

The researches of formation of a plasma arch and distributions of average density of a current of a plasma arch, and also distribution of density of a current and thermal flows along a cavity cutting of sheet metal are carried out at direct and opposite polarity of connection the plasmatron.

УДК 539.3

**Хвиевич В.М., Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В.**

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПОВЕРХНОСТНОМ УПРОЧНЕНИИ ПУАНСОНОВ ДЛЯ ПРОБИВКИ ОТВЕРСТИЙ

**Введение.** При процессах термообработки конструктивных элементов машин и механизмов (закалке, нанесении покрытий и т.д.) важнейшим фактором является исследование распространения полей температур и термонапряжений [1, 2].

Температурное поле является одной из основных физических характеристик поверхностного упрочнения высококонцентрированными источниками нагрева. Зная изменение температуры тела в зависимости от времени, ее установившиеся значения в определенной точке, можно судить (в зависимости от условий обработки, физических свойств тел, окружающей среды) о том, какие процессы термообработки могут быть реализованы. Определение температурных полей и термонапряжений в теле детали при нагреве и охлаждении позволяет прогнозировать состав вещества после термообработки, его фазовое и структурное состояние. По значению температуры и напряжения в любой точке тела можно создать конструктивные элементы с низкой материалоемкостью при достаточной их прочности и надежности.

Для вычисления температурных полей и термонапряжений необходимо поставить и решить задачи теплопроводности и термоупругости при соответствующих краевых условиях. При реализации этих задач задаются параметры процесса упрочнения: скорость перемещения источника  $V$ , плотность теплового потока  $q$ , а также граничные и начальные условия задач теплопроводности и термоупругости. Аналитическое решение таких задач чрезвычайно сложно и, как правило, их реализация осуществляется с помощью численных методов. Одним из наиболее эффективных является метод интегральных уравнений теории потенциала. На основе этой теории дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к сингулярным интегральным уравнениям, которые удобно численно реализуются.

**Постановка и методика решения задачи.** Численное решение задачи термоупругости проводится в 2 этапа. На первом этапе решается задача теплопроводности по определению температурных полей. Для реализации этой задачи в случае движущегося источника нагрева предлагается следующий подход.

При плазменной обработке поверхности тепловая нагрузка на обрабатываемую деталь передается ограниченной площадке. Если струя ориентирована перпендикулярно поверхности, то на ней образуется участок оплавленного материала, размеры которого можно измерить. Поскольку при этом получение оплавленной зоны не является целью данного процесса, а источник непрерывно перемещается вдоль детали с заданной скоростью, то можно в первом приближении считать, что в пятне нагружения на поверхности достигается температура, равная температуре плавления материала и дальнейшего разогрева этого уже жидкого металла не происходит. В этом случае фазовые превращения можно считать отсутствующими и для определения температурного поля обрабатываемой детали можно применить классические уравнения теплопроводности второго рода с граничными условиями первого рода [3]

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $T=T(t,x,y,z)$  – искомая температура,  $a$  – коэффициент температуропроводности материала,  $x,y,z$  – координаты расчетной точки тела.

Для решения поставленной задачи используются численные ме-

тоды: метод граничных элементов теории потенциала [1, 2] и метод конечных элементов [3, 4].

Для решения задачи теплопроводности методом потенциала решение разыскивается в виде потенциалов простого (2) или двойного слоев (3), которые вне точек поверхности, по которой проводится интегрирование, являются решениями уравнения теплопроводности:

$$V(x,t) = \int_0^t ad\tau \left[ \int_L T(x,t,y,\tau)v(y,\tau) dl \right], \quad (2)$$

$$W(x,t) = \int_0^t ad\tau \left[ \int_L \frac{\partial T}{\partial n} \mu(y,\tau) dl \right]. \quad (3)$$

где  $x, y$  – текущая и параметрическая точки интегрирования,  $\mu, v$  – плотности потенциала двойного и простого слоя соответственно.

Потенциал (3) используется в случае реализации задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода, выражение (2) – в случае решения краевых задач с граничными условиями второго и третьего рода.

