МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

по курсу _«Высшая математика»_

для студентов
электронно-информационных специальностей

II семестр

Брест 2007

УДК 517.9
ББК 22.11

В соответствии с действующей программой для студентов первого курса электронно-информационных специальностей (II семестр) подобраны задачи и упражнения по темам: интегрирование функций одной переменной; функции нескольких переменных; обыкновенные дифференциальные уравнения; кратные интегралы; криволинейные и поверхностные интегралы. Содержатся краткие теоретические сведения и наборы заданий для аудиторных и индивидуальных работ.

Составители: Тузик Т.А., доцент
Тузик А.И., профессор, к. ф. - м. н.,
Журавель М.Г., ассистент.

Рецензент: зав. кафедрой высшей математики БрГУ им. А.С. Пушкина,
к. ф. – м. н., доцент Сендер Н.Н.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Определение 1. Функция F(x) называется *первообразной* от функции f(x) на данном промежутке[a, b], если $F'(x) = f(x)$ на этом промежутке.

Если у данной функции существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Две различные первообразные от одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Определение 2. *Неопределенным интегралом* от функции f(x) на некотором промежутке [a, b] называется множество всех первообразных этой функции на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Если *F*(x) - какая- либо первообразная от f(x) ,то по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная. ....

....

....

....

Нахождение неопределенного интеграла от функции f(x) называется *интегрированием* данной функции. Эта операция является обратной *дифференцированию*.

Простейшие методы интегрирования включают в себя нахождение неопределенных интегралов с помощью основных правил интегрирования и таблицы интегралов, интегрирование путем внесения производной под знак дифференциала.

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, a = const.$ 2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

3. *Если* $\int f(x)dx = F(x) + C,$ *а* $u = \varphi(x)$ *– дифференцируемая функция, то*

$\int f(u)du = F(u) + C.$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1.$	2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\mid x\mid + C.$
3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	4	$\int e^x dx = e^x + C$
5.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	6.	$\int \cos x dx = \sin x + C.$
7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$	8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

9	$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$	10.	$\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C.$
11.	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$	12.	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$
13.	$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert+C$	14.	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert+C.$

Из основного правила 3) вытекает, что все интегральные формулы 1)- 14) остаются справедливыми, если в них вместо переменной x подставить некоторую дифференцируемую функцию от x. При этом для сведения рассматриваемого интеграла к табличному интегралу иногда достаточно представить dx по одной из формул:

$1. dx=d(x+a),\ 2. dx=\frac{1}{a}d(ax),\ 3. dx=\frac{1}{a}d(ax+b).$

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

$1. \int(4x^3-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}+1)dx=$

Воспользуемся основными правилами 1) ,2) и табличным интегралом 1)

$$=4\int x^3dx-2\int x^{\frac{2}{3}}dx+2\int x^{-3}dx+\int dx=4\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+2\frac{x^{-2}}{-2}+x+C=x^4-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{x^2}+x+C.$$

$$2. \int\frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(4x)^2+3^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x)}{\sqrt{(4x)^2+3^2}}=\frac{1}{4}\ln\lvert 4x+\sqrt{16x^2+9}\rvert+C.$$

$$3. \int\frac{dx}{(2x-1)^5}dx=\int(2x-1)^{-5}dx=\frac{1}{2}\int(2x-1)^{-5}d(2x-1)=\frac{1}{-8}(2x-1)^{-4}+C=-\frac{1}{8(2x-1)^4}+C.$$

$$4. \int\frac{dx}{\sin^2 6x}=\frac{1}{6}\int\frac{d(6x)}{\sin^2 6x}=-\frac{1}{6}ctg6x+C.$$

$$5. \int\cos(x^4+x)(4x^3+1)dx=\int\cos(x^4+x)d(x^4+x)=\sin(x^4+x)+C$$

$$6. \int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

После выделения полного квадрата в знаменателе и поднесения под дифференциал воспользовались табличным интегралом 9).

В последующих примерах будет применен метод внесения производной под знак дифференциала. Он основан на использовании формулы $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$, из которой, в частности, следует, что

$$xdx=\frac{1}{2}(x^2)'dx=\frac{1}{2}d(x^2),\quad x^2dx=\frac{1}{3}(x^3)'dx=\frac{1}{3}d(x^3),\quad \frac{dx}{x}=(\ln x)'dx=d(\ln x),$$

$$\cos xdx=(\sin x)'dx=d(\sin x),\quad \sin xdx=-(\cos x)'dx=-d(\cos x),\quad e^xdx=(e^x)'dx=d(e^x),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x}=(tgx)'dx=d(tgx),\quad \frac{dx}{\sin^2 x}=-(ctgx)'dx=-d(ctgx),$$

$$\frac{dx}{1+x^2}=(arctgx)'dx=d(arctgx).$$

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

$$7.\ \int x^2\sqrt{4+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int(4+x^3)^{\frac{1}{2}}(4+x^3)'dx=\frac{1}{3}\int(4+x^3)^{\frac{1}{2}}d(4+x^3)=\frac{2}{9}(4+x^3)^{\frac{3}{2}}+C=$$
$$=\frac{2}{9}\sqrt{(4+x^3)^3}+C.$$

$$8.\ \int\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int\frac{(\ln(x+1))'dx}{\ln(x+1)}=\int\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\ln|\ln(x+1)|+C$$

$$9.\ \int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{(\arcsin x)'dx}{\arcsin x}=\int\frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}=\ln|\arcsin x|+C.$$

$$10.\ \int\frac{x-arctgx}{1+x^2}dx=\int\frac{xdx}{1+x^2}-\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\int arctgx\,d(arctgx)=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}arctg^2x+C.$$

Задания для аудиторной работы

Найти неопределенные интегралы

1. $\int(2\sqrt{x^5}-\frac{8}{x^3}+\frac{4x}{\sqrt{x^3}})dx$, 2. $\int(\frac{3}{\sqrt{5x^2+4}}-\frac{1}{3x^2-4})dx$, 3. $\int(\frac{6}{(2+4x)^{13}}-5(3x+1)^{15})dx$,

4. $\int(2\sin(1-6x)+4e^{3+5x})dx$, 5. $\int\sqrt{\sin x}\cos x dx$, 6. $\int\sqrt{1+\ln x}\frac{dx}{x}$, 7. $\int\frac{dx}{\sin^2(1-3x)}$,

8. $\int\frac{dx}{2x^2+6x+4}$, 9. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{5+x^4}}$, 10. $\int\frac{tg^4x}{\cos^2x}dx$, 11. $\int\frac{2x-5\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 12. $\int\frac{e^{3x}}{e^{6x}+25}dx$,.

13. $\int arctg^3 4x\frac{dx}{1+16x^2}$.

Задания для индивидуальной работы

Вариант № 1

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int(2\sqrt{x^9}-\frac{10}{x^6}+\frac{4x^4}{\sqrt{x^3}})dx$, 2. $\int(\frac{7}{\sqrt{4x^2+4}}-\frac{1}{3x^2+18})dx$, 3. $\int(\frac{1}{(2x-1)^5}-(3x+4)^{10})dx$,

4. $\int(2\sin(1-8x)+6e^{3+4x})dx$, 5. $\int\sin x\cos^2 xdx$, 6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$, 7. $\int\frac{dx}{\cos^2(3x+2)}$,

8. $\int\frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$, 9. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{7+x^3}}$, 10. $\int\frac{tg^2x+1}{\cos^2x}dx$, 11. $\int\frac{x-2arctgx}{1+x^2}dx$, 12. $\int\frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx$,.

13. $\int arctg^5 3x\frac{dx}{1+9x^2}$.

Вариант № 2

Найти неопределенные интегралы

1. $\int(9\sqrt{x^5}-\frac{1}{2x}-\frac{8\sqrt{x}}{x^2})dx$, 2. $\int(\frac{3}{\sqrt{1-2x^2}}+\frac{1}{2x^2-4})dx$, 3. $\int(\frac{6}{(7x-11)^{13}}+(5x+3)^9)dx$,

4. $\int(2\cos(8-4x)+6e^{3-7x})dx$, 5. $\int\sin x\cos^{-2}xdx$, 6. $\int\frac{\ln^4(x-2)dx}{(x-2)}$, 7. $\int\frac{dx}{\sin^2(3x+2)}$,

8. $\int\frac{dx}{x^2-8x-9}$, 9. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+5x^4}}$, 10. $\int\frac{1+tgx}{\cos^2 x}dx$, 11. $\int\frac{2x-5arctg^2x}{1+x^2}dx$, 12. $\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}+5}dx$,.

13. $\int\sqrt{\arcsin 2x}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Вариант № 3.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int(2\sqrt{x^5}-\frac{5}{x^4}+\frac{7x}{\sqrt{x^3}})dx$, 2. $\int(\frac{3}{\sqrt{2x^2+4}}-\frac{1}{3x^2+4})dx$, 3. $\int(\frac{2}{(8+3x)^{15}}-(8x+7)^{20})dx$,

4. $\int(2\sin(4-5x)+8e^{3+5x})dx$, 5. $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx$, 6. $\int\frac{dx}{x^2+4x+6}$, 7. $\int\frac{dx}{\cos^2(3+7x)}$,

8. $\int\frac{dx}{(2+x)\ln^3(x+2)}$, 9. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^3}}$, 10. $\int\frac{\sqrt{ctgx+1}}{\sin^2 x}dx$, 11. $\int\frac{2x-5arctgx}{1+x^2}dx$, 12. $\int\frac{e^{4x}}{e^{8x}+5}dx$,

13. $\int\arccos^2 3x\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Вариант № 4.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int(4\sqrt{x^3}-\frac{5}{x^3}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^3}})dx$, 2. $\int(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{3x^2+1})dx$, 3. $\int(\frac{7}{(2+8x)^{13}}+(4-5x)^{10})dx$,

4. $\int(3\sin(4-6x)+5e^{7x+8})dx$, 5. $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin^5 x}}$, 6. $\int\sqrt{1+\ln(x+4)}\frac{dx}{x+4}$, 7. $\int\frac{dx}{\sin^2(7-4x)}$,

8. $\int\frac{dx}{2x^2+4x+6}$, 9. $\int\frac{x^4dx}{x^{10}+8}$, 10. $\int\frac{ctg^4x}{\sin^2 x}dx$, 11. $\int\frac{3x+6\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 12. $\int\frac{e^{3x}}{e^{6x}+4}dx$,

13. $\int\arcsin^3 2x\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

1.2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Существует два способа замены переменной в неопределенном интеграле.

а) Если в неопределенном интеграле подынтегральное выражение $f(x)dx$ имеет вид $g((\varphi(x))\varphi'(x)dx$, то, положив $\varphi(x)=t$, приведем интеграл к виду

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(t)dt.$$

Пусть *F(t)*- первообразная от g(t), тогда

$\int g(t)dt = F(t)+C,\quad a\quad \int f(x)dx = F(\varphi(x))+C.$

Рассмотренная выше операция внесения производной $\varphi'(x)$ под дифференциал в интеграле $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ эквивалентна замене переменной $\varphi(x)=t.$

б) Если неопределенный интеграл имеет вид

$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx,$

то вводим новую переменную интегрирования по формуле $t=\psi(x).$

Если преобразованный интеграл оказывается табличным, находим его и возвращаемся к переменной *x*.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int x\sqrt{x-1}\,dx = 2\int (t^2+1)t^2\,dt = 2\int (t^4+t^2)dt = 2\int t^4dt + 2\int t^2dt = \frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C =$

$= \frac{2}{15}t^3(3t^2+5)+C = \frac{2}{15}\sqrt{(x-1)^3}(3x+2)+C,$ где $x-1=t^2$, $x=t^2+1$, $dx=2tdt.$

2. $\int (1+\sin x)^{\frac{1}{3}}\cos x dx = \int t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C = \frac{3}{4}(1+\sin x)^{\frac{4}{3}}+C,$ *где* $t=1+\sin x.$

3. $\int \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt{x+1}}dx = \left| \begin{matrix} x+1=t^4, & dx=4t^3dt \\ x=t^4-1. & \end{matrix} \right| = \int \frac{t+2}{t^2}4t^3dt = 4\int (t^2+2t)dt = \frac{4}{3}t^3+4t^2+C =$

$= \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}} + 4\sqrt{x+1}+C.$

4. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x=a\sin t, \sin t=\frac{x}{a}, & dx=a\cos tdt \\ \cos t=\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}, & t=\arcsin\frac{x}{a} \end{matrix} \right| = a\int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cos tdt =$

$= a^2\int \cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C = \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C =$

$= \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})+C = \frac{1}{2}(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2})+C.$

Рассмотрим применение замены переменной при интегрировании некоторых функций, *содержащих квадратный трехчлен.*

а) Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\ \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

Для их нахождения надо у квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной функции выделить полный квадрат, то есть записать в виде

$$ax^2+bx+c=a(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2})+c-\frac{b^2}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

Затем сделать замену переменной $x+\frac{b}{2a}=t,\ x=t-\frac{b}{2a},\ dx=dt.$

Рассмотрим следующие **примеры**.

$$5.\ \int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+x+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}=\left|\begin{matrix}x+\frac{1}{2}=t, & x=t-\frac{1}{2}\\ dx=dt.\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{9}{4}}dt=I$$

Разобьем полученный интеграл на сумму (алгебраическую) двух интегралов. Первый интеграл найдем способом внесения производной под знак дифференциала, а второй интеграл будет табличным.

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{t^2+\frac{9}{4}}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+\frac{9}{4}}=\frac{1}{4}\left(\int\frac{d(t^2+\frac{9}{4})}{t^2+\frac{9}{4}}-\int\frac{dt}{t^2+\frac{9}{4}}\right)=\frac{1}{4}(\ln(t^2+\frac{9}{4})-\frac{2}{3}arctg\frac{2t}{3})+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(x^2+x+\frac{5}{2})-\frac{1}{6}arctg\frac{2x+1}{3}+C.$$

$$6.\ \int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=\int\frac{3x-1}{\sqrt{(x-2)^2+4}}dx=\left|\begin{matrix}x-2=t, & dx=dt\\ x=t+2.\end{matrix}\right|=\int\frac{3t+5}{\sqrt{t^2+4}}dt=3\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}}+$$

$$+5\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2+4)}{\sqrt{t^2+4}}+5\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=3\sqrt{t^2+4}+5\ln|t+\sqrt{t^2+4}|+C=3\sqrt{x^2-4x+8}+$$

$$+5\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}|+C.$$

б) Для нахождения интегралов вида $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ применяется замена вида $\frac{1}{x-\alpha}=t.$

Задания для аудиторной работы

Найти интегралы

$$1.\ \int\frac{dx}{1+\sqrt{x+3}},\quad 2.\ \int e^{\sqrt{4-3x}}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}},\quad 3.\ \int\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{x}}dx,$$

$$4.\ \int\frac{(x+2)dx}{2x^2+6x+4},\quad 5.\ \int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{2x^2+4x+6}},\quad 6.\ \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}.$$

Задания для индивидуальной работы

Найти неопределенные интегралы

Вариант № 1.

1. $\int x\sqrt{1-2x}dx,$ 2. $\int e^{\sqrt{5+x}}\dfrac{dx}{\sqrt{5+x}},$ 3. $\int\dfrac{\sqrt[3]{x+1}+3}{\sqrt{x+1}}dx,$

4. $\int\dfrac{xdx}{x^2+6x+14},$ 5. $\int\dfrac{(2x-1)dx}{\sqrt{2x^2+8x+10}},$ 6. $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{2x^2+1}}.$

Вариант № 2.

1. $\int\dfrac{dx}{2+\sqrt{3-x}},$ 2. $\int e^{\sqrt{4-3x}}\dfrac{dx}{\sqrt{4-3x}},$ 3. $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}dx,$

4. $\int\dfrac{xdx}{2x^2+4x+9},$ 5. $\int\dfrac{(4x+1)dx}{\sqrt{x^2-2x+4}},$ 6. $\int\dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{1-3x^2}}.$

Вариант № 3.

1. $\int x\sqrt{6-7x}dx,$ 2. $\int\sin\sqrt{3x+4}\dfrac{dx}{\sqrt{4+3x}},$ 3. $\int\dfrac{\sqrt[3]{x}+2x-1}{\sqrt{x}}dx,$

4. $\int\dfrac{(x+1)dx}{x^2+6x+13},$ 5. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+8x+5}},$ 6. $\int\dfrac{dx}{(x-2)\sqrt{2x^2+1}}.$

Вариант № 4.

1. $\int\dfrac{dx}{2+\sqrt{1-4x}},$ 2. $\int\cos\sqrt{3-5x}\dfrac{dx}{\sqrt{3-5x}},$ 3. $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}}}dx,$

4. $\int\dfrac{(x-1)dx}{4x^2+6x+4},$ 5. $\int\dfrac{(3x+1)dx}{\sqrt{2x^2-2x+3}},$ 6. $\int\dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x) \text{ или } \int udv=uv-\int vdu,$$

где *u=u(x) и v=v(x)*-непрерывно дифференцируемые функции.

Применение формулы целесообразно, когда под знаком интеграла имеется произведение функций разных классов. В некоторых случаях формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int\ln xdx=\left|\begin{matrix}u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right|=x\ln x-\int x\dfrac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C.$

2. $\int(2x+1)\cos 3x dx = \begin{vmatrix} u = 2x+1, & du = 2dx \\ dv = \cos 3x dx, & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix} = \frac{2x+1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3x dx =$

$= \frac{2x+1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C.$

3. $\int 2x\,arctgx\,dx = \begin{vmatrix} u = arctgx, & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = 2xdx, & v = x^2 \end{vmatrix} = x^2 arctgx - \int\frac{x^2dx}{1+x^2} = x^2 arctgx - \int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx =$

$= x^2 arctgx - \int dx + \int\frac{dx}{1+x^2} = x^2 arctgx - x + arctgx + C.$

4. $\int x^2\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \cos x dx, & v = \sin x \end{vmatrix} =$

$= -x^2\cos x + 2(x\sin x - \int \sin x dx) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$

Задания для аудиторной работы

Найти неопределенные интегралы

1. $\int(1-3x)\ln(4x)dx$, 2. $\int(2x+3)\cos 5x dx$, 3. $\int(1-x^2)\sin x dx$, 4. $\int x\,arctg2x dx$,

5. $\int(5x^2+1)e^{-2x}dx$, 6. $\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$, 7. $\int x^3e^{-x^2}dx$, 8. $\int\sin(\ln x)dx$, 9. $\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$.

Задания для индивидуальной работы

Найти неопределенные интегралы

Вариант № 1.

1. $\int x\ln(2x)dx$, 2. $\int(3-x)\sin 4x dx$, 3. $\int(x^2-4)\cos x dx$,

4. $\int\arcsin x dx$, 5. $\int(x^2-4x+3)e^{-2x}dx$, 6. $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Вариант № 2.

1. $\int x\ln(5x)dx$, 2. $\int(1-x)\cos 2x dx$, 3. $\int(3-x^2)\sin x dx$,

4. $\int\arccos x dx$, 5. $\int(x^2+3)e^{-2x}dx$, 6. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Вариант № 3.

1. $\int\ln(1-2x)dx$, 2. $\int(x-2)\cos 3x dx$, 3. $\int(2-x^2)\sin x dx$,

4. $\int(1-x)arctgx dx$, 5. $\int(x^2-4)e^{3x}dx$, 6. $\int\ln^2 x dx$.

Вариант № 4.

1. $\int(x+1)\ln(2x)dx$, 2. $\int x\sin 6x dx$, 3. $\int(x^2-4x)\cos x dx$,

4. $\int\arccos x dx$, 5. $\int(x^2+3x+2)e^{-x}dx$, 6. $\int\frac{\arcsin x dx}{x^2}$.

1.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. Рациональной функцией (рациональной дробью) называется отношение двух многочленов, то есть дробь вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ - многочлен степени *n*, $Q_m(x)$ - многочлен степени *m*.

Если $n \geq m$, то рациональная дробь называется неправильной, если *n*<*m*, то эта дробь называется правильной.

Теорема 1. Любая неправильная рациональная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Пример.

Рациональная дробь вида $\frac{x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 1}{x^3 - 2x}$ является неправильной, так как степень числителя (n=5) больше степени знаменателя (m=3).

Делим многочлен числителя «уголком» на многочлен знаменателя. Тогда в частном получим многочлен *M(x)*, а в остатке многочлен *R(x)*.

$$\frac{x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 1}{x^3 - 2x} = x^2 - 3x + 7 - \frac{6x^2 - 14x + 1}{x^3 - 2x}.$$

Простейшими рациональными функциями называются рациональные дроби следующих видов:

$$1. \frac{A}{x-a}, \qquad 2. \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, где\, D = p^2 - 4q < 0,$$

$$3. \frac{A}{(x-a)^m}, m > 1, m \in N, \quad 4. \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}, D < 0, m > 1, m \in N.$$

Интегрирование таких функций: 1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{A}{-m+1}(x-a)^{-m+1} + C,$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ *(смотрите п.2.1а)*

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m} dx$ *(см. лекции или справочник по интегралам).*

Теорема 2. Каждую правильную рациональную функцию $P(x)/Q(x)$ можно единственным образом представить в виде суммы простейших рациональных функций.

Знаменатель дроби $Q(x)$ раскладываем на множители, каждый из которых является либо степенью линейной функции $x-a$, либо степенью квадратичной функции x^2+px+q, *не имеющей действительных корней.* Например, знаменатель имеет следующее разложение:

$$Q(x) = (x-a)^k (x-b)(x^2+px+q)(x^2+px+q)^m.$$

Тогда рациональная функция $P(x)/Q(x)$ может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} + \frac{E_1x+F_1}{(x^2+px+q)^m} +$$

$$+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \dots + \frac{E_mx+F_m}{x^2+px+q},$$ *где* $A_1, A_2, \dots, A_k, B, C, D, E_1, F_1, \dots, E_m, F_m$ – действительные числа, которые надо определить.

Данное разложение предложено Лейбницем. Определим неизвестные коэффициенты (метод Иоганна Бернулли).

В полученном разложении приводим к общему знаменателю. С обеих сторон знаменатель Q(x). Приравниваем числители. Полученное равенство верно для любых x. Неизвестные коэффициенты находим или способом частных значений, или приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, или комбинируя эти два способа.

Примеры.

$$I_1 = \int \frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}dx. \quad I_2 = \int \frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}dx. \quad I_3 = \int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx.$$

а) Знаменатель дроби в интеграле I_1 раскладываем на множители.

$$Q(x) = x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$$

Каждый множитель станет знаменателем простейшей дроби.

$$\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x} = \frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Приравниваем числители. $2x^2-x+3 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$.

Это равенство справедливо для любых x. Для определения коэффициентов A, B, C применим метод частных значений. Подставим в полученное равенство корни знаменателя, получим значения для коэффициентов A, B и C.

$x=0$, $\quad 3 = A(-1)2$, $\qquad A = -3/2$

$x=1$, $\quad 2-1+3 = 3B$, $\qquad B = 4/3$

$x=-2$, $\quad 8+2+3 = C(-2)(-3)$, $\qquad C = 13/6$.

Итак, получили разложение рациональной функции на простейшие дроби

$$I_1 = \int \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int (-\frac{3}{2x} + \frac{4}{3(x-1)} + \frac{13}{6(x+2)}) dx = -\frac{3}{2} \ln|x| + \frac{4}{3} \ln|x-1| + \frac{13}{6} \ln|x+2| + c.$$

б) Подынтегральную функцию в интеграле I_2 представим в виде суммы пяти простейших дробей, так как каждый множитель в знаменателе даст столько дробей, какова его кратность.

$$\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} = \frac{(A+Bx+Cx^2)(x+1)^2 + (D+E(x+1))x^3}{x^3(x+1)^2}.$$

Приравниваем числители.

$$x^2 + 4 = (A + Bx + Cx^2)(x^2 + 2x + 1) + (D + Ex + E)x^3$$

$$x^2 + 4 = (C + E)x^4 + (B + 2C + D + E)x^3 + (A + 2B + C)x^2 + (B + 2A)x + A$$

Многочлены равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.

x^4	$C + E = 0,$	$E = -C = -13.$
x^3	$B + 2C + D + E = 0,$	$D = -B - 2C - E = 8 - 26 + 13 = -5.$
x^2	$A + 2B + C = 1,$	$C = 1 - A - 2B = 1 - 4 + 16 = 13.$
x^1.	$B + 2A = 0,$	$B = -2A = -8.$
x^0	$A = 4.$	$A = 4.$

Получили следующее разложение

$$\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2} = \frac{4}{x^3} - \frac{8}{x^2} + \frac{13}{x} - \frac{5}{(x+1)^2} - \frac{13}{x+1}.$$

Таким образом, второй интеграл равен

$$I_2 = -\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x} + 13\ln|x| + \frac{5}{x+1} - 13\ln|x+1| + c.$$

в) Рассмотрим третий интеграл. Преобразуем подынтегральную функцию.

