МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра информатики и прикладной математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

к лабораторным работам по дисциплине

«Математические модели в расчетах на ЭВМ и компьютеризация технологии в системах автоматизации»

для студентов специальности

«Автоматизация технологических процессов и производств»

дневной формы обучения

Часть 2. Методы анализа математических моделей с использованием ЭВМ

БРЕСТ 2009

УДК 519.816

В настоящем пособии представлены 8 лабораторных работ по дисциплине «Математические модели в расчетах на ЭВМ и компьютеризация технологии в системах автоматизации» для студентов специальности «Автоматизация технологических процессов и производств». Принципиальным отличием от работ, описанных в 1-ой части пособия, является то, что во 2-ой части электронные таблицы Excel и система компьютерной математики Mathematica используются не только как инструменты решения задач, но и как средства изучения методов их решения. Студенты знакомятся:

- с методом наименьших квадратов для подбора параметров эмпирических формул (ЛР1);
- с методами упрощения и минимизации булевых формул, представлением логических функций в различных базисах (ЛР2 - единственная работа, которая выполняется без использования средств вычислительной техники);
- с численными методами решения различных дифференциальных уравнений (ЛР3-6);
- с методами решения линейных экстремальных задач (ЛР7,8).

При этом в большинстве работ решение задач осуществляется именно в двух средах. Это позволяет повысить надежность получаемых результатов и избежать неправильных решений, которые не так редко возникают как в силу ошибок, допускаемых людьми, так и в силу особенностей решаемых задач, о которых человек не всегда осведомлен.

Описания работ содержат необходимые для их выполнения сведения (или ссылки на них), 20 вариантов заданий, требования к оформлению отчетов, вопросы к защите лабораторных работ.

Издаётся а 2-х частях, часть 2.

Составитель: В.М. Ракецкий, доцент, к.ф.-м.н.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N1

Определение вида и параметров эмпирической зависимости методом наименьших квадратов

<u>Цель работы:</u> изучение метода наименьших квадратов и его реализация в Excel и системе Matematica.

<u>Постановка задачи</u>. Для заданного варианта данных подобрать подходящую эмпирическую формулу и, используя метод наименьших квадратов, найти значения параметров, от которых зависит формула.

1. <u>Теоретические сведения.</u>

1.1. Задача отыскания параметров эмпирической формулы является одной из наиболее важных задач, встречающихся при обработке результатов наблюдений, различных экспериментов и т.п. Ее суть в следующем.

Имеется m точек, заданных координатами в декартовой системе координат (x_i,y_i), $i=1,\dots,m$. Требуется найти такую функцию $y=f(x)$, значения которой в точках x_i как можно более точно совпадают с y_i, т. е. $y_i \approx f(x_i)$, см. рис.

Для решения этой задачи используют 2 подхода. Первый основан на построении специального (интерполяционного) многочлена, значения которого совпадают в заданных точках x_i с y_i. Недостатком этого подхода является громоздкость получаемой формулы уже при достаточно небольших m.

Другой подход состоит в том, что по данным наблюдений подбирается наиболее простая формула того или иного типа, дающая наилучшее приближение к имеющимся данным. При этом нет смысла требовать точного совпадения, т.к. имеющиеся данные носят приближенный характер.

Слова «наилучшее приближение к имеющимся данным» могут пониматься по-разному. Наиболее часто используется так называемый принцип наименьших квадратов. Он основан на том, что из заданного множества формул вида $y=f(x)$ наилучшей является та функция, для которой сумма квадратов отклонений вычисленных значений $f(x_i)$ от наблюдаемых значений y_i является наименьшей. Подбор параметров функции $f(x)$, основанный на этом принципе, называют методом наименьших квадратов.

Рассмотрим метод наименьших квадратов на примере эмпирической формулы, которая линейно зависит от 2-х параметров и имеет вид:

$$f(x)=\phi(x,a,b)=a\varphi(x)+b\psi(x). \qquad (1)$$

Заметим, что линейная зависимость формулы от параметров взята не случайно. В этом случае метод наименьших квадратов имеет наиболее простую и изящную реализацию. Что касается двух параметров, то это не принципиально, с двумя параметрами проще.

Введем в рассмотрение функцию, представляющую сумму квадратов отклонений:

$$F(x,a,b)=\sum_{i=1}^{m}(y_i-f(x_i))^2=\sum_{i=1}^{m}(y_i-\phi(x_i,a,b))^2. \qquad (2)$$

В соответствии с принятым подходом, параметры ***a*** и ***b*** необходимо подобрать таким образом, чтобы значение ***F(x,a,b)*** было минимальным:

$$F(x,a,b) \to \min_{a,b}. \qquad (3)$$

Как известно из курса высшей математики, точка минимума ***(a, b)*** необходимо удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,a,b)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - \phi(x_i,a,b))\dfrac{\partial \phi(x,a,b)}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial F(x,a,b)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - \phi(x_i,a,b))\dfrac{\partial \phi(x,a,b)}{\partial b} = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Подставляя в систему (4) функцию (1), получаем:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}(y_i - a\varphi(x_i) - b\psi(x_i))\varphi(x_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^{m}(y_i - a\varphi(x_i) - b\psi(x_i))\psi(x_i) = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

После несложных преобразований приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{m}\varphi^2(x_i) + b\sum_{i=1}^{m}\varphi(x_i)\psi(x_i) = \sum_{i=1}^{m}y_i\varphi(x_i), \\ a\sum_{i=1}^{m}\varphi(x_i)\psi(x_i) + b\sum_{i=1}^{m}\psi^2(x_i) = \sum_{i=1}^{m}y_i\psi(x_i) \end{cases} \qquad (6)$$

Решив систему (5), найдем значения параметров ***a*** и ***b***, которые являются решением задачи (2).

Система (5) представлена в общем виде. Ее конкретный вид зависит от функций *φ(x)*, *ψ(x)*. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть ***ϕ(x,a,b)=ax+b***, т.е. ***φ(x)=x***, ***ψ(x)=1***. Система (6) принимает вид:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{m}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{m}x_i = \sum_{i=1}^{m}y_ix_i, \\ a\sum_{i=1}^{m}x_i + b\cdot m = \sum_{i=1}^{m}y_i. \end{cases}$$

Пример 2. Пусть ***ϕ (x,a,b)=a·sinx+b·lnx***, т.е. ***φ(x)=sinx***, ***ψ(x)=lnx***. Система (6) принимает вид:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{m}\sin^2 x_i + b\sum_{i=1}^{m}\sin x_i \ln x_i = \sum_{i=1}^{m}y_i \sin x_i, \\ a\sum_{i=1}^{m}\sin x_i \ln x_i + b\sum_{i=1}^{m}\ln^2 x_i = \sum_{i=1}^{m}y_i \ln x_i. \end{cases}$$

1.2. Проведенные выше рассуждения нетрудно обобщить на случай 3-х, 4-х и более параметров, от которых искомая функция зависит линейно. Например, если

$$f(x)=\phi(x,\ a,\ b,\ c)=a\varphi(x)+b\psi(x)+c\lambda(x),$$

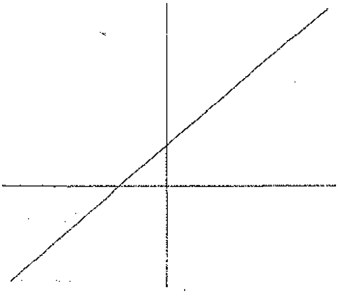
то система для отыскания параметров a, b, c принимает вид:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi^2(x_i)+b\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi(x_i)\psi(x_i)+c\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi(x_i)\lambda(x_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}y_i\varphi(x_i), \\ a\sum\limits_{i=1}^{m}\psi(x_i)\varphi(x_i)+b\sum\limits_{i=1}^{m}\psi^2(x_i)+c\sum\limits_{i=1}^{m}\psi(x_i)\lambda(x_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}y_i\psi(x_i), \\ a\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda(x_i)\varphi(x_i)+b\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda(x_i)\psi(x_i)+c\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda^2(x_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}y_i\lambda(x_i). \end{cases}$$

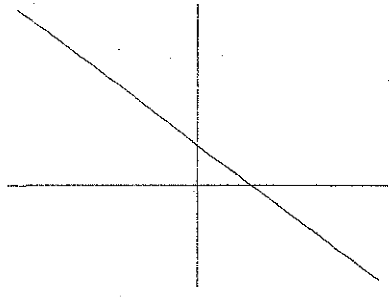
1.3. Для подбора подходящей эмпирической формулы необходимо знать, как выглядят графически математические зависимости, из которых выбирается эмпирическая формула. Приведем графики тех из них, которые будут использоваться в настоящей лабораторной работе.

а) $y=ax+b$ (линейная зависимость)

a>0

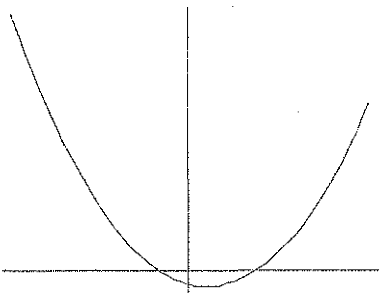


a<0

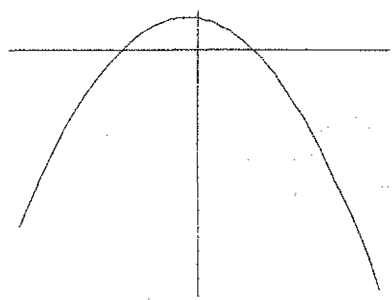


б) $y=ax^2+bx+c$ (квадратичная зависимость)

a>0

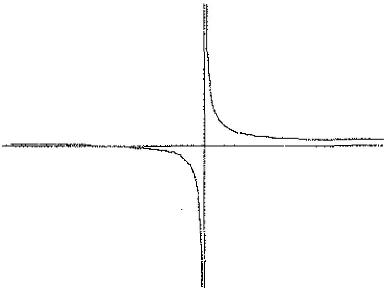


a<0

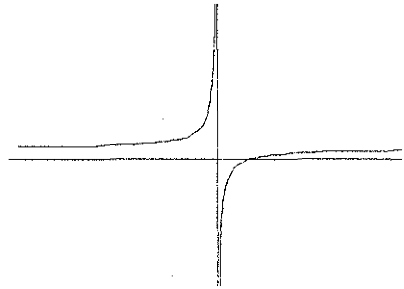


в) $y=a/x+b$ (гиперболическая зависимость)

a>0

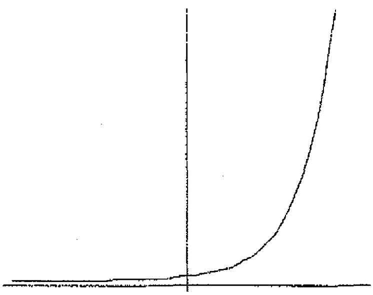


a<0

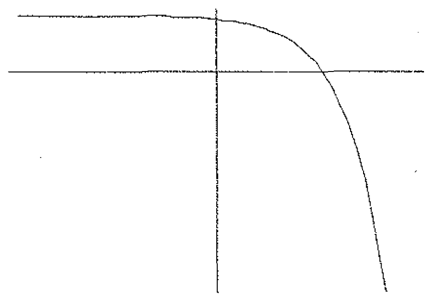


г) $y=ae^x+b$ (показательная зависимость)

a>0

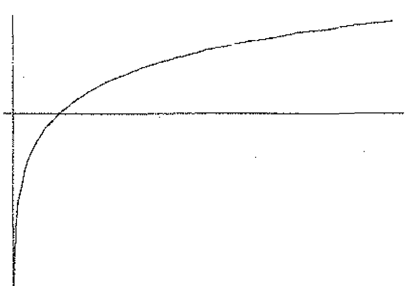


a<0

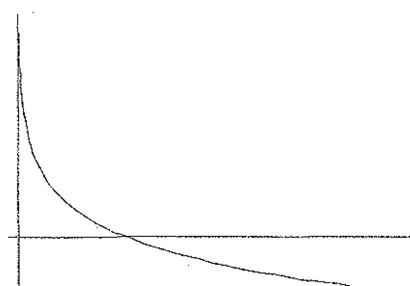


д) $y=a\ \ln x+b$ (логарифмическая зависимость)

a>0

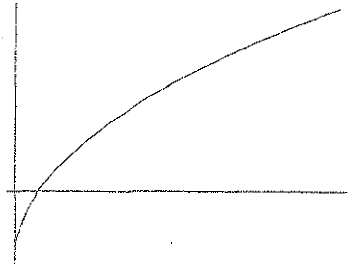


a<0

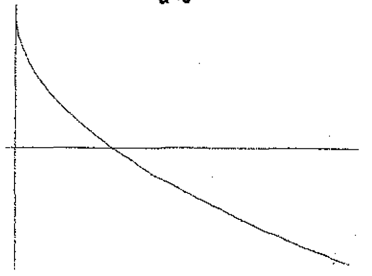


е) $y = a\sqrt{x} + b$

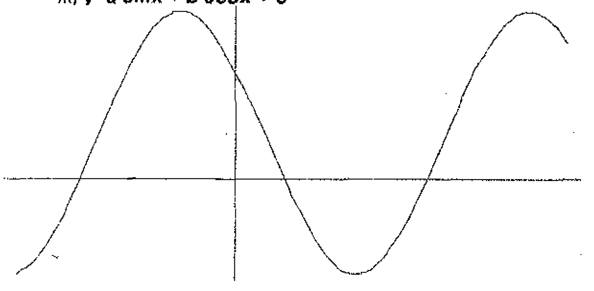
a>0



a<0

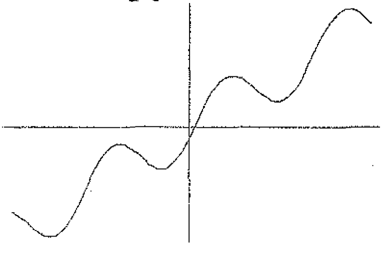


ж) *y=a sinx + b cosx + c*

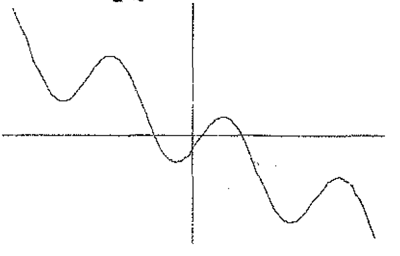


з) *y=a x+ b sinx+c cosx*

a>0

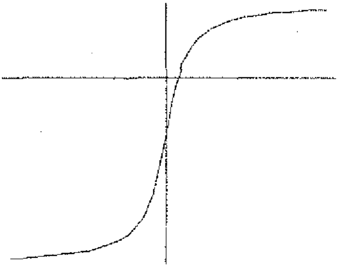


a<0

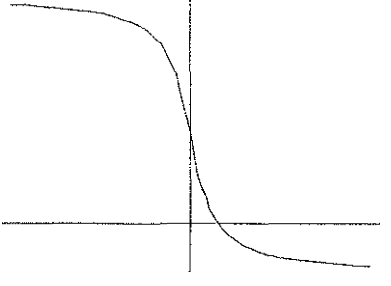


и) *y=a arctgx +b*

a>0

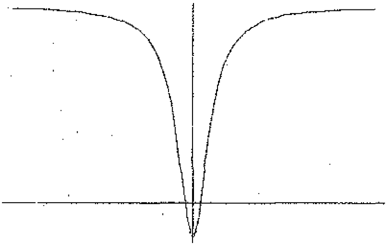


a<0

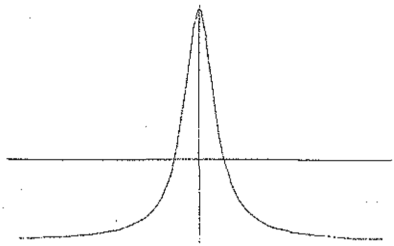


к) $y=a\,x^2/(x^2+1)+b$

a>0



a<0



2. Порядок выполнения работы.

