1) в *G* существует подгруппа *T* такая, что $G = AT$;

2) для любых $X \leq A$ и $Y \leq T$ существует элемент $u \in \langle X, Y \rangle$ такой, что $XY^u \leq G$.

Теорема. Пусть *G* – группа. Если все ее минимальные подгруппы являются *tcc*-подгруппами в *G*, то *G* разрешима.

Список цитированных источников

1. Buckley, J. Finite Groups whose Minimal Subgroups are normal / J. Buckley // Mathematische Zeitschrift. – 1970. – Vol. 116. iss. 1. – P. 15–17.

2. Shaalan, A. The influence of π-quasinormality of some subgroups on the structure of a finite group / A. Shaalan // Acta Mathematica Hungarica. – 1990. – Vol. 56. iss. 3–4. – P. 287–293.

3. Трофимук, А.А. О сверхразрешимости факторизуемой группы с добавляемо-перестановочными сомножителями / А.А. Трофимук // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы XVII Междунар. конф., посвящ. столетию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. – Тула : Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. – С. 43–45.

УДК 330.4

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕСТА ДАРБИНА-УОТСОНА К ОБНАРУЖЕНИЮ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ ОСТАТКОВ

Ковальчук А. В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест, Беларусь

Научный руководитель: Золотухина Л. С.

Задача анализа динамических рядов состоит в том, чтобы с помощью детерминированной компоненты предсказывать прогнозное значение ряда динамики, а с помощью случайной компоненты – величину возможного отклонения и вероятность такого отклонения. При построении эконометрической модели для экономических факторов наблюдается недостаток углубленного исследования в области приемов проверки адекватности полученной модели. Многообразие аспектов изучения экономических систем обусловливает необходимость формулирования большого числа локально-конкретизированных задач, поэтому трудно подобрать единый типовой путь их решения, однако достаточно хорошо разработанный аппарат экономико-математического моделирования позволяет успешно подобрать алгоритм, подходящий для поставленной цели.

Применение традиционных методов корреляционно-регрессионного анализа при изучении динамических рядов может привести к ряду серьезных проблем, возникающих на этапах построения, анализа и прогнозирования эконометрических моделей. Такое явление, как автокорреляции затрудняет применение метода наименьших квадратов, что приводит к ошибкам прогнозирования при использовании полученной регрессионной модели. Коэффициенты регрессии остаются несмещенными, но становятся неэффективными, и их стандартные ошибки оцениваются неправильно.

Автокорреляция — это взаимосвязь последовательных элементов временного или пространственного ряда данных. В эконометрических исследованиях часто возникают и такие ситуации, когда дисперсия остатков постоянная, но наблюдается их ковариация. Это явление называют *автокорреляцией остатков*. При применении методов корреляционно-регрессионного анализа, автокорреляция должна быть исключена из каждого анализируемого ряда динамики. Однако прежде чем устранять автокорреляцию, ее необходимо обнаружить.

При изучении особенностей прогнозирования с учетом автокорреляции остатков наиболее известным критерием обнаружения автокорреляции остатков первого уровня является критерий **Дарбина-Уотсона**. $d = \frac{\sum_{i=1}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_t^2}$

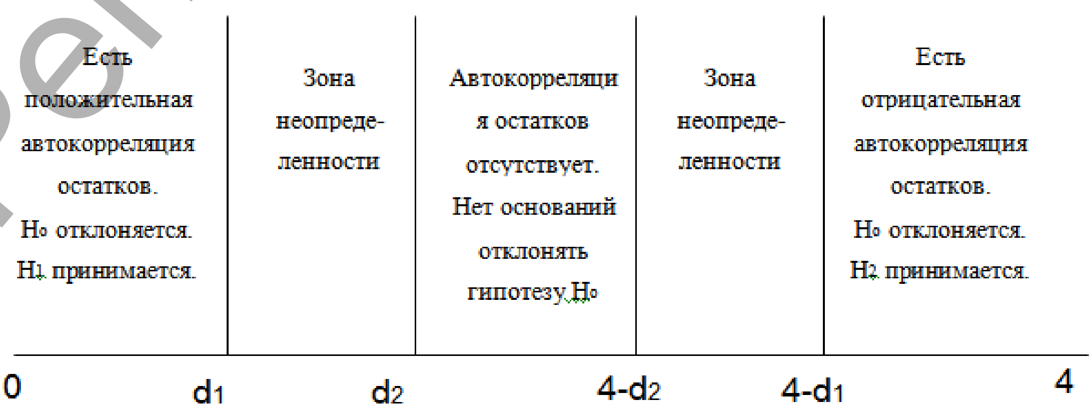
Каждый временной ряд содержит в себе четыре основные компоненты: тенденцию, сезонность, цикличность и случайную компоненту. Свойства коэффициентов регрессии существенным образом зависят от свойств случайного члена. И для того, чтобы регрессионный анализ давал наилучший результат, случайный член должен удовлетворять четырем условиям Гаусса-Маркова. Одно из условий, а именно третье, говорит о том, что наблюдаемые значения случайных отклонений должны быть независимы друг от друга. Если данное условие не выполняется, то имеет место автокорреляция остатков.

