

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра информатики и прикладной математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

к курсовой работе

«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

по дисциплине

«Системный анализ и исследование операций»

для студентов специальности

83 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»

дневной и заочной форм обучения

Пособие представляет собой руководство по выполнению курсовой работы по дисциплине «Системный анализ и исследование операций» для студентов специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации». В пособии приводятся:

- общая схема решения оптимизационной задачи;
- примеры построения математических моделей;
- пример решения задачи линейного программирования с послеоптимизационным анализом и поиском целочисленного решения;
- варианты заданий для выполнения курсовой работы;
- требования к содержанию и оформлению курсовой работы.

Составитель: В.М. Ракецкий, доцент, к.ф.-м.н.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ПОСТАНОВКА И ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	6
2. ПРИМЕРЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ .. 8	
2.1. <i>Задача о распределении ресурсов (или производственная задача)</i>	8
2.2. <i>Задача о загрузке оборудования</i>	9
2.3. <i>Задача о рационе</i>	11
2.4. <i>Задача о раскрое</i>	11
2.5. <i>Задача о смеси</i>	12
2.6. <i>Транспортная задача</i>	12
3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	14
3.1. <i>Постановка задачи</i>	14
3.2. <i>Построение математической модели</i>	14
3.3. <i>Решение задачи</i>	16
4. ПОСЛЕОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	25
4.1. <i>Предварительный анализ оптимального решения</i>	25
4.2. <i>Исследование чувствительности целевой функции</i>	25
4.3. <i>Исследование устойчивости оптимального базисного плана</i>	27
5. ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ	31
6. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	36
7. ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ .. 73	
7.1. <i>Содержание курсовой работы</i>	73
7.2. <i>Требования к оформлению курсовой работы</i>	74
ЛИТЕРАТУРА	77
ПРИЛОЖЕНИЕ	78

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии рассматривается материал, необходимый для выполнения курсовой работы по дисциплине «Системный анализ и исследование операций» для студентов специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации».

В любом операционном исследовании реализуются следующие основные этапы:

- 1) постановка задачи оптимизации;
- 2) построение математической модели;
- 3) поиск оптимального решения;
- 4) проверка и корректировка модели;
- 5) реализация оптимального решения на практике.

Этапы 2 и 3 операционного исследования можно выполнить с использованием математического программирования, объектом исследования которого являются экстремальные задачи при наличии ограничений. Слово «программирование» в названии «математическое программирование» отражает тот факт, что результатами математических исследований являются не только качественные результаты – леммы, теоремы, критерии, но и конструктивные – методы (алгоритмы) решения конкретных задач, возникающих на практике. Поскольку круг прикладных экстремальных задач чрезвычайно широк, в математическом программировании возникли собственные направления, связанные с исследованием специальных классов оптимизационных задач: линейных, нелинейных, динамических, дискретных (целочисленных), стохастических и т.п.

Наиболее развитым и законченным разделом математического программирования является линейное программирование, когда в задачах оптимизации находится экстремум линейной целевой функции при линейных ограничениях. Хотя такие задачи являются наиболее простыми из оптимизационных задач, они имеют многочисленные применения в экономике и технике, сфера приложения которых постоянно расширяется. Поэтому линейное программирование, являясь основой современного математического программирования, не представляет нечто застывшее, оно развивается, пополняется новыми методами.

В теории линейного программирования доказано, что экстремум целевой функции всегда достигается в угловых точках многогранника допустимых решений. Поэтому решение задачи линейного программирования, в принципе, можно найти перебором угловых точек этого многогранника. Эта простая идея легко реализуется при 2-х, максимум 3-х, переменных (графический метод решения задачи линейного программирования). В общем случае к решению задачи линейного программирования вплотную подошел в 30-40 годах прошлого века советский эко-

номист и математик, лауреат Нобелевской премии Канторович Л.В. Однако довести исследования до алгоритма решения впервые удалось в 1947 г. американскому ученому Дж. Данцигу. Он предложил метод, который стал широко известен под названием «симплекс-метод».

Симплекс-метод (СМ) представляет собой процедуру целенаправленного перебора угловых точек (в СМ их называют базисными планами), когда от одной точки к другой переходят только в том случае, если значение целевой функции, по крайней мере, не ухудшается. Для того чтобы «запустить» СМ, необходимо найти начальный базисный план (в ряде случаев он находится достаточно просто). Сам симплекс-метод представляет собой итерационную процедуру, состоящую из 3-х элементов:

- 1) выполняется оценка оптимальности базисного плана и, если он не оптимален, выбирается направление (ребро, если говорить о многограннике) для перехода к следующему базисному плану;
- 2) рассчитывается максимально допустимый шаг вдоль выбранного направления;
- 3) осуществляется переход к новому базисному плану.

В настоящее время решают линейные задачи с десятками тысяч переменных и тысячами ограничений.

В методических указаниях рассматривается общая схема решения оптимизационных задач (разд. 1), приводятся примеры построения различных математических моделей (разд. 2). Подробно рассмотрен пример решения задачи линейного программирования, который включает:

- постановку, построение математической модели и решение нецелочисленной задачи (разд. 3);
- послеоптимизационный анализ полученного решения (разд. 4);
- нахождение оптимального целочисленного решения (разд. 5).

Для выполнения курсовой работы предлагается пакет заданий по решению оптимизационных задач, включающий 104 варианта заданий (разд. 6), излагаются требования по выполнению и оформлению курсовой работы по проблематике линейного программирования (разд. 7).

Рекомендуемая студентам литература включает источники по исследованию операций и линейному программированию [1-17].

Решение задачи линейного программирования состоит в нахождении оптимального плана.

Основной метод решения задач линейного программирования – симплекс-метод. Для решения задачи этим методом она должна быть приведена к канонической форме. В этой форме задачи все переменные должны быть неотрицательны, все ограничения имеют вид равенств:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min),$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

При сведении задачи, заданной в общей (произвольной) форме (1.1), (1.2), к канонической форме (1.3) количество переменных, как правило, изменяется, поэтому значения n для (1.1), (1.2) и (1.3) обычно разные.

Для приведения задачи к канонической форме требуется привести ограничения-неравенства к ограничениям-равенствам. Для перехода от ограничений-неравенств к равенствам вводятся дополнительные (свободные) переменные. Такие переменные вычитаются из левых частей ограничений «не меньше» и прибавляются к левым частям ограничений «не больше».

Общая схема решения задач линейного программирования с использованием симплекс-метода следующая:

1. По содержательной постановке задачи строится ее математическая модель в общей форме.
2. Задача приводится к канонической форме (1.3).
3. Если система основных ограничений задачи (1.3) находится в предпочтительном виде, то выполняется переход к шагу 7. Обычно это возможно для задач, в постановке которых имеются только ограничения вида «не больше».
4. Строится вспомогательная задача линейного программирования.
5. С помощью симплекс-метода находится решение вспомогательной задачи и, тем самым, начальный базисный план исходной задачи.
6. Производится переход от вспомогательной задачи линейного программирования к исходной (в задачу возвращается исходная целевая функция).
7. С помощью симплекс-таблиц находится оптимальный план исходной задачи.
8. Выполняется анализ на чувствительность, т. е. анализ зависимости результатов от изменений в постановке задачи (если это требуется).
9. Находятся интервалы устойчивости оптимального решения к изменениям правых частей.
10. Находится целочисленное решение (если это требуется по содержанию задачи). Для этого применяется метод ветвей и границ или метод Гомори.
11. Производится интерпретация результатов решения задачи, т. е. определяется их содержательный смысл.

2. ПРИМЕРЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Задача о распределении ресурсов (или производственная задача)

Имеется m видов ресурсов (под ресурсами понимается сырье, энергия, рабочее время, потребительский спрос и т.д.). Известны запасы каждого ресурса: $b_i, i=1, \dots, m$. Ресурсы можно использовать для выпуска n видов продукции. Известна прибыль от выпуска единицы каждого вида продукции: $c_j, j=1, \dots, n$. Известны расходы каждого ресурса на единицу каждого вида продукции: $a_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$; здесь a_{ij} - расход i -го ресурса на выпуск единицы j -го вида продукции (возможно, что некоторые коэффициенты a_{ij} равны 0, если i -ый ресурс для выпуска j -ой продукции не используется). Требуется составить оптимальный план производства, т.е. найти, сколько продукции каждого вида требуется выпускать, чтобы получить максимальную прибыль (при соблюдении ограничений на ресурсы).

Введем в рассмотрение неизвестные переменные x_1, x_2, \dots, x_n . Переменная x_j будет обозначать план выпуска продукции j -го типа, $j=1, \dots, n$. Тогда $c_j x_j$ - ожидаемая прибыль предприятия от реализации продукции j -го типа, выражение

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

представляет собой общую прибыль предприятия от реализации всей продукции, произведенной в соответствии с планом x_1, x_2, \dots, x_n . Максимизации прибыли - цель настоящей задачи. Поэтому можно записать целевую функцию:

$$L(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max.$$

Сформулируем ограничения, вытекающие из постановки задачи.

Во-первых, для производства продукции используется сырье, запасы которого неограниченны. Рассмотрим более подробно первый вид сырья. a_{11} - норма расхода этого сырья на производство единицы (штуки, килограмма, литра и т.п.) продукции первого вида. Поэтому $a_{11} x_1$ - расход сырья 1-го вида на весь выпуск продукции 1-го вида. Аналогично $a_{12} x_2$ - расход сырья 1-го вида на выпуск продукции 2-го вида, $a_{13} x_3$ - 3-го вида и т.д. Для реализации всего плана x_1, x_2, \dots, x_n выпуска продукции требуется

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$$

единиц сырья 1-го вида. Естественно эта величина не может превосходить b_1 - количества сырья 1-го вида, имеющегося в запасах у предприятия. Т.о. возникает ограничение

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1.$$

Рассуждая подобным образом для 2-го, 3-го, . . . , n -го вида сырья, получим ограничения

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m.$$

Во-вторых, необходимо учесть, что искомые переменные не могут принимать отрицательных значений, т.е.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Таким образом, окончательно математическая модель задачи принимает вид:

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{array} \right.$$

В задачу о распределении ресурсов часто входят и другие ограничения. Например, если задано условие, что изделий k -го вида необходимо выпустить не менее s_k единиц, то вводится следующее ограничение:

$$x_k \geq s_k.$$

Если задано, что изделия видов p и q должны выпускаться в соотношении s_p / s_q , то вводится следующее ограничение:

$$x_p / x_q = s_p / s_q,$$

которое приводится к стандартной форме следующим образом:

$$s_q x_p - s_p x_q = 0.$$

2.2. Задача о загрузке оборудования

Имеется m станков, на каждом из которых можно выпускать любые из n деталей. Известно максимально возможное время работы каждого станка: $b_i, i=1, \dots, m$. Известна длительность изготовления каждой детали на каждом из станков: $a_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$, т.е. a_{ij} - длительность обработки j -ой детали, если она изготавливается на i -ом станке. Заданы также затраты на выпуск каждой детали на каждом из станков $u_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$, и цены, по которым продаются детали: $c_j, j=1, \dots, n$. Требуется найти, сколько деталей каждого вида следует изготовить на каждом из станков, чтобы получить максимальную прибыль.

Рассмотрим вопрос об ограничениях. Во-первых, каждый поставщик обладает ограниченными запасами продукции. Поэтому общая сумма выполняемых им поставок не может превышать имеющихся у него запасов:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Во вторых, необходимо обеспечить потребности каждого потребителя. Сумма поставок от всех поставщиков должна соответствовать его потребностям:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

С учетом естественных ограничений ($x_{ij} \geq 0$) математическая модель задачи принимает вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Постановка задачи

Высшее учебное заведение занимается подготовкой специалистов по 2-м специальностям. В соответствии с имеющимся портфелем заказов необходимо каждый год выпускать не менее 200 специалистов по специальности «Проектирование и производство ЭВМ» (кратко - ЭВМ) и 300 специалистов по специальности «Проектирование и разработка программного обеспечения» (кратко ПО).

Подготовка специалистов может вестись по двум формам обучения: дневной и заочной. По требованию министерства образования количество студентов заочной формы обучения не должно превышать 150 человек.

За подготовку одного специалиста на дневной форме обучения вуз получает 12 млн. рублей, на заочной - 5 млн. рублей. Затраты на подготовку специалиста при дневной форме обучения составляют 8,8 млн. рублей на специальности ЭВМ и 8,5 млн. рублей на специальности ПО. При заочной форме обучения эти затраты составляют 4,5 млн. рублей на специальности ЭВМ и 4,0 на специальности ПО.

Объем финансирования составляет 5500 млн. рублей в год.

Составить план подготовки специалистов, при котором доходы вуза будут максимальными.

3.2. Построение математической модели

Процесс подготовки специалистов с высшим образованием является долговременным и занимает 4 и более лет. Некоторые из студентов в процессе обучения уходят в академические отпуска, отчисляются и т.п. Однако в постановке задачи отсутствует информация, позволяющая учесть изменение числа студентов от курса к курсу. Поэтому будем предполагать, что число тех студентов, которые поступают на учебу, совпадает с количеством выпускников. Это предположение позволяет рассматривать не общее количество студентов в вузе, а количество студентов, обучающихся на одном курсе. Введем переменные, которые требуется определить:

x_1 - количество студентов специальности ЭВМ дневной формы обучения;

x_2 - количество студентов специальности ЭВМ заочной формы обучения;

x_3 - количество студентов специальности ПО дневной формы обучения;

x_4 - количество студентов специальности ПО заочной формы обучения.

Тогда $x_1 + x_2$ - общее количество студентов специальности ЭВМ, $x_3 + x_4$ - общее количество студентов специальности ПО (еще раз напомним, что речь идет о студентах одного курса). В соответствии с

имеющимися заказами студентов специальности ЭВМ должно быть не менее 200, специальности ПО – не менее 300. Поэтому получаем ограничения

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 200, \\ x_3 + x_4 &\geq 300. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Учтем ограничение, установленное министерством образования на количество студентов заочной формы обучения. $x_2 + x_4$ – общее количество студентов заочной формы обучения. Поэтому

$$x_2 + x_4 \leq 150. \quad (3.2)$$

Стоимость подготовки специалистов составит $12x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4$ млн. рублей. Поскольку объем финансирования ограничен и равен 5500 млн. рублей, то получаем ограничение

$$12x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 \leq 5500. \quad (3.3)$$

Очевидно, что все переменные в задаче неотрицательны:

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$$

Суммы, выплачиваемые вузу за подготовку специалистов, а также затраты вуза на их подготовку, известны. Поэтому можно подсчитать доход вуза от подготовки одного специалиста. Он составляет:

- $12 - 8,8 = 3,2$ млн. рублей за подготовку на специальности ЭВМ при дневной форме подготовки;
- $5 - 4,5 = 0,5$ млн. рублей за подготовку на специальности ЭВМ при заочной форме подготовки;
- $12 - 8,5 = 3,5$ млн. рублей за подготовку на специальности ПО при дневной форме подготовки;
- $5 - 4,0 = 1,0$ млн. рублей за подготовку на специальности ПО при заочной форме подготовки.

Поэтому суммарный доход вуза от подготовки всех специалистов будет равен $3,2x_1 + 0,5x_2 + 3,5x_3 + x_4$ млн. рублей. Так как доход необходимо максимизировать, то целевую функцию в нашей задаче можно записать так

$$L = 3,2x_1 + 0,5x_2 + 3,5x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} L &= 3,2x_1 + 0,5x_2 + 3,5x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 200, \\ x_3 + x_4 \geq 300, \\ x_2 + x_4 \leq 150, \\ 12x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 \leq 5500, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{array} \right. & \quad (3.4) \end{aligned}$$

3.3. Решение задачи

Для решения задачи необходимо привести ее математическую модель к канонической форме. Для этого в ограничения (3.1) добавим свободные переменные со знаком "-", а в ограничения (3.2) - свободные переменные со знаком "-". В результате получим:

$$L = 3,2x_1 + 0,5x_2 + 3,5x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 200, \\ x_3 + x_4 - x_6 = 300, \\ x_2 + x_4 + x_7 = 150, \\ 12x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 + x_8 = 5500, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,8}. \end{cases}$$

Как видно, 3-е и 4-ое ограничения задачи находятся в предпочтительном виде, т. к. в них содержатся переменные, входящие только в одно уравнение и имеющие коэффициент 1 (это переменные x_7 и x_8). В 1-м и 2-м уравнениях таких переменных нет, т. е. система ограничений не находится в предпочтительном виде. Значит, для решения задачи требуется применить 2-х фазный симплекс-метод.

Построим вспомогательную задачу линейного программирования. Для этого в 1-е и 2-е уравнения введем фиктивные переменные x_9 и x_{10} . Система ограничений после этого будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 + x_9 = 200, \\ x_3 + x_4 - x_6 + x_{10} = 300, \\ x_2 + x_4 + x_7 = 150, \\ 12x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 + x_8 = 5500, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,10}. \end{cases}$$

Целевая функция вспомогательной задачи представляет собой сумму фиктивных переменных, которую необходимо минимизировать:

$$W = x_9 + x_{10} \rightarrow \min.$$

Начальный базис вспомогательной задачи составляют переменные:

- 1) в ограничениях, которые находятся в предпочтительном виде, - те переменные, которые обеспечили предпочтительность этих ограничений (в нашем случае это переменные x_7 , x_8);
- 2) в ограничениях, которые не находятся в предпочтительном виде, - фиктивные переменные (в нашей задаче - переменные x_9 , x_{10}).