При задании на поверхности тела граничных условий первого рода  $F = F(y,t)$ , что соответствует рассматриваемой задаче, получено интегральное уравнение для определения плотности теплового потока двойного слоя  $\mu(y,\tau)$ :

$$\pm \frac{1}{2} \mu(x,t) + \frac{4a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(\sqrt{2a(t-\tau)})^5} \int_L K(y,x,t-\tau) \mu(y,\tau) dl = F(y,t) \quad (4)$$

Ядро  $K(y,x,t-\tau) = e^{-\left(\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right)} [c \cdot I_1(B) - b \cdot I_0(B)]$  интегрального уравнения представляет собой произведение показательной функции на функцию Бесселя первого рода. Знак «+» используется для внутренней задачи, «-» – для внешней.

Уравнение (4) является линейным интегральным уравнением второго рода. Оно носит Фредгольмов характер по переменной  $L$  и имеет признак уравнения Вольтерра по переменной  $t$ . В результате решения этого уравнения определяется плотность  $\mu$  потенциала двойного слоя, что позволяет найти распределение температуры в любой точке рассматриваемой области  $L$  в данный момент времени путем подстановки данной плотности в выражение (3) потенциала двойного слоя. Необходимо отметить также, что ядро уравнения (4) имеет сингулярную особенность в точке  $x = y, t = \tau$ .

На втором этапе решается задача термоупругости:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = \rho \ddot{u}_i + (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T_{,i} - X_i \quad (5)$$

с соответствующими краевыми условиями.

Решение (5) разыскивается в виде, предложенном Гудьером:

$$u_i = u_i^0 + u_i^T \quad (6)$$

где  $u_i^0$  – решение однородного дифференциального уравнения, а  $u_i^T$  – частное решение уравнения (5), которое разыскивается в виде градиента некоторой бигармонической функции

**Гарбачевский Виталий Владимирович**, магистрант кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

$$u_i^T = \text{grad}W. \quad (7)$$

Функция  $W$  удовлетворяет уравнению (7) в виде:

$$\Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha (T - T_0). \quad (8)$$

Для определения напряжений используется формула:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^T, \quad (9)$$

где  $\sigma_{ij}^T = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta W \delta_{ij} \right)$  – температурные добавки напряжений,  $\sigma_{ij}^0$  соответствует  $u_{ij}^0$ .

Окончательно с учетом (8) выражения для температурных добавок перемещений и напряжений имеют вид:

$$u_i^T(x) = \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_L \left\{ \frac{dT(y)}{dn_y} r \beta_i (2 \ln r - 1) - \right. \quad (10)$$

$$\left. T(y) [2\beta_i \cos \varphi + n_i(y)(2 \ln r - 1)] \right\} dl_y,$$

$$\sigma_{ij}^T = \frac{E\alpha}{4\pi(1-\nu)} \int_L \left\{ \frac{dT(y)}{dn_y} [\delta_{ij}(1+2 \ln r) - 2\beta_j \beta_i] + \right. \quad (11)$$

$$\left. + T(y) \left[ n_i(y)\beta_j + n_j(y)\beta_i - 2\beta_j \beta_i \cos \varphi - \delta_{ij} \cos \varphi \right] \right\} dl_y.$$

Система сингулярных интегральных уравнений относительно плотности  $v_i(y)$  имеет вид:

$$\mu_i(x_L) + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L \left\{ \mu_i(y) \cos \psi [(1-2\nu) + 2\beta_j^2] + \right. \quad (12)$$

$$\left. + \mu_j(y) \{ (1-2\nu) [n_j(x)\beta_i - n_i(x)\beta_j] + 2\beta_j \beta_i \cos \psi \} \right\} \frac{dl_y}{r(x,y)} = P_{np},$$

где  $P_{np} = P_i^0 + P_i^T$  – приведенная нагрузка, равная сумме механической и температурной поверхностной нагрузки.

Численная реализация интегральных уравнений термоупругости также построена на базе метода механических квадратур. Интегралы вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса.