Алгоритм выявления автокорреляции остатков на основе теста Дарбина-Уотсона следующий. Выдвигаются гипотезы: H_0 – в остатках нет автокорреляции, H_1 – в остатках есть положительная автокорреляция, H_2 – в остатках есть отрицательная автокорреляция. Далее по таблице определяются критические значения теста Дарбина-Уотсона d_1 и d_2 для заданного количества уровней ряда n, числа независимых переменных модели регрессии m и уровня значимости α.

Полученное значение d сравнивается с критическими значениями d_1 и d_2. При этом возможны следующие ситуации:

1. Если $0 < d < d_1$, то есть положительная автокорреляция остатков;
2. Если $d_1 < d < d_2$ или $(4-d_2) < d < (4-d_1)$, то это указывает на неопределенность ситуации;
3. Если $d_2 < d < (4-d_2)$, то автокорреляция остатков отсутствует;
4. Если $(4-d_1) < d < 4$, то есть отрицательная автокорреляция остатков.

Анализ теста Дарбина-Уотсона



При неопределенности ситуации рассчитывается коэффициент автокорреляции остатков первого уровня:

$$r_{(1)} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t \cdot e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

Автокорреляция отсутствует, если коэффициент не превышает по модулю критическое значение, если же он превышает критическое значение, то делается вывод о наличие автокорреляции в остатках: положительной, если r>0 и отрицательной, если r<0.

На примере данных о численности населения Республики Беларусь за 2005-2019 гг. найдем значение критерия Дарбина-Уотсона.

Для этого строим расчетную таблицу 1, в которой вычисляем все значения, необходимые для нахождения уравнения линии тренда методом наименьших квадратов. Решив систему уравнений, получаем параметры линейного тренда a_1 и a_0.

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t_i = \sum y_i, \\ a_0 \sum t_i + a_1 \sum t_i^2 = \sum y_i t_i. \end{cases} \qquad \begin{cases} 15a_0 = 142791,7, \\ 280\alpha_1 = -3213,0. \end{cases}$$

$$y_t = a_0 + a_1 t$$

$y_t = -11,154t + 9519,447$ - уравнение линии тренда.

Таблица 1 – Расчетная таблица

Год	Всего, тыс.чел. y_t	t_i	t_i*y_i	t^2
2005	9697,5	-7	-67882,5	49
2006	9630,4	-6	-57782,4	36
2007	9579,5	-5	-47897,5	25
2008	9542,4	-4	-38169,6	16
2009	9513,6	-3	-28540,8	9
2010	9500,0	-2	-19000,0	4
2011	9481,2	-1	-9481,2	1
2012	9465,2	0	0,0	0
2013	9463,8	1	9463,8	1
2014	9468,1	2	18936,2	4
2015	9481,0	3	28443,0	9
2016	9498,0	4	37992,0	16
2017	9505,0	5	47525,0	25
2018	9491,0	6	56946,0	36
2019	9475,0	7	66325,0	49
∑	**142791,7**	**0**	**-3123,0**	**280**

Используя уравнение линии тренда, рассчитываем теоретические значения уровней ряда и находим остатки, а также вычисляем все необходимые для дальнейших расчетов данные.

