

звояет подобрать такие диаметры преломляющих цилиндров или сфер, при которых происходит усиление интенсивности его центрального максимума и уменьшение интенсивности смежных максимумов. Установлено, что ширина фотонного нанопучка колеблется вблизи величины равной 0,43 длины падающей световой волны в зависимости от параметров микросферы. Таким образом, можно подобрать оптимальный размер сферы, чтобы одновременно увеличить максимальную интенсивность центрального максимума, и уменьшить ширину фотонного нанопучка.

Список цитированных источников

1. Itagi, A.V. Optics of photonic nanojets / A.V. Itagi, W.A. Challener // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol.22, no.12. – P. 2847–2858.
2. Lecler, S. Properties of a three-dimensional photonic jet / S. Lecler, Y. Takakura, P. Meyrueis // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, no.19. – P. 2641–2643.
3. Gerlach, M. Nanojets and directional emission in symmetric photonic molecules / M. Gerlach, Y.P. Rakovich, J.F. Donegan // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, no.25. – P. 17343–17350.

УДК 517.925

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОИСКА РЕШЕНИЙ С ЗАДААННЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ У НОРМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Швычкина Е.Н.

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{\sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^{p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}} P_{\tau_1, \tau_2, \tau_3}^{(i)} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}}{\sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^{q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}} Q_{\tau_1, \tau_2, \tau_3}^{(i)} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $x_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) – искомые функции, z – независимая комплекснозначная переменная; p_{ik}, q_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) – целые неотрицательные числа, причем $p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} = p^{(i)}$, $q_{i1} + q_{i2} + q_{i3} = q^{(i)}$.

Заметим, что одновременно все коэффициенты многочленов $P_{p^{(i)}}^{(i)}(x_1, x_2, x_3)$, $Q_{q^{(i)}}^{(i)}(x_1, x_2, x_3)$ не должны быть тождественными нулями.

Для системы (1) ищутся решения $x_i = x_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$), обладающие бесконечными предельными свойствами

$$\begin{aligned} x_i(z) &\rightarrow \infty \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_0, \\ x_i(z) &\rightarrow \infty \quad (i = 1, 2), \quad x_3 \rightarrow x_{30} \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_0, \\ x_i(z) &\rightarrow \infty, \quad x_2 \rightarrow x_{20}, \quad x_3 \rightarrow x_{30} \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Вопросу существования и представления решений $x_i = x_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) со свойством (2) у нормальных систем трех дифференциальных уравнений посвящена работа [1]. Однако класс систем удовлетворяющих условиям, поставленным в работе [1], оказывается достаточно узким. Чтобы его расширить, применим следующий метод.

Введем замену

$$x_1 = \frac{1}{u^{\mu_1}}, x_2 = \frac{V_2}{u^{\mu_2}}, x_3 = \frac{V_3}{u^{\mu_3}}, \quad (3)$$

где μ_1, μ_2, μ_3 – натуральные числа. Замена (3), сведет систему к системе двух уравнений Брио и Буке, и одному уравнению, выражающему зависимость вида

$$\frac{dz}{du} = F(z, u).$$

Применяя метод, рассмотренный в [2], получим условия, гарантирующие существование решений системы (1), которые обладают предельными свойствами (2). Однако условия существования решений с заданными свойствами записываются, как правило, в таком виде, что требуется еще немало времени на их проверку даже для довольно простых систем. Используя возможности СКА *Mathematica* [3], приведем программный модуль, который находит решения обладающих заданными бесконечными предельными свойствами заданных дифференциальных систем.

Пример 1.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{x_1^3}{x_1 + x_2}, \quad \frac{dx_2}{dz} = \frac{2x_1^3 - x_1^2 x_2 - 2x_1^2}{2x_1 + 2x_3}, \quad \frac{dx_3}{dz} = \frac{2x_1^3 x_2 x_3 - x_1^4 x_3}{2(x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_3)}. \quad (4)$$

Рассмотрим компьютерную реализацию приведенного метода. Определим для системы (4) значения μ_1, μ_2, μ_3 , для нахождения которых приведем фрагмент кода:

```
pMax={};qMax={};
For[k=1,k<4,k++,deg=0;exp1={}; If[MatchQ[Numerator[sis[[k,2]]],x_+y_],
For[j=1,j<=Length[Numerator[sis[[k,2]]]],j++,deg=0;
exj=Exponent[Numerator[sis[[k,2]]][[j]],{x1[t],x2[t],x3[t]}//Flatten;
For[i=1,i<=Length[exj],i++,deg=deg+exj[[i]];exp1=Append[exp1,deg];
If[Max[exp1] <= exp1[[j]],INum_k=exj],
ex1=Exponent[Numerator[sis[[k,2]]],{x1[t],x2[t],x3[t]}//Flatten;
For[i=1,i<=Length[ex1],i++,deg=deg+ex1[[i]];exp1=Append[exp1,deg];INum_k=ex1];
pMax=Append[pMax,Max[exp1]];
s = {Sum_{i=1}^3 (INum[[i]] - IDen[[i]])mu_i - mu_1 - 1 == 0};
For[k=2,k<4,k++,s=Append[s, s = {Sum_{i=1}^3 (IDen[[i]] - INum[[i]])mu_i + mu_k + 1 + s[[1]] == 0}];
exp = Solve[s,{mu_1,mu_2,mu_3}] // Flatten
{mu_1 -> 1, mu_2 -> 1, mu_3 -> 1}.
```

