МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ III

Брест 2007

УДК 517.9

В III части практикума содержатся краткие теоретические вопросы и основные формулы по всем темам разделов «Функции нескольких переменных», «Неопределенный и определенный интегралы» учебной программы по высшей математике для аудиторных и домашних работ к каждому практическому занятию. Приведены решения типовых задач. Издание в 8 частях.

Составители: *Мороз Л.Т.*, доцент
Джура В.Т., ассистент
Емельянова Г.Р., ассистент

Рецензент: Зав. кафедрой информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, к.ф.-м.н., доцент Савчук В.Ф.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФНП). ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФНП.

Переменная величина u называется ***функцией от*** n ***переменных*** $x, y, z, ..., t$, если каждому набору этих переменных соответствует единственное значение переменной u: $u = f(x, y, z, ..., t)$.

В дальнейшем, в основном, будем рассматривать функции двух переменных $z = f(x;y)$ или $z = z(x;y)$, а также функции трех переменных $u = f(x;y;z)$ или $u = U(x;y;z)$.

Предположим, что X − некоторое множество точек плоскости, Y - подмножество множества всех действительных чисел. Поскольку в фиксированной декартовой прямоугольной системе координат xOy каждой точке M соответствует упорядоченная пара действительных чисел (x,y) – ее координаты, то функция, заданная на указанном множестве X, является функцией двух аргументов, т.е. $z = f(x;y)$, где x и y координаты точки $M(x;y)$.

Переменные x и y при этом называются ***аргументами*** функции z или ***независимыми переменными.*** Значение функции $z = f(x;y)$, которые она принимает при $x = a$, $y = b$, обозначается через $f(a;b)$.

Область определения функции двух переменных $z = f(x;y)$, представляет собой некоторое множество точек плоскости, а для функции трех переменных $u = f(x;y;z)$ - некоторую совокупность точек пространства.

Линией уровня функции $z = f(x;y)$ называется множество всех точек плоскости xOy, в которых функция Z принимает постоянное значение, т.е. $f(x;y) = c$, где c – постоянная.

Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x;y;z)$ называется множество всех точек пространства $Oxyz$, в которых функция u принимает постоянное значение, т.е. $f(x;y;z) = c$, где $c = const$.

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой области G плоскости xOy и точка $M_0(x_0,y_0)$ принадлежит G.

Число A называется ***пределом функции*** $f(x,y)$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $M_0(x_0,y_0)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек, для которых выполняется условие $MM_0 < \delta$ имеет место неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

В этом случае $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$.

Функция $z = f(x,y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_o,y_0)$, если имеет место неравенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0), \qquad (1)$$

причем точка $M(x,y)$ стремится к точке $M_0(x_0,y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной в области.*** Если в некоторой точке $N(x_0,y_0)$ не выполняется (1), то точка $N(x_0,y_0)$ называется ***точкой разрыва*** функции $z=f(x;y)$.

Условие (1) может не выполняться в следующих случаях:

1) Функция $z=f(x;y)$ определена во всех точках окрестности точки $N(x_0,y_0)$ за исключением самой точки N;
2) функция $z=f(x;y)$ определена во всех точках окрестности точки $N(x_0,y_0)$; но не существует предел функции $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ в этой точке.
3) функция определена во всех точках окрестности точки $N(x_0,y_0)$ и существует предел функции $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ в точке N_0, но этот предел не равен значению функции в этой точке:
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0,y_0).$$

Аналогично определяется предел и непрерывной функции n переменных.

Пример 1. Вычислить частное значение функции $f(x;y)=\sqrt{x^2-y^2}$ при $x=5, y=-3$.

Решение.

$f(5;-3)=\sqrt{5^2-(-3)^2}=4$.

Ответ: 4.

Пример 2. Выразить объём конуса V как функцию его образующей x и радиуса основания y.

Решение.

Из геометрии известно, что объём конуса равен $V=\frac{1}{3}\pi y^2 h$, где h – высота конуса.

Но $h=\sqrt{x^2-y^2}$. Следовательно, $V=\frac{1}{3}\pi y^2\sqrt{x^2-y^2}$.

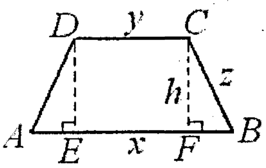
Это и есть искомая функциональная зависимость.

Ответ: $V=\frac{1}{3}\pi y^2\sqrt{x^2-y^2}$

Пример 3. Выразить площадь S равнобочной трапеции как функцию трех величин: длин оснований x и y, и боковой стороны z.

Решение.

Имеем $S = S_{трап.} = \frac{1}{2}(x+y)h$ (см. рис.).



Из ΔFCB имеем $h^2 = z^2 - BF^2$, где $BF = AE = \frac{1}{2}(x-y)$. Искомая функция имеет вид $S=\frac{1}{2}(x+y)\sqrt{z^2-\frac{1}{4}(x-y)^2}$. Это функция трех переменных $x; y; z$.

Ответ: $S=\frac{1}{2}(x+y)\sqrt{z^2-\frac{1}{4}(x-y)^2}$.

Пример 4. Найти области определения функций:

а) $z=\frac{3}{x^2+y^2}$.

б) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение.

а) Функция z определена при любой системе значений x, y, кроме $x=0, y=0$, при которой ее знаменатель обращается в нуль.

Поэтому областью определения функции z является вся числовая плоскость, кроме точки $(0;0)$.

б) Область определения функции z есть круг с центром в начале координат и радиусом $r=1$, включая и его границу – окружность $x^2+y^2=1$. Графическим изображением функции является полусфера, расположенная над плоскостью xOy.

Пример 5. Найти линии уровня функции $z=\frac{x}{\sqrt{y}}$.

Решение.

Линия уровня z=c определяется уравнением $x=c\sqrt{y}$; это полупарабола, расположенная в первой четверти при $c>0$, во второй четверти плоскости xOy при $c<0$, и полуось Oy $(x=0, y>0)$, если $c=0$.

Пример 6. Найти предел:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+1}-1}.$$

Решение.

При $x=0,\ y=0$ имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^2+y^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+y^2+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt[3]{\left(x^2+y^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+y^2+1}+1\right)=3.$$

Пример 7. Найти точки разрыва функций:

а) $z=\frac{x^2+2xy+5}{y^2-2x+1}$; б) $u=\frac{1}{x^2+y^2-z}$.

Решение.

а) Условие непрерывности данной функции нарушено в тех точках множества R^2, координаты которых удовлетворяют уравнению $y^2-2x+1=0$. Последнее уравнение есть уравнение параболы с вершиной в точке $\left(\frac{1}{2};0\right)$. Следовательно, точки разрыва образуют параболу – линию разрыва данной функции.

б) Функция разрвна в каждой точке параболоида вращения $z=x^2+y^2$. Он является поверхностью разрыва данной функции.

Задания.

1. Вычислить частные значения функции:

а) $U=\ln\frac{x+z}{2y-z}$ в точке $A(6;2;-1)$;

б) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2xy};f(2;-3);f(1;\frac{x}{y})$.

2. Найти и изобразить области существования следующих функций:

а) $z=\ln(x+y)$;

б) $z=\frac{1}{x^2+y^2}$;

в) $z=\sqrt{y\sin x}$

3. Найти области определения функции $U(x;y;z)$

а) $U(x;y;z)=\arccos\frac{x}{2}+\arcsin\frac{y}{2}+arctg\,z$;

б) $U(x;y;z)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$.