Разрешим систему ограничений относительно базисных переменных:

$$\begin{cases} x_9 = 200 - x_1 - x_2 + x_5, \\ x_{10} = 300 - x_3 - x_4 + x_6, \\ x_7 = 150 - x_2 - x_4, \\ x_8 = 5500 - 12x_1 - 5x_2 - 12x_3 - 5x_4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,10}. \end{cases}$$

Выразим целевую функцию вспомогательной задачи через небазисные переменные:

$$W = x_9 + x_{10} = 200 - x_1 - x_2 + x_5 + 300 - x_3 - x_4 + x_6 = 500 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6.$$

Таким образом, вспомогательная задача в симплексной форме будет иметь следующий вид:

$$W = 500 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_9 = 200 - x_1 - x_2 + x_5, \\ x_{10} = 300 - x_3 - x_4 + x_6, \\ x_7 = 150 - x_2 - x_4, \\ x_8 = 5500 - 12x_1 - 5x_2 - 12x_3 - 5x_4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,10}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Перенесем коэффициенты симплексной формы (3.5) в симплексную таблицу и приступим к решению задачи:

Таблица 3.1

x_{11}	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6							
W	300	-1	-1	-1	-1	1	1
x_9	200	-1	-1	0	0	1	0
x_{10}	300	0	0	-1	-1	0	1
x_7	150	0	-1	0	-1	0	0
x_8	5500	-12	-5	-12	-5	0	0

Этой симплексной таблице соответствует начальный базисный план вспомогательной задачи:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 150, 5500, 200, 300)^T, \quad W(x^{(0)}) = 500.$$

Этот план не оптимален, так как целевая функция вспомогательной задачи на минимум, а среди коэффициентов целевой функции (строка W вспомогательной задачи) есть отрицательные. Из отрицательных коэффициентов целевой функции необходимо выбрать максимальный по модулю. Поскольку все отрицательные коэффициенты одинаковы, то можем выбрать любой из них, например, в столбце x_1 . Столбец x_1 объявляем ведущим.

Рассчитаем максимально допустимый шаг θ^0 вдоль ведущей переменной x_7 . Для этого в симплексную таблицу добавим столбец, в который будем заносить результаты расчета шага для каждой базисной переменной. Словами правило расчета можно сформулировать следующим образом: если коэффициент в ведущем столбце больше либо равен нулю, то соответствующий шаг равен бесконечности; иначе он равен отношению соответствующего значения в столбце β к значению в ведущем столбце, взятому с противоположным знаком. Максимально допустимый шаг θ^0 вдоль ведущей переменной равен наименьшему из найденных шагов.

Формально это правило можно записать с помощью следующих соотношений

$$\theta^0 = \min_i \theta_i, \quad \theta_i = \begin{cases} \infty, & \text{если } r_i \geq 0; \\ -\beta_i / r_i, & \text{если } r_i < 0. \end{cases}$$

Здесь θ_i - шаг, рассчитанный по i -ой строке таблицы; β_i , r_i - элементы i -ой строки таблицы, находящиеся соответственно в столбце β и ведущем столбце таблицы.

Если $\theta^0 = \infty$, то целевая функция неограниченно возрастает (или убывает) на множестве планов задачи. Ее решение в этом случае окончено.

Допустим, что $\theta^0 < \infty$. Строка, содержащая максимально допустимый шаг θ^0 (т.е. содержащая наименьшее из найденных чисел), называется разрешающей.

Результаты вычисления максимально допустимого шага для рассматриваемого примера приведены в табл. 3.2.

Серым цветом в этой таблице выделены ведущий столбец и разрешающая строка. Элемент, находящийся на пересечении ведущего столбца и разрешающей строки, называется разрешающим.

Таким образом, переменная x_9 покидает базис, вместо нее в базис вводится ведущая переменная x_7 . Эта операция сопровождается пересчетом симплексной таблицы, который осуществляется по следующим четырем правилам:

Таблица 3.2

$x_B \backslash x_N$	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
W	300	-1	-1	-1	-1	1	1	
x_9	200	-1	-1	0	0	1	0	200
x_{10}	300	0	0	-1	-1	0	1	∞
x_7	150	0	-1	0	-1	0	0	∞
x_8	5500	-12	-5	-12	-5	0	0	$458 \frac{1}{3}$

- 1) «новый» разрешающий элемент есть число, обратное к «старому» разрешающему элементу, т.е.

$$\bar{r} = \frac{1}{r}$$

Здесь \bar{r} - «новый» разрешающий элемент, r - «старый» разрешающий элемент.

- 2) «новые» элементы разрешающей строки получаются из «старых» элементов делением на «старый» разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком, т.е.

$$\bar{s} = \frac{1}{-s}$$

Здесь \bar{s} - «новый» элемент разрешающей строки, s - «старый» элемент разрешающей строки.

- 3) «новые» элементы ведущего столбца получаются из «старых» элементов делением на «старый» разрешающий элемент, т.е.

$$\bar{t} = \frac{1}{t}$$

Здесь \bar{t} - «новый» элемент ведущего столбца, t - «старый» элемент ведущего столбца.

- 4) Рассмотрим произвольный элемент таблицы, не находящийся ни в ведущем столбце, ни в разрешающей строке. Обозначим его, например, q . Найдем его проекции на ведущий столбец и разрешающую строку. Обозначим их соответственно t и s (см. рисунок ниже).

	q		t	
	s		r	

Пусть \tilde{q} - «новый» элемент таблицы. Тогда он находится по формуле

$$\tilde{q} = q - \frac{s \cdot t}{r}$$

Эту формулу называют правилом прямоугольника. Словами его можно сформулировать так: «новый» элемент симплексной таблицы есть разность между его старым значением и произведением проекций, разделенным на разрешающий элемент.

Применим сформулированные выше правила к рассматриваемому примеру. В результате получим таблицу

Таблица 3.3

x_6 \ x_{ii}	β	x_9	x_2	x_3	x_4	x_5	x_8
W	300	1	0	-1	-1	0	1
x_1	200	-1	-1	0	0	1	0
x_{10}	300	0	0	-1	-1	0	1
x_7	150	0	-1	0	-1	0	0
x_8	3100	12	7	-12	-5	-12	0

Поскольку фиктивная переменная x_9 покинула базис, ее значение стало равным нулю. Это означает, что она выполнила свою функцию и ее можно исключить из дальнейшего рассмотрения, а соответствующий столбец – из таблицы:

Таблица 3.4

x_{ii} \ x_{ib}	β	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
W	300	0	-1	-1	0	1
x_1	200	-1	0	0	1	0
x_{10}	300	0	-1	-1	0	1
x_7	150	-1	0	-1	0	0
x_8	3100	7	-12	-5	-12	0

Таким образом, получено новое базисное решение вспомогательной задачи:

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_5^{(1)}, x_6^{(1)}, x_7^{(1)}, x_8^{(1)}, x_{10}^{(1)})^T = (200, 0, 0, 0, 0, 0, 150, 3100, 300)^T,$$

$$W(x^{(1)}) = 300.$$

Это решение не является оптимальным решением вспомогательной задачи, т.к. по-прежнему в строке W содержатся отрицательные коэффициенты.

Выполняем очередную итерацию. Столбец x_3 объявляем ведущим, по результатам расчета максимально допустимого шага получаем, что разрешающей будет строка x_8 .

Таблица 3.5

x_{ii} \ x_{ib}	β	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
W	300	0	-1	-1	0	1	
x_1	200	-1	0	0	1	0	∞
x_{10}	300	0	-1	-1	0	1	300
x_7	150	-1	0	-1	0	0	∞
x_8	3100	7	-12	-5	-12	0	$258 \frac{1}{3}$

Переменная x_8 покидает базис, вместо нее в базис вводится переменная x_3 . Однако количество столбцов в новой таблице не уменьшит-

ся: переменная x_6 – свободная, а не фиктивная. В отличие от фиктивной, свободная переменная такая же равноправная переменная, как и $x_1 - x_4$, и поэтому не покидает таблицу после вывода из базиса. После пересчета симплексной таблицы получим:

Таблица 3.6

$x_n \backslash x_6$	β	x_2	x_8	x_4	x_5	x_6
W	$412\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{7}{12}$	1	1
x_1	200	-1	0	0	1	0
x_{10}	$412\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{7}{12}$	1	1
x_7	150	-1	0	-1	0	0
x_3	$258\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{5}{12}$	-1	0

Симплексной табл. 3.6 соответствует базисный план вспомогательной задачи

$$x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}, x_5^{(2)}, x_6^{(2)}, x_7^{(2)}, x_8^{(2)}, x_{10}^{(2)})^T = (200, 0, 258\frac{1}{3}, 0, 0, 0, 150, 0, 412\frac{2}{3})^T,$$

$$W(x^{(2)}) = 412\frac{2}{3}.$$

Этот план по-прежнему не оптимален. Столбец x_2 выберем в качестве ведущего и рассчитаем максимально допустимый шаг:

Таблица 3.7

$x_n \backslash x_6$	β	x_2	x_8	x_4	x_5	x_6	θ
W	$412\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{7}{12}$	1	1	
x_1	200	-1	0	0	1	0	200
x_{10}	$412\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{7}{12}$	1	1	$713\frac{4}{7}$
x_7	150	-1	0	-1	0	0	150
x_3	$258\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{5}{12}$	-1	0	$442\frac{6}{7}$

На основании результатов расчета максимально допустимого шага определяем разрешающую строку x_{10} .

После замены в базисе переменной x_{10} на переменную x_2 , пересчета симплексной таблицы и исключения переменной x_{10} из дальнейшего рассмотрения, получим таблицу:

Таблица 3.8

$x_B \backslash x_N$	β	x_8	x_4	x_5	x_6
W	0	0	0	0	0
x_1	$128\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{15}{7}$
x_2	$71\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	-1	$\frac{15}{7}$	$\frac{15}{7}$
x_7	$78\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{15}{7}$
x_3	300	0	-1	0	1

Как видно, все искусственные переменные покинули базис и исключены из таблицы. Строка вспомогательной целевой функции W содержит одни нули. Это означает, что решение вспомогательной задачи окончено, первая фаза двухфазного метода завершена, получен базисный план исходной задачи:

$$x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, x_4^{(3)}, x_5^{(3)}, x_6^{(3)}, x_7^{(3)}, x_8^{(3)})^T = (128\frac{1}{3}, 71\frac{3}{7}, 300, 0, 0, 0, 78\frac{4}{7}, 0)^T.$$

Так как все фиктивные переменные покинули задачу, то система основных ограничений вспомогательной задачи совпадает с исходной системой основных ограничений.

Искусственная целевая функция с исчезновением фиктивных переменных трансформировалась в нулевую. Поэтому для перехода ко второй фазе симплекс-метода необходимо вернуться к исходной целевой функции. Поскольку исходная целевая функция содержит базисные переменные, их необходимо исключить, выразив через небазисные переменные. С этой целью из последней симплексной таблицы выпишем соотношения, связывающие базисные переменные с небазисными:

$$x_1 = 128\frac{4}{7} - \frac{1}{7}x_8 + x_4 - \frac{5}{7}x_5 - \frac{15}{7}x_6,$$

$$x_2 = 71\frac{3}{7} + \frac{1}{7}x_8 - x_4 + \frac{15}{7}x_5 + \frac{15}{7}x_6,$$

$$x_7 = 78\frac{4}{7} - \frac{1}{7}x_8 - \frac{15}{7}x_5 - \frac{15}{7}x_6,$$

$$x_3 = 300 - x_4 + x_6,$$

Подставляя в исходную целевую функцию вместо переменных x_1, x_2, x_4 соответствующие выражения, получим:

$$\begin{aligned}
 L &= 3 \frac{1}{5} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + 3 \frac{1}{2} x_3 + x_4 = 3 \frac{1}{5} (128 \frac{4}{7} - \frac{1}{7} x_8 + x_4 - \frac{5}{7} x_5 - \frac{15}{7} x_6) + \\
 &+ \frac{1}{2} (71 \frac{3}{7} + \frac{1}{7} x_8 - x_4 + \frac{15}{7} x_5 + \frac{15}{7} x_6) + 3 \frac{1}{2} (300 - x_4 + x_6) + x_4 = \\
 &= 1497 \frac{1}{7} - \frac{27}{70} x_1 + \frac{1}{5} x_2 - \frac{13}{7} x_5 - \frac{19}{70} x_6.
 \end{aligned}$$

В результате симплексная таблица примет вид:

Таблица 3.9

x_n x_6	β	x_8	x_4	x_5	x_6
W	$1497 \frac{1}{7}$	$-\frac{27}{70}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{13}{7}$	$-\frac{19}{70}$
x_1	$128 \frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{15}{7}$
x_2	$71 \frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	-1	$\frac{15}{7}$	$\frac{15}{7}$
x_7	$78 \frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{15}{7}$
x_3	300	0	-1	0	1

Из таблицы следует, что план $x^{(2)}$ не оптимален, так как среди коэффициентов целевой функции есть отрицательные. Выберем переменную x_4 в качестве ведущей и рассчитаем максимально допустимый шаг:

Таблица 3.10

x_n x_6	β	x_8	x_4	x_5	x_6	θ
W	$1497 \frac{1}{7}$	$-\frac{27}{70}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{13}{7}$	$-\frac{19}{70}$	
x_1	$128 \frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{15}{7}$	∞
x_2	$71 \frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	-1	$\frac{15}{7}$	$\frac{15}{7}$	$71 \frac{3}{7}$
x_7	$78 \frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{15}{7}$	∞
x_3	300	0	-1	0	1	300

Переменная x_2 покидает базис, ее заменяет переменная x_4 . После пересчета таблицы получим:

Таблица 3.11

$x_6 \backslash x_n$	β	x_6	x_2	x_5	x_5
W	$1511\frac{3}{7}$	$-\frac{5}{14}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{13}{35}$	$-\frac{11}{14}$
x_1	200	0	-1	1	0
x_4	$71\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	-1	$\frac{15}{7}$	$\frac{15}{7}$
x_7	$78\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{15}{7}$
x_3	$228\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{5}{7}$

Поскольку строка L таблицы не содержит отрицательных элементов, то базисный план

$$x^{(4)} = \left(200, 0, 228\frac{4}{7}, 71\frac{3}{7}, 0, 0, 78\frac{4}{7}, 0\right)^T, \quad L(x^{(4)}) = 1511\frac{3}{7}.$$

является оптимальным. Решение задачи окончено.

Получено оптимальное решение. Значения основных переменных задачи $x_1=200$, $x_3=228\frac{4}{7}$, $x_4=71\frac{3}{7}$ обозначают, что для получения максимального дохода вузу ежегодно необходимо выпускать:

- 200 студентов специальности ЭВМ дневной формы обучения;
- $228\frac{4}{7}$ студентов специальности ПО дневной формы обучения;
- $71\frac{3}{7}$ студентов специальности ПО заочной формы обучения.

При этом доход вуза составит $L = 1511\frac{3}{7}$ млн. рублей.

Естественно, требуется найти целочисленное решение, но об этом в разделе 5.

4. ПОСЛЕОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1. Предварительный анализ оптимального решения

Первых два ограничения системы являются количественными, поскольку они вытекают из портфеля заказов на подготовку специалистов. Так как связанные с ними свободные переменные $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, то эти ограничения являются существенными. Экономически это можно интерпретировать так: вуз вынужден готовить специалистов в тех количествах, которые обусловлены портфелем заказов. Однако можно предположить, что именно такой портфель заказов вузу невыгоден. Если цифры заказа несколько уменьшить, то доход вуза возрастет. Этот вывод кажется парадоксальным (на первый взгляд, чем больше студентов готовит вуз, тем больше его прибыль), однако он подтвердится дальнейшими исследованиями. Пока можно обосновать сделанный вывод следующим рассуждением: уменьшение портфеля заказов позволит вузу улучшить структуру контингента студентов, например: сократить количество студентов заочной формы обучения (из коэффициентов целевой функции видно, что вузу гораздо выгоднее готовить специалистов дневной формы обучения, чем заочной).

Третье ограничение также является количественным. Оно вытекает из ограничения, наложенного Министерством образования, на количество студентов заочной формы обучения. Поскольку связанная с ним переменная $x_7 = 78 \frac{4}{7} > 0$, то оно является несущественным. Это ограничение не оказывает влияния на формирование оптимального плана. Экономически это можно объяснить так: подготовка студентов заочной формы обучения для вуза невыгодна. Поэтому возможностью обучать 150 студентов заочной формы обучения вуз в полном объеме не воспользовался. То, что вуз все-таки выпускает определенное количество специалистов заочной формы обучения, объясняется ограниченным финансированием, которое не позволяет всех студентов обучать очно.

Четвертое ограничение напрямую связано с финансированием вуза и, естественно, является ресурсным. Так как $x_7 = 0$, то оно является дефицитным, т.е. оказывает существенное влияние на формирование оптимального плана. Достаточно очевидно, что увеличение финансирования приведет к росту доходов вуза.