1. Построить в декартовой системе координат поле заданных точек и определить вид зависимости.
2. Составить систему уравнений для отыскания параметров зависимости.
3. Найти параметры зависимости, используя EXCEL.
4. Найти параметры зависимости, используя Mathematica.
5. Оформить отчет по работе.

3. Варианты заданий.

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
-10,0	223,6	0,1	-1,4	-5,0	-10,9	-5,0	3,7	-4,0	3,2
-9,2	191,9	0,3	-1,0	-4,5	-9,2	-4,5	-2,1	-3,4	3,1
-8,9	176,9	0,5	-0,7	-3,7	-6,5	-4,5	-3,2	-3,3	3,2
-7,9	141,8	0,9	-0,3	-3,0	-4,7	-3,9	-9,9	-2,6	3,3
-6,2	90,6	1,3	0,1	-2,2	-2,4	-3,0	-15,1	-2,0	3,2
-4,9	56,5	1,8	0,3	-1,7	-0,3	-2,6	-14,2	-1,7	3,5
-4,8	54,1	2,0	0,6	-1,7	-0,7	-2,1	-10,3	-1,1	3,3
-4,0	37,0	2,5	0,7	-0,8	2,0	-1,2	1,0	-1,0	3,1
-3,3	25,0	2,7	0,8	-0,5	3,2	-0,7	6,8	-0,2	3,3
-1,8	5,7	3,0	1,1	0,1	4,9	0,2	11,3	0,6	3,3
0,0	-6,1	3,2	1,0	0,9	6,8	0,8	8,4	1,4	3,5
1,6	-6,5	3,5	1,2	1,2	7,7	1,1	5,7	1,4	3,9
1,7	-5,3	4,0	1,4	1,4	8,6	2,1	-6,5	2,3	4,3
3,4	6,1	4,2	1,6	2,3	11,2	2,4	-9,8	2,3	4,1
3,8	11,7	4,3	1,6	3,1	13,8	2,9	-13,9	2,5	4,4
5,5	38,2	4,4	1,7	3,2	13,6	3,0	-14,7	3,0	5,1
6,4	55,7	4,9	1,9	3,2	14,4	3,4	-15,0	3,0	5,2
7,4	80,3	5,3	2,0	3,3	14,6	3,8	-13,8	3,1	5,5
8,2	102,5	5,6	2,2	3,9	16,3	3,9	-12,9	3,5	6,5
9,9	159,0	5,8	2,3	4,1	16,4	4,2	-10,2	3,9	8,2

Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
-5,0	-9,5	-1,0	-1,2	-12,0	-12,8	0,1	-9,1	0,1	0,2
-4,7	-9,7	0,7	4,5	-10,1	-12,9	1,0	-3,8	0,2	-0,1
-4,0	-9,8	2,1	3,7	-9,4	-12,6	1,6	-2,5	0,4	-0,6
-3,9	-10,2	3,2	3,6	-9,3	-12,6	2,2	-1,9	0,4	-0,7
-3,5	-10,3	4,1	5,9	-8,9	-12,8	3,1	-1,0	0,6	-1,2
-2,8	-10,7	4,9	9,6	-7,6	-12,7	3,5	-1,0	0,9	-1,8
-2,7	-10,8	5,8	14,0	-7,1	-12,5	3,7	-0,6	1,2	-2,1
-2,4	-11,0	7,7	16,9	-6,4	-12,4	4,2	-0,3	1,4	-2,4
-2,3	-11,2	8,8	15,9	-5,4	-12,5	4,9	0,0	1,5	-2,6
-1,8	-11,3	10,6	19,2	-4,1	-12,2	5,1	-0,2	1,7	-2,9
-1,1	-13,2	11,4	23,2	-3,0	-11,7	5,1	-0,2	2,1	-3,2
-0,3	-26,8	11,8	25,3	-1,1	-10,3	6,0	0,5	2,5	-3,6
0,6	-0,9	13,5	29,7	-0,6	-9,0	6,6	0,7	2,8	-4,0
1,5	-5,4	14,1	29,4	0,6	-4,6	7,3	0,8	3,2	-4,2
2,2	-6,4	15,7	28,6	1,7	-2,7	7,4	0,6	3,5	-4,6
3,2	-7,2	16,1	29,1	2,0	-2,3	7,5	0,8	3,7	-4,7
3,5	-7,2	18,0	37,5	3,8	-1,5	8,2	1,1	3,9	-4,8
3,9	-7,5	18,8	40,6	4,1	-1,6	8,9	1,2	4,3	-5,1
4,5	-7,5	19,1	41,5	5,1	-1,4	9,3	1,1	4,7	-5,5
5,4	-7,9	20,5	41,8	6,6	-1,2	9,7	1,3	4,8	-5,5
Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
-6,0	9,3	-10,0	26,3	-2,0	4,5	-4,0	1,8	-4,0	1,8
-5,2	9,6	-8,4	14,8	-1,7	4,4	-3,4	1,7	-3,4	1,7
-4,8	9,5	-7,6	9,5	-1,1	4,0	-3,0	1,7	-3,0	1,7
-4,5	9,9	-7,5	9,4	-1,0	3,7	-2,2	1,4	-2,2	1,4
-3,5	10,2	-6,9	7,8	-0,5	3,6	-2,1	1,2	-2,1	1,2
-2,8	10,9	-5,0	14,0	-0,2	3,2	-1,5	0,8	-1,5	0,8
-2,8	10,7	-4,8	14,4	0,1	2,3	-1,1	0,3	-1,1	0,3
-2,5	11,3	-3,9	14,6	0,5	1,5	-0,3	-1,7	-0,3	-1,7
-2,0	11,7	-3,5	12,7	1,2	-1,2	-0,2	-1,8	-0,2	-1,8
-1,0	15,3	-1,6	-1,2	1,8	-6,3	-0,1	-1,9	-0,1	-1,9
-0,2	42,1	0,0	-3,9	2,7	-21,0	0,7	-0,6	0,7	-0,6
0,2	-27,1	1,3	1,3	2,9	-25,7	1,5	0,9	1,5	0,9
1,0	1,1	3,2	-2,9	3,5	-54,0	2,4	1,4	2,4	1,4
1,8	4,6	3,8	-7,5	4,1	-99,5	2,6	1,5	2,6	1,5
1,9	4,8	5,8	-17,2	4,6	-161,7	3,5	1,7	3,5	1,7
2,5	5,5	7,5	-11,5	4,9	-231,2	4,0	1,8	4,0	1,8
3,3	6,3	8,8	-11,3	5,9	-609,6	4,4	1,9	4,4	1,9
3,7	6,1	10,5	-23,1	6,7	-1363,5	5,0	1,9	5,0	1,9
4,3	6,4	11,3	-28,4	6,7	-1446,4	5,7	2,0	5,7	2,0
4,3	6,7	12,6	-28,9	7,0	-1882,5	5,9	1,9	5,9	1,9

Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,1	3,6	-1,0	-4,4	-6,0	-1,7	-8,0	13,2	-12,0	-466,2
0,7	-0,4	-0,1	6,6	-5,5	-1,8	-7,2	13,2	-10,6	-364,8
1,2	-1,4	0,5	13,1	-5,2	-1,8	-6,6	12,9	-9,7	-311,0
1,8	-2,0	0,9	15,7	-4,3	-1,5	-5,0	12,7	-8,2	-221,7
1,9	-2,2	1,9	14,4	-3,8	-1,5	-3,9	12,4	-6,7	-147,4
2,9	-3,3	2,7	6,8	-3,3	-1,5	-1,9	10,9	-5,5	-96,9
3,7	-3,4	3,0	3,2	-2,5	-1,1	-1,6	10,3	-3,5	-37,6
4,6	-4,2	3,4	-1,6	-1,6	-0,2	-0,3	5,3	-2,4	-14,0
4,6	-4,3	4,2	-7,9	-1,0	1,1	-0,2	4,2	-2,1	-9,4
5,2	-4,3	4,8	-7,5	-0,4	3,5	1,5	-3,6	-1,7	-3,5
5,5	-4,4	5,1	-5,8	0,2	4,0	2,6	-5,3	0,0	13,6
6,2	-4,7	5,2	-5,0	0,2	3,8	3,1	-5,5	0,6	14,4
6,2	-4,7	5,4	-3,2	1,0	1,1	3,7	-5,9	2,1	9,0
7,0	-4,8	5,5	-2,5	1,3	0,2	4,0	-6,0	3,5	-8,9
7,6	-4,8	6,2	6,7	2,2	-0,9	6,0	-6,7	3,9	-17,0
7,7	-5,2	6,9	13,4	3,2	-1,3	6,8	-6,7	5,3	-50,4
8,0	-5,2	7,4	16,1	3,8	-1,5	7,8	-7,0	6,3	-80,7
8,1	-5,1	7,5	16,3	3,9	-1,5	9,7	-7,0	7,5	-125,7
9,0	-5,2	8,2	14,5	4,3	-1,6	11,2	-7,3	8,0	-146,7
9,2	-5,3	8,6	10,9	4,6	-1,6	13,2	-7,2	8,9	-189,1

4. Требования к отчету.

Отчет должен содержать:

- постановку задачи с условием заданного варианта;
- обоснование выбора эмпирической зависимости;
- систему для нахождения параметров зависимости;
- распечатку расчетов и графических построений в EXCEL;
- распечатку расчетов и графических построений в системе Mathematica.

5. Вопросы к защите лабораторной работы.

1. В чем состоит задача отыскания параметров эмпирической формулы?
2. Изложите суть метода наименьших квадратов.
3. Запишите общий вид системы уравнений для отыскания параметров ***a***, ***b***, если $\phi(x,a,b)=ax+b$.
4. Запишите систему уравнений для отыскания параметров ***a***, ***b***, ***c***, если $\phi(x, a, b, c)=a\varphi(x)+b\psi(x)+c\lambda(x)$.
5. Постройте систему для отыскания параметров следующей эмпирической функции:

   a) $\phi(x, a, b, c) = a + \dfrac{b}{x} + c\sqrt{x}$;

   b) $\phi(x, a, b, c) = ax + b\sin^2 x + c$;

   c) $\phi(x, a, b, c) = a2^x + b\log_2 x + c\cos 2x$;

   d) $\phi(x, a, b, c) = ax + b\sin\sqrt{x} + \dfrac{c}{x^2}$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Функции алгебры логики

<u>**Цель работы:**</u> изучение методов упрощения, минимизации и представления в различных базисах логических функций.

<u>Постановка задачи.</u>

1. Используя законы и тождества булевой алгебры, получить из заданной формулы дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). Проверить эквивалентность исходной и полученной формул, составив для них таблицы истинности.
2. Для заданного варианта логической функции:
   a) построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму;
   b) провести операции склеивания и получить сокращенную дизъюнктивную форму.
   c) минимизировать формулу: расчетным методом; методом гиперкуба; методом покрытий; методом Вейча-Карно.
3. Доказать, что предложенный набор логических функций представляет собой базис:
   a) показав, что через эти функции выражаются булевы функции ***{&,¬}*** или ***{∧,¬}***;
   b) используя теорему о базисе пространства логических функций.
4. Записать функцию ***f(x1,x2,x3)*** в заданном базисе.

1. <u>Теоретические сведения.</u>

Теоретические сведения для выполнения задания приведены в файле U:\VT&PM\MS_F\MM_ATP\Лабораторные работы\Семестр5\lr2.doc.

