AC'05

АРХИТЕКТУРА И СТРОИТЕЛЬСТВО – 2005
ARCHITEKTUR UND BAUWESEN – 2005
I Международный научно-практический семинар
I Internationales wissenschaftlich-praktisches Seminar

РАЗВИТИЕ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ СТЕРЖНЕВЫХ И КОНТИНУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Борисевич А.А.[1]

Постановки задач оптимизации объектов строительства и поиски методов их решения непосредственно связаны с историей развития методов расчета строительных конструкций и систем. Наряду с необходимостью решения задач проверочного расчета конструкций, в которых идеи оптимального проектирования присутствуют неявно, находятся на втором плане, естественно проявлялся интерес к направленному поиску конструкций, обладающих необходимой прочностью, но имеющих минимальную массу, конструкций и систем минимальной стоимости, систем с ограниченными в заданных интервалах физическими характеристиками и т.д.

1. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МЕТОДОВ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Начальные исследования в этом направлении, как свидетельствуют литературные источники, связаны с поисками равнопрочных конструкций.

В 1638 г. в книге Г. Галилея [8] было опубликовано решение задачи о балке равного сопротивления. Позже исследованиями формы балок равного сопротивления с помощью дифференциального исчисления занимались швейцарские ученые – представители семьи Бернулли. В 1733 г. Д. Бернулли положил начало решению задачи проектирования однопролетной балки равного сопротивления с учетом собственного веса. Эти исследования продолжил английский физик Т. Юнг и результаты опубликовал в 1807 году в 2-томном труде "Курс лекций по натуральной философии и механическому искусству". (Здесь же им была введена числовая характеристика упругости, известная как модуль Юнга).

В 1833 году А. Мореном были выполнены первые исследования ферм равного сопротивления. Впоследствии теоремы о фермах равного сопротивления были сформулированы М. Леви (1873 г.), Д. Максвеллом (1890 г.) и Д. Мичеллом (1904 г.).

В 1855 г. французский ученый в области механики Б. Сен-Венан решил задачу о равнопрочности призматических брусьев, работающих на изгиб с кручением.

Интерес к задачам о равнонапряженных конструкциях способствовал развитию методов поиска их. На идее равнопрочности основных элементов конструкций Пиппардом в 1922 году был предложен метод проектирования статически неопределимых систем, а в 1933 году – И.М. Рабиновичем метод заданных напряжений.

[1] *Борисевич Арсений Александрович, доктор технических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет (БНТУ)*

Исходя из условий реального проектирования, во многих случаях под равнонапряженностью понимается равенство напряжений в некоторых точках расчетных сечений элементов системы. Такое определение существенно расширяет класс равнонапряженных систем.

В дальнейших исследованиях понятие о лучшей, рациональной системе связывается не только с критерием равнонапряженности, но и с критериями равноустойчивости элементов системы, равенства перемещений узлов системы, условием постоянства удельной энергии упругой деформации системы (З. Васютинский, 1960 г.) и другими эвристическими критериями.

Появляются предложения о предпочтительном распределении толщин упругих симметричных оболочечных конструкций из условий равенства напряжений в отдельных точках (Бех Л.П., Елин В.Д., Ганоева М.С., Косолапова Л.А., Малков В.П. и др.). Иные постановки и решения задач о поиске рациональных оболочек отметили в своих работах Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С., Юрьев А.Г., Мартыненко М.Д., Ширко И.В., Хуберяна К.М. и др.

Методики оптимизации, естественно, базируются на существующих методах расчета систем.

Решаются задачи проектирования круглой пластинки, в каждой точке поверхности которой выполняется условие Мизеса (Григорьев А.С.).

В качестве условия оптимальности упругой пластинки Муштари Х.М. (1964, 1967 гг.) принимает равенство максимальных значений кривизн пластинок переменной и постоянной толщин и для частных случаев нагружения получает выражения жесткости прямоугольной и круглой пластинок переменной толщины.

К 70-м годам прошлого столетия наблюдается повышенное внимание исследователей к проблемам оптимизации конструкций во многих странах: Австралии, Бельгии, Великобритании, Германии, Дании, Индии, Италии, Канаде, Норвегии, Польше, СССР, США, Японии и др.