4.2. Исследование чувствительности целевой функции

В предыдущем пункте было проведено качественное исследование оптимального решения. Никаких цифр, которые показывали бы, как влияют правые части ограничений на оптимальное значение целевой функции,

получено не было. Получение таких цифр требует более тонкого математического анализа. Основой для их получения в линейном программировании является следующая теорема: если оптимальное решение x^* задачи линейного программирования не вырождено, то

$$\frac{\partial L(x^*)}{\partial b_i} = y_i^* \quad (4.1)$$

Здесь $L(x^*)$ – значение целевой функции на оптимальном плане; $\frac{\partial L(x^*)}{\partial b_i}$ – частная производная целевой функции по переменной b_i ; y_i^* – i -ая компонента оптимального двойственного плана, который находится из соотношения

$$y^* = (A_1^{-1})^T c_0 \quad (4.2)$$

Как известно, физическая интерпретация производной – скорость. Поэтому $\frac{\partial L(x^*)}{\partial b_i}$ есть скорость изменения целевой функции в зависимости от изменения правой части b_i . В экономической интерпретации сформулированная теорема утверждает, что прибыль предприятия изменяется в зависимости от i -го ресурса со скоростью y_i .

Таким образом, для исследования чувствительности целевой функции к изменениям правых частей основных ограничений необходимо найти оптимальный двойственный план (4.2) и исследовать его компоненты.

Согласно таблице 3.11 базисными являются переменные x_1, x_2, x_4, x_7 . Поэтому

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_B = \begin{pmatrix} 3 \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим обратную базисную матрицу

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{5}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{12}{7} & \frac{5}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{7} & -\frac{12}{7} & 1 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

и найдем оптимальный двойственный план

$$y^* = (A_3^{-1})^T c_3^* = \begin{pmatrix} -5/7 & 12/7 & 0 & -12/7 \\ -5/7 & 5/7 & 0 & -12/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/7 & -1/7 & 0 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \frac{1}{5} \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/7 \\ -13/14 \\ 0 \\ 27/70 \end{pmatrix}.$$

Дадим экономическую интерпретацию полученным результатам.

1-ое ограничение является количественным и связано с наличием заказа на подготовку специалистов по специальности ЭВМ. Это ограничение является существенным, увеличение заказа на 1-го специалиста приводит к уменьшению дохода вуза на $10/7$ млн. рублей и, наоборот, уменьшение заказа на 1-го специа. листа приводит к увеличению дохода на $10/7$ млн. рублей.

2-ое ограничение является количественным и связано с наличием заказа на подготовку специалистов по специальности ПО. Это ограничение также является существенным, увеличение заказа на 1-го специалиста приводит к уменьшению дохода вуза на $13/14$ млн. рублей.

3-ое ограничение, как и два предыдущих, является количественным и связано с ограничением Министерства образования на подготовку специалистов на заочной форме обучения. Это ограничение является несущественным, а поэтому целевая функция нечувствительна к его изменению ($y_3^* = 0$).

4-ое ограничение является ресурсным и связано с объемом финансирования. Этот ресурс является дефицитным. Увеличение финансирования на 1 млн. рублей приводит к возрастанию целевой функции на $27/70$ млн. рублей.

Выводы, полученные на основе анализа оптимального двойственного плана, полностью соответствуют выводам, сделанным в ходе предварительного анализа оптимального решения.

4.3. Исследование устойчивости оптимального базисного плана

В соответствии с п. 4.2, изменяя правые части системы ограничений, можно добиться улучшения оптимального значения целевой функции. Однако со значениями правых частей напрямую связан оптимальный план: изменяем количество ресурсов (объем заказов) – изменяется план производства (в нашем случае – план подготовки специалистов). При больших изменениях в наличии ресурсов возможны значительные изменения в оптимальном плане производства: выпуск одних видов продукции придется свернуть, других – наладить. Изменение в структуре

производства крайне нежелательны. Как правило, они влекут дополнительные финансовые затраты: на переналадку оборудования, на переобучение персонала и т.п. Поэтому возникла проблема устойчивости оптимального решения к изменениям правых частей ограничений: в каких пределах можно изменять правые части ограничений, чтобы структура оптимального плана не изменилась. Под *структурой оптимального плана* понимается состав его базисных (ненулевых) и небазисных (нулевых) компонент. В экономической интерпретации эту проблему можно сформулировать так: в каких пределах можно управлять запасами ресурсов (объемами заказов), чтобы при этом не изменилась структура производства?

Предположим, что правая часть i -го ограничения b_i изменилась на величину Θ , т.е. стала равной $b_i + \Theta$, \bar{x} - соответствующий (новый) оптимальный план. Связь между старым x^* и новым \bar{x} оптимальными планами при условии сохранения структуры плана описывается следующим соотношением

$$\bar{x}_j^* = x_j^* + \Theta z_j^i, \quad (4.3)$$

где z^i - i -ый столбец обратной базисной матрицы A_j^{-1} . Равенство (4.3) вместе с прямым ограничением $\bar{x} \geq 0$ дает ответ на поставленную выше проблему: величина изменения правой части i -го ограничения Θ должна быть такой, чтобы выполнялось неравенство:

$$\bar{x}_j^* = x_j^* + \Theta z_j^i \geq 0 \quad (4.4)$$

Назовем диапазон возможных значений величины b_i *интервалом устойчивости* к изменениям правой части i -го ограничения и обозначим $[b_i, \bar{b}_i]$. Тогда из неравенства (4.4) вытекает следующее соотношение:

$$[b_i, \bar{b}_i] = [b_i - \underline{\Theta}_i, b_i + \bar{\Theta}_i], \quad (4.5)$$

где $\underline{\Theta}_i$ - максимально возможное уменьшение, $\bar{\Theta}_i$ - максимально возможное увеличение правой части i -го ограничения. При этом

$$\underline{\Theta}_i = \begin{cases} \min_{z_j^i > 0} \frac{x_j^*}{z_j^i}, & \text{- если среди компонент вектора } z^i \text{ есть положительные;} \\ \infty, & \text{- в противном случае;} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\bar{\Theta}_i = \begin{cases} \min_{z_j^i < 0} \left(-\frac{x_j^*}{z_j^i} \right), & \text{- если среди компонент вектора } z^i \text{ есть отрицательные;} \\ \infty, & \text{- в противном случае.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Таким образом, для исследования устойчивости оптимального базисного плана к изменениям правых частей ограничений необходимо найти интервалы устойчивости в соответствии с формулами (4.5)-(4.7).

1. Найдем интервал устойчивости для 1-го ограничения. Для его расчета используют формулы (4.6), (4.7). Тем не менее, для наглядности стоит записать неравенство (4.4). В этом случае, сразу видно, какие компоненты используются для расчета $\underline{\Theta}$, а какие – для расчета $\bar{\Theta}$.

$$\bar{x}_j = x_j + \Theta z^1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 228\frac{4}{7} \\ 713\frac{3}{7} \\ 784\frac{4}{7} \end{pmatrix} + \Theta \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ 12\frac{1}{7} \\ 0 \\ -12\frac{1}{7} \end{pmatrix} \geq 0$$

Отсюда следует, что максимально допустимое уменьшение b_1 составляет:

$$\underline{\Theta} = \min \left\{ \frac{228\frac{4}{7}}{12\frac{1}{7}} \right\} = 133 \frac{1}{3}$$

(вычисляем по положительным компонентам вектора z^1).

Аналогично максимально допустимое увеличение b_1 равно:

$$\bar{\Theta} = \min \left\{ -\frac{200}{-\frac{5}{7}}, -\frac{784\frac{4}{7}}{-12\frac{1}{7}} \right\} = 452\frac{2}{3}$$

(вычисляем по отрицательным компонентам вектора z^1)

Таким образом, интервал устойчивости для b_1 составляет:

$$[b_1, \bar{b}_1] = [b_1 - \underline{\Theta}, b_1 + \bar{\Theta}] = \left[200 - 133 \frac{1}{3}, 200 + 452\frac{2}{3} \right] = \left[66\frac{2}{3}, 245\frac{2}{3} \right]$$

2. Найдем интервал устойчивости для 2-го ограничения:

$$\bar{x}_j = x_j + \Theta z^2 = \begin{pmatrix} 200 \\ 228\frac{4}{7} \\ 713\frac{3}{7} \\ 784\frac{4}{7} \end{pmatrix} + \Theta \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ -12\frac{1}{7} \end{pmatrix} \geq 0$$

Отсюда следует, что максимально допустимое уменьшение b_2 составляет:

$$\underline{\Theta} = \min \left\{ \frac{228\frac{4}{7}}{5\frac{7}{7}}, \frac{713\frac{3}{7}}{1} \right\} = 713\frac{3}{7}.$$

Максимально допустимое увеличение b_2 равно

$$\bar{\Theta} = \min \left\{ \frac{200}{-5\frac{7}{7}}, \frac{78\frac{4}{7}}{-12\frac{7}{7}} \right\} = 45\frac{2}{3}.$$

Таким образом, интервал устойчивости для b_2 составляет:

$$\left[\underline{b}_2, \bar{b}_2 \right] = \left[b_2 - \underline{\Theta}, b_2 + \bar{\Theta} \right] = \left[300 - 713\frac{3}{7}, 300 + 45\frac{2}{3} \right] = \left[228\frac{4}{7}, 345\frac{2}{3} \right].$$

Аналогичным образом находятся интервалы устойчивости для двух оставшихся ограничений. Приведем только результаты вычислений:

$$\left[\underline{b}_3, \bar{b}_3 \right] = \left[150 - 713\frac{3}{7}, 150 + \infty \right] = \left[78\frac{4}{7}, \infty \right)$$

(у вектора $z^3 = (0, 0, 1, 0)^T$ отсутствуют отрицательные компоненты, а поэтому $\bar{\Theta} = \infty$);

$$\left[\underline{b}_4, \bar{b}_4 \right] = \left[5500 - 550, 5500 + 1600 \right] = \left[4950, 7100 \right]$$

5. ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Исходная задача (3.4) по своему содержанию является полностью целочисленной, так как переменные x_1, x_2, x_3, x_4 , обозначают количество студентов.

Для поиска оптимального целочисленного решения воспользуемся методом ветвей и границ. Для этого выберем любую нецелочисленную компоненту оптимального решения, например $x_3^* = 228\frac{4}{7}$. Тогда, в соответствии со схемой метода ветвей и границ, необходимо по исходной задаче построить и решить две новые задачи. Одна из них получается из исходной добавлением к системе ограничений неравенства $x_3 \leq [x_3^*] = [228\frac{4}{7}] = 228$:

$$L = 3,2x_1 + 0,5x_2 + 3,5x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 200, \\ x_3 + x_4 \geq 300, \\ x_2 + x_4 \leq 150, \\ 12x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 \leq 5500, \\ x_3 \leq 228, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

вторая – неравенства $x_3 \geq [x_3^*] + 1 = [228\frac{4}{7}] + 1 = 229$:

$$L = 3,2x_1 + 0,5x_2 + 3,5x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 200, \\ x_3 + x_4 \geq 300, \\ x_2 + x_4 \leq 150, \\ 12x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 \leq 5500, \\ x_3 \geq 229, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

Решив симплекс-методом задачи (5.1), (5.2), получим:

$$x^{2*} = \begin{pmatrix} 200,333 \\ 0 \\ 228 \\ 72 \end{pmatrix}, \quad L(x^{2*}) = 1511,066; \quad x^{3*} = \begin{pmatrix} 199,571 \\ 0,429 \\ 229 \\ 71 \end{pmatrix}, \quad L(x^{3*}) = 1511,342.$$

Здесь x^{2*} - решение задачи (5.1), x^{3*} - задачи (5.2).

Этот процесс можно изобразить с помощью следующего дерева решения:

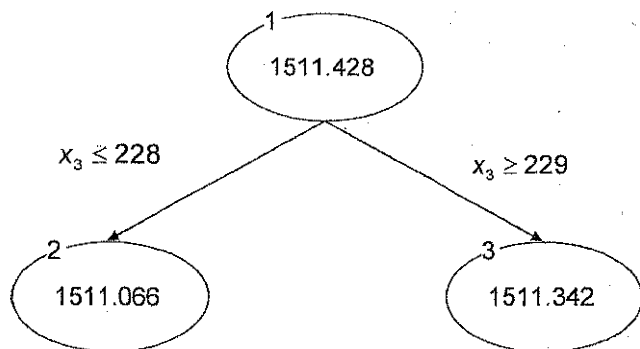


Рис. 5.1. Начальный фрагмент дерева решения целочисленной задачи.

Как видно из рисунка 5.1, в вершины дерева будем заносить оптимальное значение целевой функции, полученное при решении соответствующей задачи. Цифра, размещенная на овале вершины, обозначает порядковый номер задачи в общем процессе решения. Надписи рядом с ветвями, очевидно, представляют собой дополнительные неравенства, с помощью которых следующая задача получается из предыдущей.

Ни один из оптимальных планов x^{2*} , x^{3*} не является целочисленным. Поэтому процесс решения продолжается дальше. В соответствии с правилами метода ветвей и границ из двух «висящих» вершин, которые имеются в данный момент в дереве, для продолжения решения выбирается та, которая обладает наилучшей оценкой. В нашем случае это вершина номер 3. Соответствующее оптимальное решение содержит две нецелочисленные компоненты, из которых для построения новых задач выберем, например, $x_1^{3*} = 199,571$. На рисунке 2 приведено дерево решения, после построения и решения соответствующих задач. В ходе решения задачи 4 (с дополнительным ограничением $x_1 \leq 199$) получен оптимальный план

$$x^{4*} = \begin{pmatrix} 199 \\ 1 \\ 229,571 \\ 70,429 \end{pmatrix}, \quad L(x^{4*}) = 1511,228.$$

Ограничения задачи 5 оказались несовместными. Соответствующую вершину просто вычеркиваем из дерева решения.

Как видим, целочисленного решения пока найти не удалось. Поэтому процесс решения продолжается дальше. Из двух вершин 2 и 4 для продолжения решения выберем вершину 4.

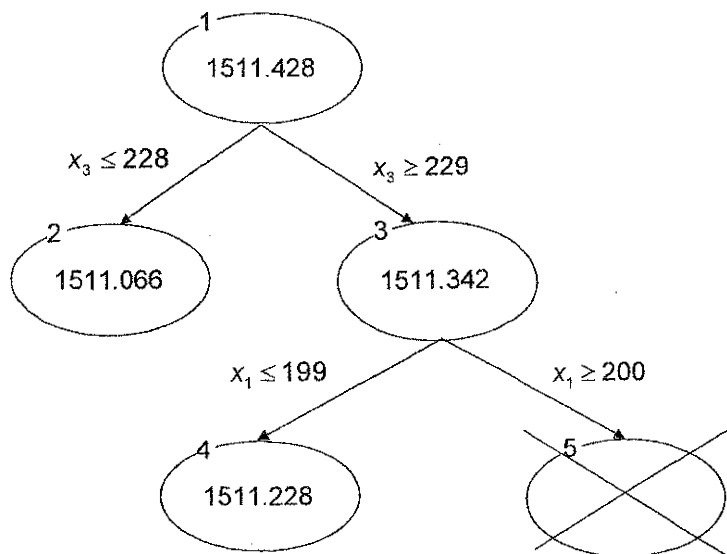


Рис 5.2. Дерево решения после решения задач 4,5.

Процесс решения задачи (3.4) оказался весьма трудоемким и содержит 29 задач. Поэтому дальнейшие детали решения опустим. Полное дерево решения приведено на рис. 5.3. В таблице 5.1 приведен перечень решений, которые были получены в процессе построения дерева решения.