Таблица 2 – Расчетная таблица

Год	Всего, тыс.чел. y_t	y_t^*	$e_i = y_t - y_t^*$	e_{i-1}	e^2	$(e_i - e_{i-1})^2$	$e_{i-1} \cdot e_i$
2005	9697,5	9597,5	99,98		9995,00		
2006	9630,4	9586,4	44,03	99,98	1938,55	3130,51	4402,02
2007	9579,5	9575,2	4,28	44,03	18,34	1579,82	188,58
2008	9542,4	9564,1	-21,66	4,28	469,29	673,04	-92,72
2009	9513,6	9552,9	-39,31	-21,66	1545,20	311,49	851,43
2010	9500,0	9541,8	-41,76	-39,31	1743,48	5,98	1641,39
2011	9481,2	9530,6	-49,40	-41,76	2440,46	58,38	2062,99
2012	9465,2	9519,4	-54,25	-49,4	2942,74	23,49	2679,80
2013	9463,8	9508,3	-44,49	-54,25	1979,63	95,20	2413,75
2014	9468,1	9497,1	-29,04	-44,49	843,26	238,73	1291,95
2015	9481,0	9486,0	-4,99	-29,04	24,85	578,64	144,76
2016	9498,0	9474,8	23,17	-4,99	536,80	792,93	-115,61
2017	9505,0	9463,7	41,32	23,17	1707,59	329,53	957,45
2018	9491,0	9452,5	38,48	41,32	1480,48	8,08	1589,87
2019	9475,0	9441,4	33,63	38,48	1131,04	23,51	1294,12
$\sum$	142791,7			-33,64	28796,71	7849,35	19309,78

Возвращаясь к нашему примеру, подставляем данные из таблицы 2 в формулу и находим значение критерия Дарбина-Уотсона.

$$d = \frac{7849,35}{28796,71} = 0,2726.$$

Далее по таблице находим критические значения критерия Дарбина-Уотсона для n=15 и k=1 при уровне значимости α=0,05: d_1 =1,08 и d_2 =1,36, и на основе этого составляем шкалу для нашего примера.

Анализ полученных результатов

Есть положительная автокорреляция остатков. H_0 отклоняется. H_1 принимается. **d = 0,2726**	Зона неопределенности	Автокорреляция остатков отсутствует. Нет оснований отклонять гипотезу H_0	Зона неопределенности	Есть отрицательная автокорреляция остатков. H_0 отклоняется. H_2 принимается.

0 1,08 1,36 2,64 2,92 4

Таким образом, с вероятностью 95% можно говорить о наличии положительной автокорреляции остатков.

Обнаружение автокорреляции позволяет определить структуру временного ряда, выявить наличие тенденции либо циклических колебаний, а также понять, насколько уровни ряда определяются действием случайной компоненты. Автокорреляцию в рядах динамики можно установить, коррелируя не сами уровни, а так называемые остаточные величины. Самым распространенным методом является тест Дарбина-Уотсона. Он позволяет определить наличие либо отсутствие автокорреляции остатков модели регрессии. Однако этот критерий применим только для выявления автокорреляции первого уровня остатков, и он дает достоверные результаты для больших выборок.

Список цитированных источников

1. Эконометрика и экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Г. О. Читая [и др.] ; под ред. Г. О. Читая, С.Ф. Миксюк. – Минск : БГЭУ, 2018. – 511 с.
2. Выявление автокорреляции в динамических рядах / А.В. Ковальчук, Л.С. Золотухина // Математические и физические методы исследования: научный и методический аспекты.: сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 25-26 апр. 2019 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест: БрГУ, 2019. – С. 65-68.

УДК 519.6+517.983

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Саващук Т. А.
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, г. Брест, Беларусь
Научный руководитель: Матысик О. В., канд. физ.-мат. наук, доцент

В гильбертовом пространстве *H* решается линейное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где *A* – ограниченный положительный самосопряженный оператор. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора *A*, но не является его собственным значением [1].

Будем искать решение уравнения (1), используя неявную схему метода итераций, которая при приближенной правой части уравнения (1) y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ имеет вид

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Изучим сходимость метода (2) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций *n* нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. С помощью интегрального представления самосопряжённого оператора *A* получим $\|x - x_n\|_A^2 = \int_0^M \lambda \frac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{2n}} d\left(E_\lambda x, x\right)$ и

$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}\right]^2 d\left(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta\right)$, где $M = \|A\|$. Оценив подынтегральные функции, получим при условии $\alpha > 0$ оценку погрешности для неявного итерационного метода (2) в энергетической норме $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (8n\alpha)^{-1/4}\|x\| + 2^{1/2}(n\alpha)^{1/4}\delta,\ n \ge 1$. Следовательно, если в процессе (2) вы-