4. Найти линии уровня данных функций:

а) $Z = x + y$;

б) $Z = x^2 - y^2$;

в) $Z = \sqrt{xy}$.

5. Найти поверхности уровня функций трех независимых переменных:

а) $U = x + y + z$;

б) $U = x^2 + y^2 - z^2$.

6. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 5}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-5)^2 - 1}}{x^2 + (y-5)^2}$; $\left(\frac{1}{2}\right)$ б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. (0)

7. Найти точки разрыва функций:

а) $z = \frac{x^2 + 2y}{x^2 + y^2 - 4}$; ($x^2 + y^2 = 4$ - линия разрыва)

б) $\varphi(x; y) = \sin\frac{1}{xy}$. ($x = 0$, $y = 0$ - линии разрыва)

Домашние задания.

1. $z = \frac{2x - y}{x - 2y}$; вычислить $z(1;2)$ $z(3;1)$;

2. Найти $f\left(\frac{1}{2}; 3\right)$; $f(1;-1)$, если $f(x;y) = xy + \frac{x}{y}$.

3. Найти значение функции $z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$.

4. Найти и изобразить области определения следующих функций:

а) $z = \sqrt{1 + \sqrt{-x + y}}$;

б) $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$;

в) $z = \ln(x^2 + y)$.

5. Найти области определения функций трех переменных:

а) $U = \ln(xyz)$;

б) $U = \sqrt{1 - x - y - z}$;

в) $U = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

6. Найти линии уровня данных функций:

а) $Z = \ln(x^2 + y)$;

б) $Z = \frac{1}{4x^2 + 9y^2}$.

в) $Z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$

7. Найти поверхности уровня функций трех независимых переменных:

а) $U = x^2 + y^2 + z^2$;

б) $U = x^2 - y^2 + z^2$.

8. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$. (e)

9. Найти точки разрыва функции:

а) $u = \dfrac{1}{z^2 - x^2 - y^2}$;

б) $u = \dfrac{1}{xyz}$.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$, определенную и непрерывную в некоторой области.

Частными приращениями функции $z = f(x;y)$, по независимым переменным x и y называются разности $\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x;y)$, $\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x;y)$ соответственно.

Полным приращением функции $z = f(x;y)$, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy, называется разность $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$. Заметим, что в общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Частной производной функции $z = f(x;y)$ ***по переменной*** x ***(или*** y***)*** называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ (или $\Delta_y z$) к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x},\quad z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Приняты также обозначения: $Z'_x, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}Z, \dfrac{\partial}{\partial x}f, \dfrac{\partial}{\partial x}f(x;y)$ (аналогично по другой переменной).

Для функции $z = f(x;y)$ частные производные в точке $M_0(x_0;y_0)$ по x и y соответственно определяются формулами:

$$z'_x(M_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)}{\Delta x},$$

$$z'_y(M_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)}{\Delta y}.$$

Частная производная функции $z=f(x;y)$ по переменой x выражает скорость изменения функции в данном направлении ($y=y_0$) или скорость изменения функции $f(x,y_0)$ одной переменной.

Частные производные функции $z=f(x;y)$ имеют следующую ***геометрическую интерпретацию:***

$$\begin{cases} f'_x(x_0;y_0)=tg\,\alpha \\ f'_y(x_0;y_0)=tg\,\beta \end{cases},$$

где α - угол между осью Ox и касательной прямой в точке $N(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ к линии пересечения поверхности $z=f(x;y)$ с плоскостью $y=y_0$; β - угол между Oy и касательной в той же точке к линии пересечения данной поверхности с плоскостью $x=x_0$.

Очевидно,

$$f'_x(x_0;y_0)=\left.\frac{\partial f(x;y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0},\ f'_y(x_0;y_0)=\left.\frac{\partial f(x_0;y)}{\partial y}\right|_{y=y_0},$$

т.е. частная производная в данной точке равна производной функции одной переменной, вычисленной при соответствующем значении аргумента, поэтому при нахождении частных производных пользуются обычными правилами дифференцирования.

Полным дифференциалом функции $z=f(x;y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно Δx и Δy.

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx=\Delta x;\ dy=\Delta y$. Полный дифференциал dz функции $z=f(x;y)$ вычисляется по формуле $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Функция, имеющая полный дифференциал, называется ***дифференцируемой.*** Применение дифференциала функции к приближенным вычислениям значения функции основано на приближенном равенстве $\Delta z\approx dz$; т.е.

$$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)\approx f(x_0;y_0)+\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\cdot\Delta y,$$

где $M_0(x_0;y_0)$ – данная фиксированная точка.

Полный дифференциал функции трех переменных $U=f(x;y;z)$ вычисляется по формуле $du=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz$.

Пример 1. Найти значения частных производных функций
$z=f(x;y)=2x^3+3x^2y+6xy-y^3$ в точке $M_0(-1;2)$.

Решение.

Считая y постоянной и дифференцируя z по формуле, как функцию x, находим частную производную по x, вычисляем ее значение в точке M_0:
$z'_x=6x^2+6xy+6y-0=6(x^2+xy+y)$;
$f'_x(-1;2)=6((-1)^2+(-1)2+2)=6$.

Считая x постоянной и дифференцируя z, как функцию y, находим частную производную по y и ее значение в точке M_0:
$z'_y=0+3x^2+6x-3y^2=3(x^2+2xy-y^2)$;
$f'_y(-1;2)=3((-1)^2+2(-1)-2^2=-15$.
Ответ: $f'_x(-1;2)=6$, $f'_y(-1;2)=-15$.

Пример 2. Найти частные производные функции $U=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

Решение.

Считая U функцией только x, затем только y и только z, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}+\frac{z}{x^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x}.$$

Пример 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=x\ln\frac{y}{x}$ уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=Z$.

Решение.

Тождественно преобразуем данную функцию и найдём ее частные производные по x и по y:

$$z=x(\ln y-\ln x-1)=\ln\frac{y}{x}-1;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}.$$

Подставляя z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данное уравнение, получим тождество:

$$x(\ln\frac{y}{x}-1)+y\frac{x}{y}=x\ln\frac{y}{x};\quad 0=0.$$

Это означает, что данная функция удовлетворяет данному уравнению (является его решением).

Пример 4. Найти полное приращение ΔZ и полный дифференциал dz функции $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$ в точке $P_0(1;2)$ если:

а) $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$

б) $\Delta x = 0,01$; $\Delta y = 0,02$

Вычислить абсолютную погрешность, которая получается при замене полного приращения функции ее полным дифференциалом.

Решение.