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} = \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

$$2x^2 - 3x + 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = (A + B)x^2 + (-A + B + C)x + (A + C).$$

Приравниваем коэффициенты многочленов при одинаковых степенях переменной, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов А, В и С.

$$\begin{cases} A + B = 2, \\ -A + B + C = -3, \\ A + C = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2 - A, \\ C = 1 - A, \\ -A + 2 - A + 1 - A = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2 - A, \\ C = 1 - A, \\ 3A = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = 0, \\ C = -1. \end{cases}$$

$$I_3=\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx=\int\left(\frac{2dx}{x+1}-\frac{dx}{x^2-x+1}\right)=2\ln|x+1|-\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=2\ln|x+1|-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c.$$

Задания для аудиторной работы

Найти неопределенные интегралы

1. $\int\frac{x-4}{x^2-5x+6}dx$, 2. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$, 3. $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$, 4. $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$,

5. $\int\frac{x^2dx}{x^4-1}$, 6. $\int\frac{dx}{x^4+1}$, 7. $\int\frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

Задания для индивидуальной работы

1 -4. Разложить рациональные дроби на простейшие, не вычисляя коэффициентов.

5 -6. Найти интегралы от рациональных функций.

Вариант № 1.

1. $\frac{4x^3-2x^2+6x-1}{(x^2-1)^2}$, 2. $\frac{2x^2-7}{(x^3+16x)(x-3)}$, 3. $\frac{6x^2-3x+7}{(x+2)(x^2+4)^2}$,

4. $\frac{7x^3-10}{(x-1)^3(3x^2+x+7)}$, 5. $\int\frac{x^2+x-8}{x^3-4x}dx$, 6. $\int\frac{2x-3}{(x^2-1)(x+2)}dx$.

Вариант № 2.

1. $\frac{7x^3+x^2-4x+5}{(x^2-4)^2}$, 2. $\frac{x^3+6x+5}{(2x^2+2x+5)(x-8)^2}$, 3. $\frac{3x^2-5x+7}{(x+2)(x^2+1)}$,

4. $\frac{4x+1}{(x-3)^2(x^2+2x+5)}$, 5. $\int\frac{2x^2+6x+7}{x^3-1}dx$, 6. $\int\frac{6x^2-12x+6}{(x-2)^3}dx$.

Вариант № 3.

1. $\frac{2x^2-4}{(x+1)^2(x+3)^3}$, 2. $\frac{x^3+9}{x^3-5x^2+6x}$, 3. $\frac{2x^2-4x+6}{(x+2)^2(x^2-1)}$,

4. $\frac{2x^4+x^3+5}{(x-4)^3(x^2+5x+17)}$, 5. $\int\frac{2x^2+x+3}{x^3+2x^2-3x}dx$, 6. $\int\frac{3x+31}{(x^2+1)x}dx$.

Вариант № 4

1. $\frac{4x^3-x^2+5x-1}{(x^2-4x+3)^2(x-5)}$, 2. $\frac{3x-11}{(x^3+4x)(x^2+8x+18)}$, 3. $\frac{3x+5}{x^4-x^2}$,

4. $\frac{x^3+x^2+3}{(x^2+2)(x^2-8x+20)}$, 5. $\int\frac{x-1}{x^3+2x^2+5x}dx$, 6. $\int\frac{3x^2-6x+7}{(x+1)^2(x-2)}dx$.

1.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Определение. *Иррациональной* называется функция, у которой среди действий над аргументом есть извлечение корня.

Первообразные иррациональных функций являются элементарными функциями в сравнительно редких случаях.

Рассмотрим такие иррациональные функции, интегрирование которых сводится с помощью определенной замены переменной интегрирования к интегрированию некоторых рациональных функций.

1. Интегралы вида

$$\int R(x,\sqrt[k]{x},\sqrt[m]{x},\cdots,\sqrt[s]{x})dx,$$

где подынтегральная функция является рациональной функцией своих аргументов.

Замена $x=t^n$, где *n*- наименьшее общее кратное всех показателей $k,m,\cdots,s,$ приводит исходный интеграл интегралу от рациональной функции переменной *t*.

2. Для интегралов вида $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$ замена $ax+b=t^n$.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

1. $$\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}=\left|\begin{matrix}x=t^6, & dx=6t^5dt\\ \sqrt{x}=t^3, & \sqrt[3]{x}=t^2\end{matrix}\right|=\int\frac{t^3 6t^5dt}{t^6-t^4}=6\int\frac{t^8}{t^4(t^2-1)}dt=6\int\frac{t^4}{t^2-1}dt=$$

Рациональная дробь под интегралом неправильная, поэтому выделяем целую часть и остаток

$$=6\int\frac{(t^4-1)+1}{t^2-1}dt=6\int(t^2+1+\frac{1}{t^2-1})dt=2t^3+6t+3\ln|\frac{t-1}{t+1}|+C=2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}|+C.$$

2. $$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[6]{(x+1)^5}}=\left|\begin{matrix}x+1=t^6, & dx=6t^5dt\\ \sqrt[6]{x+1}=t, & \sqrt[3]{x+1}=t^2\end{matrix}\right|=\int\frac{(t^6-1)6t^5dt}{t^8-t^5}=6\int\frac{(t^6-1)t^5dt}{t^5(t^3-1)}=$$

$$=6\int(t^3+1)dt=6(\frac{t^4}{4}+t)+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\sqrt[6]{x+1}+C.$$

Задания для аудиторной работы

Найти интегралы от иррациональных функций

1. $\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx,$ 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-1}-\sqrt[4]{4x-1}},$ 3. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}},$ 4. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}},$

5. $\int x^3\sqrt{9-x^2}dx,$ 6. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x},$ 7. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx,$ 8. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx,$ 9. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx.$

Задания для индивидуальной работы

Найти интегралы от иррациональных функций

Вариант № 1.

$$1.\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx,\quad 2.\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}},\quad 3.\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}},\quad 4.\int\frac{dx}{\sqrt[4]{8-x}+\sqrt{8-x}}.$$

Вариант № 2.

$$1\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[12]{x^5}-\sqrt[3]{x})},\ 2.\int\frac{(\sqrt[6]{x+3}-1)}{(x+3)(1+\sqrt[3]{x+3})}dx,\ 3.\int\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2dx,\ 4.\int\frac{dx}{3\sqrt[6]{3x-4}+\sqrt{3x-4}}.$$

Вариант № 3.

$$1.\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}}dx,\quad 2.\int\frac{dx}{2\sqrt[4]{x-4}+\sqrt{x-4}},\quad 3.\int\frac{x+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx,\quad 4.\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}-9\sqrt[6]{2-5x}}.$$

Вариант № 4.

$$1.\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx,\quad 2.\int\frac{dx}{\sqrt{4x+7}+\sqrt[3]{4x+7}},\quad 3.\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x+\sqrt[3]{x^4}}dx,\quad 4.\int\frac{\sqrt{2x-1}dx}{\sqrt{2x-1}+1}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R –рациональная функция своих аргументов, с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t=tg\frac{x}{2}$ приводится к интегралу от рациональной функции переменной *t*.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\left|\begin{array}{ll} tg\frac{x}{2}=t, & \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, & dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int R_1(t)dt.$$

В ряде случаев для нахождения интеграла от тригонометрических функций удобны другие подстановки ($t=tgx,\quad t=ctgx,\quad t=\sin x,\quad t=\cos x$). Отметим некоторые **частные случаи** применения таких подстановок.

а) Если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то используется подстановка $t=\cos x$.

б) Если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то надо сделать замену переменной вида $t=\sin x$.

в) Если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то удобно использовать замену $t=tgx$.

г) $\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx \quad (m>0, n>0)$, подынтегральное выражение надо преобразовать с помощью формул понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

д) В интегралах вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$ произведения тригонометрических функций следует заменить суммой

$$\sin mx \cos nx = \tfrac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\sin mx \sin nx = \tfrac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

Примеры.

Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{ctg^6 3x}{\sin^2 3x} dx = \left| \begin{matrix} t = ctg 3x, & dt = -\dfrac{3dx}{\sin^2 3x} \\ \dfrac{dx}{\sin^2 3x} = -\dfrac{dt}{3}. & \end{matrix} \right| = -\frac{1}{3}\int t^6 dt = -\frac{1}{21}t^7 + C = -\frac{ctg^7 3x}{21} + C.$$

$$2. \int \sin^3 2x \cos^4 2x dx = \int \sin^2 2x \cos^4 2x \sin 2x dx = \left| \begin{matrix} t = \cos 2x, & dt = -2\sin 2x dx \\ \sin^2 2x = 1-\cos^2 2x = 1-t^2, & \sin 2x dx = -\dfrac{1}{2}dt \end{matrix} \right| =$$

$$-\frac{1}{2}\int (1-t^2)t^4 dt = \frac{1}{2}\int (t^6 - t^4) dt = \frac{t^7}{14} - \frac{t^5}{10} + C = \frac{\cos^7 2x}{14} - \frac{\cos^5 2x}{10} + C.$$

$$3. \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int (2\sin x \cos x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (dx - \cos 4x dx) = \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

$$4. \int tg^5 dx = \left| \begin{matrix} t = tgx, & x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}. & \end{matrix} \right| = \int \frac{t^5 dt}{1+t^2} = \int \frac{t^4}{1+t^2} t dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^4}{1+t^2} d(t^2) = \left| t^2 = z \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{z^2}{1+z} dz = \frac{1}{2}\int \frac{(z^2-1)+1}{z+1} dz = \frac{1}{2}\int (z - 1 + \frac{1}{z+1}) dz = \frac{1}{2}(\frac{z^2}{2} - z + \ln|z+1|) + C =$$

$$= \frac{1}{4}(tg^4 x - 2tg^2 x + 2\ln(1+tg^2 x)) + C.$$

5. $\int \sin x \sin 3x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 4x)\sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \sin 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x \sin 2x dx =$
$= \frac{1}{4}\int \sin 4x dx - \frac{1}{4}\int(\sin 6x - \sin 2x)dx = -\frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$

6. $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 5} = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2} = t, & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(\frac{4t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5)} =$
$= \int \frac{2dt}{4t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 4} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{t+1}{\sqrt{3}} + C =$
$= \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{1 + tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$

7. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x(2 + ctg^2 x)} = -\int \frac{d(ctgx)}{ctg^2 x + 2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{ctgx}{\sqrt{2}} + C.$

Задания для аудиторной работы

Найти интегралы от тригонометрических функций

1. $\int \frac{\sin 8x}{16 - \cos^2 8x} dx$, 2. $\int \sqrt[9]{\cos^7 x}\, \sin 2x dx$, 3. $\int \cos^4 2x dx$, 4. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$,

5. $\int \sin 3x \cos 5x dx$, 6. $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 1}$, 7. $\int \frac{dx}{16\sin^2 x + \cos^2 x}$, 8. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$,

9. $\int \frac{\cos^4 + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx.$

Задания для индивидуальной работы

Найти неопределенные интегралы

Вариант № 1.

1. $\int \frac{tg^7 3x}{\cos^2 3x} dx$, 2. $\int \sin^7 x \cos^5 x dx$, 3. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$,

4. $\int \frac{dx}{\cos^4 5x}$, 5. $\int \cos 3x \sin 6x dx$, 6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x}.$

Вариант № 2.

1. $\int \cos^4 5x \sin 5x dx$, 2. $\int \sin 2x \cos^2 x dx$, 3. $\int \sin^4 3x dx$,

4. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$, 5. $\int \sin 7x \sin x dx$, 6. $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x}.$

Вариант № 3.

1. $\int\frac{\sin x dx}{4+\cos^2 x}$, 2. $\int\sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx$, 3. $\int\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$,

4. $\int\frac{dx}{\sin^5 x\cos x}$, 5. $\int\sin x\cos 9x\,dx$, 6. $\int\frac{dx}{5-4\sin x+6\cos x}$.

Вариант № 4.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{tg^3 2x\cos^2 2x}}$, 2. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$, 3. $\int x\sin^2(5x^2)dx$,

4. $\int\frac{\sin^4 3x}{\cos^2 3x}dx$, 5. $\int\cos 6x\cos 8x\,dx$, 6. $\int\frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x+6}$.

Варианты самостоятельной работы

Вариант 1.

1. $\int\frac{x^2-72}{x^4+x^3-12x^2}dx$,
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})}$,
3. $\int\frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

Вариант 2.

1. $\int\frac{x^4 dx}{x^3+2x^2-x-2}$,
2. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$,
3. $\int\frac{\cos x\,dx}{7\sin^2 x+4\cos^2 x}$.

Вариант 3.

1. $\int\frac{3x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$,
2. $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$,
3. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x-6\cos^2 x}$.

Вариант 4.

1. $\int\frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$,
2. $\int x\sqrt{x-8}\,dx$,
3. $\int\frac{\sin^2 4xdx}{\cos^4 4x}$.

Вариант 5.

1. $\int\frac{(4x-19)dx}{x^3-x^2-4x+4}$,
2. $\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$,
3. $\int tg^3 x\,dx$.

Вариант 6.

1. $\int\frac{4x^2+9}{x^3+4x^2+4x}dx$,
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x}+\sqrt[4]{3x}}$,
3. $\int\cos^2 3x\cos 9x\,dx$.

1.5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЕГО СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть функция определена на отрезке [а; в]. Разобьем произвольным образом этот отрезок на n частичных отрезков $[x_{i-1}, \ x_i]$ точками $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$. На каждом из отрезков выберем произвольную точку ξ_i, $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ и составим так называемую *интегральную сумму* функции f(x) на отрезке [a, b]

$$\sigma_n=\sum f(\xi_i)\Delta x_i, \quad где\,\Delta x_i=x_i-x_{i-1}.$$

Определенным интегралом функции *f(x)* в пределах от *x=a* до *x=b* называется предел интегральной суммы

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx \quad и \quad \max\Delta x_i\to 0.$$

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], то этот предел всегда существует независимо от разбиения отрезка на частичные отрезки длиной Δx_i и выбора на них точек ξ_i.

Таким образом, функция, непрерывная на отрезке, *интегрируема* на нем.

Основные свойства определенного интеграла

$$1.\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad 2.\ \int_a^a f(x)dx = 0, \quad 3.\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

$$4.\ \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx, \quad 5.\ \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \ c = const.$$

6. Если $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) на отрезке [a, b], то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ($\int_a^b f(x)dx \leq 0$).

7. Если $f(x) \geq \varphi(x)$ $x \in [a,b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$.

8. Если подынтегральная функция интегрируема на отрезке [a, b] и для этого отрезка справедливо равенство

$$m \leq f(x) \leq M, \ \text{то} \ m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

9. **Теорема о среднем.** Если подынтегральная функция непрерывна на отрезке [a,b], то существует такая точка $c \in (a,b)$, что справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

10. Если f(x) непрерывна и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то имеет место равенство $\Phi'(x) = f(x)$, то есть производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу x равна подынтегральной функции при том же значении x.

Правила вычисления определенного интеграла

1. *Формула Ньютона - Лейбница.* Если f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и F(x)- какая- либо первообразная функции f(x) на этом отрезке, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. *Замена переменной в определенном интеграле.* Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем для любого

$t \in [\alpha,\beta]$ $\quad \varphi(t) \in [a,b]$, $\quad \varphi(\alpha) = a$, $\quad \varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

3. *Интегрирование по частям.* Пусть функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ дифференцируемы на отрезке [a, b], тогда справедлива формула

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

4. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$ *если* $f(-x) = -f(x);$ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, *если* $f(-x) = f(x).$

Примеры. Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_1^8 (\sqrt[3]{x}-1)dx = \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)dx = (\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x)\Big|_1^8 = (\frac{3}{4}\cdot 2^4 - 8) - (\frac{3}{4}-1) = 12-8-0.75+1 = 4{,}25.$$

Таким образом, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=1, x=8, y=0, y=\sqrt[3]{x}-1$, равна 4,25(ед^2).

$$2. \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} x=\sin t, & dx=\cos t dt \\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}, t=\frac{\pi}{4}, & x=\frac{\sqrt{3}}{2}, t=\frac{\pi}{3} \end{matrix} \right| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 t dt}{\sin^2 t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= (-ctgt - t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(ctg\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}) + (ctg\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) = -(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}) + (1+\frac{\pi}{4}) =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}161.$$

$$3. \quad I = \int_e^{e^2} x\ln x dx$$

Применим формулу интегрирования по частям.

$$I = \left| \begin{matrix} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x} \\ dv = xdx, & v=\frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = (\frac{x^2}{2}\ln x)\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2 dx}{2x} = \frac{e^4}{2}\cdot 2 - \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_e^{e^2} = e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}(3e^4 - e^2) \approx 39{,}10.$$

4. Вычислить среднее значение функции

$y = \dfrac{1}{2\cos x + 3}$ на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Применим теорему о среднем значении.

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \quad \Leftrightarrow \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

$$f(c) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\cos x+3} = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, & x=0, t=0, x=\frac{\pi}{2}, t=1 \end{matrix} \right| = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)(2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3)} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{2-2t^2+3+3t^2} = \frac{4}{\pi}\int\frac{dt}{t^2+5} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{t}{\sqrt5}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{\pi\sqrt5}arctg\frac{\sqrt5}{5} \approx 0{,}2394.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить определенные интегралы

$1.\int_1^2(2x^2+\frac{2}{x^4})dx,\quad 2.\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}},\quad 3.\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}},\quad 4.\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}},$

$5.\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx,\quad 6.\int_3^4\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx,\quad 7.\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\cos^2 x},\quad 8.\int_1^5\frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}.$

9. Найти среднее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{1+2\sin^2 x}$ на отрезке $[0, \frac{\pi}{4}]$.

10. Исследовать функцию на экстремум $F(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2dt, \quad x\in R.$

Задания для индивидуальной работы

1.-3. Вычислить определенные интегралы.

4. Найти среднее значение функции *f(x)* на отрезке [a, b].

Вариант № 1.

$1.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[3]{\sin x}},\quad 2.\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}},\quad 3.\int_1^{\sqrt3}arctg\frac{1}{x}dx,\quad 4.f(x)=\frac{1}{\sqrt{25+3x}}, a=-3, b=0.$

(Ответы: 1) -0,086; 2) 1,571; 3) 0,468; 4) 0,222.)

Вариант № 2.

$1.\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx,\quad 2.\int_{1,5}^2 arctg(2x-3)dx,\quad 3.\int_{2\sqrt3}^{2\sqrt8}\frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^2}},\quad 4.f(x)=xe^{-x},\ a=0,\ b=1.$

(Ответы: 1) 1,000; 2) 2,576; 3) 42,667; 4) 0,264.)

Вариант № 3.

$$1.\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}},\quad 2.\int_2^3\frac{(x+2)dx}{x^2(x-1)},\quad 3.\int_0^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}dx,\quad 4.\ f(x)=\frac{\sin(\ln x)}{x},a=1,\ b=e.$$

(Ответы: 1) 12; 2) 0,0959; 3) 6,2832; 4) 0,2675)

Вариант № 4.

$$1.\int_0^1 3x^2(1+e^{x^3})dx,\quad 2.\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x},\quad 3.\int_{0,5}^{0.5\sqrt{3}}\frac{x^3dx}{\sqrt{(\frac{5}{8}-x^4)^3}},\quad 4.\ f(x)=(x-1)\ln x,\ a=1,\ b=2.$$

(Ответы: 1) e; 2) 0,796; 3) 1,3333; 4) 0,25.)

1.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Несобственными интегралами называются интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций.

а) Пусть функция *f(x)* непрерывна при $x\in[a,+\infty)$. Тогда несобственный интеграл от функции f(x) в пределах от а до $+\infty$ определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad (1)$$

Если предел (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если этот предел не существует или бесконечен, то интеграл называется *расходящимся.*

Геометрически интеграл (1) в случае положительной подынтегральной функции f(x)>0 представляет собой площадь фигуры, ограниченной графиком функции y=f(x), прямой x=a и осью Ox. Если интеграл сходится, то площадь фигуры выражается определенным числом; для расходящегося интеграла площадь фигуры бесконечна.

Аналогично определяются несобственные интегралы от непрерывных функций по промежуткам $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx, \qquad (3)$$

Интеграл (3) называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (3); если хотя бы один из интегралов расходится, то будет расходится и интеграл по всей числовой оси.

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ И РАСХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

Пусть для $x \in [a,+\infty)$ $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, $a > 0$.

1. Если $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$

2. Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл от большей функции $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$

3. Если для $x \in [a,+\infty)$ $f(x) > 0, \varphi(x) > 0,$ $a > 0$ существует предел отношения

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \ne 0,$ то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково, т. е. сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{сходится, если } p > 1, \\ \text{расходится, если } 0 < p \le 1. \end{cases}$

4. Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ $(a > 0)$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx,$ причем его сходимость называется абсолютной.

б) Интегралы от неограниченных функций.

Если функция f(x) непрерывна для $x \in [a,b)$ *и* $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x) = \infty,$ то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{4}$$

Этот интеграл сходится, если предел равен конечному числу.

Геометрически такой несобственный интеграл для f(x)>0 представляет собой площадь фигуры, ограниченной графиком функции y=f(x), прямой x=a и вертикальной асимптотой x=b.

Если подынтегральная функция f(x) непрерывна для $x \in (a,b]$ и в точке x=a имеет бесконечный разрыв, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx \tag{5}$$

Если функция f(x) имеет бесконечный разрыв в точке $c \in (a,b)$ и непрерывна для $x \in [a,c)$ *и* $x \in (c,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx. \tag{6}$$

Если оба предела в правой части равенства (6) существуют и конечны, то исходный интеграл называется сходящимся; и он расходится, если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности.

Справедливы признаки сходимости и расходимости интегралов от неограниченных функций, аналогичные признакам сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами. Эталонами для сравнения служат интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \ (\alpha > 0) \quad \text{или} \quad \int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \ (\alpha > 0),$$

которые сходятся при $0 < \alpha < 1$, а расходятся при $\alpha \geq 1$.

Примеры. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(e^{-x^2})\Big|_0^b =$

$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b^2}} + \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$, значит, данный интеграл сходится.

2. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}(2-x)^{-\frac{1}{2}} d(2-x) = -\lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{2-x}\Big|_0^{2-\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-3}dx = \lim_{a\to 0}(\frac{x^{-2}}{-2})\Big|_a^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2} = \infty$, следовательно, исходный интеграл расходится.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + 3x^2}$.

Подынтегральная функция при x=0 терпит бесконечный разрыв. Очевидно, что при x>0 справедливо неравенство

$\frac{1}{\sqrt[4]{x} + 3x^2} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. Причем $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{4}{3}\lim_{a\to 0}\sqrt[4]{x^3}\Big|_a^1 = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$.

Значит, исходный интеграл сходится по первому признаку сходимости.

5. $\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}} dx$. Оценим подынтегральную функцию для всех x из промежутка интегрирования, получим неравенство.

$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$.

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim_{b\to\infty}\sqrt{x}\Big|_1^b = 2\lim_{b\to\infty}\sqrt{b} - 2 = \infty.$

По второму признаку сходимости данный интеграл расходится.

Задания для аудиторной работы

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$, 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$, 3. $\int\limits_1^{4} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$, 4. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$,

5. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^3-6x^2}$, 6. $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3-4x^2}$, 7. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{x^2-5x+6}$, 8. $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \sin x dx$.

Исследовать интегралы на сходимость.