В результате замены интегралов в (12) конечными суммами получается алгебраическая система уравнений:

$$X + QY = p, \quad (13)$$

где  $X$  и  $Y$  – столбцы неизвестных плотностей,  $p$  – столбец свободных членов.

По найденным значениям плотностей могут быть определены все компоненты тензора напряжений и деформаций в произвольной точке рассматриваемой области.

Порядок решения задачи следующий. Основными исходными данными задачи по расчету напряжений при плазменном упрочнении, помимо уравнений (1) и (5) с соответствующими начальными и граничными условиями, являются: количество точек разбиения границы области, количество шагов по времени, коэффициенты линейного теплового расширения  $\alpha$ , теплопроводности, Пуассона, размеры массивов плотностей, координаты точек границы области. На 1-м этапе решается уравнение (1), в результате решения которого находится распределение температуры в любой точке упрочняемого тела в требуемый момент времени. Далее определяются температурные добавки перемещений  $u_i^T$ , напряжений  $\sigma_{ij}^T$  и фиктивная температурная нагрузка  $p_i^T$ . На 2-м этапе решается система (12) относительно плотности потенциала  $\mu$ , после чего определяются перемещения и напряжения по формулам (6) и (9) соответственно.

Для численного решения построенных интегральных уравнений аппроксимируется геометрия рассматриваемой области и входящие в ГИУ краевые функции. Дискретные представления границы тела осуществляются в случае плоской задачи с использованием одномерных конечных элементов различной формы. В ходе пошагового продвижения по времени находятся неизвестные граничные перемещения и напряжения [5].

Для реализации алгоритма составлена программа на алгоритмическом языке «FORTRAN».

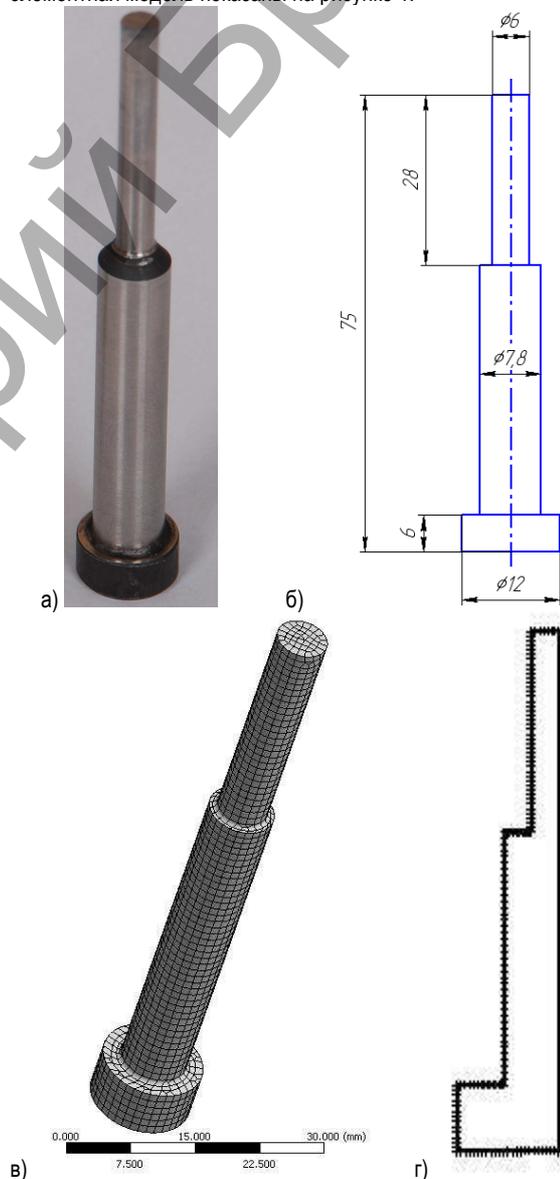
**Стационарный тепловой анализ пуансона.** Рассматривается решение стационарной задачи термоупругости при поверхностной плазменной закалке верхнего торцевого сечения пуансона ( $T=650$  °C).

