бирать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/4}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема. *При условии* $\alpha > 0$ *итерационный метод* (2) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия* $n^{1/4}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. *Для метода итераций* (2) *справедлива оценка погрешности* $\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le (8n\alpha)^{-1/4} \|x\| + 2^{1/2} (n\alpha)^{1/4} \delta,\ n \ge 1$.

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{7/8} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}} = 2^{-5/2}\ \alpha^{-1} \delta^{-2} \|x\|^2$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/4}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O\left(\delta^{-2}\right)$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-2}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода (2).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (2) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (2) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения *x* уравнения (1).

Список цитированных источников

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест: Брест. гос. ун-т. – 2008. – 196 с.

УДК 512.622.28

О РАЗРЕШИМОСТИ В РАДИКАЛАХ ОДНОГО КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Чернявский М. М., Жгиров В. С.

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, г. Витебск, Беларусь

Научный руководитель: Трубников Ю. В., доктор физ.-мат. наук, профессор

Исследование задач о представимости алгебраических полиномов различных степеней в виде суперпозиции двух других полиномов насчитывает почти полувековую историю. В настоящее время известно несколько общих алгоритмов для проверки данной представимости [1]. Наличие суперпозиции полинома позволяет упростить поиск его корней в символьном виде и может выступать критерием разрешимости алгебраического уравнения в радикалах, а также давать более удобные алгоритмы для вычисления его корней [2]. Тем не менее, на практике зачастую необходимы конкретные условия проверки, является ли исследуемый полином суперпозицией двух других полиномов с заданными свойствами.

В настоящей работе установлены и доказаны необходимые и достаточные условия представимости полинома комплексного аргумента восьмой степени вида

$$P_8(z) = z^8 + c_1 z^7 + c_2 z^6 + c_3 z^5 + c_4 z^4 + c_5 z^3 + c_6 z^2 + c_7 z + c_8 \tag{1}$$

в виде суперпозиции

$$P_8(z) = T\left[Q(x)\right], \tag{2}$$

где

$$T(z) = z^4 - z^2 + \frac{1}{8}, \qquad Q(z) = z^2 + a_1 z + a_2. \tag{3}$$

Отметим, что полином $T(z) = \frac{1}{8} T_4(z)$, где $T_4(z)$ – полином Чебышева первого рода четвертой степени [3, с. 116].

Т е о р е м а. Необходимыми и достаточными условиями представления полинома (1) в виде суперпозиции (2) являются равенства

$$\begin{aligned}
&c_3 = -c_1\left(7c_1^2 - 24c_2\right)/32;\\
&c_4 = -\frac{7}{512}c_1^4 - \frac{3}{32}c_1^2 c_2 + \frac{3}{8}c_2^2 - 1;\\
&c_5 = c_1\left(21c_1^4 - 128c_1^2 c_2 + 192c_2^2 - 512\right)/1024;\\
&c_6 = \frac{9}{1024}c_1^4 c_2 - \frac{3}{64}c_1^2 c_2^2 + \frac{1}{8}c_1^2 + \frac{1}{16}c_2^3 - \frac{1}{2}c_2\\
&c_7 = -c_1\left(3c_1^2 - 8c_2\right)\left(9c_1^4 - 48c_1^2 c_2 + 64c_2^2 - 512\right)/32768;\\
&c_8 = \frac{1}{8} + \frac{81}{1048576}c_1^8 - \frac{27}{32768}c_1^6 c_2 + \frac{27}{8192}c_1^4 c_2^2 -\\
&-\frac{3}{512}c_1^2 c_2^3 + \frac{1}{256}c_2^4 - \frac{9}{1024}c_1^4 + \frac{3}{64}c_1^2 c_2 - \frac{1}{16}c_2^2,
\end{aligned} \tag{4}$$

выражающие связь между коэффициентами полинома $P_8(z)$, при этом $a_1 = \frac{c_1}{4}$, $a_2 = -\frac{3c_1^2}{32} + \frac{c_2}{4}$.

Доказательство. Правая часть равенства (2) имеет вид

$$\begin{aligned}
&T\left[Q(x)\right] = z^8 + 4a_1 z^7 + 2\left(3a_1^2 + 2a_2\right)z^6 + 4a_1\left(a_1^2 + 3a_2\right)z^5 + \left(a_1^4 + 12a_1^2 a_2 + 6a_2^2 -\right.\\
&\left.-1\right)z^4 + 2a_1\left(2a_1^2 a_2 + 6a_2^2 - 1\right)z^3 + \left(\left(6a_2^2 - 1\right)a_1^2 + 4a_2^3 - 2a_2\right)z^2 + 2a_1\left(2a_2^3 - a_2\right)z +\\
&\qquad +1/8 + a_2^4 - a_2^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z полинома (1) и правой части равенства (5), получим систему уравнений (6):

$$\begin{aligned}
&4a_1 = c_1;\\
&2\left(3a_1^2 + 2a_2\right) = c_2;\\
&4a_1\left(a_1^2 + 3a_2\right) = c_3;\\
&a_1^4 + 12a_1^2a_2 + 6a_2^2 - 1 = c_4;\\
&2a_1\left(2a_1^2a_2 + 6a_2^2 - 1\right) = c_5;\\
&\left(6a_2^2 - 1\right)a_1^2 + 4a_2^3 - 2a_2 = c_6;\\
&2a_1\left(2a_2^3 - a_2\right) = c_7;\\
&1/8 + a_2^4 - a_2^2 = c_8.
\end{aligned} \tag{6}$$

Выражая $a_1 = c_1 / 4$ из первого уравнения данной системы и подставляя его во второе уравнение, находим $a_2 = -3c_1^2 / 32 + c_2 / 4$. Подставляем данные значения в оставшиеся уравнения системы и получаем в точности выражения из системы (5), которые являются необходимыми условиями представления полинома (1) в виде суперпозиции (2).

Для доказательства достаточности условий теоремы необходимо все значения коэффициентов $c_j \quad (j = 1,\dots,8)$ подставить в исходный полином (1) и получим тождество

$$P_8(z) \equiv \left(z^2 + a_1z + a_2\right)^4 - \left(z^2 + a_1z + a_2\right)^2 + \frac{1}{8}.$$

Стоит отметить, что корни полиномов Чебышева всегда известны и имеют удобное представление в радикалах, поэтому и корни суперпозиционного полинома (2) также несложным образом выражаются в радикалах и имеют следующий вид:

$$z_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 + 2\sqrt{2+\sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; \quad z_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 + 2\sqrt{2+\sqrt{2}} - 4a_2}}{2};$$

$$z_3 = -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 2\sqrt{2+\sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; \quad z_4 = -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 2\sqrt{2+\sqrt{2}} - 4a_2}}{2};$$

$$z_5 = -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 + 2\sqrt{2-\sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; \quad z_6 = -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 + 2\sqrt{2+\sqrt{2}} - 4a_2}}{2};$$

$$z_7 = -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 2\sqrt{2-\sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; \quad z_8 = -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 2\sqrt{2-\sqrt{2}} - 4a_2}}{2}$$

Список цитированных источников

1. Перминова, М.Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М.Ю. Перминова, В.В. Кручинин, Д.В. Кручинин // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 4(38). – С. 102–107.

2. Астапов, И.С. Алгоритмы символьного решения алгебраических уравнений / И.С. Астапов, Н.С. Астапов // Программная инженерия. – 2017. – Т. 8, № 9. – С. 422–432.

3. Прасолов, В.В. Многочлены / В.В. Прасолов. – 4-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.