Первоначально основные усилия ученых были направлены на применение к оптимизации конструкций различных математических методов: линейного и нелинейного программирования, теории оптимального управления, теории игр, теории графов, динамического программирования, геометрического программирования, методов случайного поиска. Опыт решения практических задач показал необходимость разработки новых эффективных методов, учитывающих реальные особенности областей допустимых решений.

В развитие теории оптимального проектирования существенный вклад внесли ученые Н.В. Баничук, В.П. Валуйских, А.И. Виноградов, Е.Н. Герасимов, В.Н. Гордеев, В.А Комаров, Л.И. Коршун, И.Б. Лазарев, В.П. Малков, Д.А. Мацюлявичюс, Ю.А. Радциг, Ю.М. Почтман, В.В. Трофимович, А.П. Чижас, А.А. Чирас, а также Я. Арора, Л. Берке, М. Бхатти, Г. Вандерплаац, З. Васютински, У. Кирш, Н.С. Кот, Р. Нельсон, В. Прагер, В. Разани, Г. Реклейгис, Д. Рожваны, К. Свенберг, К. Флери, Р. Фокс, Э. Хог, Н. Хот, Л. Шмит и другие.

Приведенный краткий обзор, разумеется, не является исчерпывающим и ограничивается, в основном, рассмотрением работ, известных автору из научной литературы, имеющейся в библиотеках Беларуси и России. Однако и он позволяет представить сложный путь развития методов поиска оптимальных конструкций.

2. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Отсутствие статистических сведений о многочисленных факторах, определяющих прочность, деформативность, устойчивость и долговечность конструкций, является одной из существенных причин недостаточного применения теории надежности в строительном проектировании.

Еще в 1911 г. Качини предложил статистическую обработку наблюдений за нагрузками и прочностными свойствами материалов [4]. В 1926-1929 г.г. были опубликованы работы Майера М. и Хоциалова Н.Ф., в которых подвергался критике метод расчета конструкций по допускаемым напряжениям и выдвигались идеи вероятностного расчета строительных конструкций [5]. В 1935 г. появились публикации Стрелецкого Н.С., посвященные применению вероятностных методов расчета конструкций. Основные принципы теории надежности строительных конструкций и сооружений изложены в его монографии [20]. В 1949 г. появились работы Минца М.Н. о статистических характеристиках прочностных свойств бетона и арматуры. Большая заслуга в изучении статистической природы коэффициента запаса и применении теории надежности к расчету конструкций принадлежит Ржаницыну А.Р. Развитию вероятностных методов расчета конструкций посвящены работы Болотина В.В.

Значительный вклад в развитие вероятностных методов расчета внесли Аугусти Г., Баратта А., Кашиати Ф. [2], Мирза С., Тихий М., Фрейденталь А., Ворличек М. и др.

Изучением надежности строительных конструкций занимались Байков В.Н., Геммерлинг А.В., Клевцов В.А., Краковский М.Б., Крылов Н.А., Крылов С.М., Кудзис А.П., Лычев А.С., Макаров Б.П., Пецольд Т.М., Райзер В.Д., Снарскис Б.И., Тур В.В. и др.

Развитию исследований по теории надежности объектов строительства способствовали конференции по проблемам надежности в строительной механике, проводившиеся в Вильнюсском инженерно-строительном институте, семинары по надежности железобетонных конструкций при Самарском инженерно-строительном институте, совещания участников секции надежности научно-координационного совета по строительной механике Госстроя СССР, организовывавшиеся ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, международные конференции по надежности строительных конструкций (ICOSSAR), по применению математической статистики и теории вероятности в инженерных исследованиях строительных конструкций (ICASP) и, разумеется, публикации ученых.

Рассмотрение надежности строительных конструкций с точки зрения вероятности их отказа приводит, как известно, к исследованию неравенства

$$R - S < 0,$$

где R – несущая способность, S – характеристика нагрузки (или вызываемых ею усилий).

Неравенство имеет вероятностную трактовку. Используя совместное изучение распределений R и S, можно, при известных статистических характеристиках их, построить теорию надежности строительных конструкций. Впервые совместное распределение было рассмотрено Стрелецким Н.С. [20]. Для обозначения вероятности безотказной работы им было введено понятие "гарантия неразрушимости". Ржаницын А.Р. назвал "характеристикой безопасности" элемента величину, обратную коэффициенту вариации.