Найдем полное приращение и полный дифференциал данной функции в некоторой точке $P(x,y)$ при произвольных Δx и Δy:

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y) =$$

$$= 3(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) - (y-\Delta y)^2 + 1 - (3x^2 + xy - y^2 + 1) =$$

$$= 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y - y^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2 + 1 - 3x^2 - xy + y^2 - 1.$$

После преобразования получим:

$$\Delta z = (6x+y)\Delta x + (x-2y)\Delta y + 3\Delta x^2 + \Delta x\Delta y - \Delta y^2.$$

Согласно определению, полный дифференциал функции

$$dz = (6x+y)\Delta x + (x-2y)\Delta y.$$

Абсолютная погрешность, которая получается при замене полного приращения функции ее полным дифференциалом равна

$$|\Delta z - dz| = \left|3\Delta x^2 + \Delta x\Delta y - \Delta y^2\right|.$$

Найдем теперь полное приращение Δz, полный дифференциал dz и абсолютную погрешность $|\Delta z - dz|$ при заданных числовых значениях:

а) при $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x=0,1$, $\Delta y=0,2$ имеем: $\Delta z=0,21$, $dz = 0,20$, $|\Delta z - dz| = 0,01$;

б) при $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x=0,01$, $\Delta y=0,02$ находим: $\Delta z=0,0201$, $dz = 0,02$, $|\Delta z - dz| = 0,0001.$

Легко заметить, что с уменьшением приращений Δx и Δy абсолютная погрешность также уменьшается.

Замечание. Вычисление полного приращения функции нескольких переменных представляет собой задачу значительно более сложную, чем вычисление ее дифференциала, а поэтому на практике при малых приращениях независимых переменных значения приращения функции с достаточной точностью заменяют значением ее дифференциала.

Пример 5. Найти полный дифференциал функций:

а) $Z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

б) $U = x^{y^2 z}$

Решение.

а) Найдем сначала частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, а затем воспользуемся формулой полного дифференциала:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тогда $dz=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

б) В данном случае полный дифференциал функции найдем по формуле $du=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz$.

Т.к. $\frac{\partial U}{\partial x}=y^2zx^{y^2z-1}$; $\frac{\partial U}{\partial y}=x^{y^2z}\ln x2yz$, $\frac{\partial U}{\partial z}=x^{y^2z}\ln xy^2$, то $dU=y^2zx^{y^2z-1}dx+2yzx^{y^2z}\ln xdy+y^2x^{y^2z}\ln xdz$;

Пример 6. Как изменится объём прямоугольного параллелепипеда с измерениями $a=8$ м, $b=6$ м, $c=3$ м, когда его длина и ширина увеличатся соответственно на 10 см, 5 см, а высота уменьшится на 15 см?

Решение.

Объем прямоугольного параллелепипеда выражается формулой $V=xyz$, где x,y,z - его измерения. Приращение объёма можно приближенно подсчитать по формуле $\Delta V\approx dV$, где $dV=yzdx+xzdy+xydz$.

Т.к. по условию $x=8$, $y=6$, $z=3$, $dx=0{,}1$; $dy=0{,}05$; $dz=-0{,}15$, то $dV=6*3*0{,}1+8\cdot3\cdot0{,}05+8\cdot6\cdot(-0{,}15)=1{,}8+1{,}2-7{,}2=-4{,}2$

Итак, объём уменьшился на 4,2 м^3.

Пример 7. Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$

Решение.

Рассмотрим функцию $z=x^y$. Искомое число можно считать приращенным значением этой функции при $x=1$, $y=3$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$. Первоначальное значение функции $z=1^3=1$.

Получаем:

$$\Delta z\approx dz=yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y=3\cdot1\cdot0{,}02+\ln1\cdot0{,}01=0{,}06$$

Находим $1{,}02^{3{,}01}\approx1+0{,}06=1{,}06$.

Задания.

1. Найти частные производные функций:

а) $z=(5x^3y^2+1)^3$ $\quad \left(z'_x=45x^2y^2(5x^3y^2+1)^2;\quad z'_y=30x^3y^2(5x^3y^2+1)^2\right)$;

б) $r=\sqrt{ax^2-by^2}$ $\quad \left(\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{ax}{r};\quad \dfrac{\partial r}{\partial y}=-\dfrac{by}{r}\right)$;

в) $z=x^3+y^2+2xy$ $\quad \left(z'_x=3x^2-2y;\quad z'_y=2y-2x\right)$

2. Показать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, если $u=(x-y)(y-z)(z-x)$.

3. Показать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$, если $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$.

4. Найти полные дифференциалы указанных функций:

а) $z=2x^3y-4x^5$;

б) $z=x^2y\sin x-3y$;

в) $z=\arcsin((x+y)/x)$;

5. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt{4{,}05^2+2{,}93^2}$ $\quad (4{,}998)$.

б) $1{,}08^{3{,}96}$ $\quad (1{,}32)$.

6) Как изменится диагональ прямоугольника со сторонами $a=10$ см, $b=24$ см, если сторону a удлинить на 4 мм, а сторону b укоротить на 1 мм? Найти приближенную величину изменений и сравнить с точной.

$(dl=0{,}062$ см, $\Delta l=0{,}065$ см$)$

Домашние задания.

1) Найти частные производные и частные дифференциалы функций:

а) $z=\ln(y^2-e^{-x})$; $\quad \left(z'_x=\dfrac{1}{y^2-e^{-x}}e^{-x},\ z'_y=\dfrac{1}{y^2-e^{-x}}2y\right)$

б) $z=\sin\sqrt{x-y^3}$; $\quad \left(z'_x=\cos\sqrt{x-y^3}\dfrac{1}{2\sqrt{x-y^3}};\ z'_y=\cos\sqrt{x-y^3}\dfrac{1}{2\sqrt{x-y^3}}(-3y^2)\right)$

в) $z=\cos(x^3-2xy)$;

$$\left(z'_x=-\sin(x^3-2xy)(3x^2-2y);\quad z'_y=-\sin(x^3-2xy)(-2x)\right)$$

г) $z=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$;

$$\left(z'_x=-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x,\quad z'_y=-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2y\right)$$

2) Вычислить значение частных производных $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой

а) $f(x,y,z)=\ln(x^3+2y^3-z^3), M_0(2;1;0)$;

$(f'_x(2;1;0)=1,2;\quad f'_y(2;1;0)=0,6;\quad f'_z(2;1;0)=0)$

б) $f(x,y,z)=\sqrt{z}\sin(\frac{y}{x})$; $M_0(2;0;4)$;

$(f'_x(2;0;4)=0;\ f'_y(2;0;4)=1;\ f'_z(2;0;4)=0)$

в) $f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$; $M_0(1;1;2)$;

$(f'_x(1;1;2)=1,5;\quad f'_y(1;1;2)=-1,\quad f'_z(1;1;2)=1,25)$

г) $f(x,y,z)=\frac{\sin(x-y)}{z}$; $M_0(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3};\sqrt{3})$;

$(f'_x(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3};\sqrt{3})=0,5;\quad f'_y(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3};\sqrt{3})=-0,5;\quad f'_z(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3};\sqrt{3})=-0,17)$

3) Вычислить значение полного дифференциала функции $z=arcctg\frac{x}{y}$ при $x=1, y=3$, $dx=0,01, dy=-0,05$. $(dz=-0,008)$

4) Вычислить значение полного дифференциала функции $z=e^{xy}$ при $x=1, y=2$, $dx=-0,1,\ dy=0,1$. $(dz=-0,1e^2\approx-0,793)$

5) Вычислить приближенно $1,02^{3,01}$. $(\approx 1,06)$

6) Найти приближенное значение $1,94^2e^{0,12}$, исходя из значения функции $f(x;y)=x^2e^y$ в точке $M_0(2;0)$ и заменяя её полное приращение полным дифференциалом. $(4,24)$

7) Вычислить приближенно $1,002\cdot 2,003^2\cdot 3,004^3$; $(108,972)$

8) Вычислить приближенно $\sin 28^\circ\cdot\cos 61^\circ$. $(0,227)$

Указание: от градусов перейти к радианам.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ НП. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ НП. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ.