Материал – сталь X12M, теплоемкость  $c = 750 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda = 45 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ , коэффициент темпера-

турного расширения  $\alpha = 15 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$ . Граничные условия соответ-

ствовали случаю приложения конвекции по внешним поверхностям модели (коэффициент конвекции  $1000 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м}^2)$ ). К верхней грани пуансона прикладывалась температура  $650$  °C. При статическом анализе нижняя грань пуансона считалась неподвижной. В качестве математического аппарата решения задачи использовался конечно-элементный комплекс «ANSYS» [3, 4], а также гранично-элементное решение с помощью разработанной программы.

Чертеж пуансона, его конечно-элементная и гранично-элементная модель показаны на рисунке 1.



а) внешний вид; б) схема; а) конечно-элементная модель; б) гранично-элементная модель

Рис. 1. Пуансон

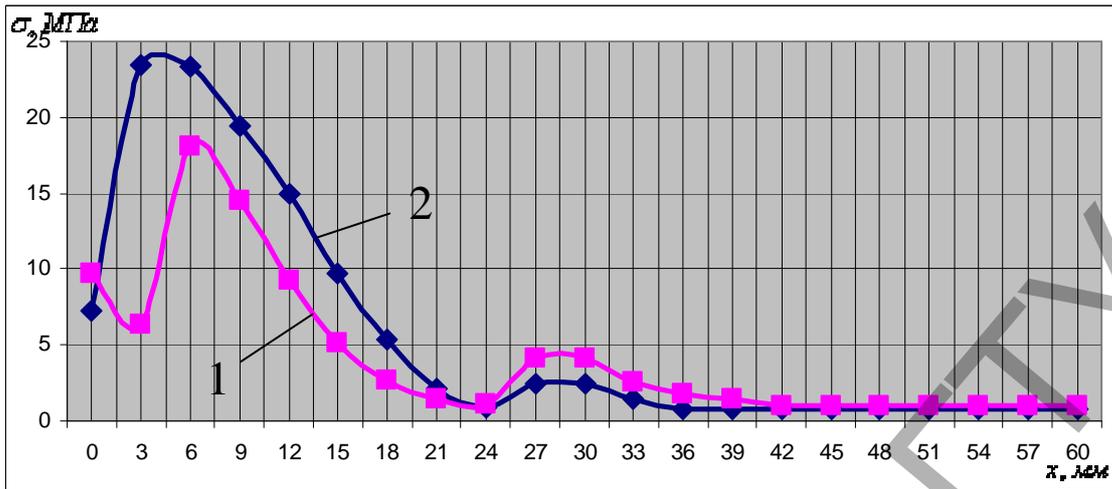


Рис. 3. Типичная зависимость эквивалентных напряжений от координаты в момент времени 1 с: 1 – на наружной поверхности, 2 – вдоль оси симметрии

Достоинством гранично-элементной модели является возможность разбивать только внешнюю границу (рисунок 1 в), что позволяет значительно упростить расчет. Кроме того, вследствие симметрии имеется возможность рассматривать половину поперечного сечения, которое аппроксимировалось граничными элементами. Наружный контур разбивался равномерно 50 граничными элементами на длине 28 мм и 50 граничными элементами на длине 31 мм. В непосредственной близости к внутреннему углу для повышения точности расчетов применяется неравномерное разбиение, которое реализуется введением соответствующих коэффициентов.

На рисунках 2–4 приведены типичные зависимости распределения температурных полей, термонапряжений и перемещений в различных точках пуансона для момента времени 1 с.

