СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Хорсева, Н.И. Мониторинг психофизиологических показателей детей – пользователей мобильной связью / Н.И. Хорсева, П.П. Григал, Н.В. Горбунова // Тезисы V Международного конгресса «Слабые и сверхслабые поля и излучения в биологии и медицине». – СПб, 29 июня – 3 июля 2009. – С. 180.
2. Лебедева, Н.Н. Динамика ритмической активности коры головного мозга человека при воздействии электромагнитного поля мобильного телефона / Н.Н Лебедева, Л.А. Потулова, Р.А. Марагей // Биомед. радиоэлектроника. – 2010. – № 10. – С. 3–10.
3. Будянская, Э.Н. О преждевременных возрастных изменениях со стороны основных гомеостатических систем организма пользователей видеодисплейных терминалов (ВДТ) // Слабые и сверхслабые поля и излучения в биологии и медицине: тез. Междунар. конгр. – СПб., 1997. – С. 219.
4. Вишневский, А.М. Магнитные поля, воздействующие на человека в условиях метро / А.М. Вишневский, А.Б. Разлётов, Е.А. Свядощ, Т.В. Соколов // 1-й Международный конгресс: Слабые и сверхслабые поля и излучения в биологии и медицине. – 1997. – С. 223.
5. Горшенина, Т.И. О гипоксическом влиянии слабых ПМП на живые организмы / Т.И. Горшенина, Л.Ф. Казионова, А.Э. Фрумкис, В.И. Садовникова // В кн.: Живые системы в электромагнитных полях. Вып. 2. – Томск, 1979. – С. 3-6.
6. Информационный канал // Экология вашего дома и офиса [Электрон. ресурс]. – 1997-2011. – Режим доступа: http://subscribe.ru/archive/home.help.ionization/200601/17121142.html. – Дата доступа: 02.02.2012.
7. Вестерхофф, Х. Термодинамика и регуляция превращений свободной энергии в биосистемах; пер. с англ. / Х. Вестерхофф, К. ван Дам // – М.: Мир, 1992. – 686 с.
8. Оше, А.И. Электрохимическая модель метаболизма / А.И. Оше, К.Ч. Урусов // Электромагнитные поля в биосфере. – Тула: Изд-во Тульск. гос. ун-та, 1989. – Т. 2. – С. 133–144.
9. Узденский, А.Б. Реализация в клетках резонансных механизмов биологического действия сверхнизкочастотных магнитных полей // Электромагнитные поля и здоровье человека: матер. II Междунар. конф. – М., 1999. – С 43.
10. Пресман, А.С. Электромагнитные поля и живая природа. – М.: Наука, 1968. – 288 с.
11. Богданов, В.П. Инструментальное и биофизическое экспериментальное исследование воздействия на живой организм электромагнитного излучения частотой 1000 МГц, адекватного техногенным полям / В.П. Богданов, Т.И. Субботина, А.А. Яшин // Вестн. новых мед. технологий. – 2000. – Т. VII, № 3–4. – С. 57–60.
12. Физические факторы. Эколого-гигиеническая оценка и контроль. – М.: Медицина, 1999. – 325 с.
13. Скрыпнюк, З.Д. Этиология, патогенез и информотерапия конформационных гомотоксикозов / З.Д. Скрыпнюк, В.Я. Левых, Е.И. Мысюк // Інформ. та негентроп. терапія. – 2001. – № 1. – С. 136–137.
14. Малахов, Г.П. Электромагнитное излучение и ваше здоровье / Г.П. Малахов. – СПб.: Невский проспект, 2003. – 128 с.
15. Таскаев, Ю. Н. Биоконтроль экстремальных факторов в электроэнергетике: автореф. дис. на соиск. учен. степ. д.б.н.: Спец. 03.00.16: Спец. 03.00.13 / Таскаев Юрий Николаевич / Сиб. НИИ энергетики РАО ЕЭС. – Новосибирск: 2001. – 38 с.
16. Горго, Ю.П. Латентний період сенсомоторної реакції та поріг чутливості до змінного електричного струму при різних характеристиках подразників / Ю.П. Горго, В.Б. Богданов // Інформ.та негентроп. терапія. – 2001. – №1. – С. 35–36.
17. Скрипнюк, З.Д. Сучасний стан і перспективи розвитку інформотерапії // Інформ. та негентроп. терапія. – 1997. – № 1. – С. 31.