2. <u>Варианты заданий.</u>

Вар.	Формула для упрощения	x_1	0	1	0	1	0	1	0	1	Базис
		x_2	0	0	1	1	0	0	1	1	
		x_3	0	0	0	0	1	1	1	1	
1	$x+y\overline{(z+\overline{\bar{y}z(x+y+z)}+y)}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	1	0	1	1	1	0	0	0	$\{\downarrow\}$
2	$xy+\bar{z}\overline{(\overline{x+y}+\overline{y+\bar{x}z}+\bar{y}z)}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	1	1	0	0	1	1	1	0	$\{\mapsto,\Leftrightarrow\}$
3	$\overline{xyz}+y\overline{(\overline{(z+\bar{y}z)\overline{(x+y+z)}}+x)}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	0	0	0	1	1	1	0	1	$\{\to,0\}$
4	$x+\overline{(x+y)}\,\overline{(z+\overline{\bar{y}z(y+z)}+y)}+\bar{y}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	1	1	1	0	0	0	1	1	$\{\to,\mapsto\}$
5	$\overline{(xz+\bar{y})(x+\overline{yz(x+\bar{y}z)}+\bar{x}(x+y))}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	0	1	0	1	1	1	0	0	$\{\to,\oplus\}$
6	$\overline{x\bar{y}z+y\overline{(yz+\overline{\bar{y}z(\bar{z}+y+z)}+x)}}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	0	1	0	1	0	0	1	1	$\{\mapsto,\neg\}$
7	$\overline{x(y+\bar{x})}+y\overline{(xy+\overline{x\bar{y}z(y+z)}+z)}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	1	1	1	1	0	1	1	0	$\{\to,\neg\}$
8	$\overline{(x+y)}x+\overline{(z+\overline{\bar{y}z(z(x+z)+\overline{y+z})})}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	0	0	1	0	0	1	0	1	$\{\mapsto,1\}$
9	$x\overline{(y+\bar{x})}+y\overline{((z+\overline{\bar{y}z(z+y+x)})+x)}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	1	1	1	1	1	0	0	1	$\{\Leftrightarrow,\wedge,0\}$
10	$\overline{(x+yz+\bar{z})}+y\overline{(z+\bar{y}z+y)}+\overline{xy}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	0	1	0	0	0	1	1	1	$\{\Leftrightarrow,\vee,0\}$
11	$(\overline{xy}+z)\overline{(z+\overline{\bar{y}z(xy+y+x\bar{z})}+y)}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	0	0	1	1	0	0	1	1	$\{\oplus,\wedge,\Leftrightarrow\}$
12	$\overline{\overline{(xyz+\bar{x}z\bar{y})}+\overline{y(z+\bar{y}z+y)}}+x$	$f(x_1,x_2,x_3)$	1	0	1	0	0	1	1	1	$\{\oplus,\vee,\Leftrightarrow\}$
13	$\overline{x\bar{y}z}+\overline{(z+\overline{\bar{y}z(x+y+z)}+y)}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	1	0	0	0	1	1	1	1	$\{\to,\oplus\}$
14	$\overline{((xz+\overline{xyz})+\overline{\bar{y}z(x+y+x\bar{z})}+x\overline{yz})}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	0	0	1	1	1	1	1	0	$\{\mapsto,1\}$
15	$\overline{(\bar{x}+y)\bar{z}}+\overline{\overline{(y+\overline{\bar{y}z(\bar{x}+z)}+\bar{z})}+y\,\overline{xz}}$	$f(x_1,x_2,x_3)$	0	1	1	1	1	0	1	1	$\{\Leftrightarrow,\wedge,0\}$

16	$\overline{x(\overline{\overline{y}+\overline{\overline{x}}})}+\overline{y(\overline{(z+\overline{y}z)(x+y)}+x)}$	f(x1,x2,x3)	1	0	1	1	0	0	1	1	{→,0}
17	$\overline{(x+\overline{xz}+\overline{z})}+\overline{y(z+\overline{\overline{y}z}+x)}+\overline{x\overline{y}z}$	f(x1,x2,x3)	1	0	1	0	0	1	1	1	{→,¬}
18	$\overline{(\overline{x\overline{z}}+z)(\overline{(z+\overline{y}z)\overline{(xy+y+x\overline{z})}}+y)}$	f(x1,x2,x3)	1	0	1	0	1	1	0	0	{⇔,∧,0}
19	$\overline{(\overline{(xyz+\overline{x}\overline{y})}+\overline{y(z+x+y)+\overline{y}x})y}$	f(x1,x2,x3)	0	0	1	1	0	1	1	0	{⊕,∧,⇔}
20	$\overline{x\overline{y}z}+\overline{(z+\overline{(\overline{y}+x)z\overline{(x+y+z)}}+\overline{y})}$	f(x1,x2,x3)	1	1	1	1	0	0	1	1	{→,⊕}

3. Таблица истинности некоторых логических функций

x1	x2	→	↦	⇔	⊕	↓
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0

4. Требования к отчету.

Отчет оформляется вручную на стандартных листах формата А4. Должен содержать:

- постановку задачи с указанием варианта и его заданий;
- достаточно детальное описание всех пунктов задания.

5. Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Дайте определение:
   - а) логической функции;
   - б) булевой функции;
   - б) совершенной дизъюнктиной нормальной формы (СДНФ);
   - в) дизъюнктиной нормальной формы (ДНФ)
   - г) минимальной ДНФ;
   - д) функционально полной системы логических функций;
   - е) базиса логических функций.
2. Приведите к ДНФ следующую формулу:
   - а) $\overline{z(x+\overline{yz})\overline{x}}+\overline{(xz+\overline{\overline{y}z(z(x+z)+\overline{y\overline{x}}+z)})}$;
   - б) $\overline{\overline{xy(z+y\overline{x})}+\overline{z}(x+\overline{\overline{x+y}+\overline{y+\overline{x}z}}+\overline{y}z)}$.
2. Найдите (методом, который укажет преподаватель) минимальную ДНФ для функции, заданной таблично:

x_1	0	1	0	1	0	1	0	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	0	0	0	1	1	1	1
$f_1(x_1,x_2,x_3)$	1	0	1	1	1	0	0	0
$f_2(x_1,x_2,x_3)$	1	1	0	0	1	0	1	1
$f_3(x_1,x_2,x_3)$	1	1	0	0	1	1	1	1

3. Докажите (методом, который укажет преподаватель), что предложенный набор логических функций представляет собой базис:
   - а) {⊕,∨,⇔};
   - б) {→,↦};
   - в) {↦,1}.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N3

Сравнение численного и аналитического решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Цель работы: изучение численных методов решения обычных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Для заданного варианта дифференциального уравнения найти аналитическое и численное решения и провести их сравнение.

1. Теоретические сведения.

1.1. Аналитическое решение линейного дифференциального уравнения в системе Matematica можно найти с помощью функции **DSolve** (см. [12], ЛР №8).

1.2. Численное решение дифференциального уравнения в системе Matematica можно найти с помощью функции **NDSolve**. Обращение к функции в случае обычного дифференциального уравнения имеет вид:

NDSolve[*eqns, y, x, xmin, xmax*]

Здесь

eqns – список из уравнения и начальных (краевых) условий;

y – функция, относительно которой ищется решение уравнения;

{x, xmin, xmax} - переменная, от которой зависит искомая функция, и границы ее изменения.

Примеры:

1) $\mathbf{solution = NDSolve\left[\{y'[x] == y[x], y[1] == 2\}, y, \{x, 0, 3\}\right]}$

2) $\mathbf{solution = NDSolve\left[\left\{y'[x] == \frac{1}{2y[x]}, y[0.01] == .1\right\}, y, \{x, 0.01, 1\}\right]}$

График полученного решения можно построить следующим образом:

$\mathbf{PLot\left[Evaluate\left[y[x]\ /.\ solution\right], \{x, .01, 1\}\right]}$

Аналогичным образом можно найти решение системы дифференциальных уравнений:

$\mathbf{solution = NDSolve[\{x'[t] == y[t], y'[t] == -.01y[t] - sin[x[t]],}$

$\mathbf{x[0] == 0, y[0] == 2.1\}, \{x, y\}, \{t, 0, 100\}]}$

$\mathbf{ParametricPlot\left[Evaluate\left[\{x[t], y[t]\}/.solution\right], \{t, 0, 100\}\right];}$

1.3. Решение обыкновенного дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$, методом Эйлера основано на замене производной приближенным соотношением:

$$y' \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Отсюда следует широко известная формула Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i), \quad i=0,1,2, \ldots,$$

где $x_i = x_0 + ih$.

Метод Эйлера в системе Mathematica может быть реализован с помощью следующей процедуры:

```
Euler1[a_,b_,h_,ya_]:=Block[{T,L,x,y},
  x=a;
  y=ya;
  T={ };
  While[x≤b,
    L=Append[T,{x,y}];
    y=y+h*Fxy[x,y];
    x=x+h;
    T=L
  ];
  Interpolation[T]
]
```

1.4. Метод Эйлера наиболее простой и наименее точный из известных методов для решения дифференциальных уравнений. Он имеет первый порядок точности относительно *h*. Из более точных методов широко используются различные реализации метода Рунге-Кутта:

1) $y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i); \quad y_{i+1} = y_i + h\dfrac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})}{2}.$

Этот метод называют также «предиктор-корректор». Он имеет второй порядок точности.

2) $y_{i+1/2} = y_i + \dfrac{h}{2}f(x_i, y_i); \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \dfrac{h}{2}, y_{i+1/2}).$

Этот метод называют «усовершенствованный метод Эйлера». Он также имеет второй порядок точности.

3) $y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

Этот метод наиболее известен и наиболее часто используется, т.к. имеет 4-ый порядок точности.

1.5. Кроме методов Рунге-Кутта для численного решения дифференциальных уравнений используют метод Адамса *(m=0,1,2 ...)*:

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=0}^{m} \alpha_{m,j} f(x_{i-j}, y_{i-j}).$$

Его точность имеет порядок *(m+1)*. Коэффициенты $\alpha_{i,j}$ зависят только от количества слагаемых, используемых в методе Адамса:

m=0: $\alpha_{0,0}=1$;

m=1: $\alpha_{1,0}=3/2$, $\alpha_{1,1}=-1/2$;

m=2: $\alpha_{2,0}=23/12$, $\alpha_{2,1}=-4/3$, $\alpha_{2,2}=5/12$;

m=3: $\alpha_{3,0}=55/24$, $\alpha_{3,1}=-59/24$, $\alpha_{3,2}=37/24$, $\alpha_{3,3}=-3/8$;

....

Нетрудно видеть, что при *m=0* метод Адамса совпадает с методом Эйлера. Основной недостаток метода Адамса состоит в том, что для его работы необходимо знать кроме y_0 еще несколько начальных приближений y_1, y_2,... Обычно их находят каким-либо другим численным методом (например, Рунге-Кутта). В нашей работе для упрощения необходимые приближения будем находить, используя точное аналитическое решение.

2. Порядок выполнения работы

1) найти аналитическое решение с помощью функции **DSolve**;
2) найти численное решение с помощью функции **NDSolve**;
3) графически сравнить аналитическое и численное решения;
4) найти численное решение методом Эйлера, используя процедуру приведенную ниже, для *n=4, 8, 16, 32, 64;*
5) сравнить полученные решения с аналитическим решением;
6) составить процедуру для приближенного решения дифференциального уравнения заданным методом;
7) найти численное решение заданным методом для *n=4, 8, 16, 32, 64;*
8) сравнить полученные решения с аналитическим решением;
9) попарно сравнить между собой численные решения, полученные методом Эйлера и заданным методом при *n=4, 8, 16, 32, 64;*
10) сделать вывод о точности численных методов.

3. Варианты заданий.

№ п/п	Дифференциальное уравнение	Численный метод
1	$y' = -y + 3\sin t - 2\cos t,\ y(0) = -1,\ [a,b]=[0,3\pi]$	Рунге-Кутта(предиктор-корректор)
2	$y' == -2y + 2\sin t,\ y(0) = 2,\ [a,b]=[0,3\pi]$	Рунге-Кутта(усов. метод Эйлера)
3	$y' == -2y + t + 2\sin t - \cos t,\ y(0) = 2,\ [a,b]=[0,3\pi]$	Рунге-Кутта
4	$y' == -2y + t - t^2 - 6\cos t,\ y(-1) = 1,\ [a,b]=[-1,4]$	Адамса, *m=1*
5	$-y' == y + 1 - \sin t + \cos t,\ y(-5) = 0,\ [a,b]=[-5,5]$	Адамса, *m=2*
6	$-2y' == y + t + \sin t + \cos t,\ y(-3) = 0,\ [a,b]=[-3,7]$	Адамса, *m=3*
7	$y' == -2y - t^2 + 4\sin t - 9\cos t,\ y(0) = -2,\ [a,b]=[0,4]$	Рунге-Кутта(предиктор-корректор)
8	$y' = -y - 1 + 6\sin,\ y(-2) = -1,\ [a,b]=[-2,8]$	Рунге-Кутта(усов. метод Эйлера)
9	$y'[t] == -y[t] - 3 + 2t - 4\sin[t] - \cos[t],\ y[-3] == -1$ $[a,b]=[-3,7]$	Рунге-Кутта

10	$y'[t]==-2y[t]+t+3\sin[t]-2\cos[t],\ y[1]==3$ $[a,b]=[1,7]$	Адамса, $m=1$
11	$y'[t]==-2y[t]-5t+\sin[t]+3\cos[t],\ y[-3]==-1$ $[a,b]=[-3,4]$	Адамса, $m=2$
12	$y'[t]==-3y[t]-1-\sin[2t]+\cos[t],\ y[-2]==1$ $[a,b]=[-2,3]$	Адамса, $m=3$
13	$y'[t]==y[t]+1-2\sin[t]-10\cos[3t],\ y[0]==1$ $[a,b]=[0,3]$	Рунге-Кутта(предиктор-корректор)
14	$y'[t]==-2y[t]-2+\sin[2t]-5\cos[2t],\ y[3]==-2$ $[a,b]=[3,7]$	Рунге-Кутта(усов. метод Эйлера)
15	$y'[t]==-3y[t]+7\sin[t]-\cos[t],\ y[-2]==-2$ $[a,b]=[-2,5]$	Рунге-Кутта
16	$y'[t]==-y[t]+t-2t\ \hat{}\ 2-\cos[2t],\ y[-5]==1$ $[a,b]=[-5,5]$	Адамса, $m=1$
17	$y'[t]==y[t]-t-7\sin[2t]-\cos[3t],\ y[-1]==-2.6$ $[a,b]=[-1,4]$	Адамса, $m=2$
18	$y'[t]==-2y[t]+2-3t+2t\ \hat{}\ 2,\ y[0]==-2$ $[a,b]=[0,4]$	Адамса, $m=3$
19	$y'[t]==-2y[t]+2-t\ \hat{}\ 2+5\sin[t],\ y[-2]==-2$ $[a,b]=[-2,4]$	Рунге-Кутта (предиктор-корректор)
20	$y'[t]==-y[t]+t-e^{-2t}+2\cos[t],\ y[0]==1$ $[a,b]=[0,5]$	Рунге-Кутта (усов. метод Эйлера)

4. Требования к отчету.

Отчет выполняется на стандартных листах А4 и должен содержать:

1. Постановку задачи с указанием своего варианта.
2. Краткие теоретические сведения, относящиеся к варианту задания.
3. Распечатку работы, выполненной в системе Mathematica.

5. Пример выполнения близкой по содержанию работы.