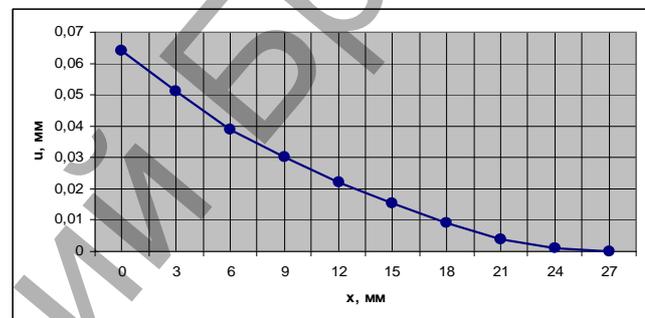


Рис. 4. Зависимость суммарных перемещений от координаты в момент времени 1 с

Как видно из рисунка 4, в сечении при  $x=28$  мм, в котором возрастает диаметр, происходит рост эквивалентных напряжений. Наиболее напряженными являются точки, удаленные на расстоянии 4–7 мм от нагруженной поверхности, в которых напряжения достигают 24 МПа. Суммарные перемещения убывают при переходе от свободного конца пуансона к закрепленному и имеют значения 0,064 мм на свободном торце.

**Нестационарный тепловой анализ пуансона.** Граничные условия в случае нестационарного теплового анализа соответствовали случаю приложения температурной нагрузки по внешним поверхностям модели (коэффициент конвекции  $1000 \text{ Вт}/(\text{К}\cdot\text{м}^2)$ ). К верхней грани пуансона прикладывалась температура  $650 \text{ }^\circ\text{C}$  в течение 10 с. При статическом анализе нижняя грань пуансона считалась неподвижной.

На рисунках 5–9 приведены типичные поля температур, напряжений и перемещений для моментов времени 1 с и 10 с.

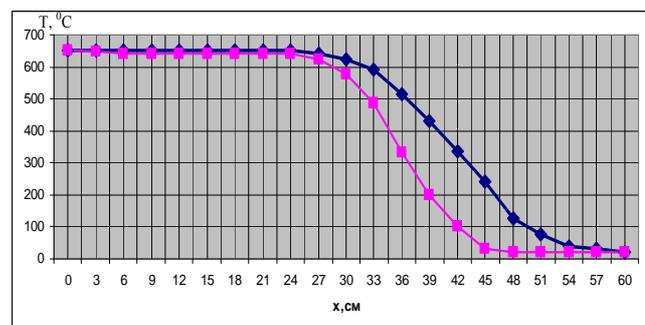
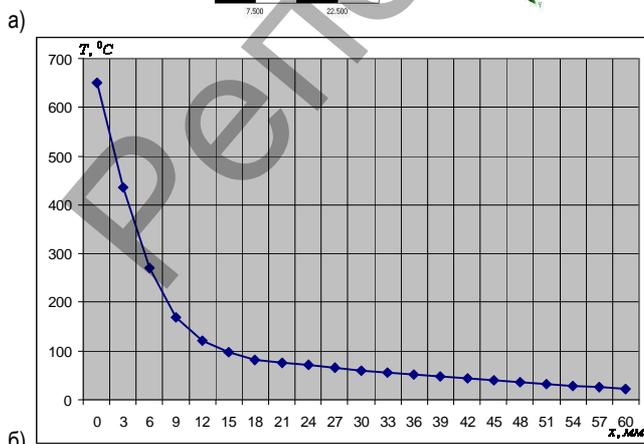
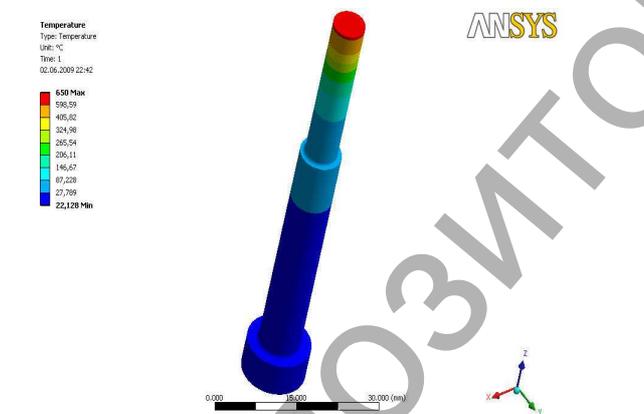