УДК 517.8

Зеневич Е.А., Фомина Н.В.

Научные руководители: к.т.н., доцент Махнист Л.П., к.ф.-м.н., доцент Каримова Т.И.

МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В настоящей работе рассматриваются связи между начальными, центральными и факториальными моментами случайных величин, способы вычисления одних моментов, используя другие, и вычисление моментов случайных величин, используя числа Стирлинга первого и второго рода.

Моментом n-ого порядка ($n = 0,1,2,\ldots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left((X-a)^n\right)$.

Начальным моментом n-ого порядка ($n = 0,1,2,\ldots$) случайной величины X (относительно числа $a = 0$) называется $\alpha_n = M\left(X^n\right)$. Заметим, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = M(X)$.

Центральным моментом n-ого порядка случайной величины X (относительно центра распределения, т. е. числа $a = M(X)$) называется $\mu_n = M\left(\left(X - M(X)\right)^n\right)$. Очевидно, что $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$.

Факториальным моментом n-ого порядка ($n = 0,1,2,\ldots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left((X-a)(X-a-1)\ldots(X-a-n+1)\right)$.

Начальным факториальным моментом n-ого порядка ($n = 0,1,2,\ldots$) случайной величины X (относительно числа $a = 0$) называется $\alpha_{[n]} = M\left(X^{[n]}\right) = M\left(X(X-1)\ldots(X-n+1)\right)$. Заметим, что $\alpha_{[0]} = 1$, $\alpha_{[1]} = M(X)$.

Центральным факториальным моментом n-ого порядка ($n = 0,1,2,\ldots$) случайной величины X (относительно центра распределения, т. е. числа $a = M(X)$) называется

$$\mu_{[n]} = M\left(\left(X - M(X)\right)^{[n]}\right) = M\left(\left(X - M(X)\right)\left(X - M(X) - 1\right)\ldots\left(X - M(X) - n + 1\right)\right).$$

Заметим, что $\mu_{[0]} = 1$, $\mu_{[1]} = 0$, $\mu_{[2]} = D(X)$.

Центральные моменты n-ого порядка случайной величины X связаны с ее начальными моментами соотношением

$$\mu_n = M\left(\left(X - M(X)\right)^n\right) = M\left(\left(X - \alpha_1\right)^n\right) = M\left(\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m X^{n-m} \alpha_1^m\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} M\left((-1)^m C_n^m X^{n-m} \alpha_1^m\right) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m M(X^{n-m}) \alpha_1^m = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m \alpha_{n-m} \alpha_1^m .$$

Так, например, $\mu_2 = \sum_{m=0}^{2} (-1)^m C_2^m \alpha_{2-m} \alpha_1^m = C_2^0 \alpha_2 \alpha_1^0 - C_2^1 \alpha_1 \alpha_1^1 + C_2^2 \alpha_0 \alpha_1^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$,

$$\mu_3 = \sum_{m=0}^{3} (-1)^m C_3^m \alpha_{3-m} \alpha_1^m = C_3^0 \alpha_3 \alpha_1^0 - C_3^1 \alpha_2 \alpha_1^1 + C_3^2 \alpha_1 \alpha_1^2 - C_3^3 \alpha_0 \alpha_1^3 = \alpha_3 - 3\alpha_2 \alpha_1 + 2\alpha_1^3 .$$

Начальные моменты n-ого порядка случайной величины X связаны с ее центральными моментами соотношением

$$\alpha_n = M\left(X^n\right) = M\left(\left(X - M(X) + \alpha_1\right)^n\right) = M\left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(X - M(X)\right)^{n-m} \alpha_1^m\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} M\left(C_n^m \left(X - M(X)\right)^{n-m} \alpha_1^m\right) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m M\left(X - M(X)\right)^{n-m} \alpha_1^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \mu_{n-m} \alpha_1^m .$$

Так, например, $\alpha_2 = \sum_{m=0}^{2} C_2^m \mu_{2-m} \alpha_1^m = C_2^0 \mu_2 \alpha_1^0 + C_2^1 \mu_1 \alpha_1^1 + C_2^2 \mu_0 \alpha_1^2 = \mu_2 + \alpha_1^2$,

$$\alpha_3 = \sum_{m=0}^{3} C_3^m \mu_{3-m} \alpha_1^m = C_3^0 \mu_3 \alpha_1^0 + C_3^1 \mu_2 \alpha_1^1 + C_3^2 \mu_1 \alpha_1^2 + C_3^3 \mu_0 \alpha_1^3 = \mu_3 + 3\mu_2 \alpha_1 + \alpha_1^3 .$$

Для установления связи между факториальными моментами и моментами случайной величины рассмотрим следующие определения и соотношения.