8. $\int\limits_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$, 9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+4}dx$, 10. $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{x^2-6x+8}$,

11. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$, 12. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}dx$.

Задания для индивидуальной работы

1.-2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

3.-4. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

Вариант № 1.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$, 2. $\int\limits_2^{3} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$, 3. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$, 4. $\int\limits_0^{2} \frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(x^5+3x^4)^7}}$.

Ответы: 1) π; 2) 2,236; 3) *сх*; 4) *расх.*

Вариант № 2.

1. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$, 2. $\int\limits_2^{5} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}$, 3. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(3x^2+4x+1)dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^{10}}}$, 4. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

Ответы: 1) 0,059; 2) 3,142; 3) *сх.*; 4) *расх.*

Вариант № 3.

1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{arctgx dx}{x^2+1}$, 2. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$, 3. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+\sqrt[4]{x^3})dx}{\ln(1+x)}$, 4. $\int\limits_0^{2} \frac{x^8dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

Ответы: 1) 1.234; 2) 1.814; 3) *сх.*; 4) *сх.*

Вариант № 4.

1. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+8x+17}$, 2. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}$, 3. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{arctg 0,5x}}$, 4. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^8 x}}$.

Ответы: 1) 2,897; 2) 0.676; 3) *сх.*; 4) *расх.*

1.7. Геометрические приложения определенных интегралов. Вычисление площадей плоских фигур

Рассмотрим следующие случаи.

1. Площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $y=f(x)$ ($f(x)>0$,если $a<x<b$), ординатами $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс (рис. 1), вычисляется интегралом

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

2. Площадь криволинейной трапеции (рис. 2), ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, непрерывной кривой $x=\varphi(y)$ $(\varphi(y)\geq 0 \quad y\in[c,d])$ и осью Оу, вычисляется по формуле $S=\int\limits_c^d \varphi(y)dy.$

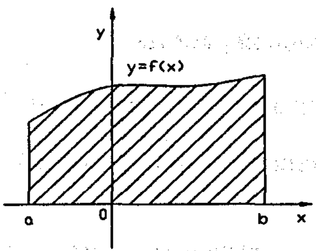


Рис. 1

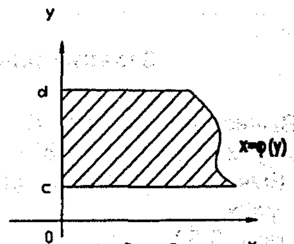


Рис. 2

3. - 4. Площади фигур на рис. 3 и рис. 4 соответственно вычисляются по формулам $S=\int\limits_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx.$ $\quad S=\int\limits_c^d (\varphi_1(y)-\varphi_2(y))dy.$

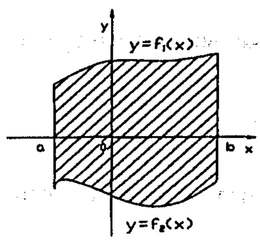


Рис. 3

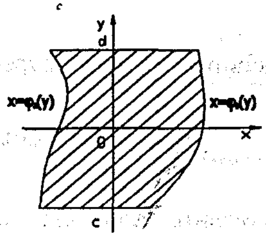


Рис. 4

5.Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $x=a$, $x=b$, осью Ох и кривой, заданной параметрически $x=x(t), y=y(t)$, то площадь фигуры находим по формуле

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)dt, \quad где \quad a=x(\alpha), \quad b=x(\beta).$$

6. Площадь фигур в полярных координатах.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)d\varphi. \qquad S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_1^2(\varphi)-r_2^2(\varphi))d\varphi.$$

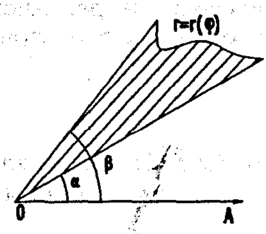


Рис. 5

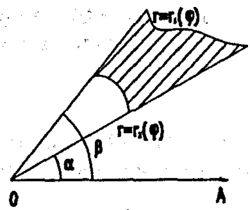


Рис. 6

Задания для аудиторной работы

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+4x$ и прямой $y=x+4$. (Ответ: 20,83)

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=9x$ и прямой $y=3x$.

(Ответ: 0,5.)

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2=x^2-x^4$.

(Ответ:1,(3).)

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y=\frac{1}{x^2+1}$ и ее асимптотой.

(Ответ: π.)

5.Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды

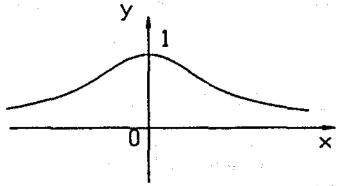
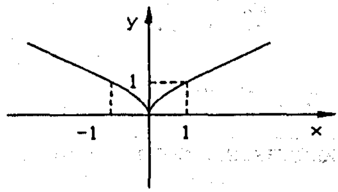
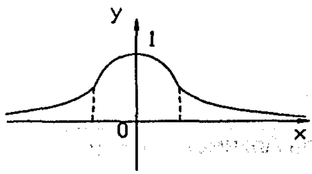
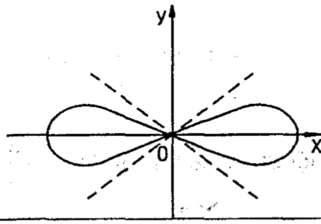
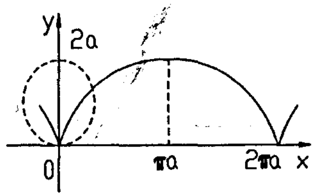
$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ и осью Ox. (Ответ: $3a^2\pi$.)

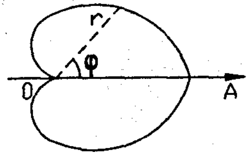
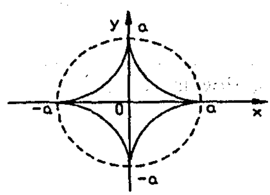
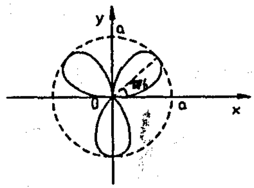
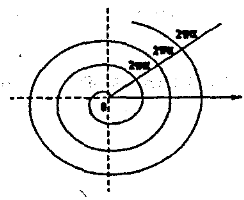
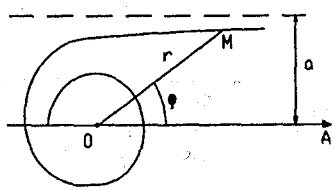
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей линии $x=3t^2, y=4t-t^3$.

(Ответ: 51,2.)

7.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=a\sin 3\varphi$. (Ответ: $0{,}25\pi a^2$)

Некоторые кривые (для справок)

1.Локон Аньези $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.	
2. Парабола Нейла $y = \sqrt[3]{x^2}$.	
3.Кривая Гаусса $y = \exp(-x^2)$.	
4.Лемниската Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.	
5. Циклоида $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$	

6. Кардиоида $r = a(1+\cos\varphi)$.	
7. Астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, или $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$	
8.Трехлепестковая роза $r = a\sin 3\varphi$.	
9.Спираль Архимеда $r = a\varphi$.	
10.Гиперболическая спираль $r = \dfrac{a}{\varphi}$	

Задания для индивидуальной работы

1. - 3. Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией (перейти к полярным координатам).

Вариант № 1.

1. $y^2 = 1 - x, \quad x = -3.$ 2. $x = 3\cos t, y = 5\sin t.$ 3. $r = a(1 + \cos\varphi).$ 4. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2.$

(*Ответы*: 1) $\frac{32}{3}$; 2) 15π; 3) $1{,}5\pi a^2$; 4) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.)

Вариант № 2.

1. $y = x^2 - 6x + 9, \quad 4x - y = 12.$ 2. $x = 3\cos^3 t, y = 3\sin^3 t.$ 3. $r = a\cos 2\varphi.$

4. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(4x^2 + y^2).$ (*Ответы*: 1) $\frac{32}{3}$; 2) $\frac{27}{8}\pi$; 3) $0{,}5\pi a^2$; 4) $\frac{5\pi a^2}{2}$.)

Вариант № 3.

1. $y^2 + 8x = 16, y^2 - 24x = 48.$ 2. $x = 2\cos t - \cos 2t, \; y = 2\sin t - \sin 2t.$

3. $r^2 = a^2 \sin 2\varphi.$ 4. $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2.$

(*Ответы*: 1) $\frac{32}{3}\sqrt{6}$; 2) $6\pi a^2$; 3) $0{,}5a^2$; 4) $\frac{\pi}{8}a^2$.)

Вариант № 4.

1. $y^2 = x + 5, \; y^2 = -x + 4.$ 2. $x = 2t^2, y = 9t - t^3$ (*петля*).

3. $r = 2 + \cos\varphi$ (*улитка Паскаля*). 4. $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 - y^2.$

(*Ответы*: 1) $18\sqrt{2}$; 2) $259{,}2$; 3) $4{,}5\pi$; 4) π.)

1.8. Вычисление длин дуг плоских кривых.
1.9. Вычисление объемов тел

Рассмотрим правила вычисления длины дуги кривой.

1. Если дуга кривой АВ задана уравнением $y = f(x), a \le x \le b$, то длина дуги АВ определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Если дуга кривой АВ задана уравнением $x = \varphi(y), c \le y \le d$, то длина дуги АВ находится по формуле

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}dy.$$

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

3. Если известно полярное уравнение дуги AB: $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то то длина ее дуги равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Правила вычисления объемов тел.

1. Если известна площадь S=S(x) сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox,

$a \le x \le b$, то объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

2. Объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox (Oy) криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx \quad \left(V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)dx\right).$$

3.Пусть фигура ограничена линиями

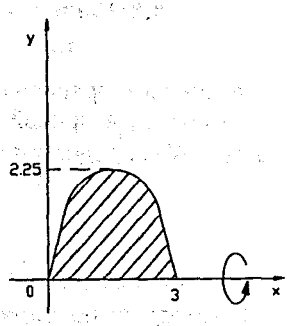
$y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_2(x) \ge f_1(x)$, $x = a$, $x = b$.

Объем тела вращения этой фигуры вокруг оси Ox вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx.$$

4. Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения находится по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \cdot \sin\varphi\, d\varphi.$$



Пример 1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = 3x - x^2$ и осью Ox.

При вычислении объемов тел вращения нет необходимости изображать сами тела; достаточно построить плоские фигуры, которые будут вращаться вокруг указанной оси.

$$V = \pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4)dx = \pi\left(3x^3 - \frac{6x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3 = \pi\left(81 - \frac{3 \cdot 81}{2} + \frac{3 \cdot 81}{5}\right) =$$

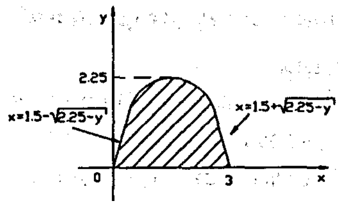
$$= 81\pi(1 - 1{,}5 + 0{,}6) = 8{,}1\pi.$$

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры из **примера 1** вокруг оси Oy.

Найдем требуемый объем двумя способами.

а) $V_y = 2\pi\int_0^3 x(3x-x^2)dx = 2\pi\int_0^3 (3x^2-x^3)dx = 2\pi(x^3-\frac{x^4}{4})\Big|_0^3 = 2\pi(27-\frac{81}{4}) = \frac{54\pi}{4} = 13,5\pi.$

б) Преобразуем уравнение параболы следующим образом $y = 3x - x^2$, $x^2 - 3x = -y$, $(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} = -y$, $(x-1,5)^2 = 2,25 - y$, $x - 1,5 = \pm\sqrt{2,25-y}$.



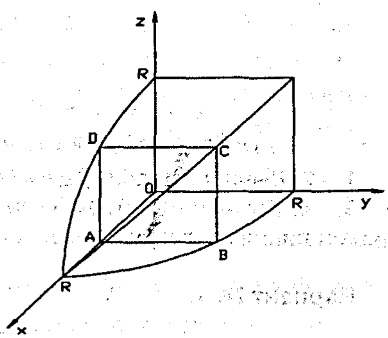
Из рисунка очевидно, что уравнение левой ветви параболы $x = 1,5 - \sqrt{2,25-y}$ $(x = \varphi_1(y))$, уравнение правой ветви параболы $x = 1,5 + \sqrt{2,25-y}$ $(x = \varphi_2(y))$, $0 \le y \le 2,25$.

Тогда для вычисления объема используем формулу

$$V_y = \pi\int_0^{2,25}(\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y))dy = \pi\int_0^{2,25}((1,5+\sqrt{2,25-y})^2 - (1,5-\sqrt{2,25-y})^2)dy = \pi\int_0^{2,25} 6\sqrt{2,25-y}\,dy =$$

$$= -6\pi\frac{\sqrt{(2,25-y)^3}}{1,5}\Big|_0^{2,25} = -4\pi(0-\sqrt{2,25^3}) = 4\pi\cdot 2,25\cdot 1,5 = 13,5\pi.$$

Пример 3. Оси двух круговых цилиндров, радиус основания которых равен R, пересекаются под прямым углом. Найти объем тела, составляющего общую часть цилиндров.



Решение. Рассмотрим два круговых цилиндра с взаимно перпендикулярными осями, их уравнения $x^2+y^2=R^2$ и $x^2+z^2=R^2$.

Изобразим одну восьмую часть тела, расположенную в первом октанте.

Рассмотрим сечения данного тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox.

$x = const$, $y = AB = \sqrt{R^2-x^2}$, $z = AD = BC = \sqrt{R^2-x^2}$.

Таким образом, сечение представляет собой квадрат АВСД, площадь которого равна

$$S(x) = AB \cdot BC = R^2 - x^2.$$

$$V = 8\int_0^R S(x)dx = 8\int_0^R (R^2 - x^2)dx = 8(R^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^R = 8(R^3 - \frac{R^3}{3}) = \frac{16}{3}R^3.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить длину дуги

1. Параболы $y = 2\sqrt{x}$ от точки А(0; 0) до точки В(1; 2).
(Ответ: $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) \approx 2{,}29$.)

2. Кривой $x = 0{,}25y^2 - 0{,}5\ln y$ от $y_1 = 1$ до $y_2 = e$.
(Ответ: $0{,}25(e^2+1)$.)

3. Кривой $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t,\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t,\ t \in [0, \pi]$.

4. Одного витка архимедовой спирали $r = a\varphi$.

5. Кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$.

6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $4z = x^2 + 2y^2$, $z = 1$.

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями, вокруг указанной оси

7. $y = 4x - x^2, \quad y = x, \quad Ox.$
8. $y = x^2, \quad 4x - y = 0, \quad Oy.$
9. $y = x^3, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad Ox$ и $Oy.$

Задания для индивидуальной работы

1. - 2. Вычислить длину дуги кривой.

3. - 4. Вычислить объем тела вращения фигуры, ограниченной указанными линиями, вокруг указанной оси.

Вариант № 1.

1. $y = \ln(1 - x^2),\ x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}5.$ 2. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ t_1 = 0,\ t_2 = \ln\pi.$

3. $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2,\ y = 2,\ Oy.$ 4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{15} = 1,\ x \ge 0,\ Ox.$

(Ответы: 1. $\ln 3 - 0{,}5$, 2. $\sqrt{2}(\pi - 1)$; 3. $\frac{64}{3}\pi$; 4. $1{,}12\pi$).

Вариант № 2.

1. $x = \ln\cos y, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{\pi}{3}.$ 2. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

3. $x^2 - y^2 = 9, \quad x = 6, \quad Ox.$ 4. $y = e^x + 6, \quad y = e^{2x}, x = 0, \quad Oy.$

(*Ответы*: 1. $\ln(2+\sqrt{3})$; 2. $6a$; 3. 36π; 4. $3\pi(2\ln 3 - 1)\ln 3$.)

Вариант № 3.

1. $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}, \ y_1 = 1, \ y_2 = 4.$ 2. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{9}{16}.$

3. $xy = 4, \quad 2x + y - 6 = 0, \quad Ox.$ 4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad x^2 - \frac{y^2}{15} = 1, \quad Ox.$

(*Ответы*: 1. ${}^{14}/_{3}$; 2. ${}^{1}/_{\sqrt{2}}$; 3. ${}^{4\pi}/_{3}$; 4. $1{,}12\pi$.)

Вариант № 4.

1. $y = \sqrt{2x - x^2} - 1, \quad x_1 = 0{,}25, \quad x_2 = 1.$ 2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}$ (*астроида*).

3. $y^2 = 16x, \ x = 4, \ Oy.$ 4. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1, \ \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = -1, \quad Ox.$

(*Ответы*: 1. $\arcsin 0{,}75$; 2. 48; 3. $204{,}8\pi$; 4. 70π.)

1.10. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач физики и механики

1. Путь, пройденный материальной точкой.

Если точка движется прямолинейно со скоростью v=v(t), то путь, пройденный ею за промежуток времени $[t_1, t_2]$, равен $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$

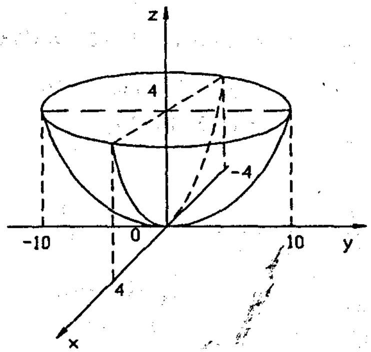
2. Вычисление работы переменной силы.

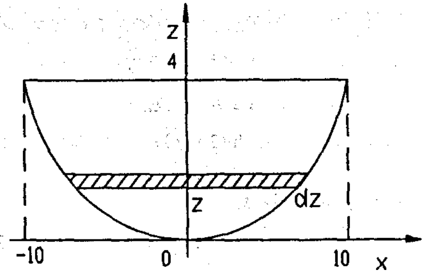
Пусть под действием силы F(s) материальная точка движется по прямой Os. Работа этой силы на участке пути [a, b] определяется по формуле

$$A = \int_a^b F(s)ds.$$

Пример. Котел, имеющий форму эллиптического параболоида $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$ высотой H=4м, заполнен жидкостью плотностью $\delta = 0{,}8\,{}^{m}/_{м^3}$.

Вычислить работу, которую нужно затратить на перекачивание жидкости через край котла.





Если z=4, то в сечении параболоида этой плоскостью получим эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{100}=1.$

На высоте z выделим элементарный слой жидкости толщиной dz. В силу того, что dz мало, можно считать этот слой эллиптическим цилиндром с высотой dz, в основании которого эллипс $\frac{x^2}{4z}+\frac{y^2}{25z}=1.$

Элементарный объем этого цилиндра равен $dV=\pi\cdot 2\sqrt{z}\cdot 5\sqrt{z}dz=10\pi\cdot zdz,$ его масса $dm=\delta\cdot dV=0{,}8\cdot 10\pi\cdot zdz=8\pi\cdot zdz.$

Элемент работы, затраченной на перекачивание элемента массы dm на расстояние H-z = 4-z, будет равен

$$dA=(H-z)\cdot gdm=(4-z)g\cdot 8\pi\cdot zdz=8\pi\cdot g(4z-z^2)dz.$$

$$A=\int_0^4 8\pi\cdot g(4z-z^2)dz=8\pi\cdot g(2z^2-\frac{z^3}{3})\Big|_0^4=8\pi\cdot g\cdot 16(8-\frac{4}{3})=8\pi\cdot g\cdot 64\cdot\frac{5}{3}=26285{,}568(kDж).$$

3. Вычисление силы давления жидкости на пластинку

Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности жидкости, то сила давления P жидкости на эту пластинку вычисляется по закону Паскаля:

$$P=g\rho hS,$$

где g- ускорение свободного падения, S- площадь пластинки, ρ- плотность жидкости.

Если пластинка погружена в жидкость вертикально, то сила давления жидкости на единицу площади изменяется с глубиной погружения.

Пусть пластинка, имеющая форму криволинейной трапеции, погружена в жидкость так, что боковые стороны этой трапеции параллельны поверхности жидкости. Тогда сила давления на пластинку вычисляется по формулам:

$$P=g\cdot\int_a^b\rho\cdot xf(x)dx, \quad (1). \qquad P=g\cdot\int_a^b\rho\cdot x(f_2(x)-f_1(x))dx. \quad (2)$$

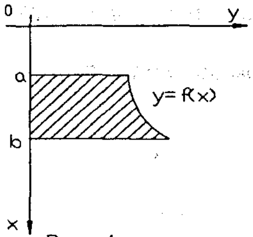


Рис. 1

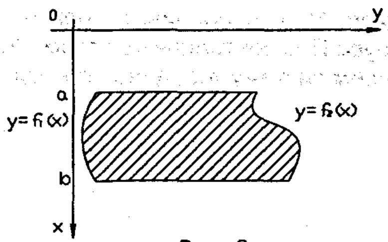
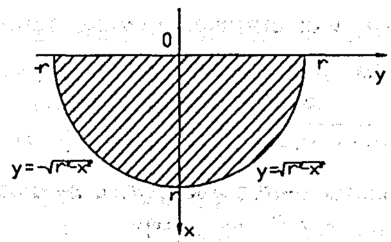


Рис. 2

Пример. Найти силу давления, испытываемую полукругом радиуса r, погруженным вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.



Воспользуемся формулой (2), в которой в данном случае

$f_2(x)=\sqrt{r^2-x^2}$; $f_1(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$, $a=0$, $b=r$.

$$P=g\cdot\rho\int_0^r x\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}dx=-\frac{2}{3}g\cdot\rho(r^2-x^2)^{1,5}\Big|_0^r=\frac{2}{3}r^3g\rho.$$

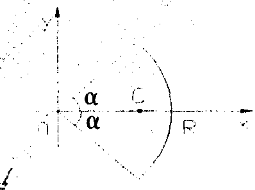
4. Статические моменты материальной дуги, заданной уравнением $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, относительно координатных осей находятся по формулам

$$M_x=\int_a^b\rho(x)f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx,\qquad M_y=\int_a^b\rho(x)x\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Координаты центра масс материальной дуги $x_c=\frac{M_y}{M}$, $y_c=\frac{M_x}{M}$, $M=\int_a^b\rho(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$, где М- масса дуги, а $\rho=\rho(x)$-ее линейная плотность.

Пример. Найти координаты центра масс однородной дуги окружности радиуса R с центральным углом 2α.

Выберем систему координат так, как показано на рисунке



Тогда в силу однородности и симметричности расположения дуги вторая координата центра масс будет равна нулю, $y_c = 0$. Запишем параметрические уравнения дуги окружности. $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ -\alpha \le t \le \alpha.$

Находим массу дуги и ее статический момент относительно оси Оу.

$$M = \rho\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \rho\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{R^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt = \rho Rt\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2\rho R\alpha.$$

$$M_y = \rho\int_{-\alpha}^{\alpha}R\cos t\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \rho R^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos tdt = 2\rho R^2\int_{0}^{\alpha}\cos tdt = 2\rho R^2\sin\alpha.$$

Выпишем координаты центра масс дуги окружности

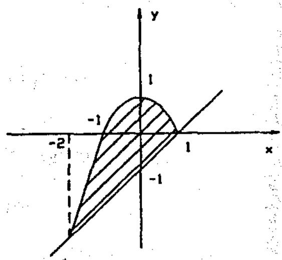
$$x_c = \frac{2\rho R^2\sin\alpha}{2\rho R\alpha} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \qquad y_c = 0.$$

5. Координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной линиями $y = f_1(x),\ y = f_2(x),\ x\in[a,b],$ $\delta = \delta(x)$-поверхностная плотность фигуры.

$$M = \int_a^b \delta(x)(f_2(x) - f_1(x))dx, \qquad M_y = \int_a^b x\delta(x)(f_2(x) - f_1(x))dx,$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)(f_2^2(x) - f_1^2(x))dx, \qquad x_c = \frac{M_y}{M}, \qquad y_c = \frac{M_x}{M}.$$

Пример. Вычислить координаты центра масс однородной плоской пластины, ограниченной линиями $y = 1 - x^2;\ \ x - y = 1.$



Построим фигуру, ограниченную данной параболой и данной прямой.

Так как пластина однородная, то ее поверхностная плотность постоянна, будем считать, что она равна единице, $\delta = \delta(x) = 1$. Воспользуемся формулами, отмеченными выше.