В практических приложениях к теории надежности часто используется только распределение R. Не исключается и обратное: при неизменной R анализируется распределение S.

К настоящему времени сложились два уровня учета надежности конструкций. На первом из них, наиболее распространенном в практике проектировщиков и заложенном в нормы проектирования, параметры надежности проявляются через вводимые в расчет коэффициенты. На втором, связанном с вероятностными методами расчета, при известных статистических характеристиках нагрузки, материалов и конструкций, определяется надежность отдельных элементов и сооружения в целом. Более высокий уровень исследований связан с разработкой и применением оптимизационных и экономико-социальных методов.

Целевые функции в практических задачах оптимизации на втором уровне (с учетом вероятностных характеристик R и S) представляются в виде функции приведенных затрат, учитывающих сметную стоимость проектируемого объекта, плановые расходы на эксплуатацию, затраты, возникающие в результате отказов строительных конструкций.

Разработанные к настоящему времени методики определения количества отказов за срок эксплуатации конструкций позволяют записать эту функцию в зависимости от переменных проектирования.

На более высоком уровне оптимизации необходимо иметь плотности композиции распределений R–S [2]. Отказ наступит при R – S < 0.

Получить формальную запись этого распределения для проектируемого сооружения, в общем случае, не всегда возможно. Поэтому практическую реализацию оптимизационной задачи этого уровня представляется удобным сводить к включению в ограничения зависимостей, определяющих вероятность безотказной работы отдельных элементов (конструкций) системы. Что же касается статистических характеристик физических величин, входящих в разрешающие уравнения принятого метода расчета и записи ограничительных функций, то в эти зависимости включаются их математические ожидания.

Распределения R и S, как следует из их физической сущности, изменяются во времени. В общем случае, возможны различные реализации случайных процессов для R(t) и S(t). Обоснованные теоретические зависимости к развитию процессов R(t) и S(t), естественно, будут способствовать поиску проектов надежных конструкций и сооружений.

3. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ И ОРГАНИЗАЦИЯ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТА

Современное состояние методов оптимизации следует определять и по уровню полезности их в решении конкретных задач, и по уровню их применимости к разработке САПР конструкций.

Новые направления в оптимизации конструкций и систем во многом связаны с методом анализа чувствительности проекта [27,28]. Идеи этого метода послужили основой к развитию постановок задач оптимизации как задач математического программирования и поиску новых методов их решения, способствовали организации автоматизированных итерационных процедур поиска оптимальных проектов. Чтобы более понятными были последующие рассуждения, изложим кратко основные положения по анализу чувствительности проекта механической системы.

Параметры проекта оптимизируемой системы (геометрическая форма, размеры элементов, физические характеристики материалов и др.) можно характеризовать вектором переменных проектирования (ПП) $B = B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$. Компоненты $b_1, b_2, \cdots, b_n$ вектора определяют численные значения изменяющихся в ходе оптимизации ПП.

Перемещения узлов, усилия в сечениях элементов и другие величины, вычисляемые при анализе напряженно-деформированного состояния системы, характеризуются вектором параметров состояния (ПС) $z = z(z_1, z_2, \cdots, z_m)$.

Векторы B и z связаны уравнениями равновесия, совместности деформаций, другими уравнениями состояния конструкции или системы, а также уравнениями, устанавливающими заданные свойства системы (равенство перемещений каких-либо узлов, равенство напряжений в некоторых сечениях элементов и др.). Эти уравнения определяют ограничения-равенства и записываются в виде

$$h(B, z) = 0. \tag{1}$$

Ограничения неравенства, определяющие условия нормального состояния конструкции (условия прочности, жесткости и устойчивости конструкций и др.), также записываются через ПП и ПС и имеют вид

$$\psi(B, z) \le 0. \tag{2}$$

Ограничения на ПП задаются условиями вида

$$B^- \le B \le B^+. \tag{3}$$

Задача определения оптимальных значений ПП сводится к минимизации целевой функции $\psi_0(B, z)$ при ограничениях (1), (2) и (3).