Выражение $k^{[n]} = k(k-1)\dots(k-n+1) = S_0^{(n)}k^n + S_1^{(n)}k^{n-1} + \dots + S_{n-1}^{(n)}k = \sum_{m=1}^{n} S_{n-m}^{(n)}k^m$ называется *факториальным многочленом степени* n. Коэффициенты $S_i^{(n)}$ называются *числами Стирлинга первого рода* и могут быть получены с помощью рекуррентной формулы

$$S_i^{(n)} = S_i^{(n-1)} - (n-1)S_{i-1}^{(n-1)}.$$

Действительно, $k^{[1]} = S_0^{(1)}k$ и $S_0^{(1)} = 1$;

$k^{[2]} = k(k-1) = k^2 - k = S_0^{(2)}k^2 + S_1^{(2)}k$ и $S_0^{(2)} = 1$, $S_1^{(2)} = -1$;

$k^{[3]} = k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k = S_0^{(3)}k^3 + S_1^{(3)}k^2 + S_2^{(3)}k$ и

$S_0^{(3)} = 1$, $S_1^{(3)} = -3$, $S_2^{(3)} = 2$.

Докажем рекуррентную формулу для чисел Стирлинга первого рода.

$$k^{[n]} = k(k-1)\dots(k-n+2)(k-n+1) = k^{[n-1]}(k-n+1) = \sum_{m=1}^{n-1} S_{n-1-m}^{(n-1)}k^m\,(k-n+1) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} S_{n-1-m}^{(n-1)}k^{m+1} - (n-1)\sum_{m=1}^{n-1} S_{n-1-m}^{(n-1)}k^m.$$

В первой сумме полученной формулы введем замену $m+1 = m$, тогда формула примет вид:

$$\sum_{m=2}^{n} S_{n-m}^{(n-1)}k^m - (n-1)\sum_{m=1}^{n-1} S_{n-1-m}^{(n-1)}k^m = S_0^{(n-1)}k^n + \sum_{m=2}^{n-1} S_{n-m}^{(n-1)}k^m - (n-1)\sum_{m=2}^{n-1} S_{n-1-m}^{(n-1)}k^m -$$

$$-(n-1)S_{n-2}^{(n-1)}k^1 = S_0^{(n-1)}k^n + \sum_{m=2}^{n-1}\left(S_{n-m}^{(n-1)} - (n-1)S_{n-1-m}^{(n-1)}\right)k^m - (n-1)S_{n-2}^{(n-1)}k^1 =$$

$$= S_0^{(n-1)}k^n + \sum_{m=2}^{n-1}\left(S_{n-m}^{(n-1)} - (n-1)S_{n-1-m}^{(n-1)}\right)k^m - (n-1)S_{n-2}^{(n-1)}k^1$$ и, т.к. $k^{[n]} = \sum_{m=1}^{n} S_{n-m}^{(n)}k^m$,

то имеют место формулы

$$S_0^{(n)} = S_0^{(n-1)},\ S_{n-m}^{(n)} = S_{n-m}^{(n-1)} - (n-1)S_{n-1-m}^{(n-1)},\ S_{n-1}^{(n)} = -(n-1)S_{n-2}^{(n-1)}.$$

Введя замену $i = n - m$, получим $S_i^{(n)} = S_i^{(n-1)} - (n-1)S_{i-1}^{(n-1)}$, полагая $S_i^{(n)} = 0$, если $i < 0$ или $i > n-1$.

Так, например, если $n = 3$, имеем:

$S_i^{(3)} = S_i^{(2)} - 2S_{i-1}^{(2)}$; $S_0^{(3)} = S_0^{(2)} - 2S_{-1}^{(2)} = S_0^{(2)} - 2\cdot 0 = 1$;

$S_1^{(3)} = S_1^{(2)} - 2S_0^{(2)} = -1 - 2\cdot 1 = -3$;

$S_2^{(3)} = S_2^{(2)} - 2S_1^{(2)} = 0 - 2S_1^{(2)} = -2\cdot(-1) = 2$,

и, следовательно, факториальный многочлен степени $n = 3$ равен

$$k^{[3]} = k(k-1)(k-2) = \sum_{m=1}^{3} S_{3-m}^{(3)}k^m = S_0^{(3)}k^3 + S_1^{(3)}k^2 + S_2^{(3)}k^1 = k^3 - 3k^2 + 2k.$$