Аналитическое решение

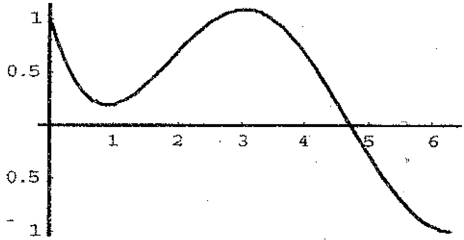
```
Sol1 = DSolve[{y'[t] == -y[t] + sin[t] - cos[t], y[0] == 1}, y[t], t]
```

$$\{\{y[t]\to -e^{-t}(-2+e^{t}\cos[t])\}\}$$

```
F[t_] = y[t] /.Sol1
```

$$\{-e^{-t}(-2+e^{t}\cos[t])\}$$

```
Plot[F[x], {x, 0, 2Pi}]
```



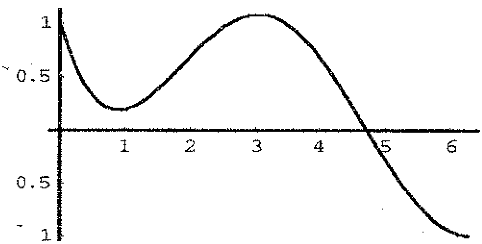
Численное решение

Sol2 = NDSolve[{y'[t] == -y[t] + sin[t] - cos[t], y[0] == 1}, y, {t, 0, 2Pi}]

{{*y* → *InterpolatingFunction*[{{0.,6.28319}}, <>]}}

F0[t_] := Evaluate[y[t] /.Sol2]

Plot[F0[t], {t, 0, 2Pi}]



Решение методом Эйлера

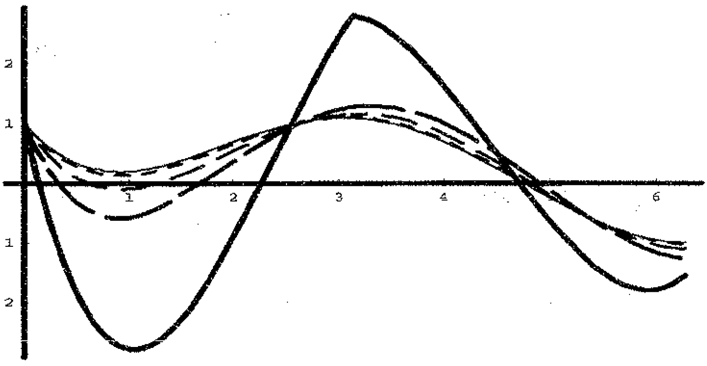
```
Fxy[x_,y_]:= -y + sin[x] - cos[x]

Euler1[a_,b_,h_,ya_]:= Block{T,L,x,y},
x = a;
y = ya;
T = { };
While[x ≤ b,
L = Append[T, {x,y}];
y = y + h * Fxy[x,y];
x = x + h;
T = L
];
Interpolation[T]
]

F4 = Euler1[0, N[2Pi] + 0.1, N[Pi / 2], 1]
```

InterpolatingFunction[{{0.,6.28319}}, <>]

```
F8 = Euler1[0, N[2Pi] + 0.1, N[Pi / 4], 1]

  InterpolatingFunction[{{0.,6.28319}}, <>]

F16 = Euler1[0, N[2Pi] + 0.1, N[Pi / 8], 1]

  InterpolatingFunction[{{0.,6.28319}}, <>]

F64 = Euler1[0, N[2Pi] + 0.1, N[Pi / 32], 1]

  InterpolatingFunction[{{0.,6.38136}}, <>]
```

Графическое сравнение полученных решений

```
Plot[{F0[t], F64[t], F16[t], F8[t], F4[t]}, {t, 0, 2Pi},
 PlotStyle -> {Thickness[0.005], {Thickness[0.006], Dasing[{0.02, 0.02}]},
{Thickness[0.007], Dasing[{0.05, 0.025}]},
{Thickness[0.008], Dasing[{0.1, 0.02}]},
Thickness[0.1]}, AxesStyle -> Thickness[0.01], TextStyle -> {FontSize -> 12}]
```



5. Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Сформулируйте постановку задачи, рассматриваемой в настоящей работе.
2. Что такое задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го (n-го) порядка?
3. Запишите расчетные формулы, используемые в методе:
   а) Эйлера;
   б) Рунге-Кутта 2-го порядка (предиктор-корректор);
   в) Рунге-Кутта 2-го порядка (усовершенствованный метод Эйлера);
   г) Рунге-Кутта 4-го порядка;
   д) Адамса.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

Численное решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

<u>Цель работы:</u> Изучение метода шагов для решения обычных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

<u>Постановка задачи</u>. Для заданного варианта дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом найти численное решение и построить его график.

1. <u>Теоретические сведения.</u>

Простейшее дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом имеет вид:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), y(t-h)),\ t \in [a,b]; \quad y(t) = \varphi(t),\ t \in [a-h,a]. \qquad (1)$$

Здесь h – шаг запаздывания; $\varphi(t)$ – заданная функция. Требуется найти решение $y(t)$ на заданном отрезке $[a,b]$, b-a>h. Исследование подобных уравнений аналитическими методами требует очень сложного математического аппарата. Численное решение находится методом шагов. Суть метода шагов состоит в следующем.

Шаг 1. Рассматриваем отрезок $[a;\ a+h]$. На этом отрезке $y(t-h)=\varphi(t)$ и задача (1) превращается в обычную задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), \varphi(t-h)),\ t \in [a, a+h]; \quad y(a) = \varphi(a). \qquad (2)$$

Для ее решения можно использовать любой численный метод.

Пусть $y(t)=\varphi_1(t)$, $t \in [a;a+h]$, - решение задачи (2)

Шаг 2. Рассматриваем отрезок $[a+h;\ a+2h]$. На этом отрезке $y(t-h)=\varphi 1(t)$ и задача (1) сводится к задаче Коши:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), \varphi_1(t-h)),\ t \in [a+h, a+2h]; \quad y(a+h) = \varphi_1(a+h). \ (3)$$

Пусть $y(t)=\varphi 2(t)$, $t \in [a+h;a+2h]$, - решение задачи (3).

Аналогичным образом строятся вычисления на шагах 3, 4 и т.д.

Вычисления заканчиваются на некотором шаге k, на котором конец исходного отрезка $b \in [a+(k-1)h, a+kh]$. На этом шаге задача Коши решается на отрезке $[a+(k-1)h, b]$.

2. <u>Порядок выполнения работы</u>

1) последовательно выполнить в системе Mathematica шаги 1,2, и т.д. используя для решения задачи Коши функцию **NDSolve**;
2) для каждого шага дать графическую интерпретацию;
3) построить график всего решения задачи (1).

3. Варианты заданий.

№ п/п	Задача
1	$y' = \sin y(t) + \cos y(t-2) + \dfrac{1}{t+3}; \quad y(t) = \sqrt{t^2+1}, t \in [-2,0]; \quad [a;b] = [0,9]$
2	$y' = -0.1y(t) + \sqrt{1+y^2(t-3)} + \dfrac{5\cos t}{2\sin t + 3}; \quad y(t) = e^{-t}, t \in [0,3]; \quad [a;b] = [3,10]$
3	$y' = \ln(2+0.1y^2(t)) + \dfrac{3}{y^4(t-1)+0.1} + 7\cos t; \quad y(t) = t, t \in [-3,-2]; \quad [a;b] = [-2,3.5]$
4	$y' = 3\sin(y(t)+\cos t) + y(t-2) + \dfrac{1}{t^2+2}; \quad y(t) = t^2/2, t \in [-2,0]; \quad [a;b] = [0,11]$
5	$y' = y(t) + e^{\cos y(t-1)} - \ln(1+t^2); \quad y(t) = \sqrt{t+3}, t \in [-2,-1]; \quad [a;b] = [-1,5.2]$
6	$y' = -6\sin(y(t)-3) + y^2(t-4) - \dfrac{t^2}{t+5}; \quad y(t) = \sqrt{t}, t \in [0,4]; \quad [a;b] = [4,18]$
7	$y' = \dfrac{y(t)}{y^2(t)+0.1}\sin y(t) + y(t-2) + \cos(t-1); \quad y(t) = 0, \quad t \in [-5,-3]; \quad [a;b] = [-3,6]$
8	$y' = 2\sin(4.1-y(t)) - 3\cos(y(t-1)+2) + 0.15\sqrt[4]{1.3+t^2}; y(t) = \sin t, t \in [0,1]; [a;b] = [1,6.3]$
9	$y' = y(t-3)\sqrt{2.1+\sin y(t)+\cos y(t)} + \sqrt{3+t}; y(t) = \sin t, t \in [-5,-2]; [a;b] = [-2,11]$
10	$y' = \sin(1+\ln(y^2(t)+1)) - \cos y(t-2) + \dfrac{1.3}{e^t+3}; y(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}, t \in [-2,0]; \quad [a;b] = [0,8.7]$
11	$y' = 2y(t) + e^{\sin y(t-1)} - \sqrt{(1+t^2)}; \quad y(t) = t+3, t \in [-2,-1]; \quad [a;b] = [-1,5.2]$
12	$y' = \cos y(t) + \cos y^2(t-2) + \dfrac{t+1}{t+10}; \quad y(t) = \sqrt{t+3}, t \in [-2,0]; \quad [a;b] = [0,9]$
13	$y' = y^2(t-3)(0.1+\cos(1+y(t))) + \ln(3+t); y(t) = \sqrt{\cos t + 1.1}, t \in [-5,-2]; [a;b] = [-2,11]$
14	$y' = \sin(1+\ln(y^2(t)+1)) - \cos y(t-2) + e^{-t}; y(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+3}}, t \in [-2,0]; \quad [a;b] = [0,8.7]$
15	$y' = 3\sin^2(y(t)+\mathrm{arctg}\, t) + y(t-2) + \dfrac{t}{t^2+2}; \quad y(t) = t^3/8, t \in [-2,0]; \quad [a;b] = [0,11]$
16	$y' = -y(t) + \dfrac{1+y^2(t-3)}{100} + \dfrac{3\sin t}{2\cos t + 3}; \quad y(t) = 2e^{-t}, t \in [0,3]; \quad [a;b] = [3,10]$
17	$y' = -5\cos(y(t)-t) + y^2(t-4) - \dfrac{t^2}{t+1}; \quad y(t) = \sqrt{t+1}, t \in [0,4]; \quad [a;b] = [4,18]$
18	$y' = \dfrac{\cos y(t)\sin y(t)}{y^2(t)+0.1} + y(t-2) + \cos(t-1); \quad y(t) = t+3, \quad t \in [-5,-3]; \quad [a;b] = [-3,6]$
19	$y' = \cos[y(t)] + \sin^2 y(t-2) + 0{,}1\sqrt{t+3}; \quad y(t) = \dfrac{1}{t^2+1}, t \in [-1,1]; \quad [a;b] = [1,10]$
20	$y' = \ln(y^2(t)+1) - \cos^3 y(t-3) + \sin(e^{t/5}+3); y(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt{t+4}}, t \in [-3,0]; \quad [a;b] = [0,10]$

4. Требования к отчету.

Отчет выполняется на стандартных листах А4 и должен содержать:

1. Постановку задачи с указанием своего варианта.
2. Распечатку работы, выполненной в системе Mathematica.

5. Пример выполнения близкой по содержанию работы.

Пусть

$$y' = sin(y(t) + y(t-\pi)); \quad y(t) = t^2, t \in [-\pi, 0]; \quad [a;b] = [0,3\pi].$$

Шаг 1

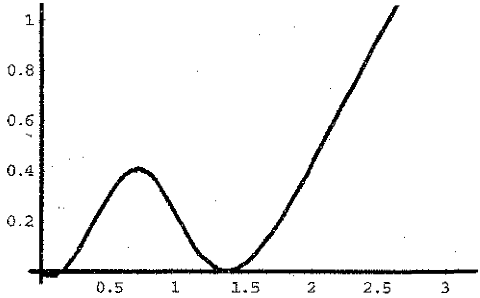
```
Sol1 = NDSolve[{y'[t] == sin[y[t] + (t - Pi)^2], y[0] == 0}, y, {t, 0, Pi}]
```

{{y → InterpolatingFunction[{{0., 3.14159}}, <>]}}

```
F1[t_] = (y /.First[Sol1])(t)
```

InterpolatingFunction[{{0., 3.14159}}, <>][t]

```
Plot[F1[t], {t, 0, Pi}]
```



Комментарий к шагу 1. Из выражения $y(t-\pi)$ следует, что шаг запаздывания в нашем случае равен π. Поэтому на шаге 1 рассматривается отрезок $[0; \pi]$. На этом отрезке, как отмечалось выше, $y(t-h)=\varphi(t)$ и задача (1) превращается в обычную задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), \varphi(t-h)), t \in [a, a+h]; \quad y(a) = \varphi(a).$$

В нашем случае $y(t)=t^2$. Следовательно $y(t-\pi)=(t-\pi)^2$. Дифференциальное уравнение принимает вид

$$y' = sin(y(t) + (t-\pi)^2).$$

Начальное условие находится из соотношения $y(a)=\varphi(a)$.

Так как $\varphi(t)=t^2$, $a=0$, то $y(a)= y(0)=0^2=0$.

Таким образом, на первом шаге решаем задачу Коши

$$y' = sin(y(t) + (t-\pi)^2), y(0) = 0, t \in [0, \pi).$$

Шаг 2

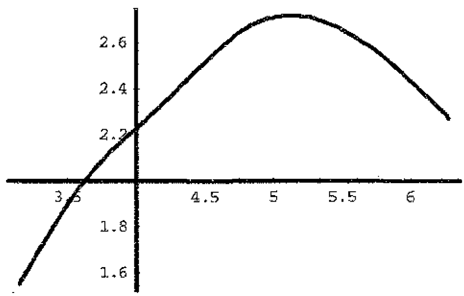
Sol2 = NDSolve[{y'[t] == sin[y[t] + F1[t − Pi]], y[Pi] == F1[Pi]}, y, {t, Pi, 2Pi}]

{{*y* → *InterpolatingFunction*[{{3.14159, 6.28319}}, <>]}}

F2[t_] = (y /.First[Sol2])[t]

InterpolatingFunction[{{3.14159, 6.28319}}, <>][*t*]

Plot[F2[t], {t, Pi, 2Pi}]



Шаг 3

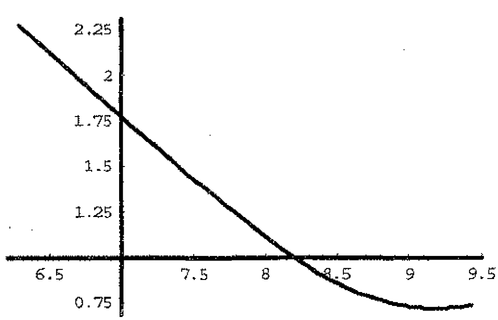
Sol3 = NDSolve[{y'[t] == sin[y[t] + F2[t − Pi]], y[2Pi] == F2[2Pi]}, y, {t, 2Pi, 3Pi}]

{{*y* → *InterpolatingFunction*[{{6.28319, 9.42478}}, <>]}}

F3[t_] = (y /.First[Sol3])[t]

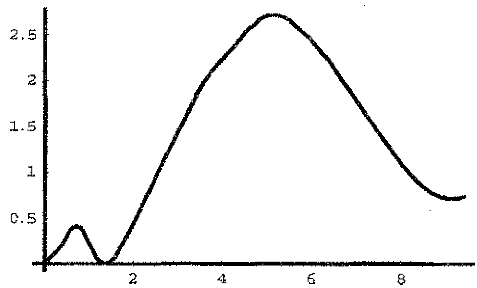
InterpolatingFunction[{{6.28319, 9.42478}}, <>][*t*]