Причем $f_1(x) = x - 1,\quad f_2(x) = 1 - x^2,\quad a = -2,\quad b = 1.$

$$M=\int_{-2}^{1}(1-x^2-x+1)dx=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{1}=(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(-4+\frac{8}{3}-2)=4{,}5.$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}((1-x^2)^2-(x-1)^2)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(x^4-3x^2+2x)dx=\frac{1}{2}(\frac{x^5}{5}-x^3+x^2)\Big|_{-2}^{1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-1+1)-$$

$$-\frac{1}{2}(-\frac{32}{5}+8+4)=\frac{1}{2}(\frac{33}{5}-12)=3{,}3-6=-2{,}7.$$

$$M_y=\int_{-2}^{1}x(1-x^2-x+1)dx=\int_{-2}^{1}(2x-x^3-x^2)dx=(x^2-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{1}=(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3})-(4-4+\frac{8}{3})=$$

$$=-2{,}25.$$

$$x_c=\frac{M_y}{M}=\frac{-2{,}25}{4{,}5}=-0{,}5. \qquad y_c=\frac{M_x}{M}=\frac{-2{,}7}{4{,}5}=-0{,}6.$$

Ответ: C(- 0,5; - 0,6).

Задания для аудиторной работы

1. Скорость прямолинейного движения материальной точки равна $v=te^{-0{,}01t}\ м/сек$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

(Ответ: 10 км.)

2. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз, радиус основания которого равен R и высота H. (Ответ: $\frac{\pi}{12}g\delta R^2H^2$).

3. Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 2 м и высотой 4 м из материала, удельный вес которого $\gamma=\delta\cdot g=24\,кН/м^3$. (Ответ: 128 кДж)

4. Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить силу давления воды на всю плотину, если верхнее основание плотины a=70 м, нижнее основание в=50 м, а высота плотины h=20 м.

(Ответ: $\frac{(a+2b)h^2}{6}\approx 11300m$).

5.Найти координаты центра масс однородной дуги первой арки циклоиды

$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi.$ (Ответ: $x_c=\pi a,\quad y_c=\frac{4a}{3}$)

6. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями

$y=x,\quad y=x^2-2x.$ (Ответ: C (1,5; 0,6)).

Задания для индивидуальной работы

Решаете свой вариант аттестационной работы № 3.

II. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Область определения функции z=f(M). Частные производные, производная по направлению, градиент функции

Если каждой точке М из некоторой области Д соответствует некоторое число z из множества $E \subset R$, то говорят, что z есть функция от М. Если точка М имеет две координаты М(x, y), то z=f(x,y)-функция двух переменных. Функцию трех переменных обычно обозначают так: u=f(x,y,z). D(f)- область определения (существования) функции, E(f)- область значений функции.

Частным приращением функции $z = f(x,y)$ по x (по y) называется разность вида

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \qquad (\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)).$$

Частными производными функции $z = f(x,y)$ по x и по y соответственно называются пределы отношений вида

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x,y), \qquad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,y).$$

При нахождении частной производной по одной переменной другие переменные считаются постоянными, поэтому все правила и формулы дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Полным приращением функции $z = f(x,y)$ называется разность $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ называется главная линейная часть полного приращения функции, обозначается dz.

Если функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные по обеим независимым переменным, то полный дифференциал равен

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy, \qquad \Delta x = dx, \qquad \Delta y = dy.$$

Полный дифференциал функции трех независимых переменных $u = f(x,y,z)$ $du = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz$

При малых приращениях Δx и Δy справедливо приближенное равенство

$$\Delta f(x_0,y_0) \approx df(x_0,y_0) \quad \text{или} \quad f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

Эта формула используется для приближенных вычислений значений функции.

Производной функции $u = f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в направлении вектора $\vec{a} = (l,m,n)$ называется предел

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\Delta u(M_0)}{|M_0 M|} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{a}}, \qquad \vec{a} = \overrightarrow{M_0 M}$$

Эта производная находится по формуле

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial a} = u'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + u'_y(M_0)\cdot\cos\beta + u'_z(M_0)\cdot\cos\gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Производная по направлению показывает скорость изменения функции в данной точке в данном направлении.

Градиентом функции $u = u(x,y,z)$ называется вектор $grad u = (u'_x, u'_y, u'_z)$.

Производная функции в направлении ее градиента принимает максимальное значение.

Вектор- градиент функции u(x,y,z) в точке M_0 направлен перпендикулярно поверхности уровня u(x,y,z)=C, проходящей через точку M_0.

Пример. Дана функция $u=x+y^2-z^3$ и точка $M_0(1;2;-1)$. Найти производную функции в точке M_0 в направлении вектора $\overline{M_0M_1}$, где $M_1(3; -4; 2)$.

Находим частные производные функции в точке M_0.

$u'_x = 1, \quad u'_x(1,2,-1) = 1. \quad u'_y = 2y, \quad u'_y(1,2,-1) = 4. \quad u'_z = -3z^2, \quad u'_z(1,2,-1) = -3.$

Находим координаты вектора $\overline{M_0M_1} = (2,-6,3)$ и его направляющие косинусы

$$\left|\overline{M_0M_1}\right| = \sqrt{4+36+9} = 7, \quad \cos\alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos\beta = -\frac{6}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{7}.$$

Тогда искомая производная будет равна

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial a} = 1\cdot\frac{2}{7} + 4\cdot\left(-\frac{6}{7}\right) - 3\cdot\frac{3}{7} = \frac{2-24-9}{7} = -\frac{31}{7}.$$

Так как производная отрицательна, то функция в данной точке в данном направлении убывает.

Задания для аудиторной работы

1. Найти и изобразить области определения следующих функций:

$a)\ z = \sqrt{y^2-2x+4}, \quad b)\ z = \ln x + \ln\cos y, \quad c)\ z = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}.$

2. Найти частные производные функций:

$a)\ z = x^3y + \cos x - 3tgx\cdot\ln y + 5, \quad b)\ z = arctg\frac{y}{x}, \quad c)\ z = e^{\sin(4x^2-3y)}, \quad d) u = (xy^2)^z,$

$e)\ u = (x-y)(y-z)(z-x).$

3. Найти полный дифференциал функций:

$a)\ z = \ln tg\frac{y}{6x}, \quad b)\ u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

4. Найти производную функции $z=x^3-2x^2y+x\,y^2+1$ в точке $M_0(1; 2)$ в направлении вектора

$\overrightarrow{M_0M_1}$, где $M_1(4; 6)$.

5. Найти производную функции $u=x^2-3yz+7$ в точке M(1; 2; -1) в направлении, составляющем одинаковые углы со всеми координатными осями.

6. Найти угол между градиентами функции $z=\ln\frac{y}{x}$ в точках A(0,5; 0,25) и B(1; 1).

Задания для индивидуальной работы

1. Найти область определения функции.
2. Найти частные производные и полный дифференциал функции.
3. Найти производную функции в точке M_0 в направлении вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$; градиент функции в точке M_0.

Вариант № 1.

1) $z=\sqrt{y\cdot\sin x}$. 2) $z=arcctg(xy^2)$. 3) $u=\ln(x+\frac{y}{2z})$, $M_0(1,2,1)$, $M_1(-2,3,5)$.

Вариант № 2.

1) $z=\arcsin\frac{y}{x}$, 2) $z=\cos\frac{x-y}{x^2+y^2}$, 3) $u=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$, $M_0(1,1,2)$, $M_1(8,-1,-4)$.

Вариант № 3.

1) $z=\arccos(x+y)$, 2) $z=tg\frac{2x-y^2}{x}$, 3) $u=\frac{\sin(x-y)}{z}$, $M_0(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\sqrt{3})$, $M_1(\pi,\frac{\pi}{6},2\sqrt{3})$.

Вариант № 4.

1) $z=\arcsin(2x-y)$, 2) $z=\ln(3x^2-y^4)$, 3) $u=8\cdot\sqrt[5]{x^3+y^2+z}$, $M_0(3,2,1)$, $M_1(5, 8, 4)$.

2.2. Дифференцирование сложных функций. Дифференцирование неявных функций

Функция вида $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ называется сложной функцией переменных *x и y*. Считаем, что функции $f(u,v)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам. Частные производные сложной функции по переменным *x и y* находятся по формулам:

$$z'_x=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x,\qquad z'_y=z'_u\cdot u'_y+z'_v\cdot v'_y.$$

Если $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$, то $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$.

Если $z=f(x,u)$, $u=\varphi(x)$, то **полная производная** функции ***z* по *x*** находится по формуле

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Если уравнение $F(x,y)=0$ задает одну или несколько так называемых неявных функций *y (x)* и $F'_y(x,y)\neq 0$, то $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Если уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет одну или несколько неявных функций *z(x, y)* и

$F'_z(x,y,z)\neq 0$, то справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Если поверхность задана уравнением *z=f(x, y)*, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0),$$

а канонические уравнения нормали к данной поверхности, проведенной через точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, запишутся так: $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$.

Если уравнение поверхности задано в неявном виде $F(x,y,z)=0$ и $F(x_0,y_0,z_0)=0$,

то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0,$$

а уравнение нормали $\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$.

Задания для аудиторной работы

1. Найти частные производные по независимым переменным функции $z=\sqrt{u^2+v^2}$, *если* $u=x\sin y$, $v=y\cos x$.

2. Найти z'_x, z'_y, если $z=f(u,v)$, $u=\ln(x^2-y^2)$, $v=xy^2$.

3. Показать, что функция $z=y\cdot\varphi(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

4. Найти полную производную функции $z=tg^2(x^2+4y)$, *где* $y=\sin\sqrt{x}$.

5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{dz}{dx}$; *если* $z=arctg\frac{y}{x}$, $y=x\cos^2 x$.

6. Найти производную функции *y(x)*, заданной неявно уравнением $\sin(xy)-x^2-y^2=5$.

7. Вычислить значения частных производных неявной функции *z (x , y)* , заданной уравнением $x^3+y^3+z^3-x\,y\,z=2$, в точке M_0 (1; 1;1).

8. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$x\,y\,z^2+2y^2+3y\,z+4=0$ в точке M_0 (0; 2; -2).

9. Найти уравнения касательной плоскости нормали к поверхности $z = 0,5\,(x^2 - y^2)$ в точке $M_1\,(3;\ 1;\ 4)$.

(Ответ: $3x - y - z - 4 = 0,\quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{-1}$.)

Задания для индивидуальной работы

1. Найти частные производные z'_x, z'_y функции $z=f(u,\ v)$, если $u=u(x,\ y)$ и $v=v(x,\ y)$.

2. Проверить, удовлетворяет ли заданная функция z данному уравнению.

3. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$.

Вариант № 1.

1) $z = f(u,v),\ u = x^2 - 4\sqrt{y},\ v = xe^y$. 2) $z = \dfrac{xy}{x+y}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

3) $S:\quad z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10,\quad M_1(-7;\ 1;\ 8)$.

Вариант № 2.

1) $z = \arccos\dfrac{u}{v},\quad u = x + \ln y,\quad v = -2e^{-x^2}$. 2) $z = x\ln\dfrac{y}{x}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

3) $S:\quad 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9,\quad M_1(1; -2;\ 1)$.

Вариант № 3.

1) $z = f(u,v),\ u = xy + \dfrac{y}{x},\ v = x^3 - y^2$. 2) $z = \dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} + z = 0$.

3) $S:\quad x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14,\quad M_1(3;\ 1;4)$.

Вариант № 4.

1) $z = e^{u^2 - 3\sin v},\ u = x\cos y,\ v = \dfrac{x}{y}$. 2) $z = \dfrac{y}{(x^2-y^2)^5}$, $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

3) $S:\quad z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15,\quad M_1(-1;\ 3;\ 4)$.

2.3. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка называются частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x = z''_{xx},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (z'_x)'_y = z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (z'_y)'_x = z''_{yx},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z'_y)'_y = z''_{yy}.$$

z''_{xy}, z''_{yx} называются **смешанными частными производными второго порядка.** Они равны, если смешанные производные являются функциями непрерывными.

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков.

Полный дифференциал второго порядка d^2z функции $z=f(x, y)$ выражается формулой:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2.$$

Задания для аудиторной работы

1. Найти частные производные второго порядка данных функций:

а) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$, *б)* $z = arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$, *в)* $z=e^x(\sin y+\cos x)$.

2. Найти полные дифференциалы первого и второго порядков функции $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$ в точке M(1; 2).

(Ответ: $d z(1, 2)=0$, $d^2z= 6dx^2 + 2dxdy + 4{,}5\, dy^2$.)

3. Проверить, что функция $z=f(\frac{y}{x})$ удовлетворяет ли дифференциальному уравнению $x^2\cdot z''_{xx}+2xy\cdot z''_{xy}+y^2\cdot z''_{yy}=0$.

4. Найти полный дифференциал второго порядка d^2z, если $z=f(t)$, $t=x^2+y^2$.

5. Найти $d^2f(0, 0, 0)$, если $f(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz+2yz$

Задания для индивидуальной работы

1. Найти частные производные второго порядка заданной функции.

2. Найти полные дифференциалы первого и второго порядков $dz(M_0)$, $d^2z(M_0)$.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному дифференциальному уравнению данная функция $u=u(x,y)$.

Вариант № 1.

1) $z=arctg(x-3y)$. 2) $z=2x^2-3y^2+xy+3x+1$, $M_0(1,-1)$.

3) $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y)$.

Вариант № 2.

1) $z=\ln(5x^2-3y^4)$. 2) $z=x^2+y^2-3x-4x+6y-7$, $M_0(2,1)$.

3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $u=\ln(x+e^{-y})$.

Вариант № 3.

1) $z = ctg\dfrac{y}{x^3}$. 2) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$, $M_0(1;0{,}5)$.

3) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $u = \sin^2(x - 2y)$.

Вариант № 4.

1) $z = \arcsin(4x + y)$. 2) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$, $M_0(1;-6)$.

3) $x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u = \dfrac{y}{x}$.

2.4. Экстремум функции двух и трех переменных (локальный, условный, глобальный)

Функция $u = f(M)$ имеет *локальный максимум (минимум) в точке* M_0, если существует окрестность $U(M_0)$ точки M_0 такая, что для любой точки $M \in U(M_0)$ выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$ $(f(M) > f(M_0))$.

Точка M_0 называется *точкой экстремума функции*, а значение функции в ней- экстремальным значением.

Число координат точек M_0 и M определяет число независимых переменных исследуемой функции.

Теорема 1. (Необходимые условия существования локального экстремума).

Если дифференцируемая функция $u=f(M)$ в точке M_0 имеет локальный экстремум, то все ее частные производные первого порядка равны нулю в этой точке, т. е. полный дифференциал первого порядка равен нулю $d(M_0)=0$.

Для функции двух переменных $u = f(x,y)$ $u'_x(M_0) = 0$, $u'_y(M_0) = 0$.

Для функции $u = f(x,y,z)$ $u'_x(M_0) = 0$, $u'_y(M_0) = 0$, $u'_z(M_0) = 0$.

Точки, в которых полный дифференциал первого порядка некоторой функции равен нулю, называются **стационарными** точками этой функции.

Теорема 2.(Достаточные условия локального экстремума).

Если полный дифференциал второго порядка дважды непрерывно дифференцируемой функции в стационарной точке M_0 положительный, то M_0 – точка локального минимума; если $d^2f(M_0)<0$, то M_0 – точка локального максимума.

Пусть точка M_0 – стационарная точка функции $u=f(M)$, где $M(x, y,z)$. Находим все частные производные второго порядка функции $u=f(M)$ в точке M_0 и составляем так называемую матрицу Гессе:

$$H(M_0) = \begin{pmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{pmatrix}$$

Выписываем главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = u''_{xx}(M_0), \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \det H(M_0).$$

Теорема 3 (Достаточные условия локального экстремума функции трех переменных).

Если $\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \text{то} \quad u(M_0) = local\max.$

Если $\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \text{то} \quad u(M_0) = local\min.$

Теорема 4 (Достаточные условия локального экстремума функции двух переменных).

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ - стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой функции $u = f(x, y)$. Если

$$u''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \;\; и \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} u''_{xx}(x_0, y_0) & u''_{xy}(x_0, y_0) \\ u''_{yx}(x_0, y_0) & u''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0, \;\; \text{то} \;\; u(M_0) = local\min.$$

Если $u''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \;\; и \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} u''_{xx}(x_0, y_0) & u''_{xy}(x_0, y_0) \\ u''_{yx}(x_0, y_0) & u''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0, \;\; \text{то} \;\; u(M_0) = local\max.$

Если $\Delta_2 < 0$, то экстремума нет.

Если $\Delta_2 = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть. Нужно дополнительное исследование.

Пример 1. Найти точки экстремума и экстремальные значения функции $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$

Данная функция непрерывна и имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно для любых x и y. Для нахождения стационарных точек составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 6y - 39 = 0, \\ z'_y = 2y - 6x + 18 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 13, \\ y = 3x - 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 9, \\ x^2 - 6x + 5 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \; y_1 = -6. \\ x_2 = 5, \; y_2 = 6. \end{array} \right.$$

Получили две стационарные точки: $M_1(1; -6)$, $M_2(5; 6)$.

Находим частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = -6, \quad z''_{yy} = 2.$

Составляем матрицу Гессе: $H(M) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$

В точке $M_1(1; -6) \quad z''_{xx} = 6 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 36 = -24 < 0.$

Следовательно, функция в этой точке экстремума не имеет.

В точке $M_2(5; 6) \quad z''_{xx}(M_2) = 30, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 60 - 36 = 24 > 0.$

Значит, в точке $M_2(5; 6)$ функция принимает минимальное значение.

$$z_{min}(M_2) = 125 + 36 - 180 - 195 + 108 + 20 = 161 - 180 - 195 + 128 = -19 - 67 = -86.$$

Экстремум функции *z=f(x,y),найденный при условии* $\varphi(x,y)=0$, *называется условным.*

Если уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ разрешимо относительно x или y, то задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремума функции одной переменной.

Если уравнение связи неразрешимо относительно своих переменных, то составляем так называемую функцию Лагранжа, которую исследуем на экстремум.

Пример 2. Найти экстремум функции $z=16-10x-24y$ при условии $x^2+y^2=169$.

Составляем функцию Лагранжа: $F(x,y,\lambda) = 16 - 10x - 24y + \lambda(x^2 + y^2 - 169)$.

Необходимые условия экстремума этой функции- равенства нулю всех ее частных производных первого порядка. Выпишем систему уравнений и решим ее.

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 0, \\ F'_y(x,y,\lambda) = 0, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 + 2x\lambda = 0, \\ -24 + 2y\lambda = 0, \\ x^2 + y^2 - 169 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{\lambda}, \\ y = \dfrac{12}{\lambda}, \\ \dfrac{25}{\lambda^2} + \dfrac{144}{\lambda^2} = 169. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ x = \dfrac{5}{\lambda}, \\ y = \dfrac{12}{\lambda}. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1, x_1 = -5, y_1 = -12 \\ \lambda_2 = 1, x_2 = 5, y_2 = 12 \end{array} \right.$$

Находим дифференциал второго порядка

$$d^2F(x,y) = F''_{xx}(x,y,\lambda)dx^2 + 2F''_{xy}(x,y,\lambda)dxdy + F''_{yy}(x,y,\lambda)dy^2.$$

$$F''_{xx} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 2\lambda. \qquad d^2F(x,y) = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Определяем знак второго дифференциала в стационарных точках условного экстремума: $M_1(-5;-12)$ и $M_2(5;12)$. В данном случае знак дифференциала совпадает со знаком параметра λ.

$$(d^2F(M_1) = -2(dx^2 + dy^2) < 0) \Rightarrow (z(M_1) = \max = 354).$$

$$(d^2F(M_2) = 2(dx^2 + dy^2) > 0) \Rightarrow (z(M_2) = \min = -322).$$

Если требуется найти наибольшее и наименьшее значения дифференцируемой функции в некоторой ограниченной замкнутой области (**глобальные экстремумы**), то находим все критические точки функции, лежащие внутри области и на ее границе. Вычисляем значения функции в этих точках, а также во всех остальных точках границы, выбираем наибольшее и наименьшее из значений.

Задания для аудиторной работы

Исследовать заданные функции на локальный экстремум:

1. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 3$. 2. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.

3. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z - 7 = 0$.

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ в области, ограниченной прямыми $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3$.

Найти условные экстремумы функций:

5. $z = 2x^3 + y^2 \cdot (1 - x)$, *если* $x + y = 2$.

6. $z = x + 2y$, *если* $x^2 + y^2 = 5$.

7. Найти экстремум функции, заданной неявно уравнением

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0. \quad (\textit{Ответ}:\ z_{\min}(0;-2) = 1;\quad z_{\max}(0;\frac{16}{7}) = -\frac{8}{7}).$$

Задания для индивидуальной работы

1. Исследовать функцию $z = f(x,y)$ на локальный экстремум.

2. Найти условный экстремум функции $z = f(x,y)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ *в области* $\overline{D}$, ограниченной заданными линиями.

Вариант № 1.

1) $z = y \cdot \sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y - 2$. 2) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, *если* $x + y = 2$.

3) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $\overline{D}$: $x + 2y = 4,\ x - 2y = 4,\ x = 0$.

Вариант № 2.

1) $z = x \cdot \sqrt{y} - x^2 - y + 6x - 3$. 2) $z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10$, *если* $x + y = 4$.

3) $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x$, $\overline{D}$: $x - y + 1 = 0,\ x = 3,\ y = 0$.

Вариант № 3.

1) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 6$. 2) $z = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, *если* $4x - y = 1$.

3) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\overline{D}$: $x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 2$.

Вариант № 4.

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$. 2) $z = x^2 + y^2$, *если* $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$.

3) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 2$, $\overline{D}$: $y = x + 1,\ x = 3,\ y = 0$.

III. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Дифференциальные уравнения (ДУ) с разделяющимися переменными. Однородные ДУ первого порядка. Задача Коши

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию и ее производные или дифференциалы.

ОДУ первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0 \qquad или \qquad y' = f(x, y) \qquad (1)$$

Процесс нахождения решений уравнения (1) называется **интегрированием** ДУ.

Общим решением ДУ (1) в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:

1. Она является решением данного уравнения при любых значениях постоянной С, принадлежащих некоторому множеству;
2. Для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ существует единственное значение $C=C_0$, при котором функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Решение ДУ (1) в неявной форме называется **общим интегралом** уравнения. Он имеет вид $\Phi(x, y) = C$ *или* $\psi(x, y, C) = 0$.

Частным решением (интегралом) ДУ называется решение, полученное из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной С. Особое решение не может быть получено из общего решения ни при каких значениях С, включая $C=\infty$.

Нахождение частного решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется **задачей Коши.**

Уравнение вида $f_1(x) \cdot f_2(y)dx + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0$ (2)
называют уравнением с **разделяющимися переменными.**

Его общий интеграл имеет вид

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = C, \qquad \varphi_1(x) \neq 0, \qquad f_2(y) \neq 0.$$

Действительные корни уравнений $\varphi_1(x) = 0$ *и* $f_2(y) = 0$ являются решениями исходного уравнения (2). Эти решения могут оказаться особыми.

Функция $\varphi(x, y)$ называется **однородной функцией n-ого измерения** относительно переменных *x*, *y*, если для любого $t \in R$ выполняется тождество $\varphi(tx, ty) = t^n \varphi(x, y)$.

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (3)$$

называется **однородным ДУ** первого порядка, если функции *M(x,y)*, *N(x,y)* –однородные функции одного и того же измерения. Уравнение (3) можно привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (4)$$

С помощью подстановки *y=x u(x)* уравнения (3) или (4) преобразуются к уравнениям с разделяющимися переменными.