Используя линеаризованные в точке $\left(B^{(0)}, z^{(0)}\right)$ условия (1) и (2), получают первую вариацию функции ψ_j в виде

$$\delta\psi_j\left(B^{(0)}, z^{(0)}\right) = \left(\frac{\partial\psi_j}{\partial B} - \frac{\partial\psi_j}{\partial z} R^{-1} \frac{\partial h}{\partial B}\right)\delta B = l_j\ \delta B, \tag{4}$$

где $l_j = \frac{\partial\psi_j}{\partial B} - \frac{\partial\psi_j}{\partial z} R^{-1} \frac{\partial h}{\partial B}$ – вектор коэффициентов чувствительности (КЧ) функции ψ_j к изменениям ПП B; $R = \frac{\partial h}{\partial z}$.

Если оцениваются экономические критерии проекта, то вариация целевой функции записывается в виде $\delta\psi_0\left(B^{(0)}, z^{(0)}\right) = \dfrac{\partial\psi_0}{\partial B}\delta B$.

Если в выражении (4) произведение $-\dfrac{\partial\psi_j}{\partial z}R^{-1}$ обозначить через λ^T, то после несложного преобразования получим соотношение, связывающее скорости $\dfrac{\partial h}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial\psi_j}{\partial z}$:

$$-\lambda^T\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial\psi_j}{\partial z}. \tag{5}$$

Как следует из (4), с тем же множителем λ связаны и скорости изменения функций h и ψ_j по переменной B.

Следовательно, КЧ представляет собой градиент функции ограничений и, следуя принятым в математике обозначениям, его можно было бы записать в виде

$$l_j = \nabla\psi_j(b) \equiv \frac{\partial\psi_j(b)}{\partial b} \equiv \left[\frac{\partial\psi_j(b)}{\partial b_1}; \frac{\partial\psi_j(b)}{\partial b_2}; \dots; \frac{\partial\psi_j(b)}{\partial b_n}\right].$$

Информация о значениях градиентов целевой и ограничительных функций является весьма важной для разработки всех итерационных методов оптимизации.

Зависимости для линейных приближений функций ограничений и целевой функции позволяют сформулировать для локальной области пространства ПП задачу поиска направления движения из точки $\left(B^{(0)}, z^{(0)}\right)$ к оптимальной точке и длины шага в этом объеме как задачу линейного программирования. Запишем ее так:

найти минимум $\quad -\Delta\psi_0\left(B^{(0)}\right)\Delta B$,

при наличии ограничений

$$l_j^T * \Delta B \le \alpha\,\Delta\psi_j\left(B^{(0)}\right), \qquad j = \overline{1, m};$$

$$\Delta B \le \alpha\,\Delta\psi_i\left(B^{(0)}\right), \qquad i = \overline{1, n}.$$

Приняты обозначения:

$\Delta\psi_j\left(B^{(0)}\right)$ – запас (резерв) по j-му ограничению, определяемый как разность между нормативным (или расчетным) значением некоторой величины и значением этой же величины в точке $\left(B^{(0)}, z^{(0)}\right)$;

m – число ограничений-неравенств по прочности и жесткости;

$\Delta\psi_i\left(B^{(0)}\right)$ – запас по i-му конструктивному ограничению, определяемый как разность между значением ПП в точке $\left(B^{(0)}\right)$ и минимальным значением этой переменной;

n – число конструктивных ограничений;

ΔB – вектор приращений ПП;

α – вектор коэффициентов, определяющий длину линеаризованного участка по каждому ограничению. В частном случае для всех ограничений может быть принято $\alpha = \text{const}$.

В сформированной ММ матрица коэффициентов при неизвестных приращениях ПП (матрица КЧ) записана для идеализированной расчетной схемы. Элементы матрицы вычисляются с учетом общепринятых допущений в расчетах стержневых систем. Ограничения-неравенства, так же как и ограничения-равенства, при расчете стержневых систем формируются, как правило, на основе общих уравнений строительной механики.