Случай одной независимой переменной.

Если $z = f(x;y)$ есть дифференцируемая функция аргументов x и y, которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то *производная сложной функции* $z = f[\varphi(t);\psi(t)]$ может быть вычислена по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Если t совпадает с одним из аргументов, например, $t=x$, то $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$ и $\dfrac{dz}{dx}$ называют ***полной производной функции*** z по x.

Пример 1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$ если $z=x^5+2xy-y^3$ и $x=\cos 2t$, $y=arctgt$.

Решение.

$$\frac{dz}{dt}=(5x^5+2y)\cdot(-2\sin 2t)+(2x-3y^2)\cdot\frac{1}{1+t^2}.$$

В результате можно как сохранить переменные x и y, так и заменить их через t (в зависимости от того, что проще).

Пример 2. Найти, $\dfrac{dz}{dt}$ если $z=xy+xyv+yuv$, $x=\sin t$, $y=\ln t$, $u=e^t$, $v=arctgt$.

Имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+uv;$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+xv+uv$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}=yv;$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}=xy+uy$.

$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t},\ \frac{du}{dt}=e^t,\ \frac{dv}{dt}=\frac{1}{1+t^2}.$$

Составим соответствующую сумму произведений:

$$\frac{dz}{dt}=y(1+v)\cos t+(x+xv+uv)\cdot\frac{1}{t}+yve^t+\frac{x+u}{1+t^2}\cdot y.$$

Пример 3. Найти частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=e^{xy}$, где $y=\varphi(x)$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot e^{xy};\quad \frac{dz}{dx}=y\cdot e^{xy}+x\cdot e^{xy}\cdot\varphi(x).$$

Случай нескольких независимых переменных.

Если аргументы x и y функции $z=f(x;y)$ являются функциями двух переменных, скажем, $x=\varphi(u;v)$, $y=\psi(u,v)$, то $z=f\left[\varphi(u;v);\psi(u;v)\right]$ также является функцией двух переменных u и v.

Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v},$$

где u и v - независимые переменные; f,φ,ψ - дифференциальные функции.

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

Во всех рассмотренных случаях справедлива формула

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(свойство инвариантности полного дифференциала).

Пример 4. Найти дифференциал функции $z=\dfrac{x^2}{y}$, если $x=u-2v$, $y=2u+v$.

Решение.

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ или согласно свойству инвариантности $dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$.

Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}\cdot 1+(-\frac{1}{y^2})\cdot x^2\cdot 2=\frac{2x}{y}-\frac{2x^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2x}{y}\cdot(-2)+(-\frac{1x^2}{y^2})\cdot 1=\frac{-4x}{y}-\frac{x^2}{y^2}$$

$$dz=(\frac{2x}{y}-\frac{2x^2}{y^2})du+(-\frac{4x}{y}-\frac{x^2}{y^2})dv=\frac{x}{y}\left[2(1-\frac{x}{y})du-(4-\frac{x}{y})dv\right]=$$

$$=\frac{u-2v}{2u+v}\left[2(1-\frac{u-2v}{2u+v})du-(4+\frac{u-2v}{2u+v})dv\right]=$$

$$=\frac{u-2v}{(2u+v)^2}\left[2(u+3v)du-(9u+2v)dv\right].$$

Функция $z=z(x;y)$ независимых переменных x и y называется ***неявной,*** если она задана уравнением $F(x;y;z)=0$, не разрешенным относительно Z. Ее частные производные находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_y};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Если уравнение $F(x;y)=0$ задает неявно функцию одной переменой $y=y(x)$, то $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

Пример 5. Функция z независимых переменных x и y задана неявно уравнением $4x^2+2y^2-3z^2+xy-yz+x-4=0$. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ этой функции при $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Решение.

Рассмотрим функцию $F(x;y;z)=4x^2+2y^2-3z^2+xy-yz+x-4$;

по формуле находим: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{8x+y+1}{6z+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+4y-z}{6z+y}$. Подставим в полученные выражения $x=1$, $y=1, z=1$, будем иметь:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\frac{10}{7};\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=\frac{4}{7}.$$

Пример 6. Уравнение с двумя переменными $\sqrt{x^2+3y^2}=5-y^2x^3$ определяет неявную функцию $y=y(x)$.

Найти производную y'_x.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{3x^2y^2+\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}}{2yx^3+\frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}}=$$

$$=\frac{3x^5y^4-15x^2y^2-x}{10x^3y-2x^6y^3+3y};$$

Здесь воспользовались тем, что по условию $\sqrt{x^2+3y^2}=5-y^2x^3$.

Если поверхность задана уравнением $z=f(x;y)$ и $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - точка на поверхности, то ***уравнение касательной плоскости*** к поверхности в этой точке имеет вид $Z-Z_0=f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$, а ***нормаль к поверхности в точке*** M_0 определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{Z-Z_0}{-1}.$$

Если поверхность задана уравнением $F(x;y;z)=0$ в неявной форме, а точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ лежит на поверхности, то уравнение касательной плоскости имеет вид: $F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0$.

Нормаль к поверхности в этой же точке определяется уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}.$$

Пример 7. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=2x^2+y^2$ в точке, для которой $x=1, y=1$.

Решение.

Определим аппликату точки касания из условия, что точка лежит на поверхности. Подставив в данное уравнение поверхности $x=1$ и $y=1$, получим $z=1+2=3$. Следовательно, точкой касания является точка $M_0(1;1;3)$.

Поверхность задана уравнением в явном виде.

Вычислим при $x=1, y=1$ (т.е. в точке $P_0(1;1)$) значения частных производных функции $z=2x^2+y^2$:

$$f'_x(1;1)=4x\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=4,\ f'_y(1;1)=2y\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=2;$$

Подставив эти значения и координаты точки M_0 в соответствующие уравнения, получим уравнение касательной плоскости

$$z-3=4(x-1)+2(y-1) \text{ или } 4x+2y-z-3=0.$$

Тогда уравнение нормали $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-1}$.

Пример 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3xyz-z^3=a^2$ в точке, для которой $x=0$, $y=a$.

Решение.

Найдем аппликату точки касания, подставив $x=0$, $y=a$ в уравнение поверхности: $-z^3=a$, $z=-a$.

Таким образом, точка касания есть $M(0;a;-a)$.

Обозначив $F(x;y;z)$ левую часть уравнения, т.е. $F(x;y;z)=3xyz-z^3-a^3$, найдем частные производные и их значения в точке M:

$$F'_x=3yz,\quad F'_x(M)=-3a^2;$$
$$F'_y=3xz,\quad F'_y(M)=0;$$
$$F'_z=3xy-3z^2,\quad F'_z(M)=-3a^2.$$

Применяя соответствующие формулы касательной плоскости и нормали, получим

$$-3a^2(x-0)+0(y-a)-3a^2(z+a)=0 \text{ или}$$

$x+z+a=0$ - уравнение касательной плоскости;

$$\frac{x-0}{-3a^2}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{-3a^2} \text{ или}$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{1}$$ - уравнение нормали.

Задания.

