

Продолжение таблицы 1

13	8.304e-6	150.435	-137.569	34	2.255e-5	693.646	904.484
14	8.557e-6	150.686	-146.323	35	2.329e-5	710.494	934.572
15	1.678e-6	-477.007	-56.928	36	2.601e-6	-829.532	-87.697
16	4.667e-6	-59.382	106.088	37	7.489e-6	-131.478	211.971
17	7.884e-6	177.618	226.444	38	1.287e-5	293.206	481.861
18	1.073e-5	304.609	310.643	39	1.769e-5	538.173	702.26
19	1.289e-5	366.632	365.257	40	2.14e-5	670.11	863.215
20	1.422e-5	392.953	395.638	41	2.37e-5	732.85	960.613
21	1.467e-5	399.974	405.347	42	2.448e-5	751.106	993.158

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Караманский, Т.Д. Численные методы строительной механики / Пер с болг.; под ред. Г.К. Клейна. – М.: Стройиздат, 1981. – 436 с.
2. Веренич, А.А. О методике расчета изгибаемых плит методом конечных разностей / А.А. Веренич // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов / БрГТУ. – Брест, 2012.
3. Макаров, Е.Г. Инженерные расчеты в MathCad: учебный курс. – СПб.: Питер, 2005. – 448 с.

УДК 624.04:519.3

*Веренич А.А.*

*Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.*

### О МЕТОДИКЕ РАСЧЁТА ИЗГИБАЕМЫХ ПЛИТ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

В расчёте сооружений существуют задачи, для которых получить точное решение в замкнутом виде во многих случаях, на сегодняшний день, либо невозможно, либо очень сложно [1, 2]. В таких случаях для решения задач используют численные методы. Один из них – метод конечных разностей (МКР) [1, 2].

Применение метода конечных разностей характеризуется следующими особенностями и преимуществами:

- решение задачи сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно значений искомой функции на заданном множестве точек;
- в решениях МКР используются и получаются достаточно простые выражения;
- МКР более прост в реализации, чем, например, метод конечных элементов (МКЭ);
- всегда возможно составить систему уравнений с симметричной ленточной матрицей, являющейся основой решения;
- возможно применение разностных уравнений повышенной точности [2].

В работе рассматривается расчёт методом конечных разностей изгибаемых плит с промежуточными опорами при действии вертикальной статической нагрузки.

Решения задач строительной механики и теории упругости, в сущности, являются решениями некоторых дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений. Точное решение таких уравнений возможно в отдельных простых случаях при специально подобранных физических характеристиках и граничных условиях рассматриваемой конструкции. Практика располагает огромным числом разнообразных конструкций, для которых во многих случаях точного решения в замкнутом виде не существует. В этих случаях численные методы дают богатые возможности для получения решения. Метод конечных разностей – классический образец метода этого направления.

Основная идея метода конечных разностей состоит в следующем [1, 2]. На объекте располагается система узловых точек. Задача считается решённой, если известны значения участвующих в решении функций в этих точках.

Для того чтобы определить значения функций в узловых точках, производные в дифференциальных уравнениях заменяются конечными разностями. Полученные таким образом разностные уравнения (уравнения в конечных разностях) представляют собой алгебраические уравнения, содержащие только значения рассматриваемых функций в известном числе узловых точек, умноженные на константы.

Для каждой узловой точки записывается столько разностных уравнений, сколько значений неизвестных функций в узле. Если количество искомых функций –  $m$ , для их определения записывается  $m$  дифференциальных уравнений, которым соответствует  $m$  разностных уравнений. Вместе с граничными условиями, которые записываются также в разностной форме, эти уравнения образуют систему алгебраических уравнений, решение которой даёт нам узловые значения неизвестных функций, что и является решением данной задачи.

Если кроме значений, участвующих в решении функций, нас интересует ещё и их производные, то для их определения снова используют разностные выражения.

Выражения производных в конечных разностях имеют вид:

Для второй производной в точке  $i$ :

а) слева через правые разности:

$$y_i'' = \frac{y_i' - y_{i-1}'}{\lambda} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\lambda^2}; \quad (1.1)$$

б) справа через левые разности:

$$y_i'' = \frac{y_{i+1}'' - y_i''}{\lambda} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\lambda^2}. \quad (1.2)$$

Для четвертой производной:

а) слева – через правые  $y_i''''$ :

$$y_i'''' = \frac{y_i'''' - y_{i-1}''''}{\lambda} = \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_{i-1} - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{\lambda^4}; \quad (2.1)$$

б) справа – через левые  $y_i''''$ :

$$y_i'''' = \frac{y_{i+1}'''' - y_i''''}{\lambda} = \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_{i-1} - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{\lambda^4}. \quad (2.2)$$

Основной проблемой расчёта плит является определение функции прогибов  $w(x, y)$  как интеграла дифференциального уравнения Софи Жермен–Лагранжа:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}; \quad (3)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $h$  – толщина плиты,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,

$q(x, y)$  – функция заданной нагрузки.

Изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  определяются выражениями:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (4)$$

Уравнение Софи Жермен–Лагранжа (3) в разностной форме с учётом (1.1–2.2) для  $i$ -й точки примет вид:

$$20w_i - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_g + w_h) + (w_k + w_l + w_m + w_n) = \frac{q\lambda^4}{D}, \quad (5)$$

где  $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n$  – узлы сетки;  $\lambda$  – шаг сетки (рисунок 1).