Таблица 5.1

№ задачи	x_1	x_2	x_3	x_4	№ задачи	x_1	x_2	x_3	x_4
1	200	0	228,571	71,429	16	199	1,8	229	71
2	200,333	0	228	72	17	199,857	0,143	229	72
3	199,571	0,42	229	71	18	198	2	229	73,2
4	199	1	229,571	70,429	19	Система ограничений несовместна			
5	Система ограничений несовместна				20	200	0	228	72
6	199	1	229	71,8	21	199,917	1	218	72
7	128,571	71,429	300	0	22	201,5	0	226	74
8	200	0	228	72,8	23	Система ограничений несовместна			
9	201	0	226,857	73,143	24	199	3,2	228	72
10	200	0,8	228	72	25	Система ограничений несовместна			
11	200	0	227,917	73	26	199	1	229	71
12	200	0	227	75,2	27	198,917	2	229	71
13	199,857	0,143	228	73	28	198	4,2	229	71
14	199	1	228	72,4	29	Система ограничений несовместна			
15	Система ограничений несовместна								

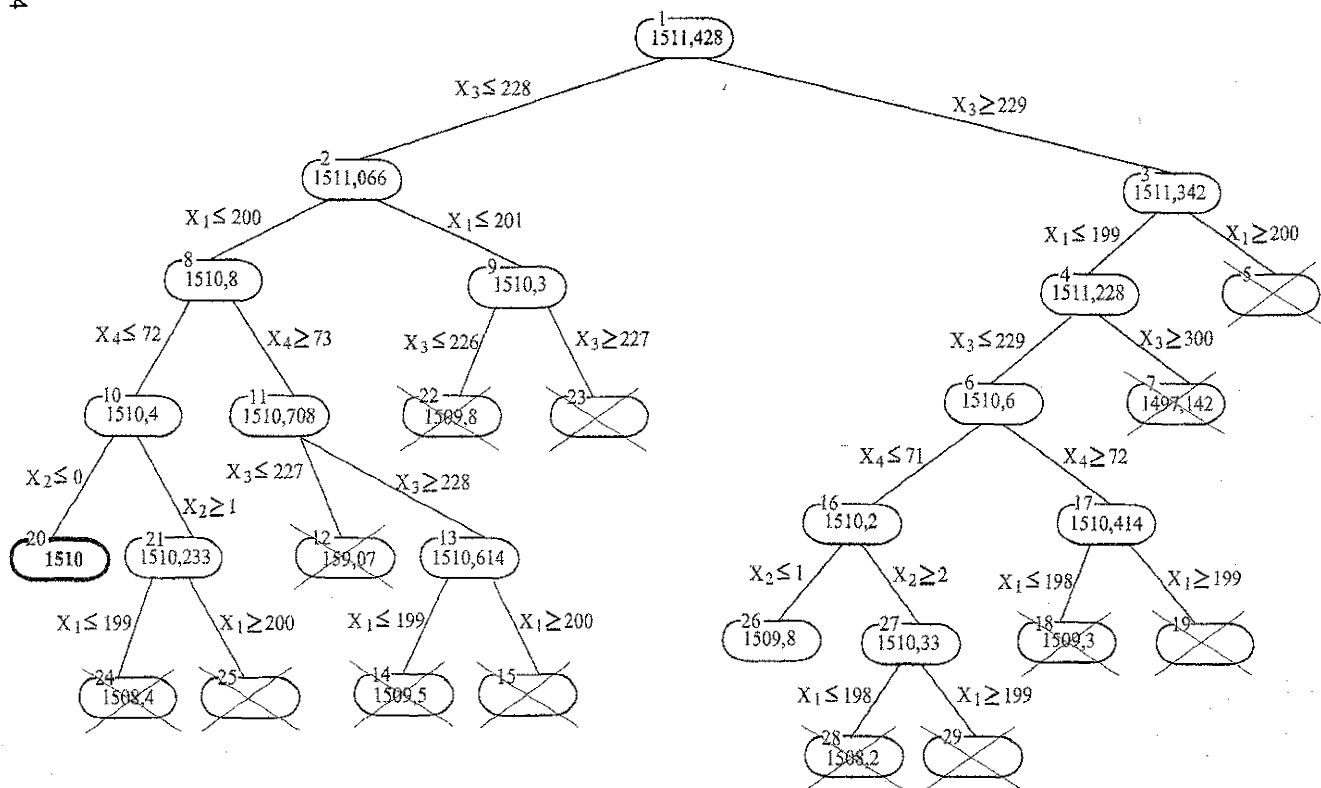


Рис. 5.3. Полное дерево решения целочисленной задачи

Отметим только следующий факт. Решение задачи 20 оказалось целочисленным. Это обстоятельство вносит принципиальные изменения в дальнейший процесс решения целочисленной задачи. В дереве решения появился **рекорд** – вершина, которой соответствует целочисленный план с наилучшим на данный момент значением целевой функции. Рекорд используется для сокращения вариантов, подлежащих анализу. Все «висящие» вершины дерева (и те, которые получены ранее, и те, которые будут получены в будущем) сравниваются с рекордным значением целевой функции. Если оценка вершины хуже рекордного значения, то дальнейший анализ связанных с ней вариантов не имеет смысла. Такая вершина вычеркивается из дерева решения. В нашем конкретном случае появление рекорда со значением функции 1510 млн. руб. привело к вычеркиванию из дерева вершин 7 (оценка 1497,142), 12 (оценка 1509,7), 14 (оценка 1509,5) и 18 (оценка 1509,3).

Таким образом, деятельность вуза будет наиболее эффективной, если, план набора студентов будет таковым:

- 200 студентов специальности ЭВМ дневной формы обучения;
- 228 студентов специальности ПО дневной формы обучения;
- 72 студента специальности ПО заочной формы обучения.

При этом доход вуза составит $L=1510$ млн. рублей.

6. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

ЗАДАНИЕ 1. Из отходов производства предприятие может организовать выпуск четырех видов продукции. Для этого оно планирует использовать два типа взаимозаменяемого оборудования. Количество изделий каждого вида, которое может быть изготовлено на соответствующем оборудовании в течение 1 ч, а также затраты, связанные с производством одного изделия, приведены в следующей таблице:

Тип оборудования	Количество производимых в течение 1 ч изделий вида				Затраты (руб.), связанные с производством в течение 1 часа изделий вида			
	1	2	3	4	1	2	3	4
I	8	7	4	5	27	26	27	24
II	6	8	6	4	26	27	26	25

Оборудование I типа предприятие может использовать не более 80 ч, а оборудование II типа – не более 60 ч.

Учитывая, что предприятию следует изготовить изделий каждого вида соответственно не меньше 240, 160, 150 и 220 ед., определить, в течение какого времени и на каком оборудовании следует изготавливать каждое из изделий так, чтобы получить не менее нужного количества изделий при минимальных затратах на их производство.

ЗАДАНИЕ 2. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в следующей таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина (м ³):			
I вида	0,2	0,1	40
II вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (чел-ч)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия (тыс. руб.)	6	8	

Определить сколько столов и шкафов фабрике следует изготавливать, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

ЗАДАНИЕ 3. Небольшое предприятие выпускает два типа автомобильных деталей. Оно покупает литье, подвергаемое токарной обработке, сверловке и шлифовке. Данные, характеризующие производительность станочного парка предприятия, приведены в таблице.

Каждая отливка, из которой изготавливают деталь А, стоит 2 долл. Стоимость отливки для детали В - 3 долл. Продажная цена деталей равна соответственно 5 и 6 долл. Стоимость часа станочного времени составляет по трем типам используемых станков 20, 14 и 17,5 долл.

Станки	Деталь А, штук/ч	Деталь В, штук/ч
Токарные	25	40
Сверлильные	28	35
Шлифовальные	35	25

Определить план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 4. Производственный участок включает три станка, которые производят детали типов А и В. Станки различаются по производительности: станок 1 производит в одну минуту 5 деталей типа А или 5 деталей типа В, станок 2 - 6 деталей типа А или 2 детали типа В, станок 3 - 5 деталей типа А или 3 детали типа В.

Требуется найти план загрузки станков, который обеспечивает максимальную производительность участка в следующих условиях:

- 1) ни один из станков не должен простаивать;
- 2) продукция должна быть комплектной: количество деталей типа А должно быть равно количеству деталей В;
- 3) длительность смены - 6 часов.

ЗАДАНИЕ 5. Имеется некоторый материал в виде стандартных листов, которые необходимо раскроить для получения не менее 80 деталей типа 1 и не менее 40 деталей типа 2. Известны 4 способа раскроя листа (см. таблицу).

Способ раскроя	1	2	3	4
Количество деталей	1	3	2	1
	2	1	6	9
				13

Составить план изготовления деталей, при котором общий расход листов будет минимальным.

ЗАДАНИЕ 6. Фирма планирует выпуск мужских и женских костюмов. На мужской костюм требуется 3,2 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат, на женский - 3,4 м шерсти, 0,4 м лавсана и 1,5 человеко-день. В наличии имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат. План предусматривает выпуск не менее 100 костюмов. Прибыль от реализации мужского костюма составляет 20 долл., женского - 10 долл.

Определить план производства костюмов, обеспечивающий фирме максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 7. Предприятие выпускает две модели портативных компьютеров. Суточный объем производства первой линии - 60 изделий, второй - 75 изделий. На компьютер модели 1 расходуется 10 однотипных комплектов электронных схем, на компьютер модели 2 - 8 таких же комплектов. Максимальный суточный запас используемых комплектов - 800 штук.

Прибыли от реализации одного компьютера модели 1 и 2 равны 30 и 20 долл. соответственно. Определить оптимальные суточные объемы производства компьютеров обеих моделей.

ЗАДАНИЕ 8. Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 ч в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найти оптимальные объемы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки 1 изделия, мин			Прибыль от одного изделия, долл
	станок 1	станок 2	станок 3	
1	10	6	8	2
2	5	20	15	3

ЗАДАНИЕ 9. Изделия четырех типов проходят последовательную обработку на двух станках. Время обработки одного изделия каждого типа на каждом из станков приведено в таблице.

Станок	Время обработки одного изделия, ч			
	тип 1	тип 2	тип 3	тип 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Стоимость одного машино-часа составляет 10 долл. для станка 1 и 15 долл. - для станка 2. Допустимое время использования станков для обработки изделий всех типов ограничено следующими значениями: 500 машино-часов для станка 1 и 380 машино-часов для станка 2. Цены изделий типов 1, 2, 3 и 4 равны 70, 70, 55 и 60 долл. соответственно. составить план выпуска изделий, при котором прибыль будет максимальной.

ЗАДАНИЕ 10. Для производства двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на 1 изделие данного вида, общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия приведены в таблице.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч)
	А	В	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	14	18	

Найти план выпуска изделий **A** и **B**, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

ЗАДАНИЕ 11. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимым для производства любого из 4 видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы каждого вида товара и запасы ресурсов (на день) указаны в следующей таблице.

Вид ресурса	Вид товара				Объем ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье, кг	15	10	8	20	70
Рабочее время, ч	25	15	7	10	100
Оборудование, ст.-ч.	9	10	13	16	110

Стоимость одного килограмма сырья - 8 долл., одного часа рабочего времени - 6 долл., одного станко-часа - 5 долл. Цена единицы товара 1 и 4 - по 350, 2 - 245, 3 - 350 долл.

Найти, какой ассортимент товаров надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной.

ЗАДАНИЕ 12. Компания выпускает два вида сукна: **A** и **B**. От производства единицы длины сукна **A** предприятие получает прибыль 12 фунтов стерлингов, от производства единицы длины сукна **B** - 8 фунтов стерлингов. Для их производства используется шерсть трех цветов. Количество сырья, необходимое для производства единицы длины сукна каждого вида, и общее кол-во имеющейся шерсти каждого цвета приведены в таблице.

Цвет	Расход на единицу длины сукна, кг		Количество шерсти, кг
	A	B	
Красный	4	4	1400
Зеленый	6	3	1800
Желтый	2	5	1800

Определить, сколько сукна каждого вида необходимо выпускать, чтобы прибыль от его выпуска была максимальной.

ЗАДАНИЕ 13. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 долл. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 долл., а каждая минута телерекламы - в 100 долл. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в два раза чаще, чем сеть телевидения, а также приобрести время для рекламы на телевидении не менее 5 минут. Из опыта известно, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определить оптимальное распределение времени рекламы между радио и телевидением.

ЗАДАНИЕ 14. Фирма производит два вида продукции - А и В. Известно, что спрос на продукцию А составляет не менее 60% общего объема спроса на оба вида продукции. Кроме того, фирма должна выполнить заказ на производство 15 единиц продукции А. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырье, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции В - 4 фунта. Цены продукции А и В равны 20 и 40 долл. соответственно.

Определить оптимальные объемы выпуска продукции А и В.

ЗАДАНИЕ 15. Фирма выпускает ковбойские шляпы двух фасонов. Трудоемкость изготовления шляпы фасона 1 вдвое выше трудоемкости изготовления шляпы фасона 2. Если бы фирма выпускала только шляпы фасона 2, суточный объем производства мог бы составить 500 шляп. Суточный объем сбыта шляп фасона 1 не превышает 150 штук, а фасона 2 - 200 штук. Кроме того, для выполнения контракта фирма должна выпускать не менее 100 шляп фасона 2 в день. Прибыль от продажи шляпы фасона 1 равна 8 долл., а фасона 2 - 5 долл. Определить, какое количество шляп каждого фасона следует выпускать ежедневно, чтобы максимизировать прибыль.

ЗАДАНИЕ 16. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров - А и В. Известно, что за неделю на рынке может быть реализовано не более 550 полок. По заказу фирма должна выпускать в течение недели 100 полок типа В. Для каждой полки типа А требуется 2 кв.м материала, а для полки типа В - 3 кв.м материала. Компания может получить до 1200 кв.м материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин работы на станке, а для изготовления одной полки типа В - 30 мин; станки можно использовать 160 ч в неделю.

1 кв.м материала стоит 0,5 долл. Затраты на 1 час работы станка - 15 долл. Прочие расходы на выпуск одной полки составляют 7 долл. Полки типа А продаются по цене 14 долл., а типа В - по 20 долл.

Определить, сколько полок каждого типа следует выпускать ежедневно, чтобы получить максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 17. Завод выпускает изделия трех видов (I, II и III). Для их изготовления используется один вид ресурса, запас которого составляет 4000 единиц. Расход ресурса на одно изделие вида I, II и III составляет 2, 3 и 5 единиц соответственно.

Трудоемкость изготовления изделия вида I вдвое больше, чем изделия вида II, и втрое больше, чем изделия вида III. Численность рабочих завода позволяет выпускать 1500 изделий вида I (если выпускать только эти изделия). По условиям комплектации соотношение выпуска изделий видов I, II и III должно быть равно 2 : 1 : 5. Известно также, что спрос на изделие II не превышает 200 единиц, а на изделие III - 150 единиц. Прибыли от реализации одного изделия вида I, II и III составляют 30, 20 и 50 долл. соответственно.

Определить объемы выпуска изделий каждого вида, при которых прибыль будет максимальной.

ЗАДАНИЕ 18. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов (см ²)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

ЗАДАНИЕ 19. Автозавод выпускает две модели автомобилей: "Каприз" и "Фиаско". На заводе работает 1000 неквалифицированных и 800 квалифицированных рабочих, каждому из которых оплачивается 40 ч в неделю. Для изготовления модели "Каприз" требуется 30 ч неквалифицированного и 50 ч квалифицированного труда; для "Фиаско" требуется 40 ч неквалифицированного и 20 ч квалифицированного труда. Каждая модель "Фиаско" требует затрат в размере 500 долл. на сырье и комплектующие изделия, тогда как каждая модель "Каприз" требует затрат в размере 1500 долл.; суммарные затраты не должны превосходить 900 тыс. долл. в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку, работают по пять дней в неделю и могут забрать с завода не более 210 машин в день.

Каждая модель "Каприз" приносит фирме 1000 долл. прибыли, а каждая модель "Фиаско" - 500 долл. прибыли. Определить, сколько автомобилей каждой модели следует выпустить.

ЗАДАНИЕ 20. Производитель безалкогольных напитков располагает двумя разливочными машинами А и В. Машина А спроектирована для пол-литровых бутылок, а машина В - для литровых, но каждая из них может использоваться для обоих типов бутылок с некоторой потерей эффективности в соответствии с приведенными в таблице сведениями о работе машин.

Каждая из машин работает ежедневно по 6 ч при пятидневной рабочей неделе. Прибыль от пол-литровой бутылки составляет 4 цента, а от литровой - 10 центов. Недельная продукция не может превосходить 50000 л.

Машина	Количество бутылок, заполняемых в 1 мин.	
	Пол-литровые бутылки	Литровые бутылки
A	50	20
B	40	30

Возможности сбыта не превышают 44000 пол-литровых бутылок и 30000 литровых. Составить недельный план работы фирмы, обеспечивающий ей максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 21. Предприятие-производитель элементов центрального отопления изготавливает радиаторы четырех моделей. Ограничения на производство обусловлены количеством рабочей силы (500 человеко-часов) и количеством стальных листов (2500 кв. м), из которых изготавливаются радиаторы.

Затраты времени и материала, а также цена одного радиатора каждого вида приведены в таблице.

Модель радиатора	A	B	C	D
Рабочее время, чел-ч	0,5	1,5	2	1,5
Стальной лист, кв. м	4	2	6	8
Цена, долл.	14	15	25,5	23

1 час рабочего времени стоит 2 долл., 1 кв. м стального листа - 0,5 долл. Прочие расходы на выпуск одного радиатора любого вида составляют 6 долл.

Кроме того, предприятию требуется выполнить заказ на выпуск 200 радиаторов модели A.

Определить объем выпуска радиаторов каждого типа, при котором прибыль фирмы максимальна.

ЗАДАНИЕ 22. Небольшая фирма производит два типа подшипников A и B, каждый из которых должен быть обработан на трех станках: токарном, шлифовальном и сверлильном. Время, требуемое для каждой из стадий производственного процесса, приведено в таблице.

Тип подшипника	Время обработки, мин.		
	Токарный станок	Шлифовальный станок	Сверлильный станок
A	1	2	4
B	2	1	1
Полное возможное время работы в неделю, ч	160	120	150

1 час работы токарного и шлифовального станка стоит 24 долл., 1 час работы сверлильного станка - 30 долл. Материал для изготовления одного подшипника стоит 6 долл. Подшипники типа A продаются по цене 10 долл., B - 9 долл.

Фирма имеет заказ на выпуск 1000 подшипников типа B.

Определить объем выпуска подшипников каждого типа, при котором прибыль фирмы максимальна.

ЗАДАНИЕ 23. Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевидения, радио, газет и афиш. По результатам исследований эффективности рекламы разработаны следующие рекомендации по распределению средств, расходуемых на рекламу

- прибыль на 1 долл., затраченный на рекламу на телевидении, радио, в газетах и через афиши, составляет соответственно 10, 3, 7 и 4 долл.;
- не менее 10% всех средств, направляемых на рекламу, следует расходовать на афиши;
- на рекламу в газетах следует расходовать не менее половины средств, затраченных на рекламу на телевидении и радио.

Кроме того, фирма хотела бы приобрести не менее 30 минут рекламного времени на телевидении. Затраты на 1 мин такого времени составляют 2000 долл.

Всего на рекламу фирма выделяет 0,5 млн. долл. Найти оптимальный вариант распределения этих средств.