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2y-y^2x$, где $x=u\cdot\cos v$, $y=u\cdot\sin v$.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}=3u^2\cdot\sin v\cdot\cos v(\cos v-\sin v), \frac{\partial z}{\partial v}=u^3(\sin v+\cos v)(1-3\sin v\cdot\cos v)\right)$$

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $Z=\sin(3u+2v-4a)$, где $u=\sqrt[3]{x^2}$, $v=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $a=\frac{\ln x}{x}$.

$$\left(\frac{dz}{dx}=2\cos(3u+2v-4a)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}+\frac{2(\ln x-1)}{x^2}\right)\right)$$

3. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=xy\,arctg(xy)$, где $x=t^2+1$, $y=t^3$.

$$\left(\frac{dz}{dt}=\left(y\cdot arctgxy+\frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)\cdot 2t+\left(y+arctgxy+\frac{x^2y}{1+x^2y}\right)\cdot 3t^2\right)$$

4. Найти производные неявных функций:

а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$; $\frac{dy}{dx}$ - ? $\quad\left(-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$

б) $y^2=\frac{x+y}{x-y}$; $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=2}$ - ? $\quad(-9)$

в) $x\cdot\sin y+\cos 2y=\cos y$; $\left.y'_x\right|_{y=\frac{\pi}{2}}$ - ? $\quad(-1)$

г) $x^2+y^2+z^2+2xy=1$; Z'_x, Z'_y-? $\quad\left(Z'_x=-1; Z'_y=\frac{-y}{x+z}\right)$

5. Проверить, что функция $4\sin(3x+2y+5z)=3x+2y+5z$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+1=0$.

6. Записать уравнения нормали и касательной плоскости к поверхности $z=x^2+y^2$ в точке $M(1;-2;5)$.

($2x-4y-z-5=0$ - касательная плоскости, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-5}{-1}$ - нормаль)

Домашние задания.

1. $u=e^{z-2y}$; $z=\sin x$; $y=x^3$; $\frac{du}{dx}$ - ? $\quad\left(\frac{du}{dx}=e^{z-2y}(\cos x-6x^2)\right)$

2. $z=\ln(e^x+e^t)$. Найти

а) $\frac{\partial z}{\partial t}$, б) $\frac{dz}{dt}$, если $x = t^3$; $\quad (\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{e^t}{e^x + e^t}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{e^t + 3t^2 e^x}{e^x + e^t})$

3. $z = e^{x^2+y^2}$, если $x = a\cos t,\ y = a\sin t$, найти $\frac{dz}{dt}$. $\quad (\frac{dz}{dt} = 0)$

4. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$, если $x = \cos 2t$, $y = arctgt$.

$$(\frac{dz}{dt} = -2(5x^4 + 2y)\sin 2t + (2x + 3y^3)\frac{1}{1+t})$$

5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $Z = f(u,v)$, где $u = x^3 - y^3$, $v = e^{xy}$.

$$(\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot f'_u(u;v) + ye^{xy} \cdot f'_v(u;v); \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \cdot f'_u(u;v) + xe^{xy} \cdot f'_v(u;v))$$

6. Найти производные неявных функций:

а) $e^x \cdot \sin y - e^y \cdot \cos x = 0$; $\quad (y' = -\frac{e^x \sin y + e^y \sin x}{e^x \cos y - e^y \cos x})$

б) $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$. $\quad (y' = -\frac{2x^3 + 2xy^2 - a^2x}{2x^2y + 2y^3 + a^2y})$

7. Найти частные производные неявных функций

а) $\frac{y}{x} - tg\frac{z}{c} = 0$; $\quad (\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{cy}{x^2 + y^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{cx}{x^2 + y^2})$

б) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$(\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)})$$

8. Составить уравнения нормали и касательной плоскости к поверхности в указанной точке:

а) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9$; $M_0(1;-1;1)$.

$$(\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{4}; \quad 2x - 3y + 4z - 9 = 0)$$

б) $z = 4x^2 - 9y^2$; $M_0(1;1;-5)$.

$$(\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{-18} = \frac{z+5}{-1}; \quad 8x - 18y - z + 5 = 0)$$

9. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и dz для неявной функции z=z(x, y) определенной уравнением $Z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 0$.

$$(dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{2 - z - 6xy}{3z^2 + x + 2y^2z} - \frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}dy)$$

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ.

Частные производные функции нескольких переменных.

Частные производные функции нескольких переменных называют также частными производными первого порядка или первыми частными производными.

Частными производными второго порядка данной функции называются соответствующие частные производные от ее первых частных производных.

Для функции $Z = f(x;y)$ по определению имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (f'_x(x,y))'_x = f''_{xx}(x;y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (f'_y(x;y))'_y = f''_{yy}(x;y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (f'_x(x;y))'_y = f''_{xy}(x;y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (f'_y(x;y))'_x = f''_{yx}(x;y) .$$

Вторые частные производные обозначаются также символами z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}. Производные z''_{xy} и z''_{yx} называются ***смешанными частными производными.***

Если функция z=f(x; y) и ее смешанные производные z''_{xy}, z''_{yx} определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ и непрерывны в этой точке, то $f''_{xy}(x_0;y_0) = f''_{yx}(x_0;y_0)$.

Дифференцируя частные производные второго порядка как по x, так и по y, получаем ***частные производные третьего порядка*** или ***третьи частные производные***:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Вообще, частная производная** n**-ого порядка функции z=f(x; y) есть первая частная производная от ее частной производной n –ого порядка.

Аналогично определяются и вычисляются частные производные второго и высших порядков от функции трех и большего числа переменных.

Полным дифференциалом второго порядка некоторой функции называется полный дифференциал от ее полного дифференциала.

Полным дифференциалом** $(n-1)$**-ого порядка называется полный дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Если $z = f(x;y)$ $dz = z'_x dx + z'_y dy$, то

$$d^2 z = d(dz) = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2,$$

$$d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Для $d^n z$ в символическом виде можно записать:

$$d^n z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^{(n)} z$$

Пример 1. Дана функция $z = x^3 + 2x^2y - 8xy^2 + y^3$. Найти ее частные производные второго порядка.

Решение.

Находим сначала первые производные: $Z'_x = 3x^2 + 4xy - 8y^2$, $Z'_y = 2x^2 - 16xy + 3y^2$.

Пользуясь определениями и правилами дифференцирования, получаем $z''_{xx} = 6x + 4y$, $z''_{xy} = 4x - 16y$; $z''_{yx} = 4x - 16y$; $z''_{yy} = -16x + 6y$.

Пример 2. Найти d^3Z, если $Z = \dfrac{xy}{x+y}$.

Решение.

$$Z'_x = \frac{y^2}{(x+y)^2}; \quad Z'_y = \frac{x^2}{(x+y)^2};$$

$$Z''_{xx} = -\frac{2y^2}{(x+y)^3}, \quad Z''_{xy} = \frac{2xy}{(x+y)^3}; \quad Z''_{yy} = -\frac{2x^2}{(x+y)^3}.$$

$$d^2Z = \frac{-2y^2}{(x+y)^3}dx^2 + 4\frac{xy}{(x+y)^3}dxdy - \frac{2x^2}{(x+y)^3}dy^2 =$$

$$-\frac{2(y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2)}{(x+y)^3} = -2\frac{(ydx - xdy)^2}{(x+y)^3};$$

$$d^3Z = Z'''_{xxx}dx^3 + 3Z'''_{xxy}dx^2dy + 3Z'''_{xyy}dxdy^2 + Z'''_{yyy}dy^3,$$

$$d^3Z = \frac{6}{(x+y)^4}(y^2dx^3 - (2xy - y^2)dx^2dy - (2xy - x^2)dxdy^2 + x^2dy^3).$$

Пример 3. Найти y' и y'', если $y^2 - 3x^2 + 2x + 3y - 9 = 0$.