Пример 1. Найти общее решение ДУ $(y^2+xy^2)\cdot y' + x^2 - yx^2 = 0.$

Решение. Разделяем переменные $y^2(1+x)dy = x^2(y-1)dx.$

а) Считаем, что $x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad x \neq -1, \quad y \neq 1.$ Тогда $\frac{y^2}{y-1}dy = \frac{x^2}{x+1}dx.$

Интегрируем обе части полученного уравнения.

$$\int(y+1+\frac{1}{y-1})dy = \int(x-1+\frac{1}{x+1})dx$$

Получим общий интеграл исходного дифференциального уравнения в виде

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$$

б) Проверим, являются ли решениями ДУ значения *x=0, x=-1, y=0 , y=1.*

Подставляем эти значения в само уравнение. Если x=0, то получаем равенство $y^2 \cdot y' = 0$, которое не является тождеством, значит, x=0 –не решение ДУ. При x=-1 dx=0 и уравнение превращается в тождество 0=0. Значит, x=-1 –решение ДУ. Если y=0, то dy=0, от уравнения остается $0=x^2$ (не тождество, y=0 не является решением). При y=1 получаем верное равенство 0=0. Решения x=-1 и y=1 нельзя получить из общего решения ни при каком значении произвольной константы C.

Ответ: особые решения x=-1; y=1. Общий интеграл $\frac{y^2-x^2}{2} + x + y + \ln\left|\frac{y-1}{x+1}\right| = C.$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $(x^2-3y^2)dx + 2xydy = 0$, удовлетворяющее начальному условию y(2)=1.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2-x^2}{2xy}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3\cdot\frac{y}{x} - \frac{x}{y}).$$

Введем замену искомой функции y=x u(x), тогда $y' = u(x) + x\cdot u'(x).$

Подставим эти выражения в ДУ, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$x\cdot u'(x) + u = \frac{1}{2}(3u - \frac{1}{u}), \quad xu' = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u}), \quad xu' = \frac{u^2-1}{2u}, \quad xdu = \frac{u^2-1}{2u}dx,$$

$$\frac{2udu}{u^2-1} = \frac{dx}{x}, \quad \int\frac{2udu}{u^2-1} = \int\frac{dx}{x}, \quad \ln|u^2-1| = \ln|x| + \ln|C|, \quad u^2-1 = Cx, \quad (\frac{y}{x})^2 - 1 = Cx.$$

Общий интеграл имеет вид $y^2 - x^2 = Cx^3.$

Чтобы найти частное решение, определим постоянную С из условия y(2)=1, или при x=2 y=1. Подставляем эти значения в общий интеграл: 1-4=8C, т.е. C=-3/8.

Частный интеграл $\frac{y^2}{x^2}=1-\frac{3}{8}x$, частное решение $y=\pm x\sqrt{1-\frac{3}{8}x}$.

Задания для аудиторной работы.

Найти общее или частное решения следующих дифференциальных уравнений.

1. $xy'=y^2+1$.
2. $(x+xy)dy+(y-xy)dx=0,\quad y(1)=1$.
3. $tgx\cdot\sin^2 ydx+\cos^2 x\cdot ctgydy=0$.
4. $y'=-\frac{x+y}{y}$.
5. $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2},\quad y(1)=0$.
6. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$.

7. По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела T и температурой воздуха T_0. Температура воздуха равна 20 С, в течение 20 минут тело охлаждается от 100 до 60 градусов. Через сколько времени его температура понизится до 30 градусов?

Задания для индивидуальной работы

1.-4. Найти общее или частное (если указано начальное условие) решение следующих дифференциальных уравнений:

Вариант №1.

1. $(4x^3-e^{-2x})dx-(e^{2y}-\sin 3y)dy=0$;
2. $y'\cos^2 x=y\ln y,\quad y(\frac{\pi}{4})=e$;
3. $(xy'-y)arctg\frac{y}{x}=x,\quad y(1)=0$;
4. $(4x^2-xy+y^2)dx+(x^2-xy+4y^2)dy=0$.

Вариант №2.

1. $x\sqrt{4+y^2}dx-y\sqrt{1+x^2}dy=0$;
2. $xdy-(y+1)dx=0,\quad y(2)=5$;
3. $xy'=\sqrt{y^2-x^2}$;
4. $(y^2-2xy-x^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy=0$.

Вариант № 3.

1. $4(yx^2+y)dy+\sqrt{5+y^2}dx=0$;
2. $(2x-\sin 4x)dx+(4y-e^{2y})dy=0$;
3. $xy'=y\ln\frac{x}{y}$;
4. $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0,\quad y(2)=1$.

Вариант № 4.

1. $(x^2+x)y'=2y+1$;   2. $(e^{3x}-3x^2)dx-(\sin 2y-4y^3)dy=0$;

3. $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x$;   4. $\left(x^2+y^2\right)dx=2xydy,\quad y(4)=0$.

3.2. Линейные ДУ 1-ого порядка. Уравнения Бернулли. Приложения ДУ 1-ого порядка к решению технических задач

Уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)$ (*или* $A(x)y'+B(x)y+C(x)=0$) называется **линейным дифференциальным уравнением** 1-ого порядка относительно y *и* y'. С помощью подстановки $y=u(x)v(x)$, *где* $u(x),v(x)$ – неизвестные функции, данное уравнение приводим к виду

$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x),\qquad u'v+u(v'+p(x)v)=q(x).$$

Так как одна из неизвестных функций может быть выбрана произвольно, то в качестве *v* берут любое частное решение уравнения $v'+p(x)v=0$, функция *u(x)* определится из уравнения $u'(x)v(x)=q(x)$.

Таким образом, решение линейного уравнения сводится к последовательному решению двух уравнений с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

ДУ вида $x'+p(y)x=q(y)$ называется линейным ДУ 1-ого порядка относительно функции *x(y)* и ее производной. Решается с помощью подстановки $x(y)=u(y)v(y)$.

Уравнения Бернулли имеют вид

$$y'+p(x)y=q(x)y^n,\ n\in R;\quad \text{или}\quad x'+p(y)x=q(y)x^n,\quad n\in R.$$

Эти уравнения можно свести к соответствующим линейным уравнениям, но обычно их решают с помощью подстановки $y=u(x)v(x)$ $(x=u(y)v(y))$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'+\frac{3y}{x}=x^2$.

Решение. Применяем подстановку $y=uv,\ y'=u'v+uv'$, получаем $u'v+uv'+\frac{3uv}{x}=x^2$.

$u'v+u(v'+\frac{3v}{x})=x^2$, решаем последовательно два уравнения: $v'+\frac{3v}{x}=0$ *и* $u'v=x^2$.

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{3v}{x},\quad \frac{dv}{v}=-\frac{3dx}{x},\quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{3dx}{x},\quad \ln|v|=-3\ln|x|;\quad v=\frac{1}{x^3}.$$

$$u'\cdot\frac{1}{x^3}=x^2,\quad \frac{du}{dx}=x^5,\quad du=x^5dx,\quad u=\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+C.$$

Умножая *u(x)* на *v(x)* ,получаем общее решение данного уравнения

$$y=\frac{1}{x^3}(\frac{x^6}{6}+C), \qquad y=\frac{x^3}{6}+\frac{C}{x^3}, \quad C-\forall const.$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $2ydx+(y^2-6x)dy=0$.
Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию y(6)=2.

Решение. Легко видеть, что данное уравнение не является линейным относительно *y*. Запишем его в виде

$$2y\frac{dx}{dy}+y^2-6x=0, \quad \frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2}, \quad x=uv, \quad u'v+uv'-\frac{3}{y}uv=-\frac{y}{2},$$

$$u'v+u(v'-\frac{3}{y}v)=-\frac{y}{2}, \quad \frac{dv}{dy}=\frac{3v}{y}, \quad \frac{dv}{v}=\frac{3dy}{y}, \quad \ln|v|=3\ln|y|, \quad v=y^3.$$

Затем из уравнения $u'v=-\frac{y}{2}$ определяем функцию *u(y)*:

$$u'y^3=-\frac{y}{2}, \quad u'=-\frac{1}{2y^2}, \quad du=-\frac{dy}{2y^2}, \quad u=\frac{1}{2y}+C.$$

Выпишем общее решение исходного уравнения

$$x=uv, \quad x=(\frac{1}{2y}+C)y^3, \quad x=Cy^3+\frac{y^2}{2}.$$

Используем начальное условие y=2 при x=6, получим 6=8C+2, 8C=4, C=0,5.

Ответ: решение задачи Коши $x=0{,}5(y^3+y^2)$.

Задания для аудиторной работы

Проинтегрировать ДУ

1. $y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^3}, \ y(1)=1;$ 2. $x^2y'+2xy=\ln x, \ y(e)=1;$ 3. $xy'-3y=x^4e^x;$

4. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x};$ 5. $xy'+y=xy^2\ln x;$ 6. $2xydx+(y-x^2)dy=0$

7. $y^2dx=(x+ye^{-1/y})dy.$

8. Корабль замедляет свой ход под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м./с., а его скорость через 5 секунд равна 8 м/с. Определить время, когда скорость корабля уменьшится до 1 м/с.

9. Скорость распада радия пропорциональна количеству не распавшегося радия. Вычислить, через сколько лет от 1 кг радия останется 650 г, если известно, что за 1600 лет распадается половина первоначального количества. (Ответ: через 1000 лет.)

Задания для индивидуальной работы

1.-4. Найти общее или частное решения данных уравнений.

Вариант № 1.

1. $y' - ytgx = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y(0) = 2$;

2. $y' + \frac{4y}{x} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^4}$;

3. $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$;

4. $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$.

Вариант № 2.

1. $y' + \frac{6y}{x} = x^3$, $y(1) = 3$;

2. $x y' - 3y = x^4 - 2x^3 + 5x$;

3. $y' = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$;

4. $x^2 y' + 2x^3 y = y^2(1 + 2x^2)$.

Вариант № 3.

1. $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2$;

2. $x y' + 2y = 2 + 3x + x^2, y(1) = 3$;

3. $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$;

4. $2\sin x \cdot y' + y\cos x = y^3(x\cos x - \sin x)$.

Вариант № 4.

1. $y' - \frac{4y}{x} = 3 + 2x - x^2$, $y(1) = 4$;

2. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{4x-5}{x^2}$;

3. $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$;

4. $y' + \frac{y}{x+1} = \frac{1}{2}(x+1)^3 y^3$.

3. 3. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка. Краевые задачи для ДУ 2-го порядка

Рассмотрим некоторые типы уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.

1.Общее решение уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ находим методом n-кратного интегрирования. Умножая обе его части на *dx* и интегрируя, получим уравнение *(n-1)*-го порядка:

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + C_1.$$

Повторяя эту операцию, приходим к уравнению *(n-2)*-го порядка:

$$y^{(n-2)} = \int(\varphi_1(x) + C_1)dx = \varphi_2(x) + C_1x + C_2.$$

После n-кратного интегрирования получаем общее решение уравнения

$$y=\varphi_n(x)+\overline{C}_1x^{n-1}+\overline{C}_2x^{n-2}+\cdots+\overline{C}_{n-1}x+\overline{C}_n, \quad \text{где } \overline{C}_i\,(i=\overline{1,n})-\forall const,$$

связанные определенным образом с произвольными постоянными $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

Дифференциальное уравнение 2-го порядка имеет вид $y''=f(x,y,y')$.

2.Рассмотрим частный случай, когда уравнение явно не содержит функции у: $y''=f(x,y')$.

С помощью замены $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$ получим ДУ 1-го порядка $p'(x)=f(x,p)$. Решение этого уравнения зависит от его типа. Запишем общее решение в виде $p=\varphi(x,C_1)$.Подставляем вместо найденной функции $p=y'$ и решаем ДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1), \qquad dy=\varphi(x,C_1)dx, \qquad y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2.$$

Пример 1. Найти частное решение уравнения

$$xy''=y'\ln\frac{y'}{x}, \qquad y(1)=e, \qquad y'(1)=e^2.$$

Решение. Понизим порядок данного уравнения с помощью замены $y'=p$, $y''=p'$. Исходное уравнение превращается в однородное ДУ первого порядка относительно искомой функции *p(x)*:

$$xp'=p\ln\frac{p}{x}.$$

Решаем его известным способом:

$$p=xu(x), \quad p'=u(x)+xu'(x), \qquad u+xu'=u\ln u,$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}, \qquad \ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C_1|, \quad \ln u-1=C_1x, \qquad u=e^{1+C_1x}, p=xe^{1+C_1x}.$$

Воспользуемся начальным условием $y'(1)=e^2$, *т.е.* $p(1)=e^2$.

Подставляем в полученное общее решение: $e^2=1\cdot e^{1+C_1}$, $2=1+C_1$, $C_1=1$.

Решаем последнее уравнение

$$p=xe^{x+1}, \quad y'=xe^{x+1}, \quad y=\int xe^{x+1}dx=e\int xe^xdx=e(xe^x-e^x)+C_2.$$

Из начального условия *y(1)=e* находим значение постоянной C_2:

$$y(1)=e, \quad e=e(e-e)+C_2, \quad C_2=e.$$

Итак, частное решение исходного уравнения второго порядка имеет вид

$$y=(x-1)e^{x+1}+e.$$

3. Если дифференциальное уравнение явно не содержит *x*, например, $y''=f(y,y')$,то, полагая $y'=p$, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, понизим порядок исходного уравнения на единицу.

Пример 2. Для дифференциального уравнения решить краевую задачу, т.е. найти решение, удовлетворяющее краевым условиям:

$$yy' + y'^2 + yy'' = 0, \qquad y = 1 \;\; при \;\; x = 0; \quad y = 0 \;\; при \;\; x = -1.$$

Решение. Понижаем порядок данного уравнения заменой $y' = p, \quad y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, получаем уравнение первого порядка:

$$yp + p^2 + yp\frac{dp}{dy} = 0, \qquad p(y\frac{dp}{dy} + p + y) = 0, \quad p = 0, \quad y\frac{dp}{dy} + p + y = 0.$$

В данном случае p=0 не подходит из-за краевых условий. Решаем однородное ДУ первого порядка известным способом:

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y} - 1, \quad \frac{p}{y} = u, \quad p = yu, \quad p' = u + yu', \qquad u + yu' = -u - 1, \quad yu' = -2u - 1,$$

$$ydu = -(2u+1)dy, \quad \frac{du}{2u+1} = -\frac{dy}{y}, \quad \frac{1}{2}\ln|2u+1| = -\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|C_1|, \quad 2u + 1 = \frac{C_1}{y^2},$$

$$2\frac{p}{y} = \frac{C_1}{y^2} - 1, \quad 2\frac{dy}{dx} = \frac{C_1 - y^2}{y}, \quad \frac{2ydy}{C_1 - y^2} = dx, \quad -\ln|C_1 - y^2| = x - C_2, \quad C_1 - y^2 = e^{C_2 - x},$$

$$e^{C_2} = \overline{C_2}, \qquad C_1 - y^2 = \overline{C_2}e^{-x}, \quad C_1, \overline{C_2} - \forall\ const.$$

Подберем эти постоянные так, чтобы выполнялись краевые условия: *y(0)=1,y(-1)=0.*

$$C_1 - 1 = \overline{C_2}e^0, C_1 - 0 = \overline{C_2}e^1; \quad C_1 = \overline{C_2} + 1, \overline{C_2} + 1 = \overline{C_2}e; \quad \overline{C_2} = \frac{1}{e-1}, C_1 = \frac{1}{e-1} + 1 = \frac{e}{e-1}.$$

Подставляем значения постоянных в общий интеграл, получим решение данной краевой задачи:

$$\frac{e}{e-1} - y^2 = \frac{1}{e-1}e^{-x}, \qquad y^2 = \frac{e - e^{-x}}{e-1}.$$

Замечание. Отметим, что краевая задача не всегда разрешима.

Задания для аудиторной работы

Проинтегрировать следующие уравнения.

1. $y''' = x + \cos x,$ 2. $x^2y'' + xy' = 1,$ 3. $yy'' + y'^2 = 1,$

4. $xy'' = y'(\ln y' - \ln x),$ 5. $2yy'' = 3y'^2 + 4y^2$.(*Ответ*: $y\cos^2(x + C_1) = C_2$).

Найти частное решение (частный интеграл) уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

6. $y''' = \dfrac{x}{(x+2)^5},\ y(1) = y'(1) = y''(1) = 0;$ 7. $2yy'' = y'^2,\ y(-1) = 4,\ y'(-1) = 1;$

8. $(x+1)y'' + xy'^2 = y', \quad y = -2, \quad y' = 4$ *при* $x = 1$.

Задания для индивидуальной работы

1. Решить задачу.
2. Проинтегрировать уравнение.
3. Решить задачу Коши.

1. Автомобиль движется по горизонтальному участку пути со скоростью v=90 км/час.

В некоторый момент времени он начинает тормозить. Сила торможения равна 0,3 от веса автомобиля. В течение какого промежутка времени он будет двигаться от начала до остановки и какой путь пройдет за это время (какова длина тормозного пути)?

(Ответ: 8,5с.; 106,3 м.)

Вариант № 1.

2. $y'' = x\sin x$; 3. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

Вариант № 2.

2. $y''' = xe^x$; 3. $x^2 y''' = y''^2$, $y(1) = \dfrac{7}{6}$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 1$.

Вариант № 3.

2. $xy'' - y' = x^2 e^x$; 3. $y^3 y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Вариант № 4.

2. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$; 3. $y'' = y'^2 - y$, $y(1) = -\dfrac{1}{4}$, $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

3.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами

ЛОДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами *p и q* имеет вид

$y'' + py' + qy = 0.$

После замены $y = e^{kx}$ получаем характеристическое уравнение

$k^2 + pk + q = 0$, k_1, k_2 – его корни.

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

1. $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, *если* $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in R$;
2. $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$, *если* $k_1 = k_2$;
3. $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$, *если* $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

ЛОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0.$

Общим решением уравнения является функция $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$, где

$y_1,y_2,\dots,y_n$ – частные линейно независимые решения ЛОДУ.

Частные решения этого уравнения ищутся в виде $y=e^{kx}$. Для определения k получаем характеристическое уравнение $k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\dots+a_{n-1}k+a_n=0.$

Каждому действительному корню k характеристического уравнения соответствует одно решение ДУ вида e^{kx}.

Каждому действительному корню k кратности m соответствует m линейно независимых решений ДУ: $y_1=e^{kx}, y_2=xe^{kx},\dots,y_m=x^me^{kx}$.

Если $\alpha\pm i\beta$ – пара комплексных корней характеристического уравнения кратности m, то ей соответствует 2m линейно независимых решений ДУ:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x;\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x;\ \dots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Примеры. Найти общие решения ЛОДУ:

1. $y''-5y'+6y=0;$ 2. $y''+8y'+16y=0;$ 3. $y''-6y'+13y=0.$

Решение. Для каждого случая составляем характеристическое уравнение, находим его корни, выписываем соответствующие линейно независимые решения ДУ и их общее решение:

1. $k^2-5k+6=0,\quad k_1=2,\ k_2=3;\quad y_1=e^{2x},\ y_2=e^{3x};\quad y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x};$

2. $k^2+8k+16=0,\quad k_1=-4,\ k_2=-4;\quad y_1=e^{-4x},\ y_2=xe^{-4x};\quad y=e^{-4x}(C_1+C_2x);$

3. $k^2-6k+13=0,\quad k_1=3-2i,\ k_2=3+2i;\quad y_1=e^{3x}\cos2x,\ y_2=e^{3x}\sin2x;$
$y=e^{3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x).$

Примеры. Найти общее решение для ЛОДУ высших порядков:

4. $y'''-3y''-10y'+24y=0;$ 5. $y^{IV}+3y''-4y=0;$ 6. $y^{IV}+2y''+y=0.$

Решение. Действуем по выше изложенному плану:

4. $k^3-3k^2-10k+24=0,\ k_1=2,\ k_2=-3,\ k_3=4;\quad y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+C_3e^{4x};$

5. $k^4+3k^2-4=0,\quad (k^2-1)(k^2+4)=0,\quad k_1=-1,\ k_2=1,\ k_3=-2i,\ k_4=2i;$
$y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3\cos2x+C_4\sin2x;$

6. $k^4+2k^2+1=0,\quad (k^2+1)^2=0,\quad k_{1,2}=\pm i,\ k_{3,4}=\pm i;\ y_1=\cos x,\ y_2=\sin x,$
$y_3=x\cos x,\ y_4=x\sin x;\qquad y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$

Задания для аудиторной работы

Найти общее или частное решение следующих ЛОДУ:

1. $y''-y'-2y=0$; 2. $y''-y'=0$; 3. $y''-9y=0$; 4. $y''-6y'+34y=0$;
5. $y''-10y'+25y=0$; 6. $y''+36y=0$; 7. $y'''-2y''-y'+2y=0$; 8. $y'''-2y''+2y'=0$;
9. $y^{VI}+2y^{V}+2y^{IV}=0$; 10. $y''+4y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=2$;
11. $y''+3y'=0, y(0)=0, y(3)=0$;
12. $y'''-3y''+3y'-y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=3.$

Задания для индивидуальной работы

Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений.

Вариант № 1.
1. $y''+2y'-8y=0$; 2. $y''+8y'+16y=0$; 3. $y''-10y'+29y=0$; 4. $y^{IV}+4y''=0$.

Вариант № 2.
1. $y''-2y'-15y=0$; 2. $y''-12y'+36y=0$; 3. $y''+8y'+25y=0$; 4. $y^{IV}-4y'''+4y''=0$.

Вариант № 3.
1. $y''+2y'-15y=0$; 2. $y''+12y'+36y=0$; 3. $y''-8y'+25y=0$; 4. $y^{IV}+8y'=0$.

Вариант № 4.
1. $y''-2y'-8y=0$; 2. $y''-8y'+16y=0$; 3. $y''+10y'+29y=0$; 4. $y^{IV}-6y''+9y=0$.

3.5. Неоднородные линейные ДУ 2-го и выше порядков с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

Общее решение ЛНДУ можно записать в виде суммы $y=\bar{y}+y^*$, где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а y^* – частное решение данного уравнения. Его можно получить **методом неопределенных коэффициентов** в следующих случаях:

1. Правая часть уравнения $f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, *где* $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Частное решение ищем в виде $y^*=x^rQ_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, *где* $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами. Число r равно кратности числа α по отношению к корням характеристического уравнения;

2. Если $f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx)$, то полагают

$y^*=x^r e^{ax}(S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx)$,

где $S_N(x), T_N(x)$ – *многочлены степени* $N=\max\{n,m\}$. Число r равно кратности чисел $a\pm ib$ по отношению к корням характеристического уравнения.

Пример 1. Найти общее решение неоднородного ЛДУ $y''-y'-2y=4xe^x$.

Решение.

$y=\bar{y}+y^*$, $\bar{y}=?$ $y''-y'-2y=0$, $k^2-k-2=0$, $k_1=-1$, $k_2=2$; $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$;

$y^*=?$ $f(x)=4xe^x$, $a=1$, $r=0$,

поэтому ищем частное решение в виде $y_*=(Ax+B)e^x$. Дифференцируя два раза и подставляя производные в исходное уравнение, получим:

$$2Ae^x+(Ax+B)e^x-Ae^x-(Ax+B)e^x-2(Ax+B)e^x=4xe^x.$$

Сокращаем обе части равенства на e^x, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$A-2Ax-2B=4x,\quad -2A=4,\quad A-2B=0;\quad A=-2,\quad B=-1.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения $y_*=-(2x+1)e^x$.

Общее решение $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-(2x+1)e^x$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''+y=x\sin x$.

Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k=\pm i$, общим решением однородного уравнения будет функция $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$, тогда частное решение ищем в виде $y_*=x((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x)$.

Находим производные y_*', y_*'', подставляем их в заданное уравнение.

$$y_*=(Ax^2+Bx)\cos x+(Cx^2+Dx)\sin x,$$

$$y_*'=(2Ax+B)\cos x-(Ax^2+Bx)\sin x+(2Cx+D)\sin x+(Cx^2+Dx)\cos x,$$

$$y_*''=2A\cos x-2(2Ax+B)\sin x-(Ax^2+Bx)\cos x+2C\sin x+2(2Cx+D)\cos x-$$
$$-(Cx^2+Dx)\sin x.$$

$$2A\cos x-2(2Ax+B)\sin x+2C\sin x+2(2Cx+D)\cos x=x\sin x,$$

приравниваем коэффициенты при $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x\sin x$. Получаем четыре уравнения

$$2A+2D=0,\quad 4C=0,\quad -2B+2C=0,\quad -4A=1.\quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{4}, D=\frac{1}{4}, B=C=0.$$

Поэтому $y_*=-\dfrac{x^2}{4}\cos x+\dfrac{x}{4}\sin x$, $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{x^2}{4}\cos x+\dfrac{x}{4}\sin x$.