В существующей практике статических расчетов определение расчетных значений усилий и перемещений производится по идеализированной схеме. Сами же отдельные элементы конструкции рассчитываются на эти усилия в соответствии с требованиями нормативной (и поясняющей ее) литературы. Автоматизация расчетов строительных конструкций предполагает наличие для этих целей соответствующих программных модулей. Излагаемый подход к задаче оптимизации предлагает наличие таких модулей. В этих модулях учитываются все условия реального проектирования: условия работы конструкций и их назначение; технология расчета элементов на осевые силы и изгиб; определение расчетных длин и предельных гибкостей; условия устойчивости стенок и поясных листов изгибаемых и сжатых элементов (условия местной устойчивости) и др. Именно с учетом наличия программных модулей, в которых обрабатываются требования нормативных документов, устанавливаются в записанной ММ задачи ОПК запасы по ограничениям.

Допустимые значения перемещений характерных узлов системы определяются соответствующими нормами.

В результате реализации итерационных процедур на основе сформированной ММ получится траектория движения точки к границе ОДР, весьма близкая к оптимальной. Для уточнения решения следует упорядочить выбор начальной точки $B^{(0)}$.

4. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ИЗГИБАЕМЫХ СИСТЕМ

Расчет и оптимизация изгибаемых физически нелинейных стержневых систем, даже при использовании упрощающих гипотез, по многим причинам представляют собой сложную задачу. В настоящей работе исследуются модели нелинейно упругих систем, которые могут использоваться в качестве образов прикладных инженерных конструкций и систем при их первичном нагружении.

Экспериментальные диаграммы деформирования материалов можно, как известно, аппроксимировать аналитическими выражениями. Если, согласно гипотезе плоских сечений, удлинение волокна, отстоящего на расстоянии z от нейтрального слоя, равно $\varepsilon = \kappa z$, где $\kappa = 1/\rho$ - кривизна оси стержня, то при известной зависимости $\sigma = f(\varepsilon)$ оказывается определенным и закон изменения напряжений по высоте сечения элемента $\sigma = f(\kappa z)$. Между кривизной оси элемента и изгибающим моментом существует взаимосвязь. Поэтому для статически определимых систем задача определения напряжений в сечении оказывается разрешимой: по известным значениям М из выражения $M = \eta(\kappa)$ находится κ, а затем вычисляются напряжения в сечении. Перемещения характерных сечений или, при необходимости, уравнение изогнутой оси также могут быть определены. Проблема расчета статически неопределимых изгибаемых нелинейно упругих стержневых систем "завязывается" на необходимости одновременного учета в ходе вычислительного процесса нелинейности распределения напряжений по высоте сечения элемента и сложного, иногда явно не описываемого, закона изменения кривизны оси стержня. Между изгибающим моментом в сечении и кривизной κ существует нелинейная связь. Для таких систем не применим принцип суперпозиции. При попытке использования линеаризованной схемы расчета посредством последовательных догружений оказывается неясным вопрос о выборе сечения, по которому следует определять жесткостные характеристики и, к тому же, нет оснований распространять этот показатель на всю длину стержня. Отождествление жесткостных характеристик стержня по некоторой определяющей, например, для более напряженного сечения, приведет к непредсказуемому отклонению конечного результата от истинного показателя. Отсюда возникают и сложности в раскрытии статической неопределимости в классическом понимании этого вопроса.

Для преодоления указанных трудностей в задачах расчета и оптимизации нелинейно упругих систем автором применялись подходы, использующие стержневую аппроксимацию твердого тела. Конструкцией, заменяющей (моделирующей) изгибаемый элемент, является ферма. Задача сводится к поиску расчетной схемы, эквивалентной в отношении распределения усилий и перемещений (энергетическая сторона вопроса) балке. После решения этой задачи необходимо разработать методику оптимального проектирования шарнирно-стержневой системы, материал которой подчиняется тому же закону физической нелинейности, что и для заданной системы, и установить соответствие оптимальных проектов заданной и заменяющей систем.