Решение.

После первого дифференцирования сравнительно просто получим $y' = 2\dfrac{3x-1}{2y+3}$.

Теперь продифференцируем эту функцию, как частное, опять с учетом $y = y(x)$:

$y'' = 2\dfrac{3(2y+3) - 2y'(3x-1)}{(2y+3)^2}$, а здесь заменим $y' = 2\dfrac{3x-1}{2y+3}$.

Получаем $y'' = 2\dfrac{3(2y+3)^2 - 4(3x-1)^2}{(2y+3)^3}$.

Пример 4. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если функция z=z(x; y) задана неявно уравнением $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

Решение.

Высшие производные функций заданных неявно, как функции двух и более переменных, находят практически по тем же правилам, что и первые производные. Данное уравнение дифференцируем по x (y - постоянная).

$$2x + 6zz'_x + y - z'_x = 0 \qquad (1)$$

Отсюда $z'_x = \dfrac{2x+y}{1-6z}$. Дифференцируем (1) по x:

$$2 + 6(z'_x)z'_x + 6z \cdot z''_{xx} - 2z'_{xx} = 0.$$

Значит, $$z''_{xx} = 2 \cdot \frac{1+3(z'_x)^2}{1-6z} \qquad (2)$$

Дифференцируем (1) по y:

$$6z'_y \cdot z'_x + 6z \cdot z''_{xy} + 1 - z''_{xy} = 0, \text{ значит } z''_{xy} = \frac{1+6z'_x \cdot z'_y}{1-6z}.$$

Производная по направлению. Градиент.

***Производной функции** $z = f(x;y)$ **в данном направлении** $\vec{l} = \overrightarrow{PP_1}$* называется $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{P_1P \to 0} \dfrac{f(P_1) - f(P)}{P_1P}$, где f(P) и f($P_1$) значения функции в точках P и P_1. Если функция z дифференцируема, то справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

где α - угол, образованный вектором $\vec{l}$ с положительным направлением оси Ox.

Аналогично определяется производная в данном направлении $\vec{l}$ для функций трех аргументов $u = f(x;y;z)$. В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где α, β, γ - углы между направлением $\vec{l}$ и соответствующими координатными осями.

Производная в данном направлении характеризует скорость изменения функции в этом направлении.

Градиентом функции z=f(x; y) называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Производная данной функции в точке М в направлении $\vec{l}$ связана с градиентом функции в точке М следующей формулой:

$$\frac{\partial z(M)}{\partial \vec{l}} = Пр_{l} grad\, z(M),$$

т.е. производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке, т.е. при $\vec{l} = gradZ$ производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное $\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}$.

Аналогично определяется градиент функции трех переменных $u = f(x;y;z)$:

$$gradZ = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Градиент функции трех переменных в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Пример 5. Найти производную функции $Z = 2{,}5x^2 - 5xy + 3y^2 + 5y$ в точке $A(1;2)$ в направлении, составляющем с осью Ох угол 30°. Определить направление максимального роста данной функции в данной точке.

Решение.

Имеем $z'_x = 5x - 5y;\quad z'_y = -5x + 6y + 5.$

$$z'_x(1;2) = -5;\quad z'_y(1;2) = 12.$$

Следовательно, если через $\vec{l}$ обозначим данное направление, то $\frac{\partial z}{\partial l} = -5\cos 30° + 12\sin 30° = \frac{-5\sqrt{3}}{2} + 6$. Градиент функции поля в данной точке имеет вид: $\overrightarrow{gradZ}(1;2) = (-5;12) = -5\vec{i} + 12\vec{j}$. Этот вектор указывает направление, в котором функция растет быстрее, чем по другим направлениям. Максимальное значение производной в точке $A(1;2)$ равно модулю градиента: $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Пример 6. Найти направление максимального роста функции $Z = 3x^2 + xy - 2y^2$ в точке $A(2;1)$. Найти наибольшее из значений производных по разным направлениям в точке A.

Решение.

Имеем $Z'_x = 6x + y$, $Z'_y = x - 4y$, $Z'_x(2;1) = 13$, $Z'_y(2;1) = -2$.

Градиент функции z в данной точке – это вектор $\overrightarrow{grad}Z(2;1)=(13;-2)$. Этот вектор (его направление) указывает на направление максимального роста функции в точке $A(2;1)$. Наибольшее значение производной в точке $A(2;1)$ равно $\sqrt{13^2+2^2}=\sqrt{173}$.

Задания.

1. Найти частные производные второго порядка функции $z=(x^2+y^2)^2$.

$$(z''_{xx}=12x^2+4y^2;\ z''_{yy}=4x^2+12y^2;\ z''_{xy}=z''_{yx}=8xy)$$

2. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=\ln(x^2+y)$.

$$(z''_{xx}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2};\ z''_{yy}=-\frac{1}{(x^2+y)^2};\ z''_{yx}=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2})$$

3. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, если $z=\sin(xy)$.

$$(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y}=-x^2y\cdot\cos(xy)-2x\cdot\sin(xy))$$

4. Найти d^2z от функции $Z=x^2y-xy^2+7$.

$$(d^2z=2y\cdot dx^2+4(x-y)dxdy-2xdy^2)$$

5. Найти y', y'', y''' для неявной функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2-xy+2y^2+x-y=1$ при $x=0$, если $y(0)=1$.

$$(y'=0;\ y''=y'''=-\frac{2}{3})$$

6. Найти производную функции $Z=f(xy)=3x^2+5y^2$ в точке $A(1;-1)$ по направлению к точке $B(13;1)$.

$$(\frac{\partial z}{\partial \ell}=-\frac{14}{\sqrt{5}})$$

7. Найти $gradZ$ в точке $(2;1)$, если $Z=x^3+y^3-3xy$.

$$(\overline{grad}Z=9\vec{i}-3\vec{j})$$

Домашние задания.

1. Найти все частные производные второго порядка $U=xy+yz+zx$.

$$(U''_{xx}=U''_{yy}=U''_{zz}=0;\ U''_{xy}=U''_{yz}=U''_{zx}=1)$$

2. Найти частные производные второго и третьего порядка

$Z=4x^3+3x^2y+3xy^2-y^3$

$$(Z'_x=12x^2+6xy+6y^2;\ Z'_y=3x^2+6xy-3y^2;\ Z''_{xx}=24x+6y;\ Z''_{yy}=6x-6y;$$
$$Z''_{xy}=6x+12y;\ Z'''_{xxx}=24;\ Z'''_{yyy}=-6;\ Z'''_{xyy}=6;\ Z'''_{yyx}=6 \text{ и т.д.})$$

3. Найти d^2z от функций:

а) $z = x - 3\sin y$; $(d^2z = 3\sin dy^2)$

б) $z = xy - \dfrac{y}{x}$. $(d^2z = -\dfrac{2y}{x^3}dx^2 + 2(1+\dfrac{1}{x^2})dxdy)$

4. Найти d^2z в точке (1;0) для неявной функции $z(x;y)$, определенной уравнением $xz^5 + y^3z - x^3 = 0$, если $z(1;0) = 1$.