Рис. 5. Зависимость температуры от координаты вдоль оси вращения в различные моменты времени

а) решение МКЭ, б) решение методом ГИУ  
Рис. 2. Поле температур в момент времени 1 с

Таблица 1. Результаты расчета температур вдоль оси вращения в зависимости от координаты

$x, \text{см}$	$T, ^\circ\text{C}$ ( $t=1\cdot\text{с}$ )	$T, ^\circ\text{C}$ ( $t=10\cdot\text{с}$ )
0	650	650
3	647	650
6-24	642	650
27	623	642
30	578	623
33	485	591
36	333	516
39	200	431
42	100	336
45	30	240
48	22	126
51	22	78
54	22	40
57	22	33
60	22	22

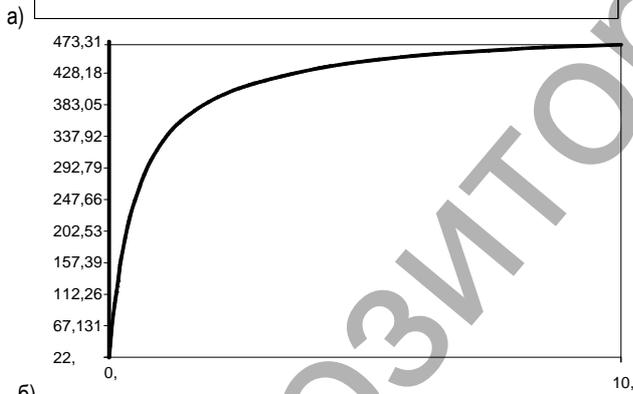
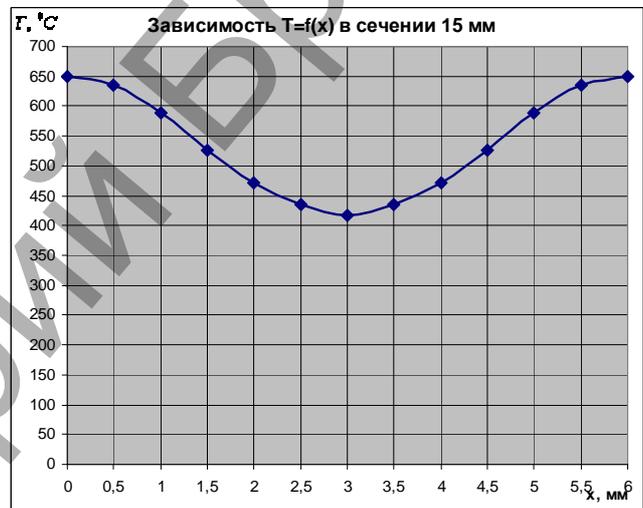
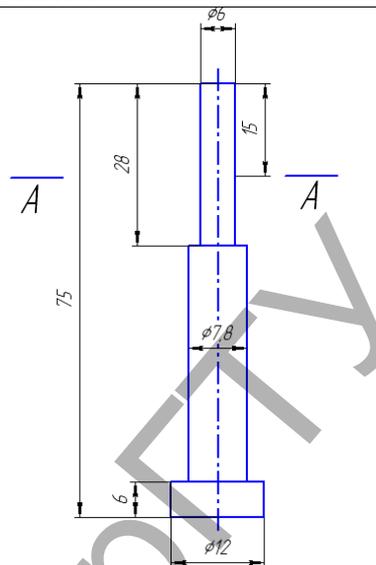


Рис. 7. Зависимость температуры от радиуса в сечении  $x=15$  мм в момент времени  $t=0,5$  с (сечение А-А)

а) решение методом граничных интегральных уравнений,  
б) конечно-элементное решение (результат ANSYS)

Рис. 6. Зависимость температуры от времени на средней грани пуансона

На оси симметрии вблизи изменения диаметра пуансона происходит резкий рост эквивалентных напряжений. В момент времени  $t=1$  с опасными являются точки на оси посередине рабочей части длиной 28 мм и в непосредственной близости от перепада диаметра при расстоянии от свободного торца 30 мм на утолщенной части пуансона диаметром 7,8 мм, где температурные напряжения достигают 59 МПа. При  $t=10$  с опасными являются точки на части с диаметром 6 мм при расстоянии 26...27 мм. Это объясняется геометрией пуансона.

