Список цитированных источников
1. Эконометрика и экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Г. О. Читая [и др.] ; под ред. Г. О. Читая, С.Ф. Миксюк. – Минск : БГЭУ, 2018. – 511 с.
2. Выявление автокорреляции в динамических рядах / А.В. Ковальчук, Л.С. Золотухина // Математические и физические методы исследования: научный и методический аспекты.: сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 25-26 апр. 2019 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест: БрГУ, 2019. – С. 65-68.

УДК 519.6+517.983

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Саващук Т. А.
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, г. Брест, Беларусь
Научный руководитель: Матысик О. В., канд. физ.-мат. наук, доцент

В гильбертовом пространстве *H* решается линейное уравнение

$$Ax = y\,, \tag{1}$$

где *A* – ограниченный положительный самосопряженный оператор. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора *A*, но не является его собственным значением [1].

Будем искать решение уравнения (1), используя неявную схему метода итераций, которая при приближенной правой части уравнения (1) y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ имеет вид

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Изучим сходимость метода (2) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций *n* нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. С помощью интегрального представления самосопряжённого оператора *A* получим $\|x - x_n\|_A^2 = \int\limits_0^M \lambda \dfrac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{2n}}\, d\left(E_\lambda x, x\right)$ и

$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}\right]^2 d\left(E_\lambda\left(y - y_\delta\right), y - y_\delta\right)$, где $M = \|A\|$. Оценив подынтегральные функции, получим при условии $\alpha > 0$ оценку погрешности для неявного итерационного метода (2) в энергетической норме $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (8n\alpha)^{-1/4}\|x\| + 2^{1/2}(n\alpha)^{1/4}\delta,\ n \ge 1$. Следовательно, если в процессе (2) выбирать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/4}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема. *При условии* $\alpha > 0$ *итерационный метод* (2) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия* $n^{1/4}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. *Для метода итераций* (2) *справедлива оценка погрешности* $\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le \left(8n\alpha\right)^{-1/4} \|x\| + 2^{1/2}\left(n\alpha\right)^{1/4}\delta,\ n \ge 1$.

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{7/8}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}} = 2^{-5/2}\,\alpha^{-1}\delta^{-2}\|x\|^2$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/4}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O\left(\delta^{-2}\right)$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-2}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода (2).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (2) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (2) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения *x* уравнения (1).

Список цитированных источников

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест: Брест. гос. ун-т. – 2008. – 196 с.

УДК 512.622.28

О РАЗРЕШИМОСТИ В РАДИКАЛАХ ОДНОГО КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Чернявский М. М., Жгиров В. С.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, г. Витебск, Беларусь
Научный руководитель: Трубников Ю. В., доктор физ.-мат. наук, профессор

Исследование задач о представимости алгебраических полиномов различных степеней в виде суперпозиции двух других полиномов насчитывает почти полувековую историю. В настоящее время известно несколько общих алгоритмов для проверки данной представимости [1]. Наличие суперпозиции полинома позволяет упростить поиск его корней в символьном виде и может выступать критерием разрешимости алгебраического уравнения в радикалах, а также давать более удобные алгоритмы для вычисления