Plot[F3[t], {t, 2Pi, 3Pi}]



Построение объединенного графика

```
F14[14_]:=Block[{v},
v=0;
v=If[t≥0 && t<Pi,F1[t],v];
v=If[t≥Pi && t<2Pi,F2[t],v];
v=If[t≥2Pi && t<3Pi,F3[t],v];
v
]

Plot[F14[t],{t,0,3Pi}]
```



6. Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Сформулируйте задачу отыскания решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.
2. В чем суть метода эталов для отыскания решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом?
3. Что такое задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го (*n*-го) порядка?
4. Составьте задачу Коши, которая решается на 1-ом этапе, если исходная задача имеет вид:

а) $$y' = 2y(t) + \sin y(t) - \sqrt{y(t-2)}; \quad [a;b] = [-1,8]; \qquad y(t) = (t+3)^2, \quad t \in [-3,-1];$$

б) $$y' = y(t) - y^2(t) - \ln y(t-3); \quad [a;b] = [0,10]; \qquad y(t) = e^{(t+4)^2}, \quad t \in [-3,0];$$

в) $$y' = 2y(t) + \ln(y^2(t)+1) - \frac{1}{\sqrt[3]{y(t-1)}}; \quad [a;b] = [1;8,5]; \qquad y(t) = \frac{8}{(t+1)^3}, \quad t \in [0,1];$$

5. Как работает используемая в работе функция IF?
6. Объясните, как работает процедура, используемая при построении объединенного графика?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N5

Метод прогонки для решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

__Цель работы:__ изучение метода прогонки для решения краевой задачи на примере обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

__Постановка задачи__. Для заданного варианта краевой задачи найти численное решение и построить его график.

1. Теоретические сведения.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$y'' + q(t)y = f(t),\ t \in [a,b]; \quad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta. \tag{1}$$

Здесь $q(t)$, $f(t)$ – заданные непрерывные функции, a, b, α, β - известные числа.
Перейдем от непрерывной задачи (1) к дискретной на сетке узлов

$$x_i = a + ih,\ \ 0 \le i \le m,\ \ h = (b-a)/m,$$

заменив

$$y'' \approx \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2}.$$

Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha; \\ y_{i+1} + (-2 + h^2 q_i) y_i + y_{i-1} = h^2 f_i, \quad 1 \le i \le m-1; \\ y_m = \beta. \end{cases} \tag{2}$$

где $y_i \approx y(x_i)$, $\quad q_i = q(x_i)$, $\quad f_i = f(x_i)$. Систему (2) можно записать в матричном виде

$$Ay = b, \tag{3}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2+h^2q_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2+h^2q_2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2+h^2q_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

трехдиагональная матрица,

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ \ldots \\ h^2 f_{m-1} \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Для решения системы (3) можно использовать обычные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Однако в силу специального (трехдиагонального) вида матрицы их применение не всегда оправдано.

Гораздо более эффективным является метод прогонки. Он позволяет найти решение системы (3) по формулам:

$$y_m = \beta, \quad y_i = E_{i+1} y_{i+1} + D_{i+1}, \quad i = m-1, \dots, 2, 1, 0, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} &E_1 = 0, && D_1 = \alpha; \\ &E_{i+1} = \frac{1}{2 - h^2 q_i - E_i}, && D_{i+1} = \frac{D_i - h^2 f_i}{2 - h^2 q_i - E_i}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1 \end{aligned} \tag{5}$$

Сначала по формулам (5) находятся коэффициенты E_i, D_i, $i=1,2, \dots, m$. Этот процесс называется прямым ходом метода прогонки. Затем по формулам (4) находится решение системы (3) – в этом суть обратного хода метода прогонки.

В системе Mathematica метод прогонки может быть реализован с помощью следующей процедуры:

```
Progonka[a_, b_, n_, ya_, yb_] := Block[{h, h2, Ei, Di, v, Ei1, Di1, T, L, x, y, XY,i},
*
*  a – начало отрезка
*  b – конец отрезка
*  n – количество отрезков в разбиении
*  ya – граничное значение в точке a
*  yb – граничное значение в точке b
* -----------------------------------------------------------------
*  Подготовительные операции
*
h = (b - a)/n;
h2 = h * h;
x = a;
*
*  Заносим в список E1 и D1
*
Ei = 0; Di = ya;
T = {{Ei, Di}};
*
*  Выполняем прямой ход метода прогонки – рассчитываем и заносим в список
*  остальные коэффициенты Ei, Di, i=2,3,  ,m
*

x = x + h;
While[x ≤ b - h/2,
  v = N[2 - h2 * Q[x] - Ei];
  Ei1 = 1/v;
```

```
  Di1 = (Di - h2*F[x]) / v;
L = Append[T, {Ei1, Di1}];
T = L;
x = x + h;
Ei = Ei1; Di = Di1;
];
*
* Обратный ход метода прогонки – формируем список, содержащий координаты
* решения
*
y = yb;
XY = {{x,y}};
i = n - 1;
While[i ≥ 0,
  y = T[[i+1, ]]*y + T[[i+1,2]];
x = x - h;
L = Append[XY, {x,y}];
XY = L;
i = i - 1;
];
*
* Интерполируем решение
*
Interpolation[XY]
]
```

2. Порядок выполнения работы.

2.1. В системе Mathematica

1) Решить заданную краевую задачу и построить график ее решения с помощью функции **NDSolve**.
2) Найти решение задачи с помощью процедуры Progonka для ***m=8,16,32,64,128***;
3) Построить графики всех найденных решений на одном координатном поле;
4) Последовательно сравнить графики, полученные с помощью процедуры Progonka с графиком решения, найденного по **NDSolve**.

2.2. В системе EXCEL

1) Для ***m=8,16*** решить систему (3)
   а) методом обратной матрицы.
   б) методом прогонки.
2) Сравнить графически решения, полученные различными методами при разных ***m***.

3. Варианты заданий.

№ п/п	Задача				
	$q(t)$	$f(t)$	$[a,b]$	α	β
1	$-(4\sin t)^2$	$t/(t^2+1)$	[0,2Pi]	0	1
2	$-6\sqrt{1.1+\sin t}$	$t^2+7\cos(4t+1)$	[1;5]	1	-1
3	$-e^{2\sin(3t-1)}$	$\dfrac{t^2-3t+1}{t^2+t+1}6\sin(2t+1)$	[1;10]	0.5	0
4	$\dfrac{-t-1}{4+3.9\sin t}$	$\sqrt{2t^2+1}\cos 3t$	[2;7]	3	-1
5	$-5.7\sqrt{1.1+\ln(2+\cos t)}$	$t^2+7t\sin(2-4t)$	[-1;5]	-2	2
6	$-\dfrac{5\sqrt{2.1+\cos t}+\sin t}{t^2-2t+1.05}$	t^2+t-e^{-t}	[-1;4]	1	1
7	$-2+\sin 3t$	$-2t^2+7arctg(t+1)$	[-1;7]	0	3
8	$-(t^2/5+\sqrt{1+t^2})$	$3\sin t^2+14\cos(2t+1)$	[-1;6]	2	3
9	$-2\sqrt{1.1+\sqrt{1.1+\cos t}}$	$\dfrac{8t^2}{t^2+2t+3}\sin(t^2+1)$	[1;5]	1	3
10	$-\cos^2 3t\cdot e^{2-\sin(3t-1)}$	$\sqrt{t^2+1}+5\cos(3t-1)$	[0;4]	1	3
11	$-(2.1+\sin t+\cos t)$	$\ln(1+t^2)\cos(2t-0.51)$	[1;6]	2	1
12	$-2^{\sin(2x-0.34)}$	$\dfrac{t}{\ln(t^2-2t+4.51)}arctg(2t^2+1)$	[-1,5]	-2	4
13	$-(2+\sin 2t)\cdot e^{\cos(2t-1)}$	$\sqrt{t^2+t+2}+3\cos(2t+1)$	[-1;4]	0	2
14	$-\dfrac{5\sqrt{6.1+2\cos t}+\cos t}{\sqrt{t^2-2t+2.05}}$	$t^2+\ln(t+2)$	[1;4]	0	1
15	$-6\cos^2\sqrt{1.2+\sin 2t}$	$1+t^2+7\sin(3t+1)$	[0;6]	-1	3
16	$-\sqrt{1+\sin t\cos t}$	$\ln(1+t^2)\sin(3t-1)$	[0;5]	-2	4
17	$-(2+4\sin 3t)^2$	$(t+\cos t)/(t^2+1)$	[0,Pi]	1	0
18	$-((t+2)/5+\sin\sqrt{1+t^2})$	$3\cos(t^2+0.15)+11\sin(t/2+1)$	[1;7]	3	-1
19	$-\sqrt{7.3+2\sin t-3\cos t}$	$\log_2(0.54+t^2)-3\cos(t-1.21)$	[0;5]	2	1
20	$-\cos^2 t-e^{1-arctg(3t-1)}$	$\sqrt{0.25t^2+0.47}-2.87\sin 2t$	[1;4]	0	0

4. Требования к отчету.

Отчет выполняется на стандартных листах А4 и должен содержать:

1. Постановку задачи с указанием своего варианта.
2. Распечатку работы, выполненной в системе Mathematica.
3. Распечатку работы, выполненной в системе Excel.

5. Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Сформулируйте задачу, рассматриваемую в лабораторной работе.
2. Какое соотношение используется для приближенной замены y''.
3. Запишите систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая получается после замены производной.
4. Запишите СЛАУ, которая получается после замены производной, в матричном виде.
5. Запишите формулы, которые используются на прямом ходе метода прогонки.
6. Запишите формулы, которые используются на обратном ходе метода прогонки.
7. Сформулируйте условие устойчивости метода прогонки.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N6

Метод сеток для решения задач математической физики (на примере уравнения теплопроводности)

Цель работы: изучение метода сеток для численного решения уравнений с частными производными на примере уравнения теплопроводности.

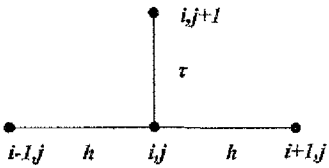
Постановка задачи. Используя метод сеток, найти решение для заданного варианта задачи теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x < b, \quad 0 \le t \le T \quad \text{при} \quad a > 0; \qquad (1)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(b,t) = \psi_2(t).$$

1. Теоретические сведения.

Введем в области $G(x,t)=[0,b]\times[0,T]$ прямоугольную сетку с узлами (x_i,t_j), $x_i=ih$, $i=0,1,\ldots,n$, $t_j=j\tau$, $j=0,1,\ldots,m$; h – шаг по направлению x, τ - шаг по направлению t. Заменяя производные в (1) конечно-разностными приближенными соотношениями, от непрерывной задачи (1) переходят к конечно разностной задаче (схеме), которая представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Для задачи теплопроводности возможны две различные схемы метода сеток.

1. Первая схема основана на шаблоне



и имеет вид:

$$u_i^{j+1} = \lambda u_{i+1}^j + (1-2\lambda)u_i^j + \lambda u_{i-1}^j, \quad i=\overline{1,n-1}, \quad j=\overline{0,m-1}; \qquad (2.1)$$
$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i=\overline{0,n}; \qquad (2.2)$$

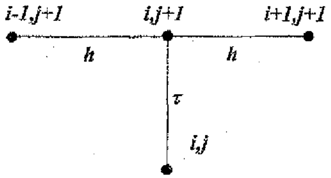
$$u_0^j = \psi_1(t_j), \quad u_n^j = \psi_2(t_j), \quad j = \overline{0,m}. \tag{2.3}$$

Здесь $u_i^j \approx u(x_i, t_j)$ - приближенное решение в узле *(i,j)*, $\lambda = a\tau/h^2$.

Разностная схема (2.1)-(2.3) – явная двухслойная схема. Для вычисления значений в *(j+1)*-ом слое необходимы значения только в j-ом слое, что позволяет находить внутренние значения *(j+1)*-го слоя непосредственно по формуле в (2.1). Значения на краях *(j+1)*-го слоя находятся по формуле (2.3). Для начала вычислений необходимы значения в нулевом слое. Они находятся в соответствии с (2.2).

Разностная схема (2.1)-(2.3) условно устойчива. Для обеспечения ее устойчивости должно выполняться условие $\lambda \le 0.5$.

2. В основе второй схемы лежит шаблон:



Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$-\lambda u_{i-1}^{j+1} + (1+2\lambda)u_i^{j+1} - \lambda u_{i+1}^{j+1} = u_i^j, \quad i = \overline{1,n-1}, \quad j = \overline{0,m-1}; \tag{3.1}$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0,n}; \tag{3.2}$$

$$u_0^j = \psi_1(t_j), \quad u_n^j = \psi_2(t_j), \quad j = \overline{0,m}. \tag{3.3}$$

Принципиальное отличие схемы (3.1)-(3.3) от (2.1)-(2.3) в том, что она неявная. Хотя вычисления по-прежнему ведутся по слоям, на каждом новом слое необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &-\lambda u_{i-1}^{j+1} + (1+2\lambda)u_i^{j+1} - \lambda u_{i+1}^{j+1} = u_i^j, \quad i = \overline{1,n-1}; \\ &u_0^{j+1} = \psi_1(t_{j+1}), \quad u_n^{j+1} = \psi_2(t_{j+1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Запишем систему (4) в матричном виде

$$Ay = b. \tag{5}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

трехдиагональная матрица,

$$y = \begin{pmatrix} u_0^{j+1} \\ u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \dots \\ u_{n-1}^{j+1} \\ u_n^{j+1} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \psi_1(t_{j+1}) \\ u_1^j \\ u_2^j \\ \dots \\ u_{n-1}^j \\ \psi_2(t_{j+1}) \end{pmatrix}.$$

Для решения системы (5) используют известные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (в т.ч. метод прогонки).

Разностная схема (3.1)-(3.3) абсолютно устойчива, т.е. она устойчива при любом соотношении h и τ.

2. Порядок выполнения работы.