ЗАДАНИЕ 24. Предприятие выпускает два продукта: продукт Р, продаваемый по 2 тыс. долл. за 1 т, и продукт Q, продаваемый по 1 тыс. долл. за 1 т. Продукты могут производиться из двух типов сырья: А по 600 долл. за 1 т и В по 900 долл. за 1 т. Из каждых 100 т сырья А производят 30 т продукта Р и 50 т Q, а из каждых 100 т сырья В - 60 т Р и 10 т Q. Всего предприятие способно обработать не более 10000 т сырья ежегодно. Поставщики могут обеспечить не более 6000 т сырья А и не более 8000 т сырья В в год. Спрос на продукт Р не превышает 5000 т, на продукт Q - 3200 т в год.

Определить, сколько сырья А и В необходимо закупить, чтобы получить от выпуска продуктов Р и Q максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 25. Фабрика производит три основных типа товара. Для производства изделия типа I требуется 3 единицы сырья А и 1 единица сырья В, для производства изделия типа II - 4 единицы сырья А и 3 единицы сырья В, для производства изделия типа III - 1 единица сырья А и 2 единицы сырья В. Поставщики могут обеспечить не более 20 тыс. единиц сырья А и 10 тыс. единиц сырья В. Цена единицы сырья А и В - соответственно 5 и 8 тыс. долл. Цены на изделия I, II и III - 26,54 и 23 тыс. долл. соответственно.

Изделий типа I необходимо выпустить не менее чем в 1,5 раза больше, чем изделий типа II. Кроме того, требуется выпустить не менее тысячи изделий типа III.

Найти оптимальный план производства.

ЗАДАНИЕ 26. Изделия А, В и С продаются по ценам 3, 4 и 5 долл. соответственно. Для изготовления каждого изделия требуется использовать станки I и II, которые могут работать соответственно не более 3600 и 4500 часов в год. Необходимое время работы на каждом станке при изготовлении одного изделия (в часах) приведено в таблице.

	A	B	C
I	3	2	3
II	4	1	2

Затраты на один час работы станка I составляют 20 центов, а на 1 час работы станка II - 10 центов. Кроме того, необходимо выполнить заказ на 200 изделий А. Найти оптимальный план производства.

ЗАДАНИЕ 27. Фирма выпускает буфеты трех типов: А, В и С. Их выпуск требует различных затрат труда на каждой стадии производства (см. табл.)

Производственный участок	Затраты труда, чел.-ч		
	A	B	C
Лесопилка	1	2	4
Сборочный цех	2	4	2
Отделочный цех	1	1	2

В течение недели можно планировать работу на лесопилке на 360 чел.-ч, в сборочном цехе - на 520 чел.-ч, в отделочном цехе - на 220 чел.-ч. Затраты фирмы, связанные с 1 ч работы по изготовлению буфетов, составляют: для лесопилки - 2 долл., для сборочного цеха - 3 долл., для отделочного цеха - 8 долл. Прочие расходы на выпуск одного буфета любого типа составляют 15 долл. Буфеты типов А, В и С продаются по цене 40, 50 и 60 долл. соответственно. Кроме того, фирма должна выполнить заказ на выпуск 50 буфетов типа А. Составить план производства, обеспечивающий фирме максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 28. Фирма производит на фабрике 4 сорта изделий. Производство ограничивается временем использования станков и количеством комплектующих изделий. Известно, что суммарное время использования станков - 90 ч в день, а комплектующих изделий может быть поставлено не более 80 в день.

Производственные характеристики изделий приведены в таблице.

Показатель	Изделие			
	1	2	3	4
Время использования станка, ч	1	3	8	4
Количество комплект. изделий	2	2	1	3
Себестоимость изделия, долл	20	25	40	55
Цена изделия, долл	30	45	80	85

По условиям комплектации изделия 1 и 2 должны выпускаться в соотношении 5:1.

Составить оптимальный план ежедневного производства изделий.

ЗАДАНИЕ 29. Компания производит столы трех типов (1,2,3). Объемы работ, необходимые для каждой операции, приведены в таблице.

ОПЕРАЦИЯ	Объемы работ, чел.-ч		
	1	2	3
Изготовление частей	2	3	2
Сборка	1	2	3
Полировка и проверка	1	1	2

Объем работ в неделю составляет не более 360 чел.-ч на изготовление частей столов, 240 чел.-ч - на сборку, 180 чел.-ч - на полировку. Возможности хранения ограничивают производство 170 столами в неделю. Кроме того, для выполнения заказа фирма должна выпускать еженедельно не менее 50 столов типа 1. Затраты на изготовление одного стола типа 1,2,3 составляют соответственно 40, 52 и 31 долл., а цена при продаже - 55, 74 и 50 долл. Составить план производства, обеспечивающий максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 30. Компания производит сверлильные станки трех видов: D1, D2, D3. Каждый станок видов D1 и D2 приносит прибыль 10 долл., станок D3 - 30 долл. Количество станков, которое может быть произведено в течение недели, ограничено поставками комплектующих изделий F1, F2, F3. Для станка D1 требуется 1 штука F1, 4 штуки F2 и 2 штуки F3, для D2 - 2 штуки F1, 3 штуки F2 и 3 штуки F3, для D3 - 10 штук F1, 10 штук F2 и 8 штук F3. Каждую неделю можно закупать не более чем по 650 штук изделий F1 и F3 и не более 850 - изделий F2. По контракту фирма должна выпустить 20 станков вида D2. Составить недельный план производства станков, обеспечивающий максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 31. Механический завод при изготовлении двух разных типов деталей использует токарные, фрезерные и строгальные станки. При этом обработку каждой детали можно вести двумя различными технологическими способами. В следующей таблице указаны ресурсы (в станко-ч) каждой группы станков, нормы расхода времени при обработке детали на соответствующем станке по данному технологическому способу и прибыль от выпуска одной детали каждого вида:

Типы деталей		I		II		Ресурсы времени
Технологические способы		1	2	3	4	
Станки	Токарный	0,4	0,9	0,5	0,3	250
	Фрезерный	0,5	-	0,6	0,2	450
	Строгальный	0,3	0,5	0,4	1,5	600
Прибыль, долл		12		18		

Заводу необходимо выпустить не менее 50 деталей типа I.

Составить оптимальный план загрузки производственных мощностей, обеспечивающий максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 32. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используется два различных типа досок, причем еженедельно фабрика может закупать не более 1500 м досок I типа и 1000 м досок II типа.

Ресурсы	Затраты на одно изделие			
	столы	стулья	бюро	книжные шкафы
Доски I типа, м	7	2	8	10
Доски II типа, м	1	1	3	2

В таблице приведены нормативы затрат досок на изготовление одного изделия.

Трудозатраты на выпуск одного стола или бюро в 4 раза, а одного шкафа - в 8 раз превышают трудозатраты на выпуск одного стула. Численность рабочих фабрики позволяет выпускать 800 стульев в неделю.

Фабрика имеет заказ на выпуск 10 бюро.

Прибыль от выпуска одного стола, стула, бюро и книжного шкафа составляет соответственно 15, 8, 17 и 10 долл.

Определить оптимальный ассортимент, обеспечивающий максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 33. Ткань трех артикулов (I,II,III) производится на ткацких станках двух типов с различной производительностью. Прибыль от продажи 1 м ткани артикулов I и III составляет 15 долл., от 1 м ткани артикула II - 10 долл. Для изготовления ткани используются пряжа и красители. В таблице указаны мощности станков (в тыс. станко-ч.), ресурсы пряжи и красителей (в тыс. кг), производительности станков по каждому виду пряжи (в м/ч) и нормы расхода пряжи и краски (в кг на 1000 м).

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Производительность и нормы расхода		
		I	II	III
Станки типа А	50	10	1	20
Станки типа В	30	20	20	5
Пряжа	60	140	100	200
Красители	5	5	5	8

По заказу фабрике требуется выпустить 5 тыс. м ткани артикула II.

Определить оптимальный ассортимент, обеспечивающий фабрике максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 34. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силы и оборудованием, необходимым для производства любого из четырех видов товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы каждого вида товаров указаны в следующей таблице.

Вид ресурса	Вид товара			
	1	2	3	4
Сырье, кг	10	9	15	20
Рабочее время, чел.-ч	10	5	17	10
Оборудование, станко-ч.	2	5	9	5

Годовые запасы ресурсов предприятия следующие: сырье - 400 тонн, рабочее время - 310 тыс. часов, время работы оборудования - 110 тыс. часов. Себестоимости товаров 1 и 2 составляют 20 долларов, товара 3 - 35, товара 4 - 15 долларов. Цены товаров 1, 2, 3 и 4 - соответственно 40, 40, 80 и 30 долларов.

В течение года предприятие должно выполнить заказ на выпуск 27 т единиц товара 1.

Определить, какой ассортимент товара следует выпускать, чтобы прибыль была максимальной.

ЗАДАНИЕ 35. Предприятие может работать по трем технологическим процессам, причем количество единиц выпускаемой продукции по разным технологическим процессам за одну единицу времени соответственно равно 120, 250 и 350 штук. В процессе производства учитываются следующие производственные факторы: сырье, электроэнергия, зарплата, накладные расходы.

Затраты соответствующих факторов в стоимостном выражении (в долл.) при работе по разным технологическим процессам в течение одной единицы времени указаны в следующей таблице.

Производственные факторы	Технологические процессы		
	1	2	3
Сырье	50	25	30
Энергозатраты	8	4	5
Зарплата	6	8	10
Накладные расходы	4	10	5

Максимально возможные затраты предприятия (в млн.долл.) по каждому из производственных факторов следующие: сырье -6, электроэнергия - 2,5, зарплата - 1,8, накладные расходы - 1,5.

Составить программу выпуска продукции, при которой общий выпуск продукции будет максимальным.

ЗАДАНИЕ 36. Предприятие выпускает три вида металлоизделий (А,В,С). Для их выпуска используется три вида сырья (сталь, цветные металлы, сплав для покрытий). Запасы каждого вида сырья на планируемый период, затраты сырья на одно изделие и прибыль от продажи одного изделия приведены в таблице.

Изделия	Расход сырья, кг			Прибыль, долл.
	Сталь	Цветные металлы	Покрытие	
А	6	0	4	150
В	8	5	0	200
С	5	8	2	120

Численность работающих на предприятии позволяет выпустить за неделю 15 тыс. изделий типа А (если выпускать только их). Изделие В в 1,5 раза более трудоемкое, чем изделие А, изделие С - в 2 раза.

Предприятию необходимо выполнить заказ: выпустить 4 тыс. изделий типа В.

Составить план производства, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 37. Для изготовления трех видов химических реактивов P1, P2 и P3 используют 4 вида сырья: S1, S2, S3, S4. Технологические нормы расхода материалов на выпуск 1 кг каждого реактива приведены в таблице.

Вид сырья	Норма расхода сырья на 1кг реактива, кг		
	P1	P2	P3
S1	4	2	1
S2	6	0	2
S3	0	2	4
S4	8	7	0

В течение месяца поставки сырья S1, S2, S3, S4 могут составлять не более 150, 170, 100, 200 т соответственно. Цены на 1 кг сырья S1, S2, S3, S4 - соответственно 7, 8, 10, 4 долл. Цены на 1кг реактивов P1, P2 и P3 - 118, 77 и 83 долл. Для дальнейшего использования реактивы требуются в следующем соотношении: количество реактива P3 должно быть равно суммарному количеству P1 и P2.

Составить план выпуска реактивов, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 38. В цехе размещены 100 станков типа 1 и 200 станков типа 2. На каждом из них можно выпускать детали A1 и A2. Станок типа 1 позволяет выпускать в сутки 20 деталей A1 или 35 деталей A2; станок типа 2 - 15 деталей A1 или 30 A2. В начале каждого дня станок настраивается на выпуск одной из деталей (A1 или A2) и используется для выпуска этой детали в течение всего дня.

Прибыль от продажи детали A1 составляет 6 долл., от продажи детали A2 - 4 долл. Ежедневно необходимо выпускать не менее 1510 деталей A1 и не менее 4500 - A2.

Составить план оптимального использования станков.

ЗАДАНИЕ 39. Предприятие может изготавливать 4 вида продукции: П1, П2, П3, П4. Предприятие располагает в течение квартала трудовыми ресурсами в 100 человеко-смен, станочным оборудованием в 370 станко-смен и полуфабрикатами массой 260 кг. Нормы расхода ресурсов на единицу продукции приведены в таблице.

Ресурсы	Продукция			
	П1	П2	П3	П4
Трудовые ресурсы, человеко-смен	2,5	2,5	2	1,5
Станочное оборуд., станко-смен	8	7	4	10
Полуфабрикаты, кг	4	10	4	6

Прибыль от продажи единицы продукции П1, П2, П3, П4 составляет 40, 50, 100, 80 долл. соответственно.

В соответствии с требованиями комплектации количество единиц продукции П3 должно быть ровно в 3 раза больше, чем П1.

Составить план выпуска продукции на квартал, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 40. Предприятие может работать по трем технологическим способам. Расход ресурсов в единицу времени и производительность (количество выпущенных изделий в единицу времени) для каждого технологического способа приведены в таблице.

Ресурсы	Технологические способы		
	1	2	3
Рабочая сила, человеко-часов	15	20	25
Электроэнергия, кВт-ч	35	60	60
Сырье, т	2	3	2,5
Производительность	300	250	450

Предприятие располагает трудовыми ресурсами в количестве 1200 человеко-часов, электроэнергией - 3000 кВт-ч, сырьем - 150 тонн.

По требованию заказчика необходимо выпустить не менее 500 изделий по 2-му способу.

Составить план использования имеющихся ресурсов, обеспечивающий максимальный выпуск продукции.

ЗАДАНИЕ 41. На швейной фабрике для изготовления четырех видов изделий может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в таблице. В ней же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Артикул ткани	Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида				Общее количество ткани (м)
	1	2	3	4	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Цена одного изделия (тыс. руб.)	9	6	4	7	

ЗАДАНИЕ 42. При выпуске зубчатых колес требуется использовать три группы оборудования: токарные станки, фрезерные станки и сварочные аппараты. Месячный фонд времени работы этих групп оборудования - соответственно 30, 50 и 40 тыс. часов. Имеются три технологии использования оборудования. Нормы затрат времени каждой группы оборудования (в часах) при выпуске одного зубчатого колеса приведены в таблице.

Группа оборудования	Технология		
	1	2	3
Фрезерные станки	1,5	2	1
Токарные станки	3	1	2,5
Сварочные аппараты	0,5	4	3

Затраты на выпуск одного зубчатого колеса по каждой из технологий составляют соответственно 8, 12 и 13 долл. Зубчатые колеса продаются по цене 20 долл.

По требованию заказчика необходимо выпустить тысячу колес по 2-й технологии.

Составить план загрузки оборудования, обеспечивающий максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 43. В цехе имеются две группы взаимозаменяемого оборудования с мощностями 400 и 850 нормо-часов в месяц. Цех выпускает два вида продукции. Необходимо выпустить не менее 500 единиц продукции 2-го вида. Время изготовления единицы каждого вида продукции составляет: для 1-й группы оборудования - 18 и 36 минут, для 2-й - 36 и 48 минут. Затраты на изготовление единицы продукции каждого вида: для 1-й группы оборудования - 20 и 10 долл., для 2-й - 50 и 40 долл. Цена единицы продукции 1-го вида - 80 долл., 2-го - 100 долл.

Составить план загрузки оборудования, обеспечивающий максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 44. Механический завод при изготовлении двух типов деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. При этом обработку каждой детали можно вести двумя различными технологическими способами. Фонд времени работы каждой группы оборудования (в тыс. станко-часов), нормы времени при обработке детали на соответствующем оборудовании по данному технологическому способу (в станко-часах) и затраты на выпуск одной детали каждого вида приведены в таблице.

Оборудование	Фонд времени, тыс. станко-часов	Детали			
		1		2	
		Технологические способы			
		1	2	1	2
Фрезерное	20	2	2	3	0
Токарное	37	3	1	1	2
Сварочное	30	0	1	1	4
Затраты, долл.		19	25	21	24

Детали продаются по цене 30 долл. за штуку.

Предприятию необходимо выполнить заказ на выпуск 5000 деталей типа 2.

Составить план загрузки оборудования, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 45. Предприятие может выпускать 3 вида изделий, используя для этого 4 станка. На станках А и В могут выпускаться изделия 1 и 2, на станке С - все три изделия, на станке D - изделия 2 и 3. Каждый станок используется 8 часов в сутки. Характеристики станков приведены в следующей таблице.

		Станки			
		A	B	C	D
Производительность, изделий/ч	1	500	1000	1500	-
	2	1200	1500	1500	1600
	3	-	-	1000	800
Эксплуатационные расходы, долл/ч		500	450	800	600
Время простоя, %		10	5	5	10

Кроме того, для выпуска изделий используются три вида сырья (P, Q и R). Сырье может закупаться в неограниченном количестве. Расходы сырья на одно изделие каждого вида приведены в таблице.

Изделие	Сырье		
	P	Q	R
1	1	1,25	2
2	-	2	2,5
3	1,5	-	1,75

Единица сырья P стоит 25 центов, сырья Q - 35 центов, сырья R - 30 центов. Изделия 1, 2 и 3 продаются по цене 50, 45 и 35 долларов соответственно.

Составить суточный план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 46. Для изготовления двух видов изделий (A и B) завод использует в качестве сырья алюминий и медь. При изготовлении изделий используются токарные и фрезерные станки. Нормы расхода материалов (в килограммах) и затрат времени (в минутах) на изготовление одного изделия приведены в таблице.