Задания для аудиторной работы

Найти общие решения уравнений:

1. $y'' - 3y' + 2y = \begin{cases} xe^{-x}, \\ (2x+3)e^{x}, \\ e^{2x}. \end{cases}$ 2. $y'' - 10y' = \begin{cases} x^2 - 3x + 4, \\ (3x-4)e^{5x}. \end{cases}$ 3. $y'' + 6y' + 9y = \begin{cases} 10\sin x - 3\cos x, \\ x\cos x. \end{cases}$

4. $y'' + 9y = \begin{cases} 3\sin x + 6\cos x, \\ 2\sin 3x - 4\cos 3x. \end{cases}$ 5. $y^{IV} - y = \begin{cases} 3xe^{x}, \\ \sin x. \end{cases}$ 6. $y''' + y'' = 6x.$

Задания для индивидуальной работы

1. Выполнить свой вариант аттестационной работы № 4.
2.-3. Найти общее решение ЛНДУ.
4. Решить задачу Коши для заданного уравнения.

Вариант № 1.

2. $y'' - 7y' = (x-1)^2$; 3. $y''' - y'' + y' - y = x^2 e^{-x}$; 4. $y'' + y = 2\cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Вариант № 2.

2. $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$; 3. $y''' + y'' - 2y' = x^2 + x$;

4. $y'' + 4y = 4(\cos 2x + \sin 2x),\ y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi.$

Вариант № 3.

2. $y'' + 8y' = 8x$; 3. $y^{V} - y^{IV} = 2xe^{x}$; 4. $y'' + y = 4\sin x - 6\cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 18.$

Вариант № 4.

2. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$; 3. $y^{IV} + y'' = x^2 - 6x + 8$;

4. $y'' + 9y = 2\cos 4x - 3\sin 4x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 12.$

3.6. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородных ЛДУ

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ вида

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x). \qquad (1)$$

Запишем соответствующее однородное уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0. \qquad (2)$$

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) применяется для отыскания частного решения уравнения (1) в случае, когда правая часть этого уравнения имеет общий вид. Суть метода: находим общее решение уравнения (2).

$\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$, $C_1, C_2, C_3 - \forall const$, $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ – частные линейно независимые решения однородного уравнения (2).

Тогда частное решение уравнения (1) будем искать в виде

$y_* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + C_3(x) y_3(x).$

Функции $C_i(x)$, (i=1,2,3), определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_3'(x)y_3(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_3'(x)y_3'(x)=0, \\ C_1'(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2''(x)+C_3'(x)y_3''(x)=f(x). \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x}$.

Решение. Выписываем соответствующее однородное уравнение, составляем характеристическое уравнение и получаем общее решение однородного уравнения.

$y''+4y=0,\quad k^2+4=0,\quad k=\pm 2i,\quad \bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$y_* = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x.$

$y_1(x)=\cos 2x,\ y_2(x)=\sin 2x,\ y_1'(x)=-2\sin 2x,\ y_2'(x)=2\cos 2x.$

Для определения неизвестных функций $C_1(x), C_2(x)$ составляем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x+C_2'(x)\sin 2x=0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x+2C_2'(x)\cos 2x=\dfrac{1}{\sin 2x}. \end{cases}$$

Решаем эту систему по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x+2\sin^2 2x = 2.$$

Тогда $C_1'(x)=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\sin 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix}=-\dfrac{1}{2},\quad C_2'(x)=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\sin 2x} \end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}ctg 2x.$

Интегрируя последние два равенства, имеем:

$C_1(x)=-\dfrac{1}{2}x,\quad C_2(x)=\dfrac{1}{4}\ln|\sin 2x|.\qquad y(x)=\bar{y}(x)+y_*(x).$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x\ln|\sin 2x|.$

Задания для аудиторной работы

Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнения

1. $y''+y=tgx,$ 2. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x},$ 3. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x,$

4. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x},$ 5. $y'''+y'=tgx\sec x.$

Задания для индивидуальной работы

Решить уравнения методом вариации произвольных постоянных

Вариант 1.

1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, 2. $y'' - 2tgx \cdot y' = 1$.

Вариант 2.

1. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$, 2. $x \ln x \cdot y'' - y' = \ln^2 x$.

Вариант № 3

1. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$, 2. $y'' + 2ctgx \cdot y' = 1$.

Вариант № 4.

1. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, 2. $xy'' + (2x-1)y' = -4x^2$.

3.7. Системы дифференциальных уравнений

Метод исключения. Решение нормальной системы двух ДУ первого порядка, т.е. системы вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dx} = g(x,y,z), \end{cases} \tag{1}$$

разрешенной относительно производных от двух искомых функций *y(x)* и *z(x)*, сводится к решению одного дифференциального уравнения второго порядка относительно одной из функций. Рассмотрим процесс сведения на примере.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2y - 4z + 4x + 1, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y + z + \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = -2y - 4z + 4x + 1, \\ z' = -y + z + 1{,}5x^2. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение по *x*: $y'' = -2y' - 4z' + 4$, в это уравнение подставим z' из второго уравнения системы, получим выражение $y'' = -2y' - 4(-y + z + 1{,}5x^2) + 4$,

выполняем действия, затем из первого уравнения системы выражаем *z*, получим ДУ второго порядка относительно функции *y(x)*.

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 4y + 4z = 4 - 6x^2, \\ z = \dfrac{1}{4}(1 + 4x - y' - 2y), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z = 1 + 4x - y' - 2y, \\ y'' + 2y' - 4y + 1 + 4x - y' - 2y = 4 - 6x^2, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4z = 1 + 4x - y' - 2y, \\ y'' + y' - 6y = 3 - 4x - 6x^2. \end{cases}$$

Решаем неоднородное уравнение относительно функции *y(x)*:

$$k^2 + k - 6 = 0,\ (k+3)(k-2) = 0,\ k_1 = -3,\ k_2 = 2 \ \Rightarrow \ \bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x};$$

$$y_* = ax^2 + bx + c,\ y_*' = 2ax + b,\ y_*'' = 2a,\ 2a + 2ax + b - 6ax^2 - 6bx - 6c = 3 - 4x - 6x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим систему для определения коэффициентов *a,b,c*.

$$\begin{cases} -6a = -6, \\ 2a - 6b = -4, \\ 2a + b - 6c = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ 6b = 2a + 4 = 6, \\ 6c = 2a + b - 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = 0, \end{cases} \Rightarrow \ y_* = x^2 + x;\ \ y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + x^2 + x.$$

Находим функцию *z(x)*.

$$4z = 1 + 4x - y' - 2y = 1 + 4x + 3C_1 e^{-3x} - 2C_2 e^{2x} - 2x - 1 - 2C_1 e^{-3x} - 2C_2 e^{2x} - 2x^2 - 2x =$$
$$= C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{2x} - 2x^2.$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + x^2 + x, \\ z = \dfrac{1}{4} C_1 e^{-3x} - C_2 e^{2x} - \dfrac{1}{2} x^2. \end{cases}$$

Аналогично поступаем при решении систем дифференциальных уравнений с большим числом уравнений.

Метод Эйлера решения линейных однородных систем ДУ с постоянными коэффициентами .Дана система трех уравнений с тремя неизвестными функциями:

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y'(t) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z'(t) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = ? \\ y(t) = ? \\ z(t) = ? \end{cases}$$

Будем искать неизвестные функции в виде
$x = \alpha \cdot e^{kt}$, $y = \beta \cdot e^{kt}$, $z = \gamma \cdot e^{kt}$.

Подставляя эти выражения в систему и преобразовывая ее, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно α, β, γ:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Получим кубическое уравнение для определения числа k.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется **характеристическим уравнением** исходной системы ДУ. Решаем его, находим значения k, для каждого значения из системы (1) определяем α, β, γ, выписываем линейно независимые решения по каждой искомой функции, составляем общее решение системы.

Пример. Решить систему по методу Эйлера

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 2 & -1 & -k \end{vmatrix} = 0, \qquad (1-k)^2(-k) - 1 + 2 - 2(1-k) - (1-k) - k = 0,$$

$$-k(1-k)^2 - 2(1-k) = 0, \quad (k-1)(k-2)(k+1) = 0, \quad k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = -1.$$

Соответствующие значения α, β, γ для каждого k найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} (1-k)\alpha - \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + (1-k)\beta - \gamma = 0, \\ 2\alpha - \beta - k\gamma = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Подставляем в систему (3) k=1.

$$\begin{cases} -\beta+\gamma=0, \\ \alpha-\gamma=0, \\ 2\alpha-\beta-\gamma=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=\gamma, \\ \alpha=\gamma, \\ 0=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1, \\ \beta=1, \\ \gamma=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=e^t, \\ y_1=e^t, \\ z_1=e^t. \end{cases}$$

Если k=2, то система (3) примет вид

$$\begin{cases} -\alpha-\beta+\gamma=0, \\ \alpha-\beta-\gamma=0, \\ 2\alpha-\beta-2\gamma=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta=0, \\ \alpha=\gamma, \\ 0=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1, \\ \beta=0, \\ \gamma=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=e^{2t}, \\ y_2=0, \\ z_2=e^{2t}. \end{cases}$$

Находим частное решение исходной системы ДУ для k= –1.

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma=0, \\ \alpha+2\beta-\gamma=0, \\ 2\alpha-\beta+\gamma=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma=0, \\ 3\alpha+\beta=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-3\alpha, \\ \gamma=-5\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1, \\ \beta=-3, \\ \gamma=-5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=e^{-t}, \\ y_3=-3e^{-t}, \\ z_3=-5e^{-t}. \end{cases}$$

Выписываем общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x(t)=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3, \\ y(t)=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3, \\ z(t)=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}, \\ y=C_1e^t-3C_3e^{-t}, \\ z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}. \end{cases}$$

Задания для аудиторной работы

Найти общее решение каждой из следующих систем:

1. $\begin{cases} y'=-7y+z, \\ z'=-2y-5z. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y'=-5y+2z+e^x, \\ z'=y-6z+e^{-2x}. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y''+2y+4z=0, \\ z''-y-3z=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y'=\dfrac{y^2}{z}, \\ z'=0{,}5y. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x'=5x+2y-3z, \\ y'=4x+5y-4z, \\ z'=6x+4y-4z. \end{cases}$

Найти частное решение системы

6. $\begin{cases} x'(t)=4x+y-36t, & x(0)=0, \\ y'(t)=-2x+y-2e^t, & y(0)=1. \end{cases}$

Задания для индивидуальной работы

1.-2. Решить системы ДУ.

Вариант № 1

1. $\begin{cases} x'(t) = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ y'(t) = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x'(t) = -3x + 4y - 2z, \\ y'(t) = x + z, \\ z'(t) = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$

Вариант № 2.

1. $\begin{cases} x'(t) = 2x + y + e^{t}, \\ y'(t) = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x'(t) = 3x - y + z, \\ y'(t) = x + y + z, \\ z'(t) = 4x - y + 4z. \end{cases}$

Вариант № 3.

1. $\begin{cases} x'(t) = 4x - 3y + \sin t, \\ y'(t) = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x'(t) = x - 4y - z, \\ y'(t) = x + y, \\ z'(t) = 3x + z. \end{cases}$

Вариант № 4.

1. $\begin{cases} x'(t) = x - y + 8t, \\ y'(t) = 5x - y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x'(t) = x - 2y - z, \\ y'(t) = -x + y + z, \\ z'(t) = x - z. \end{cases}$

IV. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Двойной интеграл и его вычисление в декартовых координатах

Пусть ограниченная функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой замкнутой области D плоскости xOy. Разобъем область D произвольным образом на конечное число n элементарных областей D_1, D_2, ..., D_n, имеющих площади $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$ и диаметры $d_1, d_2, \ldots, d_n$ соответственно. Пусть λ - наибольший из диаметров областей $D_i, i=\overline{1,n}$. Выберем в каждой элементарной области D_i произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$, найдем $f(P_i) = f(x_i, y_i)$, умножим это значение на соответствующий элемент площади ΔS_i и составим так называемую *интегральную сумму для функции f(x ,y) в области D.*

Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, *не зависящий от способа разбиения области D на элементарные области и выбора точек P_i ,то он называется двойным интегралом* от функции f(x,y) по области D:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x,y) dS = \iint_D f(x,y) dxdy.$$

Если подынтегральная функция f(x,y) в области интегрирования непрерывна, то такой предел интегральной суммы всегда существует.

Геометрический смысл двойного интеграла: если f(x, y)>0, то $\iint_D f(x,y)dxdy = V$, т.е. двойной интеграл равен **объему цилиндрического тела**, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$,снизу плоскостью z=0, сбоку цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области интегрирования.

Если f(x, y)=1, то двойной интеграл равен **площади области D**, т.е.

$$S_D = \iint_D dS = \iint_D dxdy.$$

Механический смысл двойного интеграла: если область D – плоская пластинка, расположенная в плоскости *xOy* и имеющая поверхностную плотность $\mu = \mu(x,y)$, то **масса пластинки** равна

$$m = \iint_D \mu(x,y) dxdy.$$

Основные свойства двойного интеграла

1. Линейность. $\iint_D (\alpha f_1(x,y) \pm \beta f_2(x,y))dxdy = \alpha \iint_D f_1(x,y)dxdy \pm \beta \iint_D f_2(x,y)dxdy.$

2. Аддитивность. Если область интегрирования разбита на несколько областей без общих точек, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)dxdy.$$

3.Если в области D

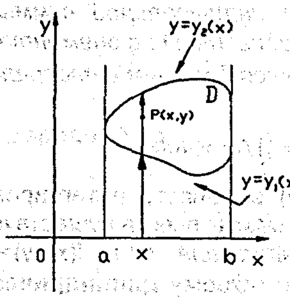
$m \le f(x,y) \le M$, то $m \cdot S \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M \cdot S$, S – площадь области D.

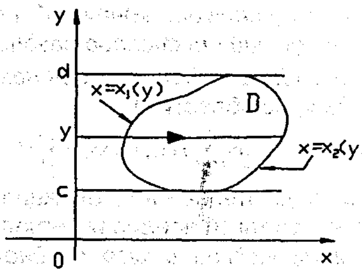
4. **Теорема о среднем.** Если функция *f(x ,y)* непрерывна в замкнутой области D, то существует точка $P_0\ (x_0, y_0)$ в этой области такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = f(P_0) \cdot S, \qquad \iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0) \cdot S, \qquad f(P_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)dS -$$

среднее значение функции *f(x,y)* в области *D.*

Вычисление двойного интеграла в прямоугольных координатах сводится к вычислению повторного интеграла, вид которого зависит от формы области интегрирования.





а) Если область D –*правильная относительно оси Оу* (она ограничена слева и справа прямыми *x=a, x=b* *(a<b)* , а снизу и сверху – непрерывными кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ $(y_1(x) \le y_2(x))$, каждая из которых пересекается вертикальными прямыми только в одной точке, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

б) Если область D –*правильная относительно оси Ох* (она ограничена снизу и сверху прямыми *y=c, y=d (c<d)* , а слева и справа – непрерывными кривыми $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ $(x_1(y) \le x_2(y))$, каждая из которых пересекается горизонтальными прямыми только в одной точке, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

Задания для аудиторной работы

1. Вычислить следующие повторные интегралы:

$$a)\ \int_0^2 dx\int_0^1 (x^2+2y)dy; \qquad b)\ \int_{-3}^{8} dy\int_{y^2-4}^{5}(x+2y)dx; \qquad c)\ \int_1^2 dx\int_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy.$$

2. Изобразить область интегрирования D и расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в одном и другом порядке, если:

$a)\ D:\ x+y=7;\ \ xy=6.\qquad b)\ D:\ y=x^2;\ \ 4-y=x^2.$

$c)\ D:\ y^2=4-x;\ y^2=x.\qquad d)\ D:\ y=-\sqrt{2x-x^2};\ x=0;\ x=1;\ y=1.$

3. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$a)\ \int_0^1 dx\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy; \qquad b)\ \int_0^1 dx\int_{2x}^{3x} f(x,y)dy; \qquad c)\ \int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx;$$

$$d)\ \int_0^3 dx\int_0^{x/3} f(x,y)dy+\int_3^4 dx\int_0^{4-x} f(x,y)dy.$$

Задания для индивидуальной работы

1. Вычислите повторные интегралы.
2. Изобразите область интегрирования и расставьте пределы интегрирования в обоих порядках.
3. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле.

Вариант № 1.

1. $a)\ \int_3^4 dx\int_1^2\frac{dy}{(x+y)^2};\qquad b)\ \int_1^2 dx\int_x^{x^2}(2x-y)dy.\qquad$ 2. $D:\ x^2=2y;\ \ 5x-2y=6.$

3. $a)\ \int_{-6}^{2} dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy;\qquad b)\ \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$

Вариант № 2.

1. $a)\ \int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2dy}{1+y^2};\qquad b)\ \int_1^3 dx\int_{x^2}^{x}(x-y)dy.\qquad$ 2. $D:\ \ x^2=2-y;\ \ x+y=0.$

3. $a)\ \int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy;\qquad b)\ \int_0^1 dy\int_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{-y} f(x,y)dx.$

Вариант № 3.

1. $a)\ \int_0^{2\pi} d\varphi\int_{a\sin\varphi}^{a} rdr;\qquad b)\ \int_0^1 dx\int_0^1(4x^3\sqrt{y}+3y^2\sqrt{x})dy.\qquad$ 2. $D:\ \ y=\sqrt{2-x^2};\ \ y=x^2.$

3. $a)\ \int_0^1 dx\int_{\frac{(1-x)^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy;\qquad b)\ \int_0^1 dy\int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx.$

Вариант № 4.

1. $a)\ \int\limits_2^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$; $\quad b)\ \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\,dx \int\limits_0^4 y\,dy$. $\quad$ 2. $D:\ y^2 = x+3;\ y = -x$.

3. $a)\ \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$; $\quad b)\ \int\limits_0^4 dy \int\limits_y^{10-y} f(x,y)dx$.

4.2. Замена переменных в двойном интеграле

4.2.1.Двойной интеграл в криволинейных координатах

Пусть переменные x, y связаны с переменными u, v соотношениями $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, где $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ – непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно однозначно отображающие область D плоскости xOy на область D_1 плоскости uO_1v, при этом якобиан преобразования

$$I = I(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

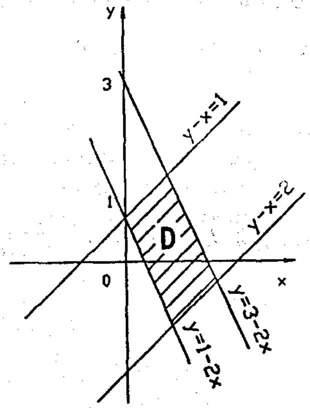
сохраняет постоянный знак в области D. Тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

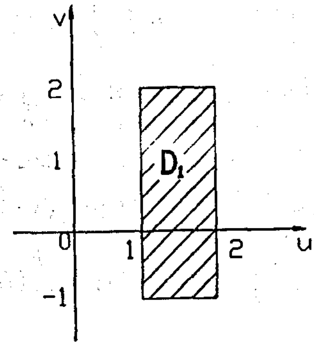
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|\,I\,|\,dudv.$$

Пределы интегрирования в новом интеграле расставляются по изложенному ранее правилу с учетом формы области D_1.

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, если область D ограничена прямыми $2x+y=1$, $\quad 2x+y=3$, $\quad x-y=-1$, $\quad x-y=2$.

Решение. Изобразим область D на плоскости xOy.





Введем новые переменные

$u = 2x + y, \quad v = x - y, \quad$ *тогда* $\quad x = \frac{1}{3}(u + v), \;\; y = \frac{1}{3}(u - 2v).$

$1 \le u \le 3; \quad -1 \le v \le 2.$ Находим якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}; \qquad |J| = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, данный двойной интеграл будет равен

$$\iint_D (x + y)dxdy = \iint_{D_1} \left(\frac{u+v}{3} + \frac{u-2v}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{9} \iint_{D_1} (2u - v)dudv = \frac{1}{9} \int_1^3 du \int_{-1}^2 (2u - v)dv =$$

$$= \frac{2}{9} \int_1^3 udu \int_{-1}^2 dv - \frac{1}{9} \int_1^3 du \int_{-1}^2 vdv = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{u^2}{2}\right)\Big|_1^3 \cdot v\Big|_{-1}^2 - \frac{1}{9} \cdot u\Big|_1^3 \cdot \left(\frac{v^2}{2}\right)\Big|_{-1}^2 = \frac{9-1}{9} \cdot 3 - \frac{(3-1)}{18} \cdot (4 - 1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

4.2.2.Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть в полярной системе координат задана область D, ограниченная кривыми $r = r_1(\varphi),\ r = r_2(\varphi),\ \varphi = \alpha,\ \varphi = \beta,$ *где* $\alpha < \beta;\ r_1(\varphi) \le r_2(\varphi).$ Область D называется правильной, если каждый луч, проходящий через внутреннюю точку области, пересекает ее границу не более чем в двух точках.

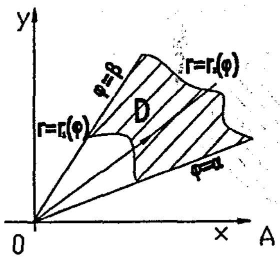


Рис. 1.

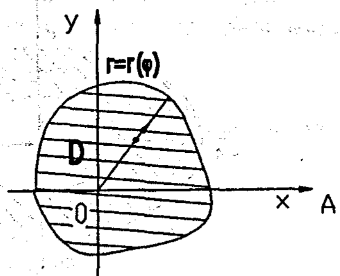


Рис. 2.

Рассмотрим эту область в двух системах координат: прямоугольной декартовой и полярной, причем полюс поместим в начале координат, а полярную ось направим вдоль оси Ox. Известно, что прямоугольные координаты (x,y) и полярные координаты (r, φ) связаны соотношениями $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$

Формула перехода от прямоугольных координат к полярным под знаком двойного интеграла имеет вид

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

Если область D содержит начало координат (рис, 2), то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

4.2.3.Двойной интеграл в обобщенных полярных координатах

Обобщенными полярными (эллиптическими) координатами называют переменные r *и* φ, связанные с декартовыми координатами x и y равенствами $x = ar\cos\varphi,\ \ y = br\sin\varphi,$ *где* $r \ge 0,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ a > 0,\ \ b > 0,\ \ a \ne b,\ \ |I(r,\varphi)| = abr.$

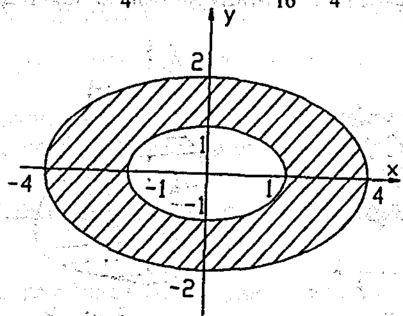
Тогда имеем формулу перехода

$$\iint_D f(x,y)dxdy = ab\iint_D f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

Эта формула используется в тех случаях, когда область интегрирования – эллипс или его часть, и подынтегральная функция содержит выражение $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^k$.

Пример 2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sin\pi\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)dxdy, \quad \text{где} \quad D:\ \left(\frac{x^2}{4}+y^2=1; \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\right).$$



Решение. Изобразим область интегрирования D. Ее границы- эллипсы.

Введем обобщенные полярные координаты: $x = 2r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ \ I = 2r.$

Запишем уравнения эллипсов в новых координатах:

$$\left(\frac{x^2}{4}+y^2=1\right) \Rightarrow (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1) \Rightarrow (r=1).$$

$$\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{4}(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) = 1\right) \Rightarrow \left(\frac{r^2}{4}=1\right) \Rightarrow (r=2), \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Исходный интеграл будет равен

$$\iint_D \sin\pi\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)dxdy = \iint_D \sin(\pi\cdot r^2)\cdot 2r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \sin(\pi\cdot r^2)\cdot 2r dr = 2\int_1^2 \sin(r^2\pi) d(r^2\pi) =$$

$$= -2\cos(r^2\pi)\Big|_1^2 = -2(\cos 4\pi - \cos\pi) = -2(1+1) = -4.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить двойные интегралы, используя полярные координаты.