5. СПОСОБЫ СТЕРЖНЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ ИЗГИБАЕМЫХ И КОНТИНУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Способ стержневой аппроксимации изгибаемого элемента характеризуется моделированием его работы под нагрузкой связями первого вида, т.е. стержнями, в которых возникает только один вид усилия – продольная сила. Сочетание (комбинация) усилий в этих связях при удачном их расположении позволяет определить в поперечном сечении элемента изгибающий момент, поперечную и продольную силы. Соответствующей конструкцией, заменяющей (моделирующей) изгибаемый элемент, является ферма. По усилиям в стержнях ферм можно судить о работе моделируемого, например, балочного элемента. Задача, таким образом, сводится к поиску расчетной схемы, эквивалентной в отношении распределения усилий и перемещений (энергетическая сторона вопроса) балке. После решения этой задачи необходимо разработать методику оптимального проектирования шарнирно-стержневой системы, материал которой подчиняется тому же закону физической нелинейности, что и для заданной системы, и установить соответствие оптимальных проектов заданной и заменяющей систем.

Первые упоминания о ферменных аналогиях, используемых в расчетах железобетонных конструкций, как отмечается в [23], относятся к 1906 – 1909 гг. [32, 33]. Можно предположить, что начальные идеи стержневой аналогии во многих задачах расчета изгибаемых элементов основывались на особенностях распределения главных напряжений вдоль их осей. При поперечном изгибе траектории максимальных и минимальных напряжений зависят от условий закрепления и характера нагрузки, но, как известно, касательные к ним в точках пересечения являются взаимно перпендикулярными. Скорее всего это обстоятельство и послужило одной из причин того, что во многих случаях в стержневых схемах, заменяющих континуальные, принимается крестовая решетка с квадратной ячейкой [17]. Внедрение в практику расчетов этой идеи может осуществляться различными способами. Более сложной, но, как представляется, более близкой к модели-оригиналу, является решетчатая система с малым шагом ячеек. Для изгибаемых стержней это приводит к необходимости введения в расчет многопоясных ферм.

Принципиальные основы стержневой аппроксимации для пластин, воспринимающих нагрузку в их плоскости (балки-стенки), и пластин, испытывающих изгиб, изложены в [17]. В работе [10] установлена связь между матрицей коэффициентов сплошной упругой среды и жесткостью стержней пространственной шарнирно-стержневой модели заданной геометрии. В частности, для кубической системы с диагоналями граней и с пространственными диагоналями подтверждаются результаты, полученные в [17]. Разработкам шарнирно-стержневых моделей, эквивалентных континуальным объемам, посвящены исследования многих ученых [19, 22, 24, 25, 26 и др.].

В дальнейшем исследователями использовались и другие типы дискретных стержневых систем, заменяющих континуальные системы.

Одним из основных критериев соответствия стержня-оригинала и фермы-модели является равенство при малых возмущениях потенциальных энергий деформаций этих объектов.

6. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ СИСТЕМ

Для физически нелинейной фермы с монотонно изменяющимися механическими характеристиками материалов ММ, алгоритмы и программы построены на основе соответствующих научных положений для линейно деформируемых систем.

Формирование ограничений производится с помощью общих уравнений строительной механики. На каждом шаге в качестве вложенной процедуры вычислений выполняется решение подзадачи статического расчета нелинейной системы при ступенчато нарастающей до конечного значения нагрузке. Задача оптимизации решается на линеаризованном участке, соответствующем последнему этапу догружения. Длина этого участка определяет предельные интервалы изменения переменных за один шаг оптимизации.

При использовании в качестве переменных состояния усилий уравнения совместности деформаций (уравнения метода сил) для системы с неизменной геометрией запишем в виде

$$h_D(A,X) = D\vec{x} + \vec{C} = 0,$$

где D – матрица внешней податливости системы,

$\vec{x}$ – вектор неизвестных усилий (в основной системе),

$\vec{C}$ – вектор свободных членов, соответствующий приращению параметра нагрузки на ΔF.

Представим функцию ограничений по прочности отдельного элемента фермы в виде

$$\psi_i^{(\sigma)} = R - \left(\sum \sigma^{(k-1)} + \sigma^{(k)}\right) \ge 0 \quad ; \quad i = \overline{1,n};$$

где R – расчетное сопротивление материала соответствующему виду деформации (растяжению/сжатию),

$\sum \sigma^{(k-1)}$ – напряжение (суммарное) в сечении после (k–1)-го шага приращения нагрузки,

$\sigma^{(k)}$ – напряжение (приращение) в сечении на *k* – том (последнем) шаге догружения. При наличии полной информации о системе напряжение вычисляется с учетом коэффициентов, влияющих на несущую способность элемента (см. нормы проектирования),

n – число стержней фермы.