Виды ресурсов	Нормы расхода на одно изделие	
	A	B
Алюминий	1	3
Медь	2	5
Токарные станки	30	15
Фрезерные станки	45	15

В течение месяца предприятие может получить от поставщиков не более 90 т алюминия и 120 т меди. Месячный фонд времени работы токарных станков - 6000 часов, фрезерных - 6400 часов. 1 кг алюминия стоит 20 долл., меди - 25. Стоимость 1 часа работы токарного станка - 3 долл., фрезерного - 4 долл. Изделия A продаются по цене 417 долл. за одно изделие, B - по 1088 долл.

В течение месяца предприятие должно выполнить заказ на изготовление 2000 изделий A.

Составить план производства на месяц, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 47. Предприятие выпускает 4 вида продукции (A1, A2, A3, A4), используя для этого 3 вида сырья (B1, B2, B3). Нормы расхода сырья на 1 кг продукции (в килограммах), а также имеющиеся ресурсы сырья каждого вида приведены в таблице.

Сырье:	Продукция				Ресурсы, т
	A1	A2	A3	A4	
B1	4	5	2	3	60
B2	30	14	18	22	400
B3	16	14	8	10	128

Продукции A2 необходимо выпустить не менее 8 т. Продукция A1 и A3 должна выпускаться в соотношении 2:1.

Затраты предприятия на выпуск 1 кг продукции A1, A2, A3 и A4 составляют 3, 9, 12 и 6 долл. соответственно. Продукция продается по цене 48, 25, 56 и 30 долл. за килограмм.

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 48. Предприятие может закупить полуфабрикаты B1, B2 и B3 в количествах 400, 250 и 350 т соответственно. Цена полуфабрикатов - 400, 800 и 500 долл. за тонну. В результате смешивания полуфабрикатов получают три вида продукции: A1, A2, A3. Пропорции смешиваемых полуфабрикатов следующие: для A1 - 3:5:2, для A2 - 1:2:1, для A3 - 2:2:1.

Цена 1 т продукции A1 - 1200 долл., A2 - 1000 долл., A3 - 1500 долл.

Продукции A1 необходимо выпустить не менее 20 тонн. Продукция A2 и A3 должна выпускаться в соотношении 1:10.

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 49. В цехе площадью 74 кв. м требуется установить станки, на приобретение которых выделено 42 тыс. долл.

Можно закупить станки двух типов. Станок типа 1 стоимостью 6 тыс. долл. занимает 12 кв. м. производственной площади. Он позволяет выпускать за смену 70 изделий типа А. Затраты на производство изделия типа А - 10 долл., цена при продаже - 30 долл.

Станок типа 2 стоимостью 4 тыс. долл. занимает 6 кв.м. производственной площади. Он позволяет выпускать за смену 40 изделий типа В.

Затраты на производство одного изделия типа В - 25 долл.; цена при продаже - 50 долл.

Предприятию требуется выпускать за смену не менее 100 изделий типа В.

Найти, сколько станков каждого типа должно приобрести предприятие, чтобы обеспечить выпуск продукции с максимальной прибылью.

ЗАДАНИЕ 50. На предприятии имеется 2 группы станков на которых производятся детали 3-х видов. Количество станков и их производительность приведены в таблице

Группы станков	Производительность станка <i>i</i> -ой группы на деталях <i>j</i> -го вида (шт. в смену)		
	Деталь 1	Деталь 2	Деталь 3
Группа 1	20	30	10
Группа 2	40	20	10

Детали объединяются в комплекты по 2 детали 1-го и 2-го вида, 3 – 3-го вида. Составить план загрузки станков, при котором будет произведено максимальное количество деталей.

ЗАДАНИЕ 51. Для производства двух видов изделий (А и В) может использоваться взаимозаменяемое оборудование двух типов (1 и 2). Производительность каждого из типов оборудования (для изделий каждого вида) и затраты на производство одного изделия на соответствующем оборудовании приведены в таблице.

Тип оборудования	Производительность, изделий/ч		Затраты, долл/изделие	
	А	В	А	В
1	8	7	2,7	2,6
2	6	8	2,6	2,7

В течение периода, на который составляется план производства, оборудование типа 1 может использоваться не более 30 часов, оборудование типа 2 - не более 50 часов. Предприятию необходимо изготовить не менее 240 изделий типа А и не менее 160 изделий типа В.

Определить, сколько времени и на каком оборудовании необходимо изготавливать каждое из изделий, чтобы выпустить необходимое количество изделий при минимальных затратах.

ЗАДАНИЕ 52. Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч.) на единицу продукции вида				Общий фонд рабочего времени (станко-ч.)
	1	2	3	4	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	-	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	-	340
Прибыль от реализации единицы продукции (руб.)	8	3	2	1	

В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

ЗАДАНИЕ 53. На текстильном предприятии имеются ткацкие станки двух типов. На станках каждого из типов могут выработываться ткани трех видов: миткаль, бязь и ситец. Производительность станков и себестоимости тканей приведены в таблице.

Тип станка	Производительность, м/ч			Себестоимость: ден.ед./м		
	миткаль	бязь	ситец	миткаль	бязь	ситец
I	24	30	18	2	1	3
II	12	15	9	3	2	4

Фонд времени каждой из групп ткацких станков - 90 и 220 станко-час. Предприятию необходимо выпустить не менее 1200 м миткаля и 900 м бязи. Ткани продаются по ценам миткаль - 8, бязь - 4, ситец - 6 ден.ед./м.

Составить план использования оборудования, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль от выпуска тканей.

ЗАДАНИЕ 54. Metallургическое предприятие имеет возможность использовать для выплавки серого чугуна три вида материалов: литейный чугун, брикеты из чугуновой стружки и стальной лом. Выплавляемый серый чугун должен содержать не более 2,5% кремния, не менее 0,45% и не более 0,7% марганца. Содержание каждого из этих элементов в исходных материалах, потери элементов при выплавке и цены за единицу каждого из исходных материалов приведены в таблице.

Химический состав, %	Исходные материалы			Потери при выплавке, %
	Чугун литейный	Брикеты	Стальной лом	
Кремний	1,8	2,2	0,4	15
Марганец	0,7	0,7	0,4	
Цена за единицу, долл.	7080	5100	4010	

Определить состав материала для выплавки чугуна, имеющий минимальную стоимость.

ЗАДАНИЕ 55. Для изготовления сплава из меди, олова и цинка в качестве сырья используют два других сплава этих же металлов, отличающиеся составом и стоимостью. Данные об этих сплавах приведены в таблице.

Компоненты сплава	Содержание компонентов, %	
	Сплав 1	Сплав 2
Медь	10	10
Олово	10	30
Цинк	80	60
Стоимость 1кг, долл.	4	5

Получаемый сплав должен содержать не более 2 кг меди, не менее 3 кг олова; содержание цинка может составлять от 7,2 до 12,8 кг.

Определить количество сплавов 1 и 2, необходимых для получения нового сплава с минимальными затратами.

ЗАДАНИЕ 56. Из четырех видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должны входить не менее 26 единиц химического вещества А, не менее 30 единиц вещества В и не менее 24 единиц вещества С.

Количество единиц каждого из вещества А, В и С, содержащееся в 1 кг сырья каждого вида (1,2,3,4), приведено в таблице.

Вещество	Сырье			
	1	2	3	4
А	1	1	-	4
В	2	-	3	5
С	1	2	4	6

Цена 1 кг сырья 1, 2, 3, 4 -соответственно 5, 6, 7 и 4 тыс. руб.

Определить, какое количество сырья каждого вида необходимо для получения смеси заданного состава, чтобы ее стоимость была минимальной.

ЗАДАНИЕ 57. Нефтяная компания закупает необработанную нефть из двух источников (W и Z) и занимается ее очисткой, вырабатывая два вида смазочных масел (А и В), готовых к продаже. Спрос на смазочные масла ограничен (см. таблицу).

Масло	Состав, %	Максимальный спрос, галлоны
А	Не меньше 10 (W) Не больше 25 (Z)	90000
В	Не меньше 15 (W)	100000

Цены (в условных единицах) 1 галлона сырья и смазочных масел приведены в таблице.

Сырье		Масло	
Z	W	А	В
67	75	90	87

Необработанная нефть доступна в неограниченном количестве. Составить план закупок и использования нефти, обеспечивающий компании максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 58. Компания импортирует красные вина двух марок (данные приведены в таблице).

Марка красного вина	Цена одной бутылки, долл.	Максимально возможное количество импортируемых бутылок в год
Французское бургундское	1,08	100000
Испанское красное	0,50	150000

Красные вина смешиваются для получения столовых вин двух марок (их состав, данные о спросе и цены приведены в таблице).

Марка столового вина	Содержание красного вина, %		Максимальное количество продаваемых бутылок в год	Цена одной бутылки, долл.
	не менее	не более		
Божеле	30 (бургундское)	-	200000	1,95
Нью-Сен-Жорж	30 (бургундское)	80 (исп. красное)	Не ограничено	2,46

Составить план закупки и использования красных вин, обеспечивающий компании максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 59. Для получения некоторого сплава используются три металла: I, II и III. Требования к содержанию этих металлов в сплаве следующие: металла I - не более 80%, металла II не более 30%, металла III - не менее 50%. Сплав продается по цене 3000 долл. за 1 тонну. Предприятию необходимо выполнить контракт на поставку 2 тысяч тонн сплава.

Для получения металлов предприятие имеет возможность закупать три вида руд. Характеристики этих руд приведены в таблице.

Руда	Состав, %				Цена, долл./т.
	I	II	III	Другие компоненты	
1	20	10	30	40	300
2	10	20	30	40	400
3	5	5	70	20	500

Поставщики могут обеспечить поставку не более 1000 т руды 1 и 2000 т руды 2. Руда 3 может поставляться в неограниченном количестве.

Определить, какие руды и в каком количестве следует закупить, чтобы получить максимальную прибыль от продажи сплава.

ЗАДАНИЕ 60. Нефтеперерабатывающей компании необходимо выполнить контракт на поставку 20 тысяч галлонов бензина по цене 21 цент и 30 тысяч галлонов - по цене 18 центов. При этом компания может закупать 2 различных сорта сырой нефти, имеющей состав и стоимость, указанные в таблице.

Сырая нефть	A	B	C	Цена галлона, центы.
1	0,8	0,1	0,1	14
2	0,3	0,3	0,4	10

В сорте стоимостью 21 цент должно содержаться не менее 20% фракции A и не более 35% фракции C. В сорте стоимостью 18 центов должно быть не более 30% фракции C. При смешивании и очистке теряется 20% фракции A и по 10% фракции B и C. Определить, какую нефть и в каких количествах необходимо закупить, чтобы прибыль от выполнения контракта была максимальной.

ЗАДАНИЕ 61. Для производства авиационного бензина нефтеперерабатывающий завод закупает три полуфабриката: алкилат, крекинг-бензин и бензин прямой перегонки. Максимально возможные поставки полуфабрикатов (в тыс. галлонов) следующие: алкилат - 400, крекинг-бензин - 250, бензин прямой перегонки - 350.

Для получения авиационного бензина трех сортов полуфабрикаты смешивают в следующих соотношениях: бензин А - 2; 3; 5, бензин В - 3; 1; 1, бензин С - 2; 2; 1.

Для выполнения заказа завод должен произвести не менее 600 тыс. галлонов бензина А.

Прибыль завода от продажи одного галлона бензина А составляет 1,2 долл., В - 1 долл., С - 1,5долл.

Составить план использования полуфабрикатов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 62. Цех выпускает три вида сплавов: для художественных изделий, специальный и технический. Состав сплавов приведен в таблице.

Материалы закупаются по следующим ценам: никель - 8, медь - 6, цинк и свинец - по 4 долл/кг. Сплавы продаются по ценам: сплав для художественных изделий - 20, специальный - 10, технический - 8 долл/кг.

Сплав	Материалы			
	Никель	Медь	Цинк	Свинец
Для художественных изд.	20	50	30	-
Специальный	10	70	10	10
Технический	-	60	20	20

Поставщики могут обеспечить поставку не более 150 тонн никеля, 900 тонн меди и 300 тонн цинка. Свинец может поставляться в неограниченном количестве.

Цеху необходимо не менее 200 тонн технического сплава. Ограничений на выпуск других сплавов нет.

Составить план выпуска сплавов, при котором прибыль от их выпуска будет максимальной.

ЗАДАНИЕ 63. Для перевоза грузов на трех линиях могут быть использованы суда трех типов. Производительность судов при использовании их на различных линиях характеризуется данными, приведенными в таблице. В ней же указаны общее время, в течение которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объемы перевозок на каждой из линии. Определите, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учетом возможного времени их эксплуатации.

Тип судна	Производительность судов (млн. тонно-миль в сутки) на линии			Общее время эксплуатации судов (сут.)
	1	2	3	
I	8	14	11	300
II	6	15	13	300
III	12	12	4	300
Заданный объем перевозок (млн. тонно-миль)	3000	5400	3300	

ЗАДАНИЕ 64. Нефтеперерабатывающее предприятие выпускает мазут и бензин, используя в качестве сырья нефть двух сортов (А и Б). Предприятие может закупить до 10 тыс. тонн нефти сорта А и до 17 тыс. нефти Б. Нефть может перерабатываться двумя способами. Для первого способа переработки нефть А и Б требуется в соотношении 1:2, для второго - 2:1. Потери при переработке пренебрежимо малы. При первом способе переработки из 1 т смеси нефти А и Б (заданном соотношении) вырабатывается 0,4 т мазута и 0,6 т бензина, при втором - 0,8 т мазута и 0,2 т бензина. Предприятие продает мазут по цене 200 долл/т, бензин - по 1000 долл/т.

Составить план переработки нефти, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 65. Фирма занимается составлением диеты, которая должна содержать не менее 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов.

Состав	Продукт				
	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена, ден. ед.	12	36	32	18	10

В таблице приведены данные о содержании каждого из указанных веществ в одном килограмме (или литре) пяти продуктов, а также цены на эти продукты.

Определить, из каких продуктов следует составить диету, чтобы затраты на продукты были минимальными.

ЗАДАНИЕ 66. В дневном рационе сельскохозяйственных животных должны содержаться следующие питательные вещества: кормовых единиц - не менее 1,6 кг; протеина - не менее 200 г; каротина - не менее 10 мг. При откорме используют ячмень, бобы и сенную муку. Содержание питательных веществ в 1 кг каждого из кормов и стоимости 1 кг кормов приведены в таблице.

Питательное вещество	Количество единиц питательного вещества в 1 кг корма		
	Ячмень	Бобы	Сенная мука
Кормовые единицы, кг	0,8	0,9	0,6
Протеин, г	80	280	240
Каротин, мг	5	5	100
Цена 1 кг корма, центы	30	40	50

Составить дневной рацион минимальной стоимости, удовлетворяющий требованиям питательности.

ЗАДАНИЕ 67. На складе предприятия имеются заготовки (стальные бруски) длиной 8,1 м. Из них необходимо изготовить не менее 100 комплектов более коротких заготовок. В один комплект входят две заготовки длиной 3 м и по одной заготовке длиной 2 и 1,5 м. Необходимо раскрыть исходный материал так, чтобы получить требуемое количество комплектов заготовок с минимальными отходами.

Количество заготовок, получаемых из одной исходной заготовки, и величины отходов при различных способах раскроя приведены в таблице.

Размер заготовки, м	Способ раскроя								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	2	1	1					
2	1		2	1	4	3	2	1	
1,5		1		2		1	2	4	5
Отходы, м	0,1	0,6	1,1	0,1	0,1	0,6	1,1	0,1	0,5

ЗАДАНИЕ 68. Из листов фанеры необходимо изготовить комплекты деталей, включающие по 4 детали 1-го типа и по 2 детали 2-го и 3-го типа. Имеется две партии листов фанеры; в 1-й партии - 400 листов, во 2-й - 250. Для изготовления деталей листы можно раскраивать различными способами. Количества деталей каждого типа, получаемые при различных способах раскроя, приведены в таблице.

Детали	Первая партия			Вторая партия		
	Способ раскроя			Детали	Способ раскроя	
	1	2	3		1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Составить план раскроя материала, при котором будет получено максимальное количество комплектов.

ЗАДАНИЕ 69. Стальные бруски длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 35, 45 и 50 см. Требуемое количество заготовок длиной 35 см - не менее 30, 45 см - не менее 40, 50 см - не менее 20. Возможные варианты разреза и величины отходов при каждом из них приведены в таблице.

Длина заготовки, см	Варианты разреза					
	1	2	3	4	5	6
35	-	1	-	3	1	-
45	2	1	1	-	-	-
50	-	-	1	-	1	2
Отходы, см	20	30	15	5	25	10

Определить, сколько брусков необходимо разрезать по каждому варианту, чтобы получить не менее необходимого количества заготовок при минимальных отходах.

ЗАДАНИЕ 70. Денежные средства могут быть использованы для финансирования двух проектов. Проект А гарантирует получение прибыли в размере 70 центов на вложенный доллар через год. Проект В гарантирует получение прибыли в размере 2 долл. на каждый инвестированный доллар, но через два года. Вложение средств в проект А приносит прибыль ежегодно, а в проект В - через каждые два года. По окончании каждого года прибыль, полученную от реализации проектов, можно снова распределить по этим проектам. Определить, как следует распорядиться капиталом в 100 тыс. долл., чтобы максимизировать суммарную величину прибыли, которую можно получить через три года после начала инвестиции.

ЗАДАНИЕ 71. Предприниматель занимается покупкой и продажей некоторых изделий. Закупка изделий производится в течение месяца, продажа - в конце месяца. Имеющийся у предпринимателя склад вмещает 500 изделий.