$$(d^2z = -\frac{6}{25}dx^2)$$

5. Точка, в которой производная функции в любом направлении равна нулю, называется стационарной точкой этой функции. Найти стационарные точки функции:

а) $Z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$; (2;0)

б) $Z = x^3 + y^3 - 3xy$; (0;0) и (1;1)

в) $U = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$. (7;2;1)

6. Найти $gradZ$ в точке (5;3), если $Z = \sqrt{x^2 - y^2}$. $(\overline{gradZ} = \dfrac{1}{4}(5\vec{i} - 3\vec{j}))$

7. Найти $\overrightarrow{gradU}$ в точке (1;2;3), если $U = xyz$. $(\overrightarrow{gradU} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$

8. Найти величину и направление градиента функции U в точке (2;–2;1),

$U = x^2 + y^2 + z^2$. $\left(\left|\overrightarrow{grad}\ U\right| = 6;\ \cos\ \alpha = \dfrac{2}{3};\ \cos\ \beta = -\dfrac{2}{3};\ \cos\ \gamma = \dfrac{1}{3}\right)$

9. Найти градиент функции $U = x^2 + y^2 + z^2$ и ее производную в точке A(1; 1; 1) в направлении $\vec{l} = (\cos 45°; \cos 60°; \cos 60°)$.

$$\left(\overrightarrow{gradU} = (2;2;2);\ \frac{\partial U}{\partial l} = 2 + \sqrt{2}\right)$$

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ.

Функция z=f(x; y) имеет в точке $P_0(x_0;y_0)$ ***локальный максимум (минимум)***, равный $f(x_0;y_0)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех отличных от P_0 точек *P(x; y)* из этой окрестности имеет место неравенство $f(P)<f(P_0)$ $(f(P)>f(P_0))$.

Необходимые условия существования локального экстремума: если функция f(x; y) в точке P_0 имеет локальный экстремум, то в этой точке обе частные производные, если они существуют, равны нулю или хотя бы одна из них в этой точке не существует (критические точки функции f(x; y)).

$$\begin{cases} f'_x(x;y)=0, \\ f'_y(x;y)=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Сформулируем ***достаточные условия существования локального экстремума.***

Пусть $P_0(x_0;y_0)$ - стационарная точка функции f(x; y) (***стационарной*** называется точка, в которой функция может достигать экстремума), т.е. $df(x_0;y_0)=0$.

Тогда: а) если $d^2f(x_0;y_0)<0$ при $dx^2+dy^2>0$, то $f(x_0;y_0)$ есть максимум функции $f(x;y)$: б) если $d^2f(x_0;y_0)>0$ при $dx^2+dy^2>0$, то $f(x_0;y_0)$ есть минимум функции $f(x;y)$: в) если $d^2f(x_0;y_0)$ меняет знак, то $f(x_0;y_0)$ не является экстремумом функции $f(x;y)$.

Приведенные условия эквивалентны следующим: пусть $f'_x(x_0;y_0)=f'_y(x_0;y_0)$ и $A=f''_{xx}(P_0)$, $B=f''_{xy}(P_0)$, $C=f''_{yy}(P_0)$, тогда:

1) если $V=AC-B^2>0$, то функция имеет экстремум в точке $P_0(x_0;y_0)$, а именно максимум, если A<0 (или C<0), и минимум, если A>0 (или C>0).
2) еслиV<0, то экстремума в точке $P_0(x_0;y_0)$ нет.
3) еслиV=0, то вопрос о наличии экстремума функции в точке $P_0(x_0;y_0)$ требует дальнейшего исследования.

В простейшем случае ***условным экстремумом функции*** $f(x;y)$ называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что ее аргументы x и y связаны уравнением $\varphi(x;y)=0$ ***(уравнение связи).*** Чтобы найти условный экстремум функции $f(x;y)$ при наличии соотношения $\varphi(x;y)=0$, составляют так называемую *функцию Лагранжа* $F(x;y;\alpha)=f(x;y)+\lambda\varphi(x;y)$, где λ - неопределенный постоянный множитель, и ищут обычный экстремум этой вспомогательной функции. Необходимые условия сводятся к системе трех уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=0,\\ \varphi(x;y)=0.\end{cases} \tag{2}$$

с тремя неизвестными x, y, λ, из которой можно, вообще говоря, определить эти неизвестные.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2F(x;y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$

для испытуемой системы значений *x*, *y*, *λ*, полученной из (2) при условии, что *dx* и *dy* связаны уравнением $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0\quad(dx^2+dy^2\neq 0)$. А именно, функция $f(x;y)$ имеет ***условный максимум***, если $d^2F<0$, и ***условный минимум,*** если $d^2F>0$. В частности, если дискриминант V для функции $F(x;y)$ в стационарной точке положителен, то в этой точке имеется условный максимум функции $f(x;y)$, если A<0 (или C<0), и условный минимум, если A>0 (или C>0).

Аналогично находится условный экстремум функции трех или большего числа переменных при наличии одного или нескольких уравнений связи (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходится вводить в функцию Лагранжа столько неопределенных множителей, сколько имеется уравнений связи.

Пример 1. Найти локальные экстремумы функции $f(x;y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

Решение.

Найдем частные производные, приравняем их к нулю и решим полученную систему:

$$f'_x=4x^3-4x+4y$$

$$f'_y=4y^3+4x-4y$$

$$\begin{cases}4x^3-4x+4y=0\\ 4y^3+4x-4y=0\end{cases}$$

откуда имеем три стационарные точки $O(0;0)$, $P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, $P_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$. Других критических точек нет. Найдем частные производные второго порядка и вычислим их значения в критических точках: $f''_{xx}=12x^2-4$, $f''_{xy}=4$, $f''_{yy}=12y^2-4$.

Для каждой критической точки составим $\Delta=AC-B^2$.

1) $O(0;0)$:

   $A=-4$, $C=-4$, $B=4$. Δ=16-16=0. Значит, достаточный признак ответа не дает. Заметим, что в любой окрестности этой точки имеются точки, в которых значения данной функции $f(x;y)$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Например, вдоль оси Ox $(y=0)$ $f(x;y)\big|_{y=0}=f(x;0)=x^4-2x^2=-x^2(2-x^2)<0$ вблизи точки $O(0;0)$, а вдоль биссектрисы $y=x$ $f(x;y)\big|_{y=x}=f(x;x)=2x^4>0$.

   Таким образом, оказалось, что для различных точек из некоторой окрестности точки $O(0;0)$ полное приращение $\Delta f(x;y)$ не сохраняет знак, вследствие чего в этой точке функция не имеет локального экстремума.

2) $P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$:

   $A=20;\ C=20;\ B=4;$

   $AC-B^2=400-16=384>0$ и $A>0$, значит, в этой точке функция имеет локальный минимум $f_{\min}=-8$.

3) $P_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$:

   $A=20;\ C=20;\ B=4;$

   $AC-B^2=400-16=384>0$ и $A>0$ $(C>0)$, значит, в этой точке функция имеет локальный минимум $f_{\min}=-8$.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x;y)=4x^2y+24xy+y^2+32y-6.$$

Решение.

Определим стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=8xy+24y=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=4x^2+24x+2y+32=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y(x+3)=0\\ 2x^2+12x+y+16=0\end{cases}.$$

Отсюда $y=0$, $x_1=-4$, $x_2=-2$, $y=2$, x_3=3.