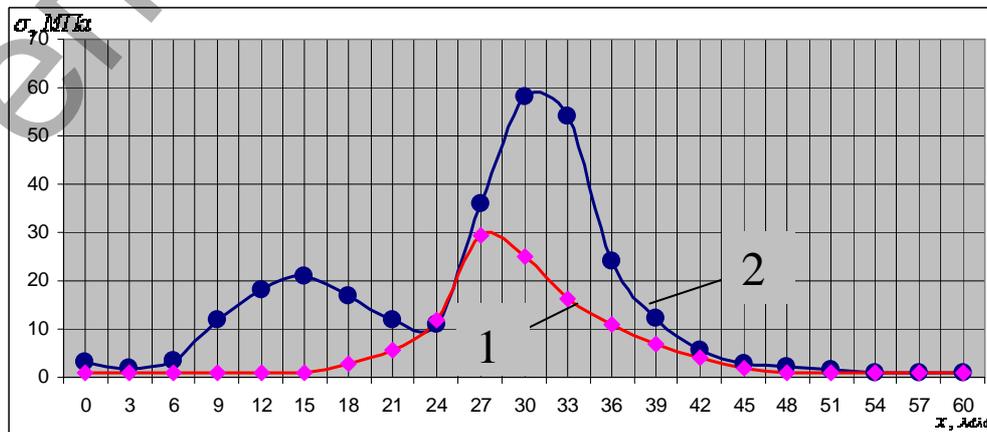


Рис. 8. Зависимость суммарных напряжений от координаты вдоль оси симметрии: 1 –  $t=10$  с, 2 –  $t=1$  с

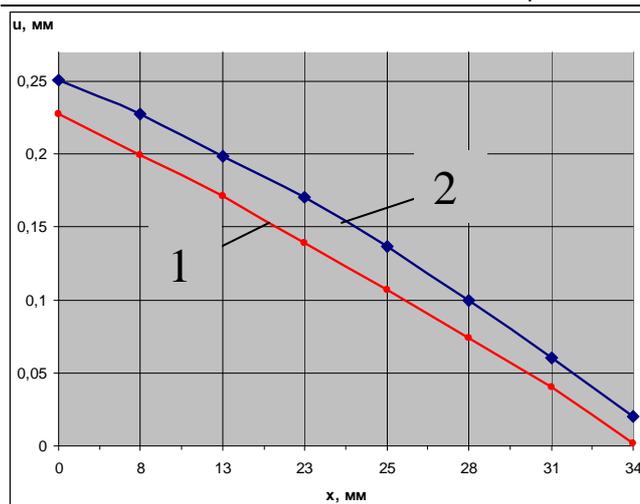


Рис. 9. Суммарные перемещения в сечении в различные моменты времени: 1 –  $t = 1$  с, 2 –  $t = 10$  с

Кроме того, проведены исследования термонапряжения и перемещения в различные моменты времени в точках на наружном контуре. Результаты показывают, что опасными являются точки в местах изменения диаметра с 6 до 7,8 мм.

Рассмотренные программы представляют возможность пользователю вести анализ полей температур и термонапряжений для тел с произвольной геометрией границы области и различными краевыми условиями, в т.ч. и многосвязных областей. Имеется возможность редактирования исходных данных и варьирования параметров нагрева и свойств материала, а также использования движущихся источников тепла.

Следует отметить, что разработанная программа позволяет решать задачи при одновременном действии механической нагрузки и нестационарных полей температур.

#### HVISEVICH V.M., VEREMEJCHIK A.I., GARBACHEVSKIJ V.V. Numerical account of temperature fields and thermal effort at superficial hardening punch for a punched hole of apertures

In the present work the results of account and visualization of fields of temperatures, movings and pressure arising in punch for a punched hole of apertures under action of a concentrated high-temperature source of heat, received with application of functionalities of a method of the boundary integrated equations and certainly - element package ANSYS Workbench are submitted.