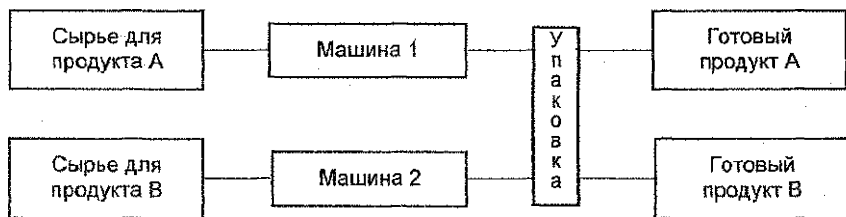
Предпринимателю требуется составить план закупок и продаж на два месяца. Ему известно, что в первом месяце он сможет закупить изделия по цене 27долл. и продавать - по цене 20 долл. ; во втором покупать за 24 и продавать за 25 долл. На начало первого месяца у предпринимателя имеется запас 200 изделий.

ЗАДАНИЕ 72. Склад вместимостью 100 ед. сезонного продукта содержит в начале года 30 ед. Продукт закупается в течение каждого 4-месячного периода и продается в конце этого периода (или оставляется на складе для продажи в следующие периоды). Цены на продукт по каждому периоду приведены в таблице.

Период	Январь - апрель	Май - август	Сентябрь - декабрь
Закупка	5	4	7
Продажа	10	5	8

Составить план закупок и продаж, при котором прибыль, полученная в течение года, окажется максимальной.

ЗАДАНИЕ 73. Фирма производит два продукта А и В, продаваемых соответственно по 8 и по 15 центов за упаковку. Продукт А обрабатывается на машине 1, продукт В - на машине 2. Затем оба упаковываются на упаковочной машине (см. рисунок).



1 кг сырья стоит 6 центов. Машина 1 обрабатывает 5000 кг в 1 ч с потерями 10%. Машина 2 обрабатывает 4000 кг в 1 ч с потерями 20%. Машина 1 доступна 6 ч в день, ее использование стоит 288 долл. в 1 ч. Машина 2 доступна 5 ч в день, ее использование стоит 336 долл. в 1 ч. Упаковка продукта А весит $\frac{1}{4}$ кг, а упаковка продукта В - $\frac{1}{3}$ кг. Упаковочная машина может работать 10 ч в день; 1 ч ее работы стоит 360 долл. Производительность упаковочной машины - 12000 упаковок продукта А или 8000 упаковок продукта В в 1 ч.

Определить, какое количество сырья для производства каждого из продуктов должна закупать фирма, чтобы ее дневная прибыль была максимальной.

ЗАДАНИЕ 74. Ткацкая фабрика должна работать 16 ч в сутки согласно следующей таблице.

Время суток	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22
Минимально необходимое количество ткачей	8	10	7	12

Каждый ткач должен работать подряд 8 ч в день. Найти минимально необходимое количество ткачей, удовлетворяющее перечисленным требованиям.

ЗАДАНИЕ 75. Аудитории и лаборатории университета рассчитаны не более чем на 5000 студентов. Университет принимает не менее 1000 и не более 4000 студентов из своей страны и любое количество иностранных студентов.

Персонал университета составляет 440 человек. Для обучения 12 студентов из данной страны или 10 иностранных студентов требуется один преподаватель. Необходимо также, чтобы одновременно не менее 40% обучающихся в университете студентов из данной страны и не менее 80% иностранных студентов могли находиться на занятиях в аудиториях; количество мест в аудиториях - 2800. Университет получает 2000 фунтов стерлингов в год из государственных средств на каждого студента из

своей страны и берет плату в размере 3000 фунтов стерлингов в год за каждого иностранного студента.

Составить план приема студентов из своей страны и иностранных студентов, при котором прибыль университета будет максимальной.

ЗАДАНИЕ 76. В небольшой стране составлена модель сельскохозяйственного производства для внешнего рынка. Имеется три основные культуры, растущие в условиях данной страны, и они могут выращиваться на одном из двух типов земель. Для обработки пригодны 1,4 млн. акров земли типа I и 1,2 млн. акров типа II. Прибыль от продажи урожая каждой культуры, выращенного на землях типов I и II, приведена в таблице.

Культура	Тип земли	
	I	II
1	6	6
2	8	5
3	4	5

Все культуры требуют дополнительного орошения. Имеющаяся ирригационная система обеспечивает не более $5,6 \text{ млн. м}^3$ воды в год. Для одного акра земли в зависимости от выращиваемой на ней культуры требуется объем орошения (в м^3), приведенный в таблице.

Культура	Тип земли	
	I	II
1	2	3
2	3	3
3	3	2

Население, занятое в сельском хозяйстве, составляет 0,7 млн. человек. Для выращивания культур 1, 2, 3, на каждых 10 акрах в течение года должны работать соответственно 2, 1, 3 человека.

Составить план использования земель для выращивания культур трех типов, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

ЗАДАНИЕ 77. Для обслуживания двух авиалиний могут использоваться два типа самолетов. Имеется 25 самолетов 1-го типа и 30 самолетов 2-го типа. По 1-й авиалинии необходимо перевести 15 тыс. пассажиров, по 2-й - 20 тыс. В таблице указаны эксплуатационные расходы, связанные с использованием одного самолета, и количество пассажиров, которое может перевезти за данный период один самолет.

Эксплуатационные расходы:			Число пассажиров		
Тип самолета	Авиалиния		Тип самолета	Авиалиния	
	1	2		1	2
1	10	6	1	500	800
2	8	7	2	1000	1200

Определить оптимальное распределение самолетов по авиалиниям, при котором суммарные расходы минимальны.

ЗАДАНИЕ 78. Предприятие выпускает два вида деталей обуви (Д1, Д2). Необходимо выпустить не менее 300 тыс. деталей типа Д1 и 500 тыс. деталей Д2. Для их выпуска используется два вида кожи (чепрак и ворот); при этом каждый вид кожи делится на категории в зависимости от толщины кожи. В таблице приведено количество деталей, которое можно изготовить из 1000 м² кожи каждого вида, максимальные объемы поставок и стоимость 1000 м² каждого вида кожи.

Деталь	Количество деталей из 1000 м ² кожи, тыс. шт.			
	Толщина чепрака, мм.		Толщина ворота, мм.	
	4,01-4,5	4,51-5,0	3,5-4,0	4,51-5,0
Д1	51,0	26,0	45,7	-
Д2	-	-	50,0	72,5
Возможности поставки, тыс. м ²	не ограничены	не ограничены	5,0	6,0
Стоимость 1000 м ² тыс. долл.	14,4	16	12,8	10,5

Определить, сколько квадратных метров кожи каждого вида и категории должно закупить предприятие, чтобы выпустить необходимое количество изделий с минимальными затратами.

ЗАДАНИЕ 79. Для посевов зерновых культур может использоваться 0,8 млн. га земли в климатической зоне I и 0,6 млн. га - в климатической зоне II. Урожайность зерновых культур с 1 га посевных площадей в каждой зоне и прибыль от продажи 1 центнера зерна приведены в таблице.

Зерновая культура	Урожайность, ц/га		Прибыль от продажи одного центнера, усл. ед.
	зона I	зона II	
Озимые	20	25	8
Яровые	25	20	7

Необходимо произвести не менее 20 млн. центнеров озимых и не менее 6 млн. центнеров яровых.

Составить план использования посевных площадей, обеспечивающий максимальную прибыль от полученного урожая.

ЗАДАНИЕ 80. Предприятие по переработке руды производит два сорта очищенной продукции. Схема работы представлена на рисунке.



Перерабатывается два вида руды: А и В. Предприятию может быть поставлено в день до 100 тыс. т руды А по цене 3,25 долл. за тонну и до 30 тыс. т руды В по цене 3,40 долл. за тонну. Общая мощность основного процесса переработки - 100 тыс. т руды в день при затратах на переработку 0,35 долл /т. Основной процесс переработки позволяет получить из каждой тонны руды А 0,15 т полуфабриката 1 и 0,85 т полуфабриката 2, а из каждой тонны руды В - 0,25 т полуфабриката 1 и 0,75 т полуфабриката 2. Конвертер позволяет получить из каждой тонны полуфабриката 2 0,5 т продукта II. Мощность конвертера - 50 тыс. т полуфабриката 2 в день при затратах на обработку 0,25 долл /т. Затраты на очистку полуфабриката 1 при получении продукта I - 0,10 долл /т. Потери при очистке полуфабриката 1 пренебрежимо малы.

Цена продукта I - 5,50 долл /т, продукта II - 3,80 долл /т.

Составить план деятельности предприятия, обеспечивающий ему максимальную прибыль.

ЗАДАНИЕ 81. Из одного города в другой ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице приведены: состав поезда каждого типа, количество имеющихся в парке вагонов различных видов для формирования поездов и количество пассажиров, на которое рассчитан вагон каждого вида.

Поезда	Вагоны				
	багажный	почтовый	плацкартный	купейный	мягкий
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	-	8	4	1
Число пассажиров	-	-	58	40	32
Число вагонов	12	8	81	70	26

По меньшей мере один скорый поезд требуется обязательно.

Определить число скорых и пассажирских поездов, которое необходимо формировать ежедневно, чтобы перевезти максимальное количество пассажиров.

ЗАДАНИЕ 82. На некотором маршруте автобусные перевозки выполняются в течение 10 часов ежедневно. Для каждого часа известно минимально необходимое количество автобусов V_i для обслуживания маршрута. Превышение необходимого количества автобусов на маршруте приводит (из-за недогрузки автобусов) к издержкам в размере C_i денежных единиц на каждый лишний автобус за i - час. Величины V_i и C_i указаны в таблице.

Номер часа, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_i	10	20	22	23	25	22	20	15	10	5
C_i	5	5	6	6	6	8	10	15	15	20

Первая группа автобусов выходит на маршрут в начале 1-го часа. Через час к ним добавляется вторая группа, еще через час - третья. Каждый автобус работает на маршруте непрерывно 8 часов.

Найти количество автобусов, которое требуется выпускать на маршрут в начале 1-го, 2-го и 3-го часа, чтобы издержки в течение дня были минимальными.

ЗАДАНИЕ 83. Два речных судна (С1 и С2) используются для перевозки грузов в два населенных пункта. В течение года в населенный пункт А необходимо перевезти 3000 тонн груза, а в пункт В - 5400 тонн. За один рейс судно С1 может перевезти в пункт А 14 тонн груза, а в пункт В - 11 тонн; судно С2 за один рейс перевозит 15 тонн груза в любой из этих пунктов. Затраты на 1 рейс судна С1 в пункт А составляют 400 долл., в пункт В - 150 долл; затраты на 1 рейс судна С2 - 500 и 280 долл. Каждое из судов может совершить не более 300 рейсов в год.

Определить, сколько рейсов в каждый из населенных пунктов должно выполнить каждое из судов, чтобы перевезти грузы с минимальными затратами.

ЗАДАНИЕ 84. В цехе имеется токарный станок и станок автомат. Цех выпускает детали 1, 2 и 3 в комплекте: на каждую деталь 1 - по 2 детали 2 и 3. Часовая производительность станков, по каждой из деталей приведена в таблице.

Станки	Детали		
	1	2	3
Токарный	5	5	10
Автомат	15	15	10

Составить программу работы станков, при которой в течение смены (8 часов) будет выпускаться максимальное количество комплектов деталей.

ЗАДАНИЕ 85. В угольном бассейне добывается уголь двух сортов (А и В) в соотношении 1:2. Теплотворные способности этих двух сортов угля следующие: А-4000 ккал/ кг, В - 5000 ккал/кг. Затраты на добычу одной тонны угля А и В составляют соответственно 8 и 10 долл.

Уголь поставляется на три электростанции. За планируемый период электростанциям необходимо поставить уголь, обеспечивающий теплотворную способность не менее 100, 250 и 150 млн.ккал.

Составить план добычи и распределения угля по электростанциям, при котором потребности электростанций будут удовлетворены с минимальными затратами.

ЗАДАНИЕ 86. Расход газа в городе характеризуется двумя величинами: суммарный расход за год (2500 млн. м³) и среднемесячный расход в зимний период (500 млн. м³). Для удовлетворения потребностей в газе могут быть построены газохранилища трех типов, характеристики которых заданы в таблице.

Тип газохранилища	I	II	III
Годовой расход газа, млн. м ³	50	100	50
Среднемесячный расход газа, млн. м ³	20	30	10
Затраты на строительство, тыс. долл.	120	90	180
Стоимость хранения 1 м ³ газа, долл.	1	0,8	0,8

На строительство газохранилищ выделено 3,6 млн долл.

Составить план строительства газохранилищ, при котором общая стоимость хранения газа, необходимого для снабжения города, будет минимальной.

ЗАДАНИЕ 87. В городе имеется 80 мест, подходящих для постройки жилых домов. Строительное предприятие строит жилые дома по пяти типовым проектам. В таблице приведены данные о затратах времени на строительство одного дома и соответствующей жилой площади для каждого из пяти проектов.

Типовой проект	I	II	III	IV	V
Срок строительства, раб. дней	60	50	90	60	50
Жилая площадь, м ²	3000	2000	5000	4000	6000

Предприятие имеет заказы на строительство 20 домов, из них 10 - по 1-му проекту и 10 - по 2-му. Параллельно можно вести строительство 10 домов.

Составить план работы строительного предприятия, обеспечивающий строительство домов с максимальной жилой площадью в течение года (300 рабочих дней).

ЗАДАНИЕ 88. На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма
	лисица	песец	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки (тыс. руб.)	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

ЗАДАНИЕ 89. На мебельной фабрике изготавливается пять видов продукции: столы, шкафы, диваны-кроватьи, кресла-кроватьи и тахты. Нормы затрат труда, а также древесины и ткани на производство единицы продукции данного вида приведены в таблице.

Ресурсы	Норма расхода ресурса на единицу продукции					Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	диван-кровать	кресло-кровать	тахта	
Трудозатраты (человеко-ч)	4	8	12	9	10	3456
Древесина (м ³)	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Ткань (м)	-	-	6	4	5	2400
Выпуск (шт.): минимальный	0	0	20	0	30	
максимальный	-	-	180	160	-	
Прибыль от реализации одного изделия (тыс. руб.)	8	10	16	14	12	

В этой же таблице указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении фабрики, а также указано (на основе изучения спроса), в пределах каких объемов может изготавливаться каждый вид продукции.

Определить план производства продукции мебельной фабрики, согласно которому прибыль от ее реализации является максимальной.

ЗАДАНИЕ 90. Пароход может быть использован для перевозки 11 наименований груза, масса, объем и цена единицы каждого из которых приведены в таблице:

Параметры единицы груза	Номер груза										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Масса (т)	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65	83
Объем (м ³)	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114	86
Цена (т. руб.)	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	4,7	3,9	4,0

На пароход может быть погружено не более 800 т груза общим объемом, не превышающим 600 м³. Определить, сколько единиц каждого груза следует поместить на пароход так, чтобы общая стоимость размещенного груза была максимальной.

ЗАДАНИЕ 91. Из листового проката нужно выкроить заготовки четырех видов. Один лист длиной 184 см можно разрезать на заготовки длиной 45, 50, 65 и 85 см. Всего заготовок каждого вида необходимо соответственно 90, 96, 88 и 56 шт. Способы разреза одного листа на заготовки и величина отходов при каждом способе приведены в таблице:

Длина заготовки (см)	Количество заготовок, выкраиваемых из одного листа при разрезе способом												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
45	4	2	2	2	1	1	1	1	-	-	-	-	-
50	-	1	-	-	2	-	1	1	3	2	1	-	2
65	-	-	1	-	-	2	1	-	-	1	2	1	-
85	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	1	-
Величина отходов (см)	4	44	29	9	39	9	24	4	34	19	4	34	14

Определить, какое количество листов по каждому из способов следует разрезать, чтобы получить нужное количество заготовок данного вида при минимальных общих отходах.

ЗАДАНИЕ 92. Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в одном кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в таблице:

Питательные вещества	Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продуктов						
	мясо	рыба	молоко	масло	сыр	крупа	картофель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	20	3	40	865	310	30	2
Углеводы	-	-	50	6	20	650	200
Минеральные соли	9	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продуктов (руб.)	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

ЗАДАНИЕ 93. Магазин оптовой торговли реализует три вида продукции P1, P2, P3. Для этого используются два ограниченных ресурса: полезная площадь помещений, которая составляет 450 м², и рабочее время работников магазина - 600 чел.-ч. Товарооборот должен быть не меньше 240 млн. руб. Необходимо разработать план товарооборота, максимизирующий прибыль магазина. Затраты ресурсов на реализацию и получаемая при этом прибыль представлена в таблице:

Ресурсы	Затраты ресурсов на реализацию (на 1 млн. руб)		
	P1	P2	P3
Полезная площадь, м ²	1,5	2	3
Рабочее время, чел.-ч.	3	2	1,5
Прибыль, млн. руб.	50	65	70

ЗАДАНИЕ 94. В обувном производственном объединении производится раскрой 2-х различных партий материалов. Каждая из партий состоит из 40,60 единиц материала, имеющего одинаковую форму (например, пластины) и размер. Из материалов выкраиваются 2 вида деталей. В один комплект деталей входят четыре детали 1-го вида и две - 2-го. Варианты способов раскроя партий материалов и количество деталей, получающихся при каждом способе раскроя, приведены в таблице:

Вид деталей	Партия 1		Партия 2		
	Способ раскроя		Способ раскроя		
	1	2	1	2	3
1	4	1	-	5	3
2	2	5	4	-	2

Найти план раскроя материалов, при котором количество комплектов деталей обуви будет максимальным.