1. $\iint\limits_D (12 - x - y)dxdy$, если область D ограничена:

а) окружностью $x^2 + y^2 = 25$;

б) двумя окружностями $x^2 + y^2 = 16$; $x^2 + y^2 = 9$.

2. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, *где* D: $x^2 + y^2 = 4x$.

3. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x} dxdy$, *где* D (*часть кольца*): $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}\,x$ $(y > 0)$.

4. $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}\,ctg\sqrt{x^2 + y^2}}$.

5. Вычислить двойной интеграл, переходя к обобщенным полярным координатам.

$\iint\limits_D xydxdy$, *где* D: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $y \geq 0$.

Задания для индивидуальной работы.

1.-3. Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы.

Вариант № 1.

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}dy$.

2. $\iint\limits_D (1 - \frac{y^2}{x^2})dxdy$, *если область* D – *круг* $x^2 + y^2 \leq \pi^2$.

3. $\iint\limits_D 6dxdy$, D: $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 6x$, $y = x$, $y = 0$.

Вариант № 2.

1. $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sin(x^2 + y^2)\,dy$.

2. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, *если область* D – *круг* $x^2 + y^2 \leq 4x$.

3. $\iint\limits_D \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$, D: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, , $y = x$, $y \neq 0$, $x < 0$, $y < 0$.

Вариант № 3.

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy$.

2. $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, *если область* D – *круг* $x^2 + y^2 \leq R^2$.

3. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, D: $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 6x$, $y = x$, $y = \sqrt{3}\,x$ $(y > 0)$.

Вариант № 4.

1. $\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$. 2. $\iint\limits_{D}(6-2x-3y)dxdy,$ *если область* D – *круг* $x^2+y^2\le$

3. $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy,$ *если область* D *ограничена лемнискатой Бернулли* $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.

4.3. Вычисление площадей фигур и объемов тел с помощью двойного интеграла

1. Если область D определена неравенствами $a\le x\le b,\quad y_1(x)\le y\le y_2(x),$ то площадь S этой области находим по формуле

$$S=\iint\limits_{D}dxdy=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy.$$

2. Если область D определена неравенствами $c\le y\le d,\quad x_1(y)\le x\le x_2(y),$ то площадь S равна

$$S=\iint\limits_{D}dxdy=\int\limits_{c}^{d}dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx.$$

3. Если область D определена в полярных координатах неравенствами $\alpha\le\varphi\le\beta,\quad r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi),$ то площадь этой области

$$S=\iint\limits_{D}rdrd\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}rdr.$$

4.Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, снизу – плоскостью $z=0$ и с боков – цилиндрической поверхностью, вырезающей па плоскости xOy область D, равен

$$V=\iint\limits_{D}zdxdy=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить площади фигур, ограниченные следующими линиями:

1. $y=x^2,\quad y=\frac{3}{4}x^2.$ 2. $y^2=4+x,\quad x+3y=0.$ 3. $x=y^2,\quad x=\sqrt{2-y^2}.$

4. $r=a\sin2\varphi,\ a>0.$ 5. $r\cos\varphi=1,\ r=2$ (*площадь, не содержащая полюса*).

Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

6. $z=1+x^2+y^2,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x=4,\quad y=4.$

7. $x^2+y^2=R^2,\quad x^2+z^2=R^2.$ 8. $z=x^2+y^2,\quad z=x+y+10,\quad z=0.$

9. $x^2+y^2=4x,\ 2z=x^2+y^2,\quad z=0.$ 10. $6z=x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2=27,\ z>0.$

Задания для индивидуальной работы

1. Вычислите площади фигур, ограниченные заданными линиями.
2. Вычислите объемы тел, ограниченных указанными поверхностями.

Вариант № 1.

1a) $y = 2 - x, \quad y^2 = 4x + 4;$ 1b) $r = 4(1 + \cos\varphi).$

2a) $x = 2y^2, \quad x + 2y + z = 4, \ y = 0, \ z = 0;$ 2b) $x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -a^2.$

Вариант № 2.

1a) $x = y^2 - 2y, \quad x + y = 0;$ 1b) $r = a\sin 3\varphi.$

2a) $x^2 + 4y^2 + z = 1, \quad z = 0;$ 2b) $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -a^2.$

Вариант № 3.

1a) $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0, \quad 3x - 3y - 7 = 0;$ 1b) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$

2a) $z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \ y = 1, \quad z = 0;$ 2b) $x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -9.$

Вариант № 4.

1a) $y = 4x - x^2, \quad y = 2x^2 5x;$ 1b) $r = a\cos 5\varphi.$

2a) $z = 4 - x^2, \ 2x + y = 4, \ x = 0, \ y = 0, \quad z = 0;$ 2b) $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -16.$

4.4. Тройной интеграл, его вычисление в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

1.Если в пространстве задана замкнутая область V, определенная неравенствами

$$a \le x \le b, \qquad y_1(x) \le y \le y_2(x), \qquad z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),$$

то тройной интеграл от непрерывной в этой области функции $f(x,y,z)$ находится по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dyz \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Если $f(x,y,z) \equiv 1, \qquad (x,y,z) \in V,$ то объем данной области равен тройному интегралу вида

$$V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

2. Тройной интеграл в цилиндрических координатах (r,φ,z). Они связаны с декартовыми координатами соотношениями

$x = r\cos\varphi, \ \ y = r\sin\varphi, \ \ z = z, \ \ где \ \ r \ge 0, \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ \ z \in R.$

Якобиан преобразования $I(r,\varphi,z)=r$. Формула перехода к цилиндрическим координатам имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_V f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)r\,drd\varphi dz=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}r\,dr\int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)dz.$$

3. Сферические координаты (r,θ,φ), где

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, θ – угол между Oz и $\overrightarrow{OM}$, $M_1=np_{xoy}M$, φ – угол между Ox и $\overrightarrow{OM_1}$,

связаны с декартовыми координатами (x,y,z) равенствами:

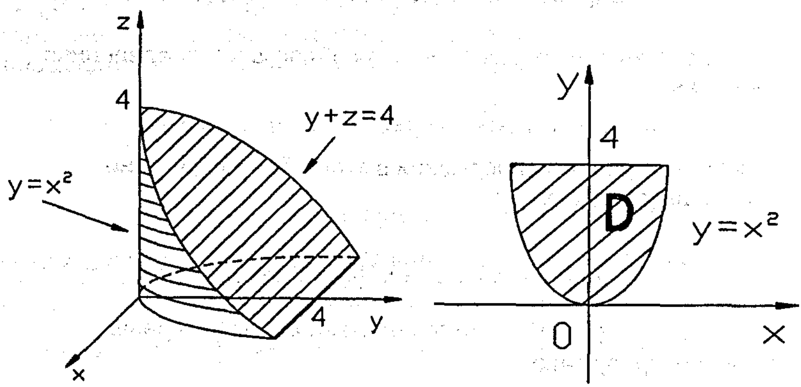
$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta.\qquad I(r,\theta,\varphi)=r^2\sin\theta.$

Тройной интеграл в сферических координатах примет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

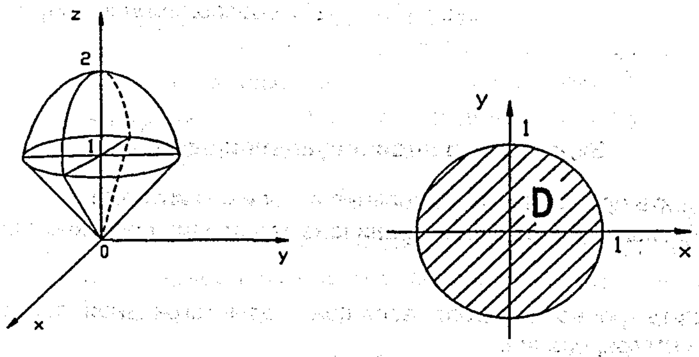
Пример № 1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz,$ если область интегрирования ограничена поверхностями $y=x^2,\quad z=0,\quad y+z=4.$

Изобразим пространственную область V: $y=x^2$ – параболический цилиндр, снизу ограниченный плоскостью $z=0$, а сверху – плоскостью, параллельной оси Ох. Проекция на плоскость хОу представляет собой параболический сегмент $-2\le x\le 2,\quad x^2\le y\le 4.$



$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{4-y}f(x,y,z)dz=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{x^2}^{4}dy\int\limits_0^{4-x^2}f(x,y,z)dz.$$

Пример № 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями
$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad 2-z-x^2-y^2=0.$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$ – верхняя часть конуса, которая ограничивает тело снизу.
$z=2-x^2-y^2$ – параболоид, ограничивает тело сверху. Найдем линию и высоту пересечения данных поверхностей.

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=2-x^2-y^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ x^2+y^2=2-z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2+z-2=0, \\ x^2+y^2=2-z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=-2, \quad z_2=1. \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Проекцией области интегрирования V на плоскость xOy является круг радиуса R=1 с центром в начале координат, перейдем к цилиндрическим координатам: $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 1, \quad r\le z\le 2-r^2$. Объем тела равен

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_V r\,dr\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r\,dr\int\limits_r^{2-r^2}dz=2\pi\int\limits_0^1 r(2-r^2-r)dr=2\pi(r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3})\Big|_0^1=$$

$$=2\pi(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3})=\frac{5}{6}\pi.$$

Задания для аудиторной работы

1. Вычислить $\iiint\limits_V x^3y^2z\,dxdydz$, если область V определяется неравенствами $0\le x\le 1$,
$0\le y\le x, \quad 0\le z\le xy.$

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями
$x^2+y^2=10x, \quad x^2+y^2=13x, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0, \quad y\ge 0.$

3. Вычислить $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz,$ если область V ограничена поверхностями $z=x^2+y^2, \quad x^2+y^2=1, \quad z=0.$

4.Вычислить объем части шара $x^2+y^2+z^2=1,$ расположенной внутри конуса $z^2=x^2+y^2.$

Задания для индивидуальной работы

1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz,$ где область V ограничена заданными поверхностями.

2.Вычислить тройной интеграл, если дана подынтегральная функция и область интегрирования.

3. Вычислить объем пространственной фигуры V.

Вариант № 1.

1. $V: x^2+z^2=y^2, \quad 0\le y\le 3;$
2. $f(x,y,z)=2x-y+4z, \quad V: x+2y+z=2, x>0, y>0, z>0;$
3. $V: \ z=x^2+y^2, \ y=x^2, \ y=1, \ z=0.$

Вариант № 2.

1. $V: x^2+y^2+z^2=9, \quad x\ge 0;$
2. $f(x,y,z)=2x-y, \quad V: \ z=x+y+4, y^2=4x, x=4, z=0, y>0;$
3. $V: \ z^2=x^2+y^2, \ z=6.$

Вариант № 3.

1. $V: x=z^2+y^2, \quad x=9;$
2. $f(x,y,z)=x-y+z, \quad V: \ y^2=4x, \quad z=4-x, z=0;$
3. $V: \ x^2+z^2=4, \ y=-1, \ y=3.$

Вариант № 4.

1. $V: 2y+z=4, \quad y+z=2, \quad 2y=x^2$
2. $f(x,y,z)=2xy, \ V: z=6-x, \ y^2=6x, \ z=0;$
3. $V: \ z={}^2+y^2, \ x=y^2, \ x=4, \ z=0.$

V. Криволинейные и поверхностные интегралы

5.1. Криволинейные интегралы первого рода (по длине дуги)

Пусть в пространстве R^3 задана гладкая дуга L_{AB} кривой L, во всех точках которой определена непрерывная функция $u = f(x,y,z)$. Дугу AB произвольным образом разобьем на n частей длиной Δl_i $(i=\overline{1,n})$. В каждой элементарной части выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i .$$

Тогда конечный предел интегральной суммы при $\Delta l_i \to 0$ называется **криволинейным интегралом первого рода** по дуге L=AB от функции f(x,y,z):

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i .$$

Если кривая L=AB лежит в плоскости xOy и вдоль этой кривой задана непрерывная функция f(x,y), то $\int_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i$.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла:

а) дуга AB задана параметрически уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \ t \in [\alpha, \beta]$,

тогда $\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$

б) дуга AB плоской кривой задана непрерывной и дифференцируемой на [a,b] функцией

y=y(x), тогда $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$

в) дуга AB задана полярным уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$,

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Некоторые свойства криволинейного интеграла по дуге:

1. Криволинейный интеграл не зависит от направления интегрирования.

2. Аддитивность. Если $L=L_1+L_2$, то $\int_{L} f(x,y,z)dl = \int_{L_1} f(x,y,z)dl + \int_{L_2} f(x,y,z)dl.$

3. Если f(x,y,z)=1, то $\int_{AB} dl = l_{AB}$ –длина дуги AB.

Задания для аудиторной работы

Вычислить:

1. $\int\limits_L \frac{ydl}{\sqrt{x}}$, если L – дуга полукубической параболы $9y^2 = 4x^3$, заключенная между точками $A(3;2\sqrt{3})$ и $B(8;\frac{32\sqrt{3}}{3})$.

2. $\int\limits_L xydl$, если L- контур прямоугольника с вершинами в точках A(0; 0), B(4; 0), C(4; 2) и D(0; 2).

3. $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, если L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

4. $\int\limits_L xyz\,dl$, L – отрезок прямой между точками A(1; 0; 1) и B(2; 2; 3).

5. $\int\limits_L |y|\,dl$, L – дуга лемнискаты Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x > 0$.

Задания для индивидуальной работы

1.-3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L f(x,y)dl$.

4. Вычислить длину дуги кривой L.

Вариант № 1.

1. $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$, $L:\ y = 0{,}5x - 2$, $0 \le x \le 4$.
2. $f(x,y) = 3x - 2\sqrt[3]{a^2y}$, $L: x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
3. $f(x,y) = x + y$, $L:\ r^2 = 4\cos 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.
4. $L: x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3}t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Вариант № 2.

1. $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$, $L:\ y = x + 2$, $1 \le x \le 2$.
2. $f(x,y) = y^2$, $L: x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
3. $f(x,y) = \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $L:\ r = 9\sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.
4. $L: x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, $0 \le t \le 1$.

Вариант № 3.

1. $f(x,y)=x^2y,\quad L:\ y=\sqrt{9-x^2},\quad 0\le x\le 3.$

2. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\quad L: x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi.$

3. $f(x,y)=arctg\dfrac{y}{x},\quad L:\ r=1+\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}.$

4. $L: x=t,\quad y=\dfrac{1}{2}t^2,\quad z=\dfrac{1}{3}t^3,\quad 0\le t\le 1.$

Вариант № 4.

1. $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y},\quad L:\ y=2-5x,\quad 1\le x\le 3.$

2. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\quad L: x=6(\cos t+t\sin t),\quad y=6(\sin t-t\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi.$

3. $f(x,y)=x+y,\qquad L:\quad r^2=16\cos 2\varphi,\quad 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}.$

4. $L: x=e^{-t}\cos t,\quad y=e^{-t}\sin t,\quad z=e^{-t},\quad 0\le t<+\infty.$

5.2 Криволинейный интеграл второго рода, его вычисление

Пусть задана дуга AB=L, в каждой точке M которой приложена сила $\vec f=\vec f(M)$, переменная по величине и направлению $\vec f(M)=(P(M);Q(M))$.

Вычислить работу силы при перемещении из точки A в точку B по дуге AB.

Дугу AB разбиваем на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$, $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$. Считаем, что на каждой элементарной дуге вектор силы постоянный: $\vec f=\vec f(M_{i-1})$. Тогда элемент работы вектора силы по перемещению вдоль элементарной дуги будет равен

$$\Delta A_i=\vec f(M_{i-1})\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i},\qquad \overrightarrow{M_{i-1}M_i}=(\Delta x_i,\Delta y_i),$$
$$\Delta A_i=P(M_{i-1})\cdot\Delta x_i+Q(M_{i-1})\cdot\Delta y_i,\quad где\ \ P\ и\ Q-непрерывные\ \ функции\ от\ x,y.$$

Всю работу вектора силы по перемещению по дуге AB получим, если перейдем к пределу $A=\lim\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta A_i,\ когда\ n\to\infty,\ \Delta x_i\to 0,\ \Delta y_i\to 0.$

Конечный предел такого вида интегральных сумм называется **криволинейным интегралом второго рода** (по координатам) и обозначается

$$\int\limits_L \vec f(M)\cdot d\vec s=\int\limits_L (P(x,y)dx+Q(x,y)dy),\qquad d\vec s=(dx,dy).\qquad A=\int\limits_L \vec f(M)\cdot d\vec s.$$

Криволинейный интеграл второго рода обладает свойствами, аналогичными свойствам криволинейного интеграла первого рода; но при изменении порядка интегрирования он меняет знак на противоположный:

$$\int\limits_{AB} \vec{f}(M)\cdot d\vec{s} = -\int\limits_{BA} \vec{f}(M)\cdot d\vec{s}$$

Вычисление таких интегралов сводится к вычислению соответствующих определенных интегралов. Например, если дуга AB задана параметрически $x = x(t), y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t), y(t))\cdot y'(t))dt.$$

Аналогично вводится криволинейный интеграл 2-го рода по пространственной кривой.

$$\vec{f}(M) = (P(x,y,z),\quad Q(x,y,z),\quad R(x,y,z)),\qquad d\vec{s} = (dx, dy, dz).$$

$$\int\limits_{L} \vec{f}(M)\cdot d\vec{s} = \int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить

1. $\int\limits_{L} (y + x^2)dx + (2x - y)dy$, *где* L – *дуга параболы* $y = 2x - x^2$ *от* $A(1;1)$ *до* $B(3;-3)$.

2. $\int\limits_{L} y^2 dx + (xy - y^2)dy$, *где* L – *дуга параболы* $y^2 = 9x$ *от* $A(0;0)$ *до* $B(1;3)$.

3. $\int\limits_{L} x(y-2)dx + y(2-x)dy$, где L- контур треугольника с вершинами А(-2; 0), В(0;0) и С(0;1), пробегаемый в положительном направлении.

4. $\int\limits_{L} xydx + zx^2dy + xyzdz,\quad L: x = e^t,\ \ y = e^{-t},\ \ z = t^2,\ \ 0 \le t \le 1.$

5. работу силы $\vec{f} = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$ вдоль отрезка прямой ВС, если В(1;1;1) и С(2;3;4).

5.3. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Теорема. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны в замкнутой области D,ограниченной контуром С. Тогда имеет место формула Грина

$$\oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \tag{1}$$

при этом обход контура С совершается так, что область D все время остается слева.

Если в некоторой области D выполнены условия теоремы, то равносильны следующие утверждения:

1. $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$ где L - любой замкнутый контур, содержащийся в области D.

2. $\oint\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B.

3. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции

$$u = u(x,y), \quad du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad \text{Тогда}$$

$$\oint\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_A^B du = u(B) - u(A),$$

т.е. интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от значений функции u(x,y) в начальной и конечной точках пути интегрирования. Функцию u(x,y) можно найти по формуле

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C, \quad (x_0,y_0) - \text{фиксированная точка} \in D,$$

(x,y) – переменная точка $\in D$.

В этом случае во всех точках области D справедливо равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

С помощью криволинейного интеграла второго рода можно вычислить **площадь** области D

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_C (-ydx + xdy).$$

Задания для аудиторной работы

1.Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$\int\limits_{FD} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy,$ $A(0;0),$ $B(1;1),$ $a) (AB): y = x;$ $b)$ $(AB): y = x^2;$

$c)$ $(AB):$ $y^2 = x.$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} xdx + ydy + zdz$ по отрезку прямой, соединяющей точки A(1;1;1) и B(2;3;5).

3. Применив формулу Грина, вычислить интеграл

$\oint\limits_L (2(x^2 + y^2)dx + (x+y)^2 dy),$ *где* $L-$ контур треугольника ABC с вершинами A(0;3), B(3; 3) и C(3; 0).

4. Вычислить $\int\limits_{(-1;0)}^{(3;1)} (2xy + x^3 - 5)dx + (x^2 - y^2 + 3)dy.$

5.Вычислить $\oint\limits_C xdy + ydx$, где С - замкнутый контур:

а) окружность $x = \cos t,\ y = \sin t;$

б) $y = x^2 \quad и \quad y = 4.$

Задания для индивидуальной работы.

Вариант № 1.

Вычислить криволинейный интеграл

1. $\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy,$ *где* $L-$ дуга параболы $y = 2x^2$ *от* $O(0,0)$ *до* $A(1,2)$.

2. $\oint\limits_L (x + 2y)dx + (x - y)dy,$ $L-$ окружность $x = 2\cos t,\quad y = 2\sin t.$

3. $\int\limits_{(2;1)}^{(4;3)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy.$

Вариант № 2.

Вычислить криволинейный интеграл

1. $\int\limits_L (2x + y)dx + (xy - x^2)dy,$ *где* $L-$отрезок прямой $y = 4x + 6$ *от* $A(-1;2)$ *до* $B(0;6)$.

2. $\oint\limits_C (x^3 + 4y)dx + (x + y^2)dy,$ $C-$ окружность $x = 3\cos t,\quad y = 3\sin t.$

3. $\int\limits_{(-1;-2)}^{(3;4)} (\sin x + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + \cos y)dy.$

Вариант № 3.

Вычислить криволинейный интеграл

1. $\int\limits_L (2x^2 + y - 3)dx + (y + x - 4)dy,$ *где* $L-$отрезок прямой $y = 6 - 2x$ *от* $A(2;2)$ *до* $B(4;-2)$.

2. $\oint\limits_C (x^2 + 3y)dx + (x - y^4)dy,$ $C-$ окружность $x = 4\cos t,\quad y = 4\sin t.$

3. $\int\limits_{(0;2)}^{(3;5)} (5 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^3)dy.$

Вариант № 4.

Вычислить криволинейный интеграл

1. $\int\limits_L (xy - x^2)dx + (x + y)dy,$ *где* $L-$дуга параболы $y^2 = 2x$ *от* $A(2;-2)$ *до* $B(8;4)$.

2. $\oint\limits_C (-x^2ydx + xy^2dy),$ $C-$ окружность $x^2 + y^2 = 16.$

3. $\int\limits_{(1;0)}^{(4;3)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

5.4. Поверхностные интегралы первого и второго рода

Пусть f(x,y,z) –непрерывная функция в точках некоторой гладкой поверхности $S \in R^3$.

С помощью кусочно-гладких линий разобьем поверхность на n элементарных площадок S_i, площади которых обозначим через ΔS_i $(i=\overline{1,n})$, а диаметры – через λ_i. На каждой площадке выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим значение функции в ней и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta S_i.$$

Тогда существует предел этой интегральной суммы, который называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции *f(x, y, z)* по поверхности S и обозначается

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i.$$

Поверхностные интегралы первого рода обладают свойствами линейности, аддитивности, для них справедлива теорема о среднем, их величина не зависит от выбора стороны поверхности.

Очевидно, что интеграл $\iint_S dS$ равен площади поверхности S.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению соответствующего двойного интеграла. Если уравнение поверхности имеет вид:

$$a)\quad z = z(x,y),\quad mo\quad \iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy;$$

$$b)\quad x = x(y,z),\quad mo\quad \iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2(y,z)+x_z'^2(y,z)}\,dydz;$$

$$c)\quad y = y(x,z),\quad mo\quad \iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x'^2(x,z)+y_z'^2(x,z)}\,dxdz.$$

Пример. Вычислить $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, если *S* – часть поверхности конуса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}$, $0 \le z \le 3$.

Из уравнения конуса для $z\in[0;3]$ находим $z^2 = \frac{9}{16}(x^2+y^2)$, $z = \frac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}$.

Берем частные производные от функции z по x и y:

$$z_x' = \frac{3x}{4\sqrt{x^2+y^2}},\quad z_y' = \frac{3y}{4\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1+z_x'^2+z_y'^2 = 1+\frac{9x^2+9y^2}{16(x^2+y^2)} = \frac{25(x^2+y^2)}{16(x^2+y^2)} = \frac{25}{16}.$$

$$dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \frac{5}{4}dxdy.$$

Проекцией поверхности данного конуса на плоскость xOy является круг $D:\ x^2+y^2=16$.