Для сжатого элемента это ограничение запишется так:

$$\psi_i^{(\sigma)} = R + \left(\sum \sigma^{(k-1)} + \sigma^{(k)}\right) \ge 0$$

Известно, что

$$\sigma^{(k)} = \Delta_i^{(k)} \frac{E_i^{(k)}}{l_i}, \quad \Delta_i^{(k)} = B_0^{(k)} L_x x^{(k)} + B_0^{(k)} S_F^{(0)}$$

Поэтому ограничение по прочности отдельного элемента фермы, в общем случае, запишем в виде

$$\psi_i^{(\sigma)} = R \pm \left[\sum \sigma^{(k-1)} + \left(B_0^{(k)} L_x x^{(k)} + B_0^{(k)} S_F^{(0)}\right) \frac{E_i^{(k)}}{l_i}\right] \ge 0$$

Ограничение на перемещения узлов фермы имеют вид:

$$\text{при} \quad z_j > 0 \qquad \psi_j^{(z)} = [z_j] - \left(\sum z_j^{(k-1)} + \Delta z_j^{(k)}\right) \ge 0,$$

$$\text{при} \quad z_j < 0 \qquad \psi_j^{(z)} = [z_j] + \left(\sum z_j^{(k-1)} + \Delta z_j^{(k)}\right) \ge 0.$$

Значение индекса *j* не может быть больше степени кинематической неопределимости системы, т. е. $j = \overline{1,m}$.

Задача поиска оптимального проекта, в конечном итоге, сводится к изменению (наиболее часто – уменьшению) ПП, например, площадей поперечных сечений A на ΔA. При решении практических задач максимальное значение компоненты вектора $[\overline{\Delta A}]$ определялось в зависимости от достигнутого уровня напряжений на последней итерации по выражению:

$$[\Delta A] = \frac{\Delta\sigma}{\sigma + \Delta\sigma} A,$$

где $\Delta\sigma$ – приращение напряжения в сечении элемента на последнем шаге загружения системы,

σ – напряжение в сечении элемента после последнего шага загружения системы.

Кроме указанного назначения формулы для $[\Delta A]$, с ее помощью определяются, что очень важно в оптимизационной задаче, соотношения компонент вектора $\overline{\Delta A}$.

Значения величин, записанных в ограничениях по прочности и жесткости, существенно разнятся. Поэтому целесообразно поиск направления убывания целевой функции вести для масштабированных функций $\psi_i^{(\sigma)}$ и $\psi_i^{(z)}$.