Сделаем замену вида (3) и подставим в систему (4). Далее, применяя метод, рассмотренный в [2], получим однопараметрическое решение, которое обладает заданными бесконечными предельными свойствами (2):

$$x_1(\tau) = \frac{1}{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&,2]},$$

$$x_2(\tau) = -\frac{2}{5} - \frac{2}{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&,1]} - \frac{\alpha}{\sqrt{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&,1]}} - \frac{19}{75} \alpha \sqrt{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&,1]},$$

$$x_3(\tau) = \frac{25 - 3\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&1]}{25\sqrt{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&1]}}$$

где $\tau \equiv z - z_0$ и

$$\psi(\tau, \alpha) = -140625\tau^2 + 281250\tau + (56250\tau - 140625) + (62500\alpha^2 - 56250)\tau^3 + (19000\alpha^2 - 5625)\tau^4 + 1444\alpha^2\tau^5.$$

Увидеть зависимость от параметра α для действительной части функции $x_1(\tau)$ (рис. 1) можно с помощью встроенного модуля *Manipulate*.

```
Manipulate[Plot3D[Evaluate[Re[ $\frac{1}{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&2]}$ ]/.tau -> x + Iy]],
{x, -12, 12}, {y, -12, 12}], {alpha, -5, 5}]
```

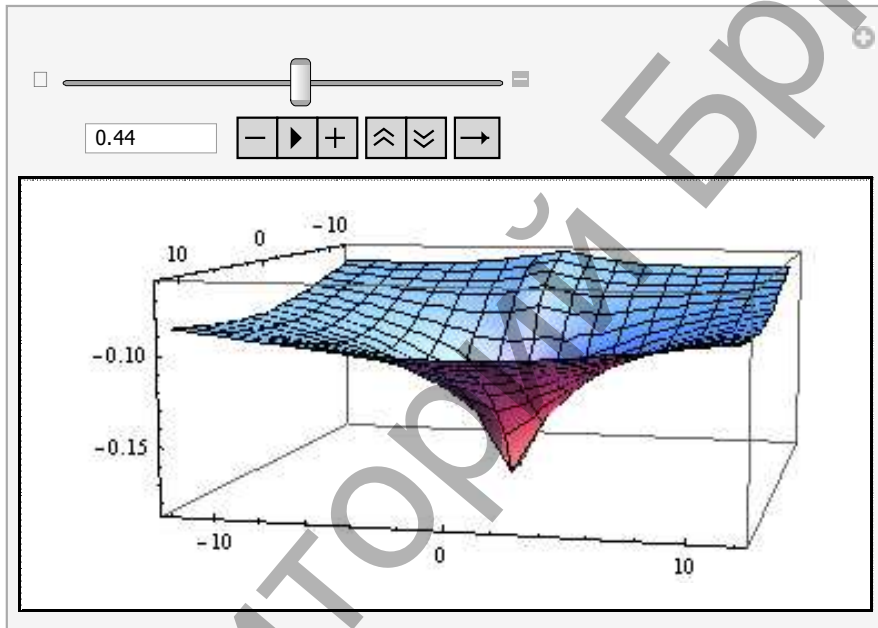


Рисунок 1 – Зависимость от параметра α действительной части функции $x_1(\tau)$

При различных значениях параметра α возможно разложение функции $x_1(\tau)$ в степенной ряд в окрестности точки $\tau = 0$. Например, при $\alpha = 0$ получим ряд:

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{5} - \frac{\tau}{25} + \frac{2\tau^2}{125} - \frac{\tau^3}{125} + \frac{14\tau^4}{3125} - \frac{42\tau^5}{15625} + O(\tau)^6,$$

который демонстрирует выполнение заданных предельных свойств (2) для функции $x_1(\tau)$, при $\tau \equiv z - z_0$.

Список цитированных источников

1. Чичурин А. В. О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными правыми частями / А. В. Чичурин // Вестн. Белорус. ун-та, Сер. 1: Физ. Мат. Мех. – 1992. – №2 – С. 62–66.
2. Shvychkina, H. About the Third Order Normal System of Differential Equations Having the Infinite Limit Properties of Its Solution // Computer Algebra Systems in Teaching and Research, Evolution, Control and Stability of Dynamical Systems, WSFiZ. – Siedlce, 2009. – P. 165–169.
3. Trott M. The Mathematica GuideBook for Symbolics. Springer Science+Business Media, Inc. – New York, 2006. – 1453 p.