Вычисление исходного поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла по кругу.

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS=\frac{5}{4}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\left|\begin{matrix} x=r\cos\varphi, & y=r\sin\varphi \\ dxdy=r\,dr\,d\varphi, & x^2+y^2=r^2\end{matrix}\right|=\frac{5}{4}\iint_D r^2\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{5}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^4 r^2\,dr=\frac{5}{4}\cdot 2\pi\cdot\frac{64}{3}=\frac{160}{3}\pi.$$

Рассматриваются **двусторонние поверхности**, у которых различают положительную (внешнюю) и отрицательную (внутреннюю) стороны. Поверхность с выбранной стороной называется *ориентированной.* В каждой точке внешней стороны поверхности проводим нормальный вектор, который направляем от поверхности.

Если поверхность задана уравнением *z=f(x, y)*, то нормальный вектор, образующий с осью *Oz* острый угол γ, определяется следующим образом: $\vec{n}=(-f'_x,-f'_y,1)$, а координаты единичного вектора нормали $\vec{n}_0$ равны его направляющим косинусам:

$$\vec{n}_0=\left(-\frac{f'_x}{|\vec{n}|},\ -\frac{f'_x}{|\vec{n}|},\ \frac{1}{|\vec{n}|}\right)=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma),\qquad |\vec{n}|=\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}.$$

Если поверхность S задана уравнением *F(x, y, z)=0*, $f'_z\neq 0$, то $\vec{n}_0=\pm\dfrac{grad\,F}{|grad\,F|}$,

где знак « +» берется в случае, когда угол γ - острый, а знак « - », если этот угол – тупой.

Пусть в области $V\in R^3$ определена векторная функция, координаты которой непрерывные в области V функции $\vec{a}=P(x,y,z)\cdot\vec{i}+Q(x,y,z)\cdot\vec{j}+R(x,y,z)\cdot\vec{k}$.

Пусть $S\subset V$ – некоторая гладкая поверхность с выбранной положительной стороной, то есть с выбранным направлением нормального вектора. Разобьем поверхность S принадлежащими ей кусочно-гладкими линиями на элементарные площадки S_i, площади которых $\Delta S_i\ (i=\overline{1,n})$ и выберем в каждой из них произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Тогда существует предел, который называется поверхностным интегралом второго рода от векторной функции $\vec{a}$ по поверхности S:

$$\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}_0(M_i)\Delta S_i=\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}_0\,dS=\iint_S (P(M)\cos\alpha+Q(M)\cos\beta+R(M)\cos\gamma)dS.$$

Поверхностные интегралы второго рода обладают свойствами линейности и аддитивности. При изменении стороны поверхности интегрирования на противоположную интеграл меняет знак.

Так как $\cos\alpha\, dS = dydz,$ $\cos\beta\, dS = dzdx,$ $\cos\gamma\, dS = dxdy,$ то справедлива формула

$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}_0\, dS = \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению двойного интеграла по проекции поверхности S на координатную плоскость:

1) $S:\ z = z(x,y),\quad \iint_S \vec{a}(x,y,z)\cdot\vec{n}_0(x,y,z)dS = \iint_{D_1} \vec{a}(x,y,z(x,y))\cdot\vec{n}(x,y,z(x,y))dxdy,$ (1)

$D_1 = np_{xOy}S,\quad \vec{n} = \pm grad(z - z(x,y)) = \pm(-z'_x; -z'_y; 1).$

2) $S:\ y = y(x,z),\quad \iint_S \vec{a}(x,y,z)\cdot\vec{n}_0(x,y,z)dS = \iint_{D_2} \vec{a}(x,y(x,z),z)\cdot\vec{n}(x,y(x,z),z)dxdz,$ (2)

$D_2 = np_{xOz}S,\quad \vec{n} = \pm grad(y - y(x,z)) = \pm(-y'_x,\ 1,\ -y'_z);$

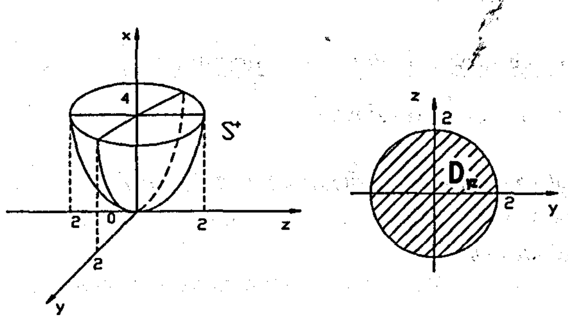
3) $S:\ x = x(y,z),\quad \iint_S \vec{a}(x,y,z)\cdot\vec{n}_0(x,y,z)dS = \iint_{D_3} \vec{a}(x(y,z),y,z)\cdot\vec{n}(x(y,z),y,z)dydz,$ (3)

$D_3 = np_{zOy}S,\quad \vec{n} = \pm grad(x - x(y,z)) = \pm(1; -x'_y; -x'_z).$

Знак «+» («-») выбираем при интегрировании по верхней (внутренней) стороне поверхности S.

Пример 1. Вычислить $\iint_S xy^2z^2dydz,$ где S – часть поверхности $x = y^2 + z^2,$ отсеченная плоскостью x=4. Рассмотреть сторону поверхности, которая не видна из начала координат.

Решение. Воспользуемся формулой (3). В данном случае вектор $\vec{a} = (xy^2z^2; 0; 0).$ $S-$ часть поверхности кругового параболоида, ограниченного плоскостью x=4, проекцией ее на плоскость yOz является круг $D_{yz}:\ y^2 + z^2 = 4.$ В этом случае интегрирование ведется по внешней стороне поверхности ($\cos\alpha > 0,$ $\vec{n} = +grad(x - y^2 - z^2) = (1; -2y; -2z)$).



Подставляем нужные выражения в формулу (3), получим:

$$\iint_S xy^2z^2dydz = \iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)y^2z^2dydz = \begin{vmatrix} y = r\cos\varphi, & z = r\sin\varphi \\ dydz = r\,dr\,d\varphi, & y^2+z^2 = r^2 \end{vmatrix} = \iint_{D_{yz}} r^7\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi$$

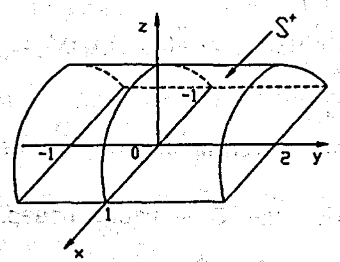
$$= \int_0^{2\pi} 0{,}25\sin^2 2\varphi\,d\varphi\int_0^2 r^7dr = \frac{1}{8}\cdot 2^8\cdot\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi = 4\cdot 2\pi = 8\pi.$$

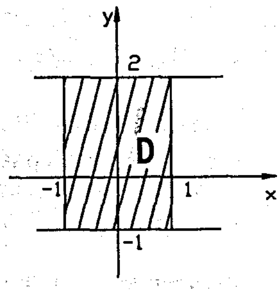
Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_S (y^2-x^2)dydz + z^2\sin x dxdz - 2y^2z\,dxdy$,

где S – верхняя сторона части поверхности $z=1-x^2$, ограниченная плоскостями $z=0$, $y=-1$, $y=2$.

Решение. Поверхность интегрирования S – верхняя часть параболического цилиндра, отсеченного плоскостями. Ее проекцией на плоскости xOy является прямоугольник

D: $-1\le x\le 1$; $-1\le y\le 2$.





Для верхней стороны поверхности

$\cos\gamma\ge 0$, $0\le\gamma\le\frac{\pi}{2}$. $\vec{n} = grad(z-1+x^2) = (-z'_x; -z'_y; 1) = (2x; 0; 1)$.

В данном случае вектор

$\vec{a} = (y^2-z^2;\ z^2\sin x;\ -2y^2z)$. $\vec{a}\cdot\vec{n} = (y^2-z^2)\cdot 2x + 0 - 2y^2z$, $z = 1-x^2$.

Воспользуемся формулой (1).

$$\iint_S (y^2-x^2)dydz + z^2\sin x dxdz - 2y^2zdxdy = \iint_D \vec{a}\cdot\vec{n}\,dxdy =$$

$$= \iint_D ((y^2-x^2)\cdot 2x + (1-x^2)\cdot 0 - 2y^2(1-x^2))dxdy =$$

$$= \iint_D (2xy^2-2x^3-2y^2+2x^2y^2)dxdy = \int_{-1}^1 dx\int_{-1}^2 (2xy^2-2x^3-2y^2+2x^2y^2)dy =$$

$$= \int_{-1}^1 (6x-6x^3-6+6x^2)dx = -8.$$

Если S – замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая область V и функции P(x,y,z),Q(x,y,z), R(x,y,z) непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области V, то справедлива **формула Остроградского – Гаусса**:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \qquad (4)$$

Эта формула позволяет упростить вычисление многих поверхностных интегралов.

Пример 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_S 4x^3dydz + 4y^3dxdz - 6z^4dxdy,$ где S – внешняя сторона цилиндра $x^2+y^2=25, \quad 0 \le z \le 6.$

Решение.

Применим формулу Остроградского – Гаусса. Находим нужные частные производные:

$$P(x,y,z)=4x^3, \quad \frac{\partial P}{\partial x}=12x^2; \quad Q(x,y,z)=4y^3, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=12y^2; \quad R(x,y,z)=-6z^4, \quad \frac{\partial R}{\partial z}=-24z^3.$$

Тогда из формулы (4) следует, что исходный интеграл равен

$$\iint\limits_S 4x^3dydz + 4y^3dxdz - 6z^3dxdy = 12\iiint\limits_V (x^2+y^2-2z^3)dxdydz = 12\iint\limits_D dxdy\int_0^6 (x^2+y^2-2z^3)dz =$$

$$=12\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi\int_0^6 (r^2-2z^3)dz = 12\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^5 r^3dr\int_0^6 dz - 24\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^5 rdr\int_0^6 z^3dz = 24\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 625\cdot 6 -$$

$$-48\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 25\cdot\frac{1}{4}\cdot 6^4 = 36\pi\cdot 25\cdot(25-216) = -171900\pi.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

1. $\iint\limits_S (5x+y-z)dS,$ где S – часть плоскости $x+2y+z=2,$ ограниченная координатными плоскостями.

2. $\iint\limits_S xyzdS,$ где S – часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2,$ отсекаемая плоскостью z=4.

Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

3. $\iint\limits_S (zdydz+(y+z^2)dxdz+(x^2-x)dxdy,$ где S – внешняя часть поверхности $y=1+x^2+z^2,$ отсеченная плоскостью y=3.

4. $\iint\limits_S -x^2zdydz+ydxdz+2dxdy,$ где S – внешняя сторона эллипсоида $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1,$ расположенная в первом октанте.

5. $\iint\limits_S (x^3 - 3y^2z^2)dxdz - (x+1)z^2dxdy,$ где S – нижняя сторона поверхности $x^2 + z^2 = R^2$, отсеченная плоскостями z=0, y=0, y=2, расположенной над плоскостью xOy.

6. $\iint\limits_S ydxdz,$ где S – внутренняя сторона тетраэдра, ограниченного плоскостями x+y+z=1, z=0, y=0, x=0.

Задания для индивидуальной работы

Вычислить

1. – 2. поверхностные интегралы первого рода;

3.– 4. поверхностные интегралы второго рода.

Вариант № 1.

1. $\iint\limits_S (2x + 3y + 2z)dS,$ где S – часть плоскости $x + 3y + z = 3,$ отсеченная координатными плоскостями.

2. $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}dS,$ где S – часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2, \quad 0 \le z \le 2.$

3. $\iint\limits_S (x + y)dydz + (y - x)dxdz + (z - 2)dxdy,$ где S - часть поверхности конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad 0 \le z \le 1, \quad \cos\gamma < 0.$(Нормаль к поверхности образует с осью Oz тупой угол.)

4. $\iint\limits_S xdydz + z^3dxdy,$ где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

(Ответы: 1) $\dfrac{15\sqrt{11}}{2}$; 2) $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi$; 3) $\dfrac{8}{3}\pi$; 4) $\dfrac{32}{15}\pi$.)

Вариант № 2.

1. $\iint\limits_S (2 + y - 7x + 9z)dS,$ где S – часть плоскости $2x - y - 2z = -2,$ отсеченная координатными плоскостями.

2. $\iint\limits_S x^2y^2dS,$ где S –полусфера $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$

3. $\iint\limits_S zdydz + (y + z^2)dxdz + (x^2 - x)dxdy,$ где S - часть поверхности параболоида

$y = 1 + x^2 + z^2,$ отсеченная плоскостью y=3. Рассматриваем сторону поверхности, которая видна из начала координат.

4. $\iint\limits_S xzdydz + xydxdz + yzdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2=4,\ 0\le z\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

(Ответы: 1) 12; 2) $\frac{128}{15}\pi$; 3) -5π; 4) $4\pi+\frac{64}{3}$.)

Вариант № 3.

1. $\iint\limits_S (6x+y+4z)dS$, где S – часть плоскости $3x+3y+z=3$, отсеченная координатными плоскостями.

2. $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, где S –полусфера $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

3. $\iint\limits_S (x+z^2)dydz+(2x^2+y)dxdz$, где S – верхняя сторона части параболоида
$y=x^2+z^2,\ \ 0\le y\le 2$, расположенная над плоскостью xOy.

4. $\iint\limits_S zdydz+(3y-x)dxdz-zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1,\ \ z=x^2+y^2+2,\ \ z=0.$

(Ответы: 1) $\frac{19\sqrt{19}}{6}$; 2) $\frac{4}{3}\pi a^4$; 3) $-\pi$; 4) 5π.)

Вариант № 4.

1. $\iint\limits_S (-x+3y-z)dS$, где S – часть плоскости $x-y+z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

2. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где S – часть конической поверхности $9(x^2+y^2)=16z^2,\ \ 0\le z\le 3.$

3. $\iint\limits_S (3x+z)dydz+(3x+3)dxdz+(y+z)dxdy$, где S - верхняя часть плоскости
$6x+3y+2z=6$, расположенная в первом октанте.

4. $\iint\limits_S (x^2+y^2)z\,dxdy$, где S – внешняя сторона нижней полусферы $x^2+y^2+z^2=9.$

(Ответы: 1) $-\frac{20\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{160}{3}\pi$; 3) $\frac{85}{6}$; 4) $\frac{324}{5}\pi$.)

5.5. Элементы теории поля. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля

Потоком векторного поля $\vec{a}(M)$, $M(x,y,z)\in S$ через поверхность S в сторону единичного вектора нормали $\vec{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ называется поверхностный интеграл второго рода

$$\Pi=\iint_S \vec{a}(M)\cdot\vec{n}_0(M)\,dS. \qquad (1)$$

П – скалярная величина; если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}_0$ острый, то поток П>0; если угол тупой, то П<0.

Поток вектора $\vec{a}(M)=(P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z))$ через замкнутую кусочно – гладкую поверхность S можно вычислить с помощью формулы Остроградского – Гаусса:

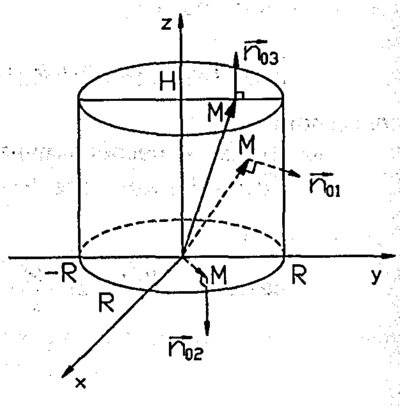
$$\Pi=\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}_0\,dS=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \qquad (2)$$

Дивергенцией векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке М называется величина, равная

$$div\,\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_M \qquad (3)$$

Дивергенция характеризует плотность источников и стоков векторного поля в точке М внутри области V, ограниченной поверхностью S. Если $div\,\vec{a}(M)>0$, то в точке М - источник, если $div\,\vec{a}(M)<0$, то в точке М – сток.

Теорема Остроградского – Гаусса. Поток П векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность S во внешнюю ее сторону численно равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по области V, ограниченной поверхностью S.



Пример 1. Найти поток векторного поля $\vec{a}(M)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ через поверхность прямого цилиндра S радиусом R и высотой H, ось которого совпадает с осью Oz, а нижнее основание находится в плоскости xOy. Нормаль направлена во внешнюю сторону цилиндра.

Обозначим через S_1 боковую поверхность цилиндра, через S_3 - его верхнее основание, а S_2 – нижнее основание. Составим скалярное произведение вектора поля и единичного вектора нормали на каждой поверхности.

$$S_1: \vec{a}\cdot\vec{n}_0 = np_{\vec{n}_0}\vec{a} = R; \qquad S_2: \vec{a}\cdot\vec{n}_0 = np_{\vec{n}_0}\vec{a} = 0; \quad S_3: \vec{a}\cdot\vec{n}_0 = np_{\vec{n}_0}\vec{a} = H;.$$

Таким образом, поток через поверхность цилиндра будет равен

$$\Pi = \iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}_0\, dS = \iint_{S_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_0\, dS + \iint_{S_2} \vec{a}\cdot\vec{n}_0\, dS + \iint_{S_3} \vec{a}\cdot\vec{n}_0\, dS = \iint_{S_1} R\, dS + \iint_{S_2} H\, dS + \iint_{S_3} 0\, dS = R\cdot 2\pi RH +$$

$$+ H\cdot\pi R^2 = 3\pi R^2 H.$$

Вычисления можно значительно сократить, если воспользоваться формулой Остроградского – Гаусса.

$$P = x,\ Q = y,\ R = z;\ P'_x = 1,\ Q'_y = 1,\ R'_z = 1; \qquad \Pi = \iiint_V (1+1+1)dxdydz = 3\cdot V_{цил} =$$

$$= 3\pi R^2 H.$$

Циркуляция и ротор векторного поля

Пусть Г – замкнутая кусочно-гладкая кривая в трехмерном пространстве и S – гладкая поверхность, краем которой служит кривая Г. Положительным считаем такой обход кривой, при котором область, ограниченная этой кривой, остается слева.

В точках поверхности S задано векторное поле

$\vec{a}(M) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.

Функции P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) непрерывны вместе со своими первыми частными производными. Справедлива теорема Стокса:

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) dS. \qquad (5)$$

Циркуляцией векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль контура Г называется криволинейный интеграл

$$C = \oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \oint_\Gamma \vec{a}(M)\cdot\vec{dl}, \qquad \vec{dl} = (dx, dy, dz). \qquad (6)$$

Ротором или вихрем векторного поля называется вектор с координатами

$$rot\,\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \qquad (7)$$

Теорема Стокса. Циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутого контура Г равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность S с краем Г.

$$C = \oint_\Gamma \vec{a}\cdot\vec{dl} = \iint_S rot\,\vec{a}\cdot\vec{n}_0\, dS. \qquad (8)$$

Число $C(M) = np_{\vec{n}_0}\, rot\,\vec{a}(M)$ называется **плотностью циркуляции** векторного поля в точке М в направлении единичного вектора нормали.

Задания для аудиторной работы

1. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{a}(M) = (xy + z^2;\ yz + x^2;\ zx + y^2)$ в точке M (1; 3; -5).

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = (x - 3z; x + 2y + z; 4x + y)$ через верхнюю часть плоскости x + y + z = 2, лежащую в первом октанте. (*Ответ*: $26/3$.)

3. Найти поток векторного поля $\vec{a}(M) = (x;\ -2y; -z)$ через замкнутую поверхность S, ограниченную поверхностями $1 - z = x^2 + y^2$, $z = 0$, в направлении внешней нормали. (*Ответ*: $-\pi$.)

4.Найти ротор векторного поля $\vec{a}(M) = (xyz; x + y + z;\ x^2 + y^2 + z^2)$ в точке M (1; -1; 2).

5.С помощью формулы Стокса преобразовать интеграл $\oint\limits_{\Gamma}(y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz,$ где Г – замкнутый контур, в интеграл по поверхности S, «натянутой » на этот контур.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = (z;\ x;\ y)$ вдоль контура Г: $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$ в положительном направлении обхода относительно $\vec{n}_0 = \vec{k}$ непосредственно и по формуле Стокса. (*Ответ*: 4π.)

7. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = (-y; 2; 1)$ по линии Г пересечения конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ с плоскостью z = 1 в положительном направлении обхода относительно $\vec{n}_0 = \vec{k}$. (*Ответ*: π.)

Задания для индивидуальной работы

Вариант № 1.

1. Вычислить поток П векторного поля $\vec{a}(M) = (x, 3y, 2z)$ через верхнюю часть плоскости $x + y + z = 1$, расположенной в первом октанте.

2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = (x - y;\ x;\ -z)$ вдоль линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = 1;\ z = 2$ в положительном направлении обхода относительно $\vec{n}_0 = \vec{k}$.

(*Ответы*: 1. $П = 1$; 2. $C = 2\pi$.)

Вариант № 2.

1. Вычислить поток П векторного поля $\vec{a}(M)=(3x;-y;-z)$ через поверхности $9-z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, ограничивающие некоторое тело, в направлении внешней нормали.

2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)=(y;-x;z)$ вдоль линии пересечения поверхностей $x^2+y^2+z^2=4$; $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в положительном направлении обхода относительно $\vec{n}_0=\vec{k}$.

(*Ответы*: 1. $П=\frac{81}{8}\pi$; 2. $C=-4\pi$.)

Вариант № 3.

1. Вычислить поток П векторного поля $\vec{a}(M)=(x-y;\ x+y;\ z^2)$ через поверхность цилиндрического тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=2$, в направлении внешней нормали.

2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)=(y;-x;z)$ вдоль линии пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=4$ с конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в положительном направлении обхода относительно $\vec{n}_0=\vec{k}$.

(*Ответы*: 1. $П=-4\pi$; 2. $C=-4\pi$.)

Вариант № 4.

1. Вычислить поток П векторного поля $\vec{a}(M)=(8x,11y,17z)$ через верхнюю часть плоскости $x+2y+3z=1$, расположенной в первом октанте.

2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)=(yz;\ 2xz;\ y^2)$ вдоль линии пересечения поверхностей $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$; $x^2+y^2=16$ в положительном направлении обхода относительно $\vec{n}_0=\vec{k}$.

(*Ответы*: 1. $П=1$; 2. $C=48\pi$.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
2. Гурский Е.И., Домашев В.П. и др. Руководство к решению задач по высшей математике. Ч. 1, 2. – Мн.: Вышэйшая школа, 1989, 1990.
3. Гусак А.А. Справочное пособие по решению задач: Математический анализ и дифференциальные уравнения. – Мн.: ТетраСистемс, 1998.
4. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 2005.
5. Данко П.Е., Попов А.Н., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2.- М.: Высшая школа, 1997.
6. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. - М.: Наука, 1983.
7. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Вышэйшая школа, 1976.
8. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1977.
9. Сборник задач по математике для втузов: В 2 ч./ В.А. Болгов, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко и др.; Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука,1981.
10. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике. Ч. 1,2. – Мн.: Вышэйшая школа, 1993.
11. Рябушко А.П., Бархатов В.В. и др. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 2, 3. – Мн.: Вышэйшая школа, 2000, 2006.
12. Тузик А.И. Высшая математика. Интегрирование функций одной и нескольких переменных. – Брест, БрГТУ, 2000.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

Тузик Татьяна Александровна
Тузик Альфред Иванович
Журавель Мария Григорьевна

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

по курсу *«Высшая математика»*

для студентов
электронно-информационных специальностей

II семестр

Ответственный за выпуск ***А.И. Тузик***
Редактор ***Т.В. Строкач***
Компьютерный набор ***Т.А. Тузик, С.А. Тузик***
Компьютерная графика ***Е.Н. Швычкина***
Компьютерная верстка ***Е.А. Боровикова***
Корректор ***Е.В. Никитчик***

Подписано к печати 29.03.2007 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 6,0. Уч.–изд. л. 6,5. Тираж 150 экз. Заказ № 373.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267.