Из обширной литературы по обсуждаемой проблеме ниже приводится краткий список литературных источников, которые могут помочь читателю ориентироваться в различных направлениях и методах оптимизации конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон М.С., Арман Ж.-Л., Арора Дж. С и др.; Под ред. Атрека Э. и др. // Новые направления оптимизации в строительном проектировании: Пер. с англ.: – М.: Стройиздат, 1989.– 592с.
2. Аугусти Г., Баратта А., Кашиати Ф. Вероятностные методы в строительном проектировании:/Пер. с англ. Ю.Д. Сухова.– М.: Стройиздат, 1988.– 584с.
3. Баничук В.Н. Введение в оптимизацию конструкций. – М., 1986. – 304с.
4. Болотин В.В. Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений. 2 издание.– М.: Стройиздат, 1982.– 350с.
5. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике.– М.: Стройиздат, 1961.– 201с.
6. Вандерплаац Г.Н. Оптимизация конструкций – прошлое, настоящее и будущее // Аэрокосмическая техника. – 1983.– т.1.–№2.–с. 129-140.
7. Виноградов А.И. Проблема оптимального проектирования в строительной механике.– Харьков, 1973. – 168с.
8. Г. Галилей. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки ... Лейден, 1638.
9. Герасимов Е.Н., Почтман Ю.М., Скалозуб В.П. Многокритериальная оптимизация конструкций.– Киев-Донецк, 1985.– 134с.
10. Лубо Л.Н. Стержневые модели сплошных упругих тел /Строительная механика и расчет сооружений. Научно-технич. журнал гос. комитета Совмина СССР по делам строительств, №4(52). - М.,1967.
11. Мацюлявичус Д.А. Методы математического программирования в задачах синтеза упругих шарнирно-стержневых систем: Автореф. дис....д-ра техн. наук.–Каунас, 1969.– с. 24.
12. Ниордсон Ф.П., Педерсон П. Обзор исследований по оптимальному проектированию конструкций // Механика. – 1973.–№2/138/.– с. 136-152.
13. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. – М., 1981. – 277с.
14. Оптимальное проектирование конструкций. Библиографический указатель, под ред. Ю.В. Немировского.– Новосибирск: Институт Гидродинамики СО АН СССР.– 1975.–ч. 1,2. – с. 221-472.
15. Прагер В. Основы теории оптимального проектирования. – М., 1977. – 117с.
16. Рейтман М.И., Шапиро Г.С. Оптимальное проектирование деформируемых тел // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Серия – Механика деформируемого твердого тела.– М., 1978.– №12.– с. 5-90.
17. Ржаницин А.Р. Представление сплошного упругого изотропного тела в виде шарнирно-стержневой системы./ Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности, ЦНИИПС. - М., 1956.
18. Сергеев Н.Д., Богатырев А.И. Проблемы оптимального проектирования конструкций.– Л.: Стройиздат, 1971. – 136с.
19. Сидорович Е.М. Нелинейное деформирование, статическая и динамическая устойчивость пространственных стержневых систем. – Мн.: БГПА, 1999.
20. Стрелецкий Н.С. Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений.– М.: Стройиздат, 1947.– 92с.
21. Сухов Ю.Д. Вероятностно-экономическая модель процесса эксплуатации конструкций // Строительная механика и расчет сооружений.– 1975.– №4.
22. Тананайко О.Д. Об одной стержневой модели в теории тонких оболочек.- В сб.: Теоретические и экспериментальные исследования по строительной механике. Труды ЛИИЖТ, вып. 349, 1973.
23. Тур В.В., Кондратчик А.А. Расчет железобетонных конструкций при действии перерезывающих сил: Монография.– Брест: изд. БГТУ, 2000.
24. Филин А.П. Приближенное решение пространственной задачи теории упругости.- В сб.: Исследования по строительной механике. Труды ЛИИЖТ, вып. 249-Л.– М.: Стройиздат, 1966.
25. Филин А.П. Расчет оболочек на основе дискретной расчетной схемы с применением ЭЦВМ- "Большепролетные оболочки", т. 1.– М.: Стройиздат, 1969.
26. Филин А.П. Расчет пространственных стержневых конструкций типа системы перекрестных связей и его применение к оболочкам при использовании электронных вычислительных машин.- В сб.: Исследования по строительной механике. Труды ЛИИЖТ, вып. 190. – Л.,1962.
27. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование: Пер. с англ. – М., 1983. – 473с.
28. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкции: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 428с.
29. Чернеева И.М. Стержневая расчетная схема пластин и оболочек и МКЭ.- В сб.: Теоретические исследования по строительной механике. Труды ЛИИЖТ, вып. 284.– Л.: "Транспорт", 1968.
30. Чирас А.А. Строительная механика: Теория и алгоритмы. – М.: Стройиздат, 1989. – 255с.
31. Чирас А.А., Боркаускас А.Э., Каркаускас Р.П.: Теория и методы оптимизации упругопластических систем. – Л.: Стройиздат, 1974. – 280с.
32. Morsh E. Der Eisenbetonbau, 1st Ed., Wayssand Freytag, A. G. Neustadt, a. d. Haardt, May 1902, 118 pp.; 2nd Ed.,Verlag von Konrad Wittmer, Stuttgart, 1906, 252 pp.; 3rd Ed. (Reindorced Concrete Construction, transl. E. P. Goodrich), Mc. Graw-Hill Book Co., New York, 1909-368 pp.
33. Ritter W. Die Bauweise Hennebique. Schweizerische Bauzeitung (Zurich), Feb., 1899.
34. Struktural Optimization. Recent Devolopments und Applications. Sponsored by: The Struktural Division of the American of Socity of Civil Engeheers.– №4., 1980.–120p.