Некоторые значения $S_i^{(n)}$ внесем в таблицу:

n	$S_0^{(n)}$	$S_1^{(n)}$	$S_2^{(n)}$	$S_3^{(n)}$	$S_4^{(n)}$	$S_5^{(n)}$	...
1	1						
2	1	-1					
3	1	-3	2				
4	1	-6	11	-6			

n	$S_0^{(n)}$	$S_1^{(n)}$	$S_2^{(n)}$	$S_3^{(n)}$	$S_4^{(n)}$	$S_5^{(n)}$	...
5	1	-10	35	-50	24		
6	1	-15	85	-225	274	-120	
...	...	...	...	...	...	...	...

Начальные факториальные моменты n-ого порядка случайной величины X связаны с ее начальными моментами соотношением

$$\alpha_{[n]} = M\left(X^{[n]}\right) = M\left(X(X-1)\ldots(X-n+1)\right) = \sum_{m=1}^{n} M\left(S_{n-m}^{(n)} X^m\right) = \sum_{m=1}^{n} S_{n-m}^{(n)}\alpha_m ,$$

где $S_i^{(n)}$ – числа Стирлинга первого рода.

Центральные факториальные моменты n-ого порядка случайной величины X связаны с ее центральными моментами соотношением, которое легко получить из соответствующего соотношения для начальных моментов, полагая $X = X - M(X)$

$$\mu_{[n]} = \sum_{m=1}^{n} S_{n-m}^{(n)}\mu_m = S_{n-1}^{(n)}\mu_1 + \sum_{m=2}^{n} S_{n-m}^{(n)}\mu_m = \sum_{m=2}^{n} S_{n-m}^{(n)}\mu_m ,$$

где $S_i^{(n)}$ – числа Стирлинга первого рода, так как $\mu_1 = 0$.

Так, например, $\mu_{[2]} = \mu_2$; $\mu_{[3]} = \mu_3 - 3\mu_2$; $\mu_{[4]} = \mu_4 - 6\mu_3 + 11\mu_2$.

Для установления связи между моментами и факториальными моментами случайной величины рассмотрим следующие соотношения.

Заметим, что имеет место соотношение

$$k^n = a_0^{(n)}k^{[n]} + a_1^{(n)}k^{[n-1]} + \ldots + a_{n-1}^{(n)}k^{[1]} = \sum_{m=1}^{n} a_{n-m}^{(n)}k^{[m]} = \sum_{m=1}^{n} a_{n-m}^{(n)}\prod_{j=0}^{m-1}(k-j).$$

Коэффициенты $a_i^{(n)}$ называются *числами Стирлинга второго рода* и могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $a_i^{(n)} = a_i^{(n-1)} + (n-i)a_{i-1}^{(n-1)}$.

Очевидно, что

$k^1 = a_0^{(1)}k^{[1]} = k$ и $a_0^{(1)} = 1$; $k^2 = a_0^{(2)}k^{[2]} + a_1^{(2)}k^{[1]} = k(k-1) + k$ и $a_0^{(2)} = 1$, $a_1^{(2)} = 1$.

Докажем рекуррентную формулу для чисел $a_i^{(n)}$.

$$k^n = k\cdot k^{n-1} = k\sum_{m=1}^{n-1} a_{n-1-m}^{(n-1)}k^{[m]} = \sum_{m=1}^{n-1} a_{n-1-m}^{(n-1)}k^{[m]}(k-m+m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} a_{n-1-m}^{(n-1)}k^{[m]}(k-m) + \sum_{m=1}^{n-1} m a_{n-1-m}^{(n-1)}k^{[m]} = \sum_{m=1}^{n-1} a_{n-1-m}^{(n-1)}k^{[m+1]} + \sum_{m=1}^{n-1} m a_{n-1-m}^{(n-1)}k^{[m]}.$$