2.1. В системе Mathematica

1) Используя функцию **NDSolve**, решить заданную задачу и построить ее 3-хмерный график.
2) С помощью электронных таблиц Excel реализовать явную схему метода сеток (2.1)-(2.3) при ***n*=5** (число *m* подобрать из условия устойчивости). Решение, полученное на последнем слое, перенести в систему Matematica и сравнить графически с решением, полученным с помощью функции **NDsolve**, при *t*=*T*.
3) Повторить п.2) для ***n*=10**;
4) С помощью электронных таблиц Excel реализовать неявную схему метода сеток (3.1)-(3.3) при ***n*=5** и ***m*=10**. Решение, полученное на последнем слое, перенести в систему Matematica и сравнить графически с решением, полученным с помощью функции **NDsolve**, при *t*=*T*.
5) На одном координатном поле построить графики отклонений 3-х решений, найденных по методу сеток, от решения, полученного с помощью функции **NDsolve**, при *t*=*T*.

3. Варианты заданий.

№ п/п	Задача					
	a	b	T	$\varphi(x)$	$\psi_1(t)$	$\psi_2(t)$
1	2	0,75	1,5	$x^2\sin(4\pi x/3)$	t^3-t^2+2t	$t\cos t$
2	1	1,5	2	$x(2-x)$	$t+\sin t$	$1{,}75-\cos t$
3	3	2	3	1	$2-\cos t$	$1+t/3$
4	1,5	1,25	2,5	$x(1{,}25-x)\cos x$	$t^3/4+t$	0
5	1	3	1,5	$2-e^{x}$	1	$2-e^{-3}+t\sin t$
6	0,5	2,5	1	$1+x$	$1+t\ln(t+1)$	$3{,}5\cos t$
7	2,3	0,75	2,5	0	$\sqrt{t}$	$3\sin t$
8	0,75	1	4	$1+\sin\pi x$	t^2+t+1	$1-t/5$
9	3,1	2,4	3,5	X	0	$1{,}4+\cos t$
10	2,25	3	2	$1+\cos(\pi x/3)$	$2+\mathrm{arctg}\, t$	x^2
11	0,75	2,1	2,5	$1-x/b$	e^{-t}	$t\sin t$
12	2,11	0,8	2	$x(b-x)$	t^2	$t(1-t)$

Продолжение

13	1,7	1,2	3	$sin(2\pi x/b)$	$t/3$	$-t/3$
14	0,9	1,5	1	$2x/b$	$ln(1+t)$	$cos(2\pi t)$
15	2,56	2,2	2,5	$2^{x/b}$	$cost$	$0,5+t$
16	0,3	0,5	2	$(b-t)^2$	$0,25+sin3t$	$tcost$
17	1,4	1,1	3	$0,5$	$0.5+t^2/18$	$0.5-t^2/18$
18	3,1	1,7	1,75	$1-sin(\pi x/(2b))$	$1-e^{-t}$	$t/(t+1)$
19	2,3	2,3	1,5	$cos(2\pi x/b)$	$cos2t$	1
20	1,8	1,6	3	$2-x(b-x)$	$3-1/(t+1)$	$2-2(sin3t)/t$

4. Требования к отчету.

Отчет выполняется на стандартных листах А4 и должен содержать:

4. Постановку задачи с указанием своего варианта.
5. Распечатку работы, выполненной в системе Mathematica.

5. Пример выполнения работы.

Рассмотрим следующую задачу:

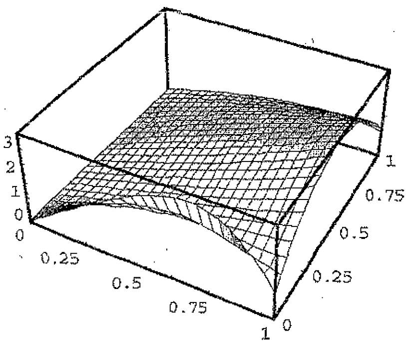
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0\le x<1,\quad 0\le t\le 1;$$

$$u(x,0)=6x-6x^4+x^2,\quad u(0,t)=0,\quad u(b,t)=10\cdot t\cdot(1-t)+1.$$

5.1. Выполнение в системе Mathematica.

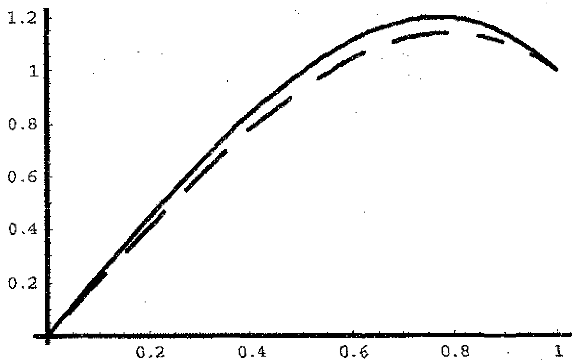
1) Решение краевой задачи с помощью функции NDSolve

```
Sol1=NDSolve[{∂_t u[x,t] == ∂_{x,x} u[x,t], u[x,0] == 6x - 6x^4 + x^2,
  u[0,t] == 0, u[1,t] == 10*t(1-t)+1}, u, {x,0,1}, {t,0,1}]

{{u -> InterpolatingFunction[{{0.,1.},{0.,1.}}, <>]}}

F1 = u/.First[Sol1]

InterpolatingFunction[{{0.,1.},{0.,1.}}, <>]

PLot3D[F1[x,t], {x,0,1}, {t,0,1}]
```



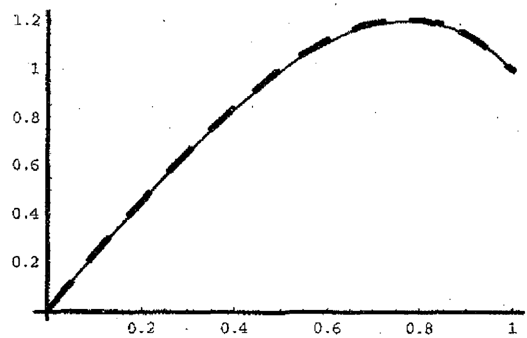
2) Сравнение решения, полученного по неявной разностной схеме при разбиении отрезка по оси X на 3 части, с решением, полученным по **NDSolve**, при t=1

```
t3 = {{0,0}, {0.33333333, 0.66359}, {0.666666666, 1.0989}, {1,1}}
 {{0,0}, {0.333333, 0.66359}, {0.666667, 1.0989}, {1, 1}}
t3i = Interpolation[t3]
 InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>]
Plot[{F1[x,1], t3i[x]}, {x,0,1},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.01]}, {Thickness[0.01],Dashing[{0.1, 0.06}]}}
  AxesStyle -> Thickness[0.01], TextStyle -> {FontSize -> 12}]
```



3) Сравнение решения, полученного по явной разностной схеме при разбиении отрезка по оси **X** на 5 частей, с решением, полученным по **NDSolve**, при t=1

```
t5 = {{0,0}, {0.2, 0.450927146}, {0.4, 0.845839086}, {0.6, 1.122316285},
  {0.8, 1.205168878}, {1,1}}
 {{0,0}, {0.2, 0.450927}, {0.4, 0.845839}, {0.6, 1.12232}, {0.8, 1.20517}, {1,1}}
t5i = Interpolation[t5]
 InterpolatingFunction[{{0.,1.}}, <>]
Plot[{F1[x,1], t5i[x]}, {x,0,1},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.008]}, {Thickness[0.016],Dashing[{0.06, 0.06}]}}
  AxesStyle -> Thickness[0.01], TextStyle -> {FontSize -> 12}]
```



4) Сравнение решения, полученного по явной разностной схеме при разбиении отрезка по оси X на 10 частей, с решением, полученным по **NDSolve**, при ***t=1***.

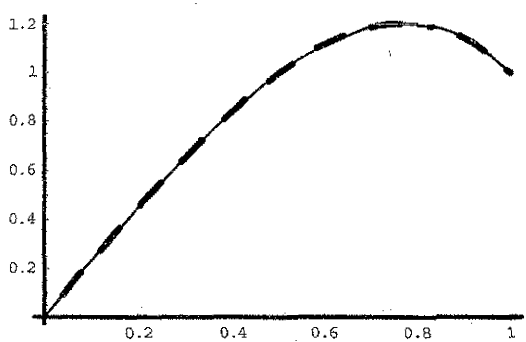
```
t10 = {{0,0}, {0.1, 0.22726}, {0.2, 0.44776}, {0.3, 0.65456},
  {0.4, 0.8403}, {0.5, 0.99702}, {0.6, 1.11598}, {0.7, 1.18742},
  {0.8, 1.2004}, {0.9, 1.142581}, {1.1}}
```

```
{{0,0}, {0.1, 0.22726}, {0.2, 0.44776}, {0.3, 0.65456},
 {0.4, 0.8403}, {0.5, 0.99702}, {0.6, 1.11598},
 {0.7, 1.18742}, {0.8, 1.2004}, {0.9, 14258}, {1,1}}
```

```
t10i = Interpolation[t10]
```

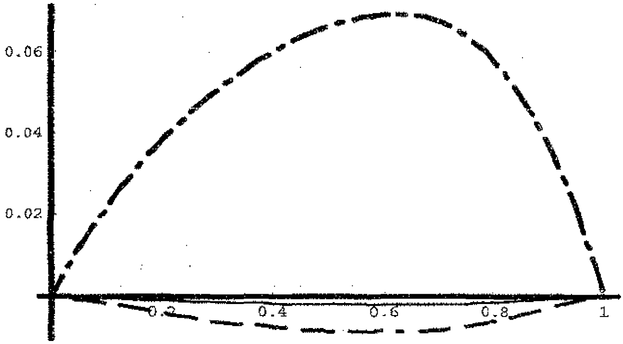
```
InterpolatingFunction[{{0.,1.}}, <>]
```

```
Plot[{F1[x,1], t10i[x]}, {x,0,1},
 Plotstyle -> {{RGBColor[1,0,0]},
   {RGBColor[0,0,1], Dashing[{0.04, 0.01}]}}]
```



5)Графики отклонений.

```
Plot[{F1[x,1] - t10i[x], F1[x,1] - t5i[x],
  F1[x,1] - t3i[x]}, {x,0,1},
PlotStyle -> {{RGBColor[1,0,0]},
    {RGBColor[0,0,1], Dashing[{0.04, 0.01}]},
    {RGBColor[0,1,0], Dashing[{0.04, 0.01, 0.01}]}}]
```



–Graphics–

5.2. Фрагмент решения задачи в Excel с помощью явной схемы при n=5.

		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x \ t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
t_0	0	0	1,2304	2,4064	3,1824	2,9824	1
t_1	0,02	0	1,2032	2,2064	2,6944	2,0912	1,196
t_2	0,04	0	1,1032	1,9488	2,1488	1,9452	1,384
t_3	0,06	0	0,9744	1,626	1,947	1,7664	1,564
t_4	0,08	0	0,813	1,4607	1,6962	1,7555	1,736
t_5	0,1	0	0,73035	1,2546	1,6081	1,7161	1,9
t_6	0,12	0	0,6273	1,169225	1,48535	1,75405	2,056
t_7	0,14	0	0,584613	1,056325	1,461638	1,770675	2,204
t_8	0,16	0	0,528163	1,023125	1,4135	1,832819	2,344
t_9	0,18	0	0,511563	0,970831	1,427972	1,87875	2,476
t_{10}	0,2	0	0,485416	0,969767	1,424791	1,951986	2,6
t_{11}	0,22	0	0,484884	0,955103	1,460877	2,012395	2,716
t_{12}	0,24	0	0,477552	0,97288	1,483749	2,088438	2,824
t_{13}	0,26	0	0,48644	0,98065	1,530659	2,153875	2,924
t_{14}	0,28	0	0,490325	1,00855	1,567263	2,22733	3,016

5.3. Решение задачи в Excel с помощью неявной схемы при *n=3, m=10*

Подготовительные работы

h=0,333333 τ=0,1 λ=0,9

A=

1	0	0	0
-0,9	2,8	-0,9	0
0	-0,9	2,8	-0,9
0	0	0	1

A^{-1}=

1	0	0	0
0,358464	0,398293	0,128023	0,11522
0,11522	0,128023	0,398293	0,358464
0	0	0	1

Основная таблица

x \ t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,3333	2,0371	1,4475	1,1629	1,0776	1,0847	1,1141	1,1249	1,0947	1,0117	0,8691	0,6636
0,6667	3,2593	2,2400	2,0095	2,0605	2,1774	2,2607	2,2618	2,1561	1,9309	1,5797	1,0989
1	1	1,9	2,6	3,1	3,4	3,5	3,4	3,1	2,6	1,9	1

Вспомогательная таблица: служит для того, чтобы соединить решение во внутренних точках на предыдущем слое с краевыми условиями текущего слоя

t \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,3333		2,0371	1,4475	1,1629	1,0776	1,0847	1,1141	1,1249	1,0947	1,0117	0,8691
0,6667		3,2593	2,2400	2,0095	2,0605	2,1774	2,2607	2,2618	2,1561	1,9309	1,5797
1	1	1,9	2,6	3,1	3,4	3,5	3,4	3,1	2,6	1,9	1

6. <u>Вопросы к защите лабораторной работы.</u>

1. Дайте математическую постановку смешанной задачи теплопроводности в однородном стержне.
2. Как строится сетка в области решения?
3. Какие математические соотношения используются для приближенной замены производных?
4. В чем суть явной схемы? Запишите расчетные формулы.
5. Что такое неявная схема? Приведите расчетные формулы.
6. Какая система линейных уравнений возникает при использовании неявной схемы? Запишите матрицу ***A***, вектор ***b***.
7. Объясните, как реализовать явную схему в Excel.
8. Каковы особенности реализации неявной схемы в Excel?
9. Что такое устойчивость разностной схемы? Каковы условия устойчивости для явной (неявной) схемы?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N7

Решение задач линейного программирования

Цель работы: изучение симплекс-метода для решения задач линейного программирования.

Часть I. *Табличный симплекс-метод для решения задач в нормальной форме.*

Постановка задачи. Найти решение заданного варианта задачи линейного программирования в нормальной форме

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to extr(max, min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \end{cases} \qquad (1)$$

а) используя инструмент «Поиск решения» в ЭТ Excel;

б) используя функции **ConstrainedMax(Min)** и **LinearProgramming** системы Matematica;

в) табличным симплекс-методом.

1. Теоретические сведения.

Теоретические сведения для выполнения задания приведены в файле U:\VT&PM\MS_F\MM_ATP\Лабораторные работы\Семестр5\lr71.doc.

2. Варианты заданий.