ЗАДАНИЕ 95. Для выращивания некоторой сельскохозяйственной культуры может использоваться посевная площадь 450 тыс. га, из которых 100 тыс. га расположены в климатической зоне I, 150 тыс. - в зоне II, 200 тыс. - в зоне III. Урожайность данной культуры с 1 га составляет для зон I, II и III соответственно 12, 14 и 10 центнеров. Для выращивания культуры необходимо использовать фосфорные, азотные и калийные удобрения. Запасы этих удобрений составляют соответственно 40, 30 и 10 тыс. т. Количество удобрений, которое необходимо вносить на 1 га в каждой из климатических зон, приведено в таблице.

Зона	Затраты удобрений на 1 га, кг		
	фосфорные	азотные	калийные
I	200	100	100
II	100	200	125
III	100	50	0

Составить план использования посевных площадей, который обеспечил бы максимальный урожай.

ЗАДАНИЕ 96. При производстве четырех видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операций, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

Технологическая операция	Нормы затрат времени (ч) на обработку 1 км кабеля вида				Общий фонд рабочего времени (ч)
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7200
Наложение изоляций	1,0	0,4	0,8	0,7	5600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11176
Освинцовывание	3,0	-	1,8	2,4	3600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4200
Прибыль от реализации 1 км кабеля (млн. руб.)	1,2	0,8	1,0	1,3	

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготавливаемой продукции является максимальной.

ЗАДАНИЕ 97. Прядильная фабрика на производство трех видов пряжи использует три вида сырья – чистую шерсть, капрон и акрил. В таблице указаны нормы расхода сырья, его общее количество, которое может быть использовано фабрикой в течение года, и прибыль от реализации тонны пряжи каждого вида:

Тип сырья	Нормы расхода			Количество сырья
	Шерсть 1	Шерсть 2	Шерсть 3	
Шерсть	0.5	0.6	0.2	600
Капрон	0.1	0.2	0.6	620
Акрил	0.4	0.2	0.2	500
Прибыль	1100	1200	900	

ЗАДАНИЕ 98. В комплект строительных деталей входят одна деталь длиной 1.2 м и 3 детали длиной 1.8 м. На лесопилке для нарезки деталей используют доски длиной 3 и 4 метра. Досок длиной 3 м имеется 120 шт., 4 м – 80 шт. Составить план распилки имеющихся досок, чтобы количество комплектов строительных деталей было максимальным.

ЗАДАНИЕ 99. Предприятие выпускает 4 вида продукции P_1 - P_4 с использованием ресурсов, виды и нормы расхода которых, а также уровень получаемой от их реализации прибыли приведены в таблице:

Ресурсы	Вид продукции				Располагаемый ресурс
	P_1	P_2	P_3	P_4	
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Оборудование	4	6	10	13	100
Прибыль с ед. прод.	60	70	120	130	

На продукцию P_2 предприятие имеет заказ на 5 ед. Найти план производства продукции P_1 - P_4 , максимизирующий прибыль предприятия при условии, что прибыль, получаемая предприятием от реализации продукции P_4 , должна составлять не менее 30% от общей прибыли.

ЗАДАНИЕ 100. Предприятие собирается закупить 3 вида оборудования с производительностями 400, 480 и 370 единиц продукции за смену. Это оборудование должно быть размещено на площади в 125 м². Единица оборудования i -го вида, $i=1..3$, требует для установки соответственно 9, 11 и 6 м². На приобретение оборудования выделены финансы в количестве 45 млн. руб. Требуется определить, сколько оборудования каждого типа нужно закупить, чтобы общая производительность за смену была максимальной, если:

- стоимость единицы оборудования 1-го, 2-го и 3-го вида составляет 3, 4 и 2 млн. руб. соответственно;
- по нормативам охраны труда количество оборудования 3-го вида не должно превышать 6 единиц.
- предприятие должно закупить хотя бы одну единицу каждого типа.

ЗАДАНИЕ 101. В цехе размещены 80 станков 1-го типа, 100 станков 2-го типа и 120 станков 3-го типа, на каждом из которых можно производить детали А и Б. Производительность станков в сутки, стоимость одной детали каждого вида и минимальный суточный план их выпуска представлены в таблице:

Детали	Производительность, дет./сут.			Стоимость одной детали, руб.	Минимальный суточный план
	Тип 1	Тип 2	Тип 3		
А	15	25	10	70	1430
Б	20	15	20	45	3700

Составить план производства деталей, чтобы стоимость продукции, производимой в сутки, была максимальной.

ЗАДАНИЕ 102. Небольшое судно водоизмещением 200 тонн перевозит грузы 2-х типов. Грузы размещаются в 2-х трюмах, объем которых составляет 40 и 30 м³. Характеристики грузов приведены в таблице:

Груз	Вес 1 шт., т	Объем 1 шт., м ³
Тип 1	4	3
Тип 2	3	1

При загрузке трюмов необходимо учитывать условие устойчивости судна: если загрузка судна превышает половину его водоизмещения, то вес груза в трюмах не должен отличаться более чем на 20%.

Составить план загрузки трюмов судна грузами таким образом, чтобы общий вес груза был максимальным.

ЗАДАНИЕ 103. Оптовая фирма для временного хранения однотипной продукции использует склад, который вмещает до 500 тонн. Фирма работает по следующей схеме: в течение месяца она закупает продукцию у производителей и заключает договора на ее продажу. Отгрузка продукции потребителям осуществляется в конце месяца. В таблице приведены данные, в соответствии с которыми функционирует фирма в каждом месяце квартала:

Вид показателя	Номер месяца в квартале		
	I	II	III
Цена, по которой продукция закупается у поставщиков (тыс. руб./т)	90	100	70
Цена, по которой продукция отгружается потребителям (тыс. руб./т)	120	140	90
Возможности поставщиков (т. продукции)	400	200	600

Запас продукции на начало квартала составляет 150 т. Составить план закупки и отгрузки продукции в течение квартала, при котором суммарная прибыль фирмы будет максимальной.

ЗАДАНИЕ 104. Для производства трех видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объемы имеющегося сырья каждого вида, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие вида			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования (нормо-ч):				
I типа	2	-	4	200
II типа	4	3	1	500
Сырье (кг):				
1-го типа	10	15	20	1495
2-го типа	30	20	25	4500
Выпуск (шт.):				
минимальный	-	30	-	
максимальный	20	-	-	
Цена одного изделия (руб.)	10	15	20	

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготавливаемой продукции максимальна.

7. ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

7.1. Содержание курсовой работы

Расчетно-пояснительная записка (РПЗ) к курсовой работе должна состоять из следующих основных частей:

- титульный лист;
- бланк задания;
- содержание;
- введение;
- постановка задачи оптимизации;
- построение аналитической модели;
- обоснование и описание вычислительной процедуры;
- решение задачи оптимизации;
- анализ модели на чувствительность;
- определение оптимального целочисленного решения (если требуется);
- заключение;
- список использованных источников;
- список сокращений (если требуется);
- приложение.

Во **введении** приводится обзор задач оптимизации и методов их решения. Рекомендуется следующая структура. Примерно половину **введения** составляет рассмотрение общих вопросов (история, наиболее важные понятия, структура). Вторая половина посвящается более детальному рассмотрению одного из разделов исследования операций (за исключением линейного программирования, которому посвящена вся работа).

В разделе **"Построение математической модели"** описываются используемые для формализации задачи переменные, ограничения и целевая функция. Если при построении аналитической модели выполнялись преобразования ограничений, расчеты коэффициентов и т.д., то эти операции также описываются в данном разделе.

В разделе **"Обоснование и описание вычислительной процедуры"** указываются выбранные для решения задачи методы (простой симплекс-метод, двухфазный симплекс-метод, метод ветвей и границ и т.д.), проводится обоснование их применения, краткое описание используемых методов и алгоритмов их реализации.

В разделе **"Решение задачи оптимизации"** описывается приведение задачи к симплексной форме, ход ее решения (в виде симплекс-таблиц или других аналогичных объектов) и результаты решения задачи (оптимальные значения всех переменных, включая остаточные и избыточные, и

значение целевой функции). Описание хода решения задачи должно сопровождаться необходимыми пояснениями, например, о выборе ведущего элемента, о получении допустимого решения при использовании двухфазного метода и т.д. Все оптимальные значения переменных приводятся с указанием их содержательного смысла и размерности.

В разделе **"Анализ модели на чувствительность и устойчивость"** приводится:

- предварительный анализ оптимального решения;
- анализ чувствительности целевой функции;
- анализ устойчивости оптимального базисного плана.

В разделе **"Определение оптимального целочисленного решения"** указываются переменные, на которые накладывается требование целочисленности, выбранный метод решения задачи (метод ветвей и границ, метод Гомори для полностью или частично целочисленных задач) и ход решения задачи выбранным методом. Если задача решается методом ветвей и границ, то процесс решения отображается в виде дерева. Если используется метод Гомори, то приводятся все добавляемые в задачу ограничения и расчеты на основе симплекс-таблиц. Описание хода решения задачи должно сопровождаться необходимыми пояснениями.

Если по смыслу задачи поиск целочисленного решения не требуется, то раздел **"Определение оптимального целочисленного решения"** не включается в РПЗ.

В **заключении** приводятся результаты решения задачи (в соответствии с ее постановкой) и основные результаты анализа на чувствительность. Здесь же приводятся дополнительные результаты, представляющие интерес в соответствии с постановкой задачи. Это может быть, например, количество ресурсов, необходимых для реализации оптимального плана (в задачах о распределении ресурсов), состав или количество полученной смеси (в задачах о смесях) и т.д. Содержание этого раздела полностью зависит от постановки задачи.

Приложение представляет собой протокол решения задачи на ЭВМ с помощью одной из известных программ.

7.2. Требования к оформлению курсовой работы

Расчетно-пояснительная записка оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ 2. 105-79. ЕСКД. Общие требования к текстовым документам.

Весь текст РПЗ, кроме приложения, пишется **ВРУЧНУЮ** на стандартных листах формата А4. Текст должен иметь поля: слева - 30мм, справа - 10 мм; сверху -15 мм, снизу - 20 мм. Средняя плотность записи - 30 строк на страницу.

Приложение (протокол решения задачи) печатается на принтере также на листах формата А4.

Образец оформления титульного листа РПЗ приведен в приложении.

Текст РПЗ разделяется на разделы. Каждый раздел (а также содержание, введение, заключение, список использованных источников и приложения) должен начинаться с новой страницы. Названия разделов (например, 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ), а также названия СОДЕРЖАНИЕ, ВВЕДЕНИЕ, ЗАКЛЮЧЕНИЕ и СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ пишутся в центре строки заглавными буквами. Точка в конце названия не ставится.

Разделы нумеруются (арабскими цифрами с точкой) в пределах всей РПЗ. СОДЕРЖАНИЕ, ВВЕДЕНИЕ, ЗАКЛЮЧЕНИЕ и СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ не нумеруются. Если внутри раздела имеются подразделы, то они нумеруются в пределах раздела (например, 2-й подраздел 3-го раздела имеет номер 3.2). Названия подразделов пишутся с абзаца с заглавной буквы. Точка в конце названия не ставится.

Заголовки разделов, подразделов и т.д. отделяются от текста свободной строкой.

Нумерация страниц в РПЗ – сквозная, включая приложения. Первым считается титульный лист, вторым – бланк задания. Номера страниц ставятся в центре верхнего поля листа, начиная с ВВЕДЕНИЯ.

Все формулы, приводимые в РПЗ в общем виде, записываются в отдельной строке и нумеруются в пределах раздела. Номера формул указываются в круглых скобках у правого поля листа, например (1.2) - 2-я формула в 1-ом разделе. Ниже формулы приводятся пояснения имеющихся в ней символов. Описание каждого символа приводится в отдельной строке; перед описанием первого символа пишется слово "где" (без абзаца). Пояснения к каждому символу заканчиваются точкой с запятой, а к последнему – точкой. Ссылки на формулы указываются в виде их номеров в скобках. Формулы, указанные внутри текста (не выделенные в отдельную строку), а также расчеты в числовой форме не нумеруются.

Диапазоны номеров, индексов и т.д. указываются в виде: $i=1, n$.

Таблицы в РПЗ, если их несколько, нумеруются в пределах раздела. Над правым верхним углом таблицы пишется слово "Таблица" и ее номер (без точки в конце), например: "Таблица 4.1" : в центре следующей строки - заголовков таблицы (с заглавной буквы, без точки в конце), ниже сама таблица. Если таблица разделена на несколько частей (на разных страницах или друг под другом), то слово "Таблица" с номером и заголовков пишутся над первой частью таблицы, а над другими частями - слова "Продолжение табл...." и номер. Ссылки на таблицы даются в следующем виде: "...табл. 4.1"

Рисунки в РПЗ, если их несколько, также нумеруются в пределах раздела, например: "Рис. 1.1. "

Различная ориентация текста, рисунков и/или таблиц в пределах одной страницы НЕ ДОПУСКАЕТСЯ.

В тексте РПЗ разрешается приводить без расшифровки только общепринятые сокращения (например, ЭВМ). Если используются нестандартные сокращения (ОДР, ОЗЛП), то они должны быть расшифрованы в тексте. Если таких сокращений много, то они расшифровываются также в специальном списке использованных сокращений; он оформляется как раздел (без номера) перед приложением. Использовать сокращения отдельных слов (например, “коэф-ты” вместо “коэффициенты”) **НЕ РАЗРЕШАЕТСЯ**.

В содержание включаются:

- введение,
- все разделы,
- подразделы (если они есть),
- заключение,
- список использованных источников,
- список сокращений (если они есть),
- приложение (если их несколько – каждое из них).

Для каждой из этих частей РПЗ в содержании указывается номер первой страницы.

Список использованных источников составляется в алфавитном порядке или в порядке ссылок на источники в тексте. Примеры правильного указания источников см. в списке литературы данного пособия. Ссылки на источник оформляются в виде его номера (по списку), заключенного в квадратные скобки.

Приложение должно начинаться с новой страницы. Если приложений несколько, то с новой страницы начинается каждое из них. В правом верхнем углу первой страницы приложения пишется заглавными буквами слово ПРИЛОЖЕНИЕ (если приложений несколько, то указывается также его номер), а в центре следующей строки – название приложения (заглавными буквами).

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.- М.: Высшая школа, 1986.- 319 с.
2. Альсевич В.В., Габасов Р., Глушенков В.С. Оптимизация линейных экономических моделей: Статические задачи. – Мн.: БГУ, 2000. -210 с.
3. Балашевич В.А. Основы математического программирования. - Мн.: Вышэйшая школа, 1985.- 173 с.
4. Банди Б. Основы линейного программирования.- М.: Радио и связь, 1989.- 176 с.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология.- М.: Наука, 1980.- 208 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации.- Мн.: Изд-во БГУ, 1981.- 350 с.
7. Дегтярев Ю.И. Исследование операций.- М.: Высшая школа, 1986.- 320 с.
8. Кузнецов А.В. и др. Высшая математика: математическое программирование.- Мн.: Вышэйшая школа, 1994.- 286 с.
9. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах.- М.: Радио и связь, 1984.- 184 с.
10. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения.-М.: Наука, 1987.- 143 с.
11. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы.- М.: Наука, 1990.- 488 с.
12. Минюк С.А., Ровба Е. А., Кузьмич К.К. Математические методы и модели в экономике. - Мн. : ТетраСистемс , 2002. - 432с.
13. Смородинский С.С., Батин Н.В. Методы и алгоритмы для решения оптимизационных задач линейного программирования. – Мн.: БГУИР. Ч.1,1995 – 90 с.; Ч.2,1996 – 82 с.
14. Смородинский С.С., Батин Н.В. Оптимизация решений на основе методов и моделей математического программирования. – Мн.: БГУИР, 2003. – 136 с.
15. Таха Х. Введение в исследование операций. В 2-х кн.- М.: Мир, 1985.- Кн.1.- 479 с.; Кн.2.- 496 с.
16. Шелобаев С.И. Математические методы и модели. Экономика, финансы, бизнес. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 367с.
17. Юдин Д.Б., Юдин А.Д. Экстремальные модели в экономике.- М.: Экономика, 1979.- 288 с.

ОБРАЗЕЦ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра информатики и прикладной математики

КУРСОВАЯ РАБОТА

на тему

«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

по дисциплине «Системный анализ и исследование операций»

Выполнил студент

_____ (Группа) _____ (Факультет)

_____ (Фамилия И.О.)

_____ (Подпись)

Допущен к защите

_____ (Фамилия И.О. руководителя)

_____ (Дата)

_____ (Подпись)

Результаты защиты

_____ (Оценка)

_____ (Дата защиты)

_____ (Подпись члена комиссии)

БРЕСТ 2007

Составитель: Валерий Михайлович Ракецкий

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

к курсовой работе

«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

по дисциплине

«Системный анализ и исследование операций»

для студентов специальности

53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»
дневной и заочной форм обучения

Ответственный за выпуск: Ракецкий В.М.

Редактор: Строкач Т.В.

Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.

Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 15.12.2007 г. Формат 60х84 1/16. Усл.печ.л. 4,65.
Уч. изд. л. 5,0. Тираж 100 экз. Заказ № 52. Отпечатано на ризографе
учреждения образования «Брестский государственный технический
университет».

224017, г. Брест, ул. Московская, 267.