УДК 621.74.045

Иванькович А.А., Лисовский А.Л.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЛИТЬЯ КАЗАНА ЧУГУННОГО В УСЛОВИЯХ ОАО «ТЕХНОЛИТПОЛОЦК»

**Введение.** Разработка систем автоматизированного проектирования кокильной оснастки на протяжении долгого времени остается одним из самых важных и в то же время сложнейших вопросов литейного производства. От решения этого вопроса в значительной степени зависит уровень технологии и степень автоматизации процесса кокильного литья.

Благодаря рационально выбранному подходу к конструированию кокиля можно добиться хорошего качества получаемых отливок и высокой стойкости кокильной оснастки. В последнее время методы моделирования технологических процессов постепенно вытесняют традиционные методы расчетов, используемые при проектировании кокильных отливок и оснастки. Математические методы позволяют с высокой долей вероятности предсказывать свойства будущей реальной отливки или оснастки, прогнозировать возможности образования тех или иных дефектов.

**Методика исследования.** Анализ многочисленных научно-технических публикаций показывает, что на предприятиях литейного производства республики Беларусь и стран СНГ при проектировании кокильной оснастки в значительной степени доминируют традицион-

**Заключение.** В данной статье проведено исследование напряженно-деформированного состояния пробивного пуансона при стационарном и нестационарном температурных нагружениях. Разработан алгоритм и проведена численная реализация построенных интегральных уравнений задач стационарной и нестационарной термоупругости [5]. Построены графики распределения температуры в зависимости от координат и времени. Получены зависимости распределения компонентов напряжения и перемещения.

Результаты определения перемещений, напряжений и деформаций сравнивались с результатами расчетов, полученных с помощью программного комплекса ANSYS, построенного на базе метода конечных элементов.

Полученные результаты нестационарного температурного анализа могут быть непосредственно использованы для определения оптимальных режимов работы плазмотронов и других высококонцентрированных источников нагрева, позволяющих проводить поверхностную обработку металлоизделий высокотемпературной плазменной струей.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия [и др.] – М.: Мир, 1987. – 524 с.
- Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд – М.: Мир, 1987. – 328 с.
- Кундас, С.П. Компьютерное моделирование процессов термической обработки сталей: монография – Мн.: Бестпринт, 2005. – 313 с.
- Чигарев, А.В. ANSYS для инженеров / А.В. Чигарев, А.С. Кравчук – М.: Машиностроение-1, 2004. – 466 с.
- Веремейчик, А.И. Граничные интегральные уравнения двумерных нестационарных краевых задач несвязанной термоупругости // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Мн.: УП «Технопринт», 2001. – С. 99–102.

Материал поступил в редакцию 10.10.11

ные методы, не использующие методы математического моделирования и опирающиеся на полуэмпирические методы расчета кокиля [1, 2]. К методам математического моделирования как к крайнему варианту прибегают лишь в тех случаях, когда невозможно добиться необходимых результатов (заданного качества отливок, требуемой стойкости оснастки и др.) методами традиционных расчетов. Одна из основных причин состоит в том, что в настоящее время для решения проблем проектирования кокильной оснастки предлагаются различные САД системы, позволяющие повысить методы проектирования с использованием методов машинной графики. В то же время известно, что разрабатываемая оснастка для кокиля должна учитывать особенности затвердевания отливки и процессы заполнения кокиля. Следует учитывать и процессы формирования напряжений, как в кокиле, так и в отливке. А здесь обычные САД-системы оказываются не достаточно эффективны.

Моделирующие системы не предназначены для генерации технологических параметров. Это часто неожиданно для тех, кто ждет от программного обеспечения в рамках САПР автоматически генерируемых готовых технологических решений. Иногда в моделирующие си-

Иванькович А.А., Лисовский А.Л. Полоцкий государственный университет.  
Беларусь, 211440, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.