Вар	Задача	Вар	Задача
1	$2x_1+4x_2-x_3\to max$ $x_1+x_2+x_3\le 30$ $2x_1-x_2\le 10$ $-x_1+2x_2+x_3\le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	2	$-x_1+2x_2-6x_3\to min$ $2x_1+x_2+x_3\le 80$ $-2x_1+x_2+x_3\le 20$ $-x_1+2x_2+x_3\le 30$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
3	$-2x_1+4x_2-x_3\to min$ $x_1+2x_2+x_3\le 60$ $2x_1+x_2-x_3\le 50$ $-x_1+x_2+2x_3\le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	4	$7x_1-x_2+3x_3\to max$ $x_1+x_2+x_3\le 40$ $2x_1-x_3\le 70$ $-x_1+2x_2+x_3\le 20$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
5	$3x_1-2x_2+4x_3\to max$ $2x_1+x_2+x_3\le 50$ $-x_2+x_3\le 60$ $-x_1+2x_2+x_3\le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	6	$-2x_1-4x_2-x_3\to min$ $x_2+x_3\le 70$ $2x_1+x_2+2x_3\le 100$ $-x_1+2x_2+x_3\le 60$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
7	$-x_1+4x_2+x_3\to max$ $x_1+2x_2+x_3\le 90$ $2x_1-x_2+x_3\le 10$ $-x_1+x_2+2x_3\le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	8	$-4x_1+2x_2-3x_3\to min$ $x_1+x_2+2x_3\le 50$ $2x_1+x_2-x_3\le 40$ $x_1+x_3\le 30$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
9	$-5x_1-4x_2-x_3\to min$ $x_2-x_3\le 30$ $x_1+2x_2\le 50$ $x_1-x_2+2x_3\le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	10	$3x_1-2x_2+2x_3\to max$ $x_1+x_2+x_3\le 60$ $x_1-x_2+x_3\le 50$ $2x_1-x_3\le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$

Вар	Задача	Вар	Задача
11	$2x_1+3x_2+5x_3\to max$ $x_1 + x_2 + x_3 \le 70$ $2x_1 + x_2 - x_3 \le 10$ $-x_1 +2x_2 + x_3 \le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	12	$-2x_1 - 4x_2 +x_3\to min$ $2x_1 + x_2 - x_3 \le 30$ $x_1 - x_2 \le 30$ $x_1 + x_2 + x_3 \le 60$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
13	$-x_1 - 3x_2 - 2x_3\to min$ $x_1 +x_2 +2x_3 \le 30$ $2x_1 - x_2 + x_3 \le 20$ $-x_1 +2x_2 - x_3 \le 50$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	14	$3x_1 + 4x_2 - x_3\to max$ $2x_1 +x_2 +x_3 \le 30$ $-x_1 +2x_2 \le 40$ $x_1 + x_2 -2x_3 \le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
15	$5x_1+4x_2-x_3\to max$ $x_1 +x_2 +x_3 \le 30$ $2x_1 -x_2 \le 50$ $-x_1+2x_2+x_3 \le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	16	$x_1 - 2x_2-6x_3\to min$ $2x_1 +x_2 +x_3 \le 80$ $-2x_1 +x_2 +x_3 \le 50$ $x_1 -2x_2+x_3 \le 30$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
17	$-2x_1+4x_2-3x_3\to min$ $x_1+2x_2 +x_3 \le 60$ $2x_1 + x_2 - x_3 \le 50$ $-x_1 +x_2 +2x_3 \le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	18	$2x_1 - x_2+3x_3\to max$ $x_1 + x_2 +x_3 \le 40$ $2x_1 - x_3 \le 70$ $-x_1+2x_2 + x_3 \le 20$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
19	$6x_1 - 2x_2 +4x_3\to max$ $2x_1 + x_2 - x_3 \le 50$ $- x_2 + x_3 \le 60$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 \le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	20	$-2x_1 - 4x_2 -7x_3\to min$ $x_2 + x_3 \le 70$ $2x_1 + x_3 \le 50$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 \le 60$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$

3. Требования к отчету.

Отчет выполняется на стандартных листах А4 и должен содержать:

1. Постановку задачи с указанием своего варианта.
2. Распечатку работы, выполненной в системе EXCEL (рабочий лист и отчет о решении).
3. Распечатку работы, выполненной в системе Mathematica.
4. Решение задачи табличным симплекс-методом.

Часть II. *Двухфазный симплекс-метод для решения задач в канонической форме.*

Постановка задачи. Найти решение заданного варианта задачи линейного программирования в канонической форме

$$c'x \to max(min),\quad \begin{cases} Ax = b, \\ x \ge 0, \end{cases} \tag{1}$$

а) используя инструмент «Поиск решения» в ЭТ Excel;
б) используя функции **ConstrainedMax(Min)** и **LinearProgramming** системы Matematica;
в) двухфазным симплекс-методом.

1. Теоретические сведения.

Теоретические сведения для выполнения задания приведены в файле U:\VT&PM\MS_F\MM_ATP\Лабораторные работы\Семестр5\lr723.doc.

2. Варианты заданий.

Вар	Задача	Вар	Задача
1	$3x_1+4x_2-x_3+x_4\to max$ $x_1+x_2+2x_3+x_4=30$ $2x_1-x_2+2x_4=10$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$	2	$-x_1-2x_2-6x_3+x_4\to min$ $2x_1+x_2+x_3+x_4=80$ $-2x_1+x_2-x_3+2x_4=20$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$
3	$-2x_1+4x_2-x_3-3x_4\to min$ $x_1+2x_2+x_3+x_4=60$ $2x_1-x_2-x_3+x_4=20$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$	4	$7x_1-2x_2+3x_3+x_4\to max$ $=2x_1+x_2+x_3+x_4=40$ $x_1-x_3+2x_4=70$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$
5	$3x_1-2x_2+4x_3+2x_4\to max$ $2x_1+x_2+x_4=50$ $-x_1+2x_2+x_3=40$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$	6	$-2x_1-4x_2-x_3-3x_4\to min$ $2x_1+x_2+2x_3+x_4=100$ $-x_1+2x_2-x_3+x_4=60$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$
7	$-x_1+4x_2+x_3+5x_4\to max$ $x_1+2x_2+x_3+x_4=90$ $2x_1-x_2+x_3+2x_4=10$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$	8	$-4x_1-2x_2-3x_3+x_4\to min$ $x_1+x_2+2x_3+x_4=50$ $x_1+x_3+3x_4=30$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$
9	$-2x_1-x_2-3x_3-x_4\to min$ $x_1+2x_2+x_4=50$ $x_1-x_2+x_3+2x_4=40$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$	10	$3x_1-2x_2+2x_3+7x_4\to max$ $x_1+x_2+x_3+x_4=60$ $2x_1-x_3+3x_4=40$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$
11	$2x_1+3x_2+x_3+3x_4\to max$ $x_1+x_2+x_3=70$ $2x_1+x_2-x_3+x_4=10$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$	12	$-2x_1-4x_2-x_3+x_4\to min$ $2x_1+x_2-x_3+x_4=30$ $x_1-2x_2+2x_4=30$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$
13	$-x_1-3x_2-2x_3+x_4\to min$ $x_1+x_2+2x_3+x_4=30$ $2x_1-x_2+x_3-x_4=20$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$	14	$3x_1+4x_2-x_3+5x_4\to max$ $2x_1+x_2+x_3+2x_4=30$ $-x_1+2x_2+x_4=40$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$
15	$x_1+4x_2-x_3+3x_4\to max$ $x_1+x_2+x_3+2x_4=30$ $2x_1-x_2+x_4=50$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$	16	$x_1-2x_2-6x_3-2x_4\to min$ $2x_1+x_2+2x_3+x_4=80$ $x_1-x_2+x_3+2x_4=30$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$
17	$-2x_1+x_2-3x_3-x_4\to min$ $x_1+2x_2+x_3+2x_4=60$ $-x_1+x_2+2x_3+x_4=40$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$	18	$2x_1-x_2+3x_3+2x_4\to max$ $x_2+x_3+2x_4=40$ $2x_1-x_3+x_4=70$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$
19	$6x_1-2x_2+4x_3+x_4\to max$ $2x_1+x_2-x_3+2x_4=50$ $-x_2+2x_3+x_4=60$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$	20	$-2x_1-4x_2-8x_3+2x_4\to min$ $x_2+x_3+x_4=70$ $2x_1+x_3+2x_4=50$ $x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ x_3\geq0,\ x_4\geq0$

3. Требования к отчету.

Отчет выполняется на стандартных листах А4 и должен содержать:

1. Постановку задачи с указанием своего варианта.
2. Распечатку работы, выполненной в системе EXCEL (рабочий лист и отчет о решении).
3. Распечатку работы, выполненной в системе Mathematica.
4. Решение задачи симплекс-методом.

Часть III. *Двухфазный симплекс-метод для решения задач в общей форме.*

Постановка задачи. Найти решение заданного варианта задачи линейного программирования в нормальной форме

$$c'x \to max(min),$$
$$\begin{cases} Ax \oplus b, \\ x \ge 0, \end{cases} \tag{1}$$

а) используя инструмент «Поиск решения» в ЭТ Excel;

б) используя функции **ConstrainedMax(Min)** и **LinearProgramming** системы Matematica;

в) двухфазным симплекс-методом.

1. Теоретические сведения.

Теоретические сведения для выполнения задания приведены в файле U:\VT&PM\MS_F\MM_ATP\Лабораторные работы\Семестр5\lr723.doc.

2. Варианты заданий.

Вар	Задача	Вар	Задача
1	$3x_1+6x_2-2x_3\to max$ $x_1+x_2+x_3\le 130$ $2x_1-x_2=10$ $-x_1+2x_2+x_3\ge 5$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	2	$x_1-2x_2-5x_3\to min$ $2x_1+x_2+x_3\le 80$ $-x_1+2x_3\ge 25$ $-x_1+x_2+x_3=20$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
3	$-2x_1+4x_2-2x_3\to min$ $x_1+2x_2+x_3\le 60$ $2x_1+x_2-x_3=40$ $x_2+2x_3\ge 6$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	4	$3x_1-x_2+2x_3\to max$ $x_1+x_2+x_3\le 40$ $2x_1-x_3\ge 8$ $-x_1+2x_2+x_3=40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
5	$x_1-2x_2+3x_3\to max$ $x_1+x_2+x_3\le 50$ $-2x_2+x_3\ge 40$ $-x_1+2x_2+x_3=40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	6	$-2x_1-4x_2-x_3\to min$ $x_2+x_3=40$ $2x_1+x_2+2x_3\le 100$ $-x_1+2x_2+x_3\ge 30$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
7	$2x_1+-x_2+x_3\to max$ $x_1+2x_2+x_3\le 90$ $2x_1-x_2+x_3=40$ $-x_1+x_2+2x_3\ge 20$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	8	$-3x_1+x_2-4x_3\to min$ $x_1+x_2+2x_3=80$ $x_1+x_2-x_3\ge 10$ $x_1+x_3\le 50$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
9	$-x_1-5x_2-2x_3\to min$ $x_2-x_3\ge 10$ $x_1+2x_2=70$ $x_1-x_2+2x_3\le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	10	$5x_1-2x_2+3x_3\to max$ $x_1+x_2+x_3\le 70$ $x_1-x_2+2x_3=30$ $2x_1-x_3\ge 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
11	$3x_1+3x_2+2x_3\to max$ $x_1+x_2+x_3\le 70$ $2x_1+x_2-x_3=10$ $-x_1+x_2+2x_3>50$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	12	$-2x_1-4x_2-5x_3\to min$ $x_1+2x_2-x_3\le 80$ $x_1-x_2\ge 5$ $x_1+x_2+x_3=60$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$

Вар	Задача	Вар	Задача
13	$-2x_1 - x_2 - 3x_3 \to min$ $2x_1 + x_2 + x_3 = 80$ $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 30$ $-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$	14	$7x_1 + x_2 - x_3 \to max$ $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 90$ $-x_1 + x_2 = 10$ $x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 5$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$
15	$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to max$ $x_1 + x_2 + 2x_3 = 80$ $2x_1 - x_2 \geq 15$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$	16	$3x_1 - 2x_2 - 7x_3 \to min$ $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$ $-2x_1 + x_2 + x_3 = 10$ $x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 30$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$
17	$-4x_1 + 2x_2 - x_3 \to min$ $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 60$ $2x_1 + x_2 - x_3 \geq 10$ $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 40$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$	18	$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to max$ $x_1 + x_2 + x_3 \leq 70$ $2x_1 - x_3 = 50$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 15$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$
19	$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to max$ $2x_1 + x_2 + x_3 = 70$ $- x_2 + x_3 \leq 30$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$	20	$-2x_1 - x_2 - 5x_3 \to min$ $x_2 + x_3 = 40$ $2x_1 + x_3 \leq 70$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 30$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

3. Требования к отчету.

Отчет выполняется на стандартных листах А4 и должен содержать:

1. Постановку задачи с указанием своего варианта.
2. Распечатку работы, выполненной в системе EXCEL (рабочий лист и отчет о решении).
3. Распечатку работы, выполненной в системе Mathematica.
4. Решение задачи симплекс-методом.

Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Запишите задачу линейного программирования в нормальной форме. В канонической форме.
2. Как перейти от задачи в номальной форме к задаче в канонической форме?
3. Что такое базисный план? Каковы достаточные условия его оптимальности?
4. Как вычислить максимально допустимый шаг вдоль ведущей переменной?
5. Сформулируйте правила пересчета симплексной таблицы.
6. В чем суть 2-хфазного симлекс-метода?
7. Как строится вспомогательная задача линейного программирования? Что такое «фиктивная переменная»?
8. Каковы особенности решения вспомогательной задачи симплекс-методом?
9. Какими исходами может завершиться решение вспомогательной задачи?
10. Как осуществляется переход от первой фазы симплекс-метода ко второй?
11. Для задачи

$$5x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 70, \\ \quad - 2x_2 + x_3 \leq 30, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{cases}$$

постройте вспомогательную задачу линейного программирования и выполните одну итерацию по ее решению.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N8

Решение дискретной линейной задачи оптимального управления

<u>Цель работы:</u> знакомство с задачами оптимального управления и простейшими методами их решения.

<u>**Постановка задачи**</u>. Найти решение дискретной линейной задачи оптимального управления

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t),$$
$$x(0) = x_0, \quad x^{N1} \le x(N) \le x^{N2},$$
$$0 \le u(t) \le 2,$$
$$t = 0,1,\dots,N.$$

для двух различных критериев качества:

$$1) \quad J(u) = \sum_{t=0}^{N-1} u(t) \to min,$$

$$2) \quad J(u) = \sum_{t=0}^{N-1} u(t) \to max.$$

Произвести графическое сравнение траекторий, полученных при различных критериях.