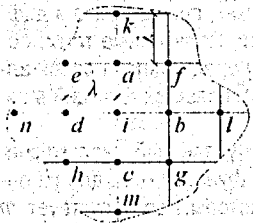


Рисунок 1

Изгибающие моменты (4) в разностной форме примут вид:

$$M_{x,i} = \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu)w_i - \nu(w_a + w_c) - (w_b + w_d)]; \quad (6)$$

$$M_{y,i} = \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu)w_i - \nu(w_b + w_d) - (w_a + w_c)]. \quad (7)$$

Плита является двумерной системой, поэтому для удобства составления разностных уравнений вида (5, 6, 7) их можно представить в матрично-операторной форме:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{array} \cdot w_i - \frac{q\lambda^4}{D} = 0; \quad (8)$$

$$M_{x,i} = \frac{D}{\lambda^2} \cdot \begin{array}{ccc} & -\nu & \\ -1 & 2+2\nu & -1 \\ & -\nu & \end{array} \cdot w_i \quad M_{y,i} = \frac{D}{\lambda^2} \cdot \begin{array}{ccc} & -1 & \\ -\nu & 2+2\nu & -\nu \\ & -1 & \end{array} \cdot w_i \quad (9)$$

где каждая клеточка оператора отвечает соответствующему узлу сетки (рисунок 1) по месту её положения относительно средней клетки ( $i$ -й узел), а её содержание указывает, на какой коэффициент в разностном уравнении следует умножить перемещение  $w$  соответствующего узла.

Рассмотрим, например, прямоугольную плиту, которую разобьём сеткой на  $14 \times 12$  частей с одинаковым шагом в обоих направлениях (рисунок 2). Данная плита симметрична относительно обеих осей  $x$  и  $y$ , поэтому расчёт достаточно провести для четверти плиты.

Для каждой точки сетки, в которой имеется неизвестное перемещение  $w$ , записывается уравнение вида (8). При записи этих уравнений приходится использовать контурные узлы и один ряд внеконтурных узлов (рисунок 2).

Значение функции  $w$  в этих узлах выражаются через её значения во внутренних узлах, используя граничные условия, которые для защемлённого края имеют вид:

а) прогиб на опоре равен нулю —  $w_{\text{контр.}} = 0$ ;

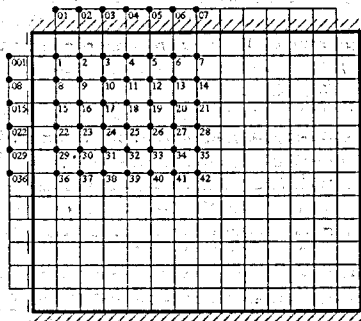


Рисунок 2

б) угол поворота равен нулю  $-\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{\text{законт.}} - w_{\text{внутрнк.}}}{2\lambda} = 0$ .

Из этих условий получим:

а)  $w_{\text{контн.}} = 0$ ; б)  $w_{\text{законтн.}} = w_{\text{внутрнк.}}$  (10)

Для шарнирноопёртого края имеют вид:

а) прогиб на опоре равен нулю  $w_{\text{контн.}} = 0$ ;

б) изгибающий момент равен нулю  $-\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} = \frac{w_{\text{законтн.}} + w_{\text{внутрнк.}}}{\lambda^2} = 0$ .

Из этих условий получим:

а)  $w_{\text{контн.}} = 0$ ; б)  $w_{\text{законтн.}} = -w_{\text{внутрнк.}}$  (11)

Соответственно для плиты, представленной на рис. 2, будем иметь:

$w_{01} = w_1, w_{02} = w_2, w_{03} = w_3$  и  $w_{001} = -w_1, w_{08} = -w_3, w_{015} = -w_{15}$  и т. д.

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений, решая которую найдем значения вертикальных перемещений (прогибов)  $w$  в узловых точках. После этого изгибающие моменты определяются по выражениям (9).

На основе изложенной методики составлена MathCAD-программа, которая позволяет выполнить расчёт плит с различными условиями опирания.

**СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Масленников, А.М. Расчет строительных конструкций численными методами: учебное пособие. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с.
2. Караманский, Т.Д. Численные методы строительной механики; пер с болг. / Под ред. Г.К. Клейна. – М.: Стройиздат, 1981. – 436 с.
3. Макаров, Е.Г. Инженерные расчеты в MathCad: учебный курс. – СПб.: Питер, 2005. – 448 с.

УДК 624.04:519.3

*Веренич А.А.*

*Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.*

**РАСЧЁТ ИЗГИБАЕМЫХ ПЛИТ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ОПОРАМИ**

Расчет изгибаемых плит с использованием уравнения Софи Жермен-Лагранжа и применением конечно-разностной формы рассмотрен в работах [1, 2]. Уравнение Софи Жермен-Лагранжа в конечно-разностной форме для  $i$ -й точки имеет вид [2]:

$20w_i - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_g + w_h) + (w_k + w_l + w_m + w_n) = \frac{q\lambda^4}{D}$ , (1)

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ;  $h$  – толщина плиты;  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;

$q(x, y)$  – функция заданной нагрузки;  $w(x, y)$  – функция прогибов точек плиты;  $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n$  – узлы сетки,  $\lambda$  – шаг сетки (рисунок 1).

Изгибающие моменты в сечениях плиты  $M_x$  и  $M_y$  определяются выражениями:

$M_{x,i} = \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu)w_i - \nu(w_a + w_c) - (w_b + w_d)]$ , (2)

$M_{y,i} = \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu)w_i - \nu(w_b + w_d) - (w_a + w_c)]$ . (3)

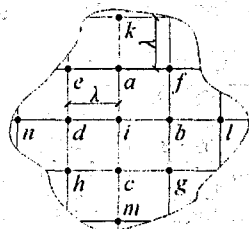


Рисунок 1