad (6)$$

Следуя предложенному методу стабилизации, дискретный эквивалент системы (6) преобразуем к новым переменным:

$$\begin{aligned} y_1(\tau + h) &= y_1(\tau) + u_h(\tau), \quad y_2(\tau + h) = e^{-h} y_2(\tau); \\ y_1(0) &= 10.741, \quad y_2(0) = 0.496276; \quad \tau \in T_h = \{0, h, 2h, \dots\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Результат работы стабилизатора (с периодом квантования $h=1$) представлен на рис. 1, где изображена проекция на фазовую плоскость $y_1 y_2$ траектории системы (7), порожденная управляющим воздействием

$$u_h^*(\tau) = \begin{cases} -1, & \tau \in \{0, 1, \dots, 9\}, \\ -0.741038, & \tau = 10, \\ 0, & \tau \in \{11, 12, \dots\}. \end{cases}$$

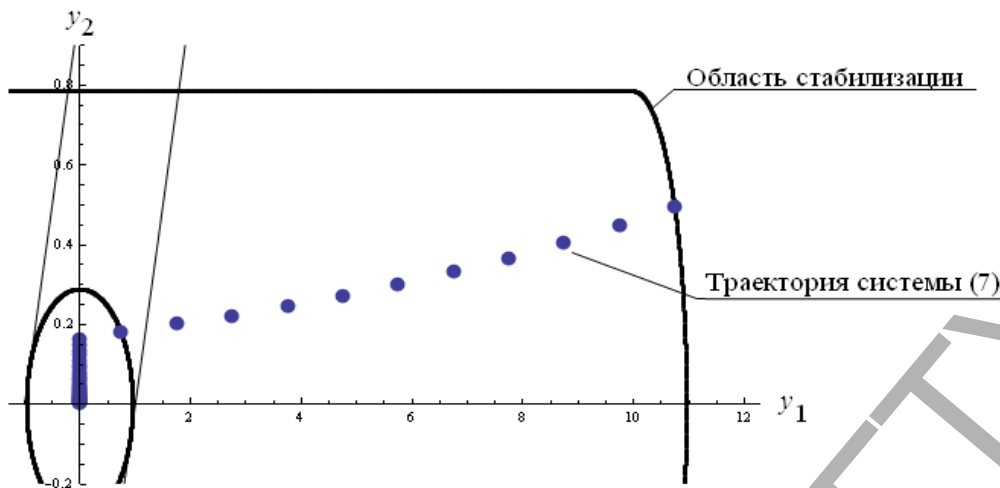


Рисунок 1

Список цитированных источников

1. Габасов, Р. К методам построения оптимальных стабилизаторов / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Прикладная математика и механика. – 1993. – Т. 57, Вып. 6. – С. 33 – 40.
2. Габасов, Р. Метод решения линейно-выпуклой задачи оптимального управления и стабилизация динамических систем в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Т.Г. Хомицкая // Изв. ВУЗов. Математика. – 2004. – № 12(511). – С. 3 – 16.
3. Барбашин, Е.А. Введение в теорию устойчивости / Е.А. Барбашин – М.: Наука, 1967. – 223 с.
4. Бромберг, П.В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования / П.В. Бромберг – М.: Наука, 1967. – 324 с.

УДК 539.23

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОТОННЫХ НАНОПУЧКОВ**Чугунов С.В., Бас В.К.**

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
 Научный руководитель – Русаков К.И., к. ф.- м. н., доцент

В последнее время повысился интерес к фокусирующим свойствам диэлектрических сфер с диаметром порядка нескольких длин волн в видимом диапазоне света. Как было показано в работах [1-3], такие сферы могут генерировать пучок света с очень малым размером светового пятна и с углом расхождения, по крайней мере, в два раза меньшим, чем в пучке, полученном классической фокусировкой гауссова пучка в свободном пространстве.

Эти пучки получили название "фотонные нанореактивные пучки" или "фотонные нанопучки". Они образуются в результате интерференции между падающей плоской волной и световым полем, рассеянным сферой или цилиндром. Нанореактивные пучки находят широкое применение при детектировании наноразмерных частиц, в усилении флуоресцирующих свойств, в фотонных волноводах с малыми потерями и в оптических устройствах хранения информации.

Распределение интенсивности в фотонном пучке может быть полностью рассчитано с помощью аналитического метода Ми, однако аналитический метод Ми в вычислительном отношении является довольно громоздким. Чтобы преодолеть данную проблему, нами был применен численный метод конечных элементов. Этот метод использовался