1. <u>Теоретические сведения.</u>

Большое количество практических задач имеют многошаговую природу и описываются с помощью дискретных динамических моделей вида

$$\begin{aligned} & x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \\ & x(0) = x_0, \quad x^{N1} \le x(N) \le x^{N2}, \\ & \alpha \le u(t) \le \beta, \\ & t = 0,1,\dots,N \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ***x(t)*** – ***n***-мерный вектор состояния системы в момент времени ***t***, ***A*** – ***(n×n)***-матрица системы, ***b*** – ***n***-вектор, ***u(t)*** – скалярное управляющее воздействие. В момент времени ***t=0*** система находится в состоянии x_0. В дальнейшем в соответствии с уравнением системы она переходит в состояния *x(1)*, *x(2)*, ... Каждое следующее состояние ***x(t+1)*** зависит от предыдущего состояния ***x(t)*** и управляющего воздействия ***u(t)***. В конечный момент времени ***t=N*** состояние системы должно удовлетворять неравенству $x^{N1} \le x(N) \le x^{N2}$, где x^{N1}, x^{N2} - известные ***n***-векторы. Качество перехода из состояния ***x(0)*** в состояние ***x(N)*** оценивается с помощью специального критерия качества, который может иметь, например, следующий вид

$$J(u) = \sum_{t=0}^{N-1} \varphi(x(t),u(t)) + \psi(x(N)) \to extr, \tag{2}$$

где $\varphi(x,u), \psi(x)$ - известные функции.

Требуется найти такие управляющие воздействия ***u(t), t=0,1,2,...,N,*** при которых критерий качества (2) принимает экстремальное значение.

Для решения задачи (1),(2) в общем случае необходимы специальные методы, учитывающие ее специфику. В простейших случаях, когда числа ***n*** и ***N*** невелики, задачу (1), (2) можно свести к известной задаче математического программирования и использовать для ее решения методы этого раздела вычислительной математики. Действительно, задачу (1), (2) можно записать следующим образом:

$$J(u) = \varphi(x^{(0)},u^{(0)}) + \varphi(x^{(1)},u^{(1)}) + \ldots + \varphi(x^{(N-1)},u^{(N-1)}) + \psi(x^{(N)}) \to extr,$$

$$\begin{cases} x^{(0)} = x_0, \\ x^{(1)} = Ax^{(0)} + bu^{(0)}, \\ \qquad x^{(2)} = Ax^{(1)} + bu^{(1)}, \\ \qquad\qquad x^{(2)} = Ax^{(1)} + bu^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x^{(N)} = Ax^{(N-1)} + bu^{(N-1)}, \\ x^{N1} \le x^{(N)} \le x^{N2}, \\ \alpha \le u^{(i)} < \beta, \quad i = \overline{1,N-1} \end{cases} \qquad (3)$$

где $x^{(i)} = x(i)$, $u^{(i)} = u(i)$ - обычные («нединамические») переменные. Задача (3) представляет собой «большую» задачу математического программирования, ограничения которой заданы с помощью системы равенств и неравенств. Для ее решения можно использовать функции **ConstrainedMax** и **ConstranedMin** системы Mathematica.

2. Варианты заданий

Для всех вариантов N=8, α=0, β=2.

№ п/п	A	B	x0	x^{N1}	x^{N2}
1	$\begin{pmatrix} -0.5 & 1.4 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -0.2 & 1.1 \\ 1.1 & -0.15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 1 & -0.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.7 \\ 1.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25 \\ 29 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 19 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ -0.2 & 1.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.7 \\ -7.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 45 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1.5 & -0.6 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 32 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.45 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 \\ 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1.05 & -0.1 \\ -0.15 & 1.15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 \\ 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 26 \\ 5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -0.1 & 1.12 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 1.2 & -0.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 33 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 35 \\ 36 \end{pmatrix}$

11	$\begin{pmatrix}0.7 & 0.4\\ -0.3 & 1.4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}26\\ 21\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}55\\ 60\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}100\\ 100\end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix}-0.1 & 1.4\\ 0.3 & 0.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}35\\ 38\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\ 10\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}0.1 & 0.4\\ -0.3 & 1.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\ 10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\ 12\end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix}1.1 & 0.2\\ -.5 & 1.8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}30\\ 50\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}39\\ 120\end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix}1.1 & -0.4\\ -0.4 & 0.9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\ 10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}25\\ 25\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\ 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}50\\ 50\end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix}-0.6 & 1.3\\ 0.2 & 0.7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1{,}9\\ -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}21\\ 23\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8\\ 7\end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix}1.3 & 0.3\\ -0.4 & 1.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2{,}5\\ 4{,}3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}20\\ 34\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}40\\ 35\end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix}0.8 & 0.3\\ -0.3 & 1.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4{,}1\\ 3{,}9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\ 10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}20\\ 80\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}40\\ 90\end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix}1.4 & -0.5\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\ -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}35\\ 60\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}15\\ 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}30\\ 12\end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix}1 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}19\\ 20\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}12\\ 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}30\\ 10\end{pmatrix}$

3. Требования к отчету.

Отчет выполняется на стандартных листах А4 и должен содержать:

1. Постановку задачи с указанием своего варианта.
2. Распечатку работы, выполненной в системе Mathematica.

4. Пример выполнения близкой по содержанию работы.

Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},\quad x(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\quad x^{N1}=\begin{pmatrix}-\infty\\ 8\end{pmatrix},\quad x^{N1}=\begin{pmatrix}-\infty\\ 10\end{pmatrix},$$

$$J(u)=x_1(5),$$

$$t=0,1,2,3,4,5.$$

Решение задачи оптимального управления и графическая интерпретация результатов в системе Mathematica может выглядеть следующим образом:

```
L = ConstrainedMax[x51,
{x01 == 0, x02 == 0,
x11 == x01 + 2x02 + v0, x12 == 2x01 + x02 + 2v0,
x21 == x11 + 2x12 + v1, x22 == 2x11 + x12 + 2v1,
x31 == x21 + 2x22 + v2, x32 == 2x21 + x22 + 2v2,
x41 == x31 + 2x32 + v3, x42 == 2x31 + x32 + 2v3,
x51 == x41 + 2x42 + v4, x52 == 2x41 + x42 + 2v4,
```

```
v0 ≤ 1, v1 ≤ 1, v2 ≤ 1, v3 ≤ 1, v4 ≤ 1,
x52 ≥ 8, x52 ≤ 10},
{v0, v1, v2, v3, v4, x01, x02, x11, x12, x21, x22,
x31, x32, x41, x42, x51, x52}]
```

$$\left\{\frac{223}{20},\left\{v0\to 0,\ v1\to \frac{3}{20},\ v2\to 0,\ v3\to 1,\ v4\to 0,\ x01\to 0,\ x02\to 0,\ x11\to 0,\ x12\to 0,\ x21\to \frac{3}{20},\ x22\to \frac{3}{10},\ x31\to \frac{3}{4},\ x32\to \frac{3}{5},\ x41\to \frac{59}{20},\ x42\to \frac{41}{10},\ x51\to \frac{223}{20},\ x52\to 10\right\}\right\}$$

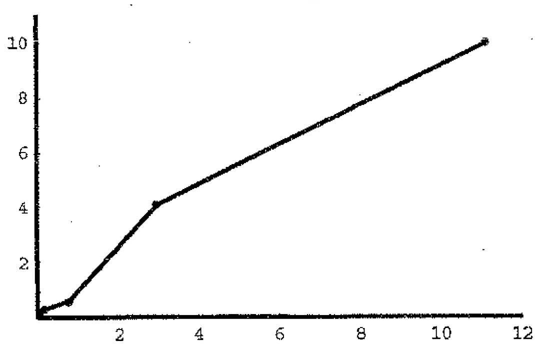
```
t = {v0, v1, v2, v3, v4, x01, x02, x11, x12, x21, x22,
  x31, x32, x41, x42, x51, x52} /. L[[2]]
```

$$\left\{0,\ \frac{3}{20},\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\frac{3}{20},\ \frac{3}{10},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{59}{20},\ \frac{41}{10},\ \frac{223}{20},\ 10\right\}$$

```
t2 = Table[{t[[4 + 2i]], t[[5 + 2i]]}, {i, 1, 6}]
```

$$\left\{\{0,0\},\ \{0,0\},\ \left\{\frac{3}{20},\frac{3}{10}\right\},\ \left\{\frac{3}{4},\frac{3}{5}\right\},\ \left\{\frac{59}{20},\frac{41}{10}\right\},\ \left\{\frac{223}{20},10\right\}\right\}$$

```
G1 = Listplot[t2, PlotJoined → False,
  PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.03]},
  DisplayFunction -> Identity]

G2 = ListPlot[t2, PlotJoined → True, PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1]},
  DisplayFunction → Identity]

Show[{G1, G2}, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  PlotRange → {{0, 12}, {0, 12}}]
```




```
L2 = ConstrainedMin[x51,
{x01 == 0, x02 == 0,
```

```
x11 == x01+2x02+0.1v0, x12 == 2x01+x02+0.2v0,
x21 == x11+2x12+0.1v1, x22 == 2x11+x12+0.2v1,
x31 == x21+2x22+0.1v2, x32 == 2x21+x22+0.2v2,
x41 == x31+2x32+0.1v3, x42 == 2x31+x32+0.2v3,
x51 == x41+2x42+0.1v4, x52 == 2x41+x42+0.2v4,
v0 ≤ 10, v1 ≤ 10, v2 ≤ 10, v3 ≤ 10, v4 ≤ 10,
x52 ≥ 8, x52 ≤ 10},
{v0, v1, v2, v3, v4, x01, x02, x11, x12, x21, x22,
x31, x32, x41, x42, x51, x52}]
```

{6.57143,
{$v0 \to 3.33067\times10^{-16}$, $v1 \to 0$, $v2 \to 4.28571$, $v3 \to 0$, $v4 \to 10.$,
$x01 \to 0$, $x02 \to 0$, $x11 \to 0$, $x12 \to 0$, $x21 \to 1.66533\times10^{-16}$,
$x22 \to 2.77556\times10^{-17}$, $x31 \to 0.428571$, $x32 \to 0.857143$,
$x41 \to 2.14286$, $x42 \to 1.71429$, $x51 \to 6.57143$, $x52 \to 8.$}}

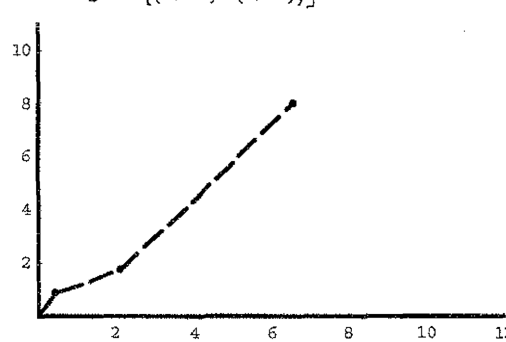
```
s = {v0, v1, v2, v3, v4, x01, x02, x11, x12, x21, x22,
  x31, x32, x41, x42, x51, x52} /. L2[[2]]
```

{3.33067×10^{-16}, 0, 4.28571, 0, 10., 0, 0, 0, 0, 1.66533×10^{-16},
2.77556×10^{-17}, 0.428571, 0.857143, 2.14286, 1.71429, 6.57143, 8.}

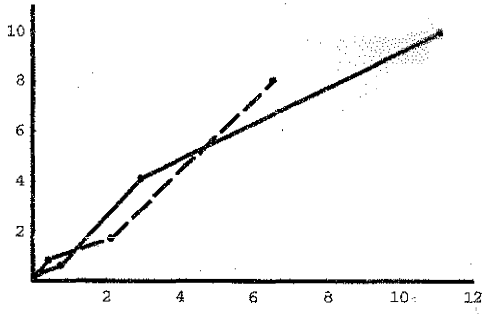
```
s2 = Table[{s[[4+2i]], s[[5+2i]]}, {i, 1, 6}]
```

{{0,0}, {0,0}, {1.66533×10^{-16}, 2.77556×10^{-17}},
{0.428571, 0.857143}, {2.14286, 1.71429}, {6.57143, 8.}}

```
H1 = ListPlot[s2, PlotJoined → False, PlotStyle → PointSize[0.02],
  AxesStyle → Thickness[0.01], TextStyle → {FontSize → 12},
  DisplayFunction -> Identity]

H2 = ListPlot[s2, PlotJoined → True,
  PlotStyle → {Thickness[0.01], Dashing[{0.05,0.02}]},
  AxesStyle → Thickness[0.01], TextStyle → {FontSize → 12},
  DisplayFunction -> Identity]

Show[{H1, H2}, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  PlotRange → {{0, 12}, {0, 11}}]
```



```
Show[{G1, G2, H1, H2}, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  PlotRange -> {{0, 12}, {0, 11}}]
```



5. **<u>Вопросы к защите лабораторной работы.</u>**

1. Запишите задачу оптимального управления, рассматриваемую в работе.
2. Как перейти от дискретной задачи оптимального управления к «большой» задаче математического управления?

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
2. Попов А.А. Excel: практическое руководство. – М.: ДЕСС КОМ, 2000.
3. Блатнер П. Использование Excel 2000. Специальное издание. – Вильямс, 2000. – 1024 с.
4. Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы математика к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. – Мн.: БГУ, 1999. – 265 с.
5. Дьяконов В. Mathematica 4. – СПб: Питер, 2001. – 656 с.
6. Лазарев Ю.Ф. MatLAB 5.x. – К.: Издательская группа BHV, 2000. – 384 с.
7. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System ToolBox. MATLAB 5 для студентов. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 287 с.
8. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Высшая школа, 1971.
9. Турчак С.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
10. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1994. – 286 с.
11. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
12. Ракецкий В.М. Методические указания и задания к лабораторным работам по дисциплине «Математические модели в расчетах на ЭВМ и компьютеризация технологии в системах автоматизации» для студентов специальности «Автоматизация технологических процессов и производств» дневной формы обучения. Часть 1. Основы анализа математических моделей с помощью электронных таблиц и систем компьютерной математики. – Брест, БрГТУ, 1987. – 78 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составитель: Валерий Михайлович Ракецкий

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

к лабораторным работам по дисциплине

«Математические модели в расчетах на ЭВМ и компьютеризация технологии в системах автоматизации»

для студентов специальности

«Автоматизация технологических процессов и производств»

дневной формы обучения

Часть 2. Методы анализа математических моделей с использованием ЭВМ

Ответственный за выпуск: Ракецкий В.М.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная вёрстка: Кармаш Е.Л.
Корректор: Никитчик А.Д.
Набор и верстка: Августинович Е.К.

Подписано к печати 14.01.2009. Формат 60x84¹/₁₆. Усл.печ.л. 2,79. Уч. изд. л. 3. Тираж 50 экз. Заказ №47. Отпечатано на ризографе УО «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267