В первой сумме полученной формулы введем замену $m+1 = m$, тогда формула примет вид:

$$\sum_{m=2}^{n} a_{n-m}^{(n-1)}k^{[m]} + \sum_{m=1}^{n-1} m a_{n-1-m}^{(n-1)}k^{[m]} = a_0^{(n-1)}k^{[n]} + \sum_{m=2}^{n-1} a_{n-m}^{(n-1)}k^{[m]} + \sum_{m=2}^{n-1} m a_{n-1-m}^{(n-1)}k^{[m]} + a_{n-2}^{(n-1)}k^{[1]} =$$

$$= a_0^{(n-1)}k^{[n]} + \sum_{m=2}^{n-1}\left(a_{n-m}^{(n-1)} + m a_{n-1-m}^{(n-1)}\right)k^{[m]} + a_{n-2}^{(n-1)}k^{[1]},$$

т.к. $k^n = \sum_{m=1}^{n} a_{n-m}^{(n)}k^{[m]}$, то $a_0^{(n)} = a_0^{(n-1)}$, $a_{n-m}^{(n)} = a_{n-m}^{(n-1)} + m a_{n-m-1}^{(n-1)}$, $a_{n-1}^{(n)} = a_{n-2}^{(n-1)}$.

Введя замену $i = n - m$, получим $a_i^{(n)} = a_i^{(n-1)} + (n-i)a_{i-1}^{(n-1)}$, и полагая $a_i^{(n)} = 0$, если $i < 0$ или $i > n-1$.

Так, например, если $n = 3$, имеем

$a_i^{(3)} = a_i^{(2)} + (3-i)a_{i-1}^{(2)}$; $a_0^{(3)} = a_0^{(2)} + 3a_{-1}^{(2)} = 1 + 3\cdot 0 = 1$;

$a_1^{(3)} = a_1^{(2)} + 2a_0^{(2)} = 1 + 2 = 3$,

$a_2^{(3)} = a_2^{(2)} + a_1^{(2)} = 0 + 1 = 1$, и, следовательно, имеет место соотношение:

$$k^3 = \sum_{m=1}^{3} a_{3-m}^{(3)} k^{[m]} = a_0^{(3)}k^{[3]} + a_1^{(3)}k^{[2]} + a_2^{(3)}k^{[1]} = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k.$$

Некоторые значения $a_i^{(n)}$ внесем в таблицу:

n	$a_0^{(n)}$	$a_1^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	$a_3^{(n)}$	$a_4^{(n)}$	$a_5^{(n)}$	...
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	6	7	1			
5	1	10	25	15	1		
6	1	15	65	90	31	1	
...	...	...	...	...	...	...	...

Начальные моменты n-ого порядка случайной величины X связаны с ее начальными факториальными моментами соотношением

$$\alpha_n = M\left(X^n\right) = M\left(a_0^{(n)}X^{[n]} + a_1^{(n)}X^{[n-1]} + \ldots + a_{n-1}^{(n)}X^{[1]}\right) = \sum_{m=1}^{n} a_{n-m}^{(n)}\alpha_{[m]},$$

где коэффициенты $a_i^{(n)}$ удовлетворяют соотношению $a_i^{(n)} = a_i^{(n-1)} + (n-i)a_{i-1}^{(n-1)}$.

Центральные моменты n-ого порядка случайной величины X связаны с ее центральными факториальными моментами соотношением

$$\mu_n = \sum_{m=1}^{n} a_{n-m}^{(n)}\mu_{[m]} = a_{n-1}^{(n)}\mu_{[1]} + \sum_{m=2}^{n} a_{n-m}^{(n)}\mu_{[m]} = \sum_{m=2}^{n} a_{n-m}^{(n)}\mu_{[m]},$$

где коэффициенты $a_i^{(n)}$ удовлетворяют соотношению $a_i^{(n)} = a_i^{(n-1)} + (n-i)a_{i-1}^{(n-1)}$.

Это соотношение легко получить из соответствующего соотношения для начальных моментов, полагая $X = X - M(X)$, так как $\mu_{[1]} = 0$.

Так, например,

$\mu_2 = \mu_{[2]}$, $\mu_3 = \mu_{[3]} + 3\mu_{[2]}$, $\mu_4 = \mu_{[4]} + 6\mu_{[3]} + 7\mu_{[2]}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1977. – 831 с.

УДК 681.3

Климович А.Н.
Научный руководитель: проф. Муравьев Г.Л.

СПЕЦИФИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Стохастические сетевые модели (ССМ), относящиеся к категории типовых математических q-моделей (схем) [1] с непрерывным временем и дискретными состояниями, находят широкое применение в проведении анализа и синтеза систем произвольной природы. При этом используются готовые среды моделирования, позволяющие кодировать такие