Получим три стационарные точки: $M_1(-4;0)$, $M_2(-2;0)$, $M_3(-3;2)$. Эти точки исследуем на достаточность условий экстремума.

Сначала определим отдельно $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=8x+24$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$.

А теперь для каждой точки вычислим соответствующие A, B и C, определим знаки величин Δ=AC-B^2 и A.

а) $M_1(-4;0)$: $A=0$, $B=-32+24=-8$, $C=2$, $AC-B^2=-64<0$, т.е. $M_1(-4;0)$ не является точкой экстремума.

б) $M_2(-2;0)$: $A=0$, $B=-16+24=8$, $C=2$, $AC-B^2<0$, т.е. $M_2(-2;0)$ не является точкой экстремума.

в) $M_3(-3;2)$: $A=16$, $B=0, C=2$, $AC-B^2=32>0$. При этом $A>0$.

Вывод: $M_3(-3;2)$ - точка локального минимума функции $f(x;y)$ с $f_{\min}=f(-3;2)=-10$.

Пример 3. Найти экстремум функции $z=9-8x-6y$ при условии, что ее аргументы удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=25$.

Решение.

Геометрически задача сводится к нахождению экстремальных значений аппликаты z точек пересечения плоскости $z=9-8x-6y$ с круговым цилиндром $x^2+y^2=25$.

Составим функцию Лагранжа, определяемую формулой:

$$F(x;y;\lambda)=f(x;y)+\lambda\cdot\varphi(x;y).$$

$$F(x;y;\lambda)=9-8x-6y+\lambda(x^2+y^2-25).$$

найдем ее частные производные: $F'_x=-8+2\lambda x$, $F'_y=-6+2y\lambda$.

Система (2) примет вид:

$$\begin{cases}-8+2\lambda x=0\\ -6+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=25\end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases}\lambda x-4=0\\ \lambda y-3=0\\ x^2+y^2=25\end{cases}.$$

Решив эту систему, получим:

1) $\lambda_1=1$, $x_1=4$, $y_1=3$.

2) $\lambda_2=-1$, $x_2=-4$, $y_2=-3$.

Найдем вторые производные: $F''_{xx}=2\lambda$, $F''_{yy}=2\lambda$, $F''_{yx}=0$ и второй дифференциал $d^2F=\lambda(dx^2+dy^2)$.

Т.к. $d^2F>0$ при $\lambda_1=1$, $x_1=4$, $y_1=3$, то функция $f(x;y)$ в точке (4;3) имеет условный минимум, причем $\min f(x;y)=f(4;3)=-41$.

Поскольку $d^2F<0$ при $\lambda_2=-1$, $x_2=-4$, $y_2=-3$, то в точке $(-4;-3)$ функция имеет условный максимум $f(-4;-3)$=59.

Ответ: *min f(x, y)=f(4, 3)=-41; max f(x, y)=f(-4, -3)=59.*

Задания.

1. Найти экстремум функций:

   а) $Z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;

   ($M_1(0;0)$ нет экстремума, $M_2(1;\frac{1}{2}), Z_{\min} = Z(M_2) = 4$)

   б) $U = x + y - 3x + 4\sqrt{y^5}$; ($P_1(1;0)$, $P_2(-1;0)$ - точки не являются критическими т.к. лежат на границе, а не внутри области)

   в) $Z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12$; ($Z_{\max} = Z(1;2) = 19$)

   г) $Z = x^3 + y^3 - 6xy$ ($Z_{\min} = Z(2;2) = -8$)

2. Найти экстремумы функции $Z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ при условии, что x и y связаны уравнением $x + y = 4$;

   ($P_0(\frac{5}{2};\frac{3}{2})$, $Z_{\min} = f(\frac{5}{2};\frac{3}{2}) = \frac{15}{4}$)

3. Найти экстремумы функции $Z=x+2y$ при $x^2 + y^2 = 5$

   ($Z_{\max} = 5$ при $x = 1$, $y = 2$ $Z_{\min} = -5$ при $x = -1$, $y = -2$)

Домашние задания:

1. Исследовать на экстремумы функции:

   а) $Z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$; ($Z_{\min} = Z(1;4) = -21$)

   б) $Z = 2xy - 2x - 4y$; (нет экстремума)

   в) $f(x;y) = x^2 + xy - 2x - 3y + 5\frac{2}{3}$; ($M_0(\frac{1}{3};\frac{4}{3}) - \min$, $f_{\min} = f(\frac{1}{3};\frac{4}{3}) = \frac{10}{3}$)

   г) $f(x;y) = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 3y - 20$; ($M(-5;1) - \max$, $f_{\max} = f(-5;1) = 1$)

2. Определить условные экстремумы функций:

а) $Z = xy$ при $x + y = 1$; ($Z_{\max} = \frac{1}{4}$ при $x = y = \frac{1}{2}$)

б) $Z = x^2 + y^2$ при $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; ($Z_{\min} = \frac{36}{13}$ при $x = \frac{18}{13}$; $y = \frac{12}{13}$)

в) $Z = 6 - 4x - 3y$ при $x^2 + y^2 = 1$;

($Z_{\max} = 11 = f(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5})$ при $\lambda = -\frac{5}{2}$, $Z_{\min} = 1 = f(\frac{4}{5};\frac{3}{5})$ при $\lambda = \frac{5}{2}$)

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ.

Функция, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке или в точке границы области.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области необходимо найти все критические точки, лежащие внутри данной области и на ее границе, вычислить значения функции в этих точках, а также во всех остальных точках границы, а затем путем сравнения полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее из них.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x;y)=2x^2-2y^2$ в круге $x^2+y^2=9$.

Решение.

$$\begin{cases} f'_x=4x=0 \\ f'_y=-4y=0 \end{cases}$$

Приравнивая к нулю эти производные, получим систему уравнений, из которой находим $x_0=0$, $y_0=0$. Значение функции в критической точке $M_0(x_0;y_0)$ равно нулю.

$$z_0=f(x_0;y_0)=f(0;0)=0.$$

Границей данной замкнутой области является окружность $x^2+y^2=9$ или $y^2=9-x^2$, где $-3\le x\le 3$. Функция $z=2x^2-2y^2$ на границе области становится функцией одной переменной x $z(x)=2x^2-2(9-x^2)=4x^2-18$, аргумент которой изменяется на отрезке [–3;3]. Найдем наибольшее и наименьшее значение функции z на указанном отрезке.

Дифференцируя эту функцию, получаем $z'_x=8x$. Из этого уравнения находим единственную критическую точку $x_1=0$, в которой функция $z(x)$ имеет значение $z_1=-18$. Вычислим ее значения на концах отрезка [–3;3],т.е. в точках $x=-3$, $x=3$:

$z_2=z(-3)=4(-3)^2-18=18$

$z_3=z(3)=4\cdot 3^2-18=18$

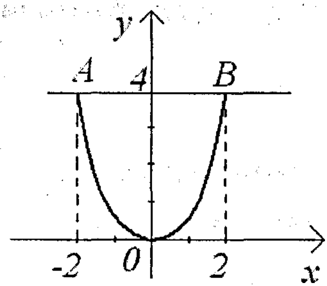
Сравнивая между собой числа z_0, z_1, z_2, z_3, заключаем, что функция $Z=2x^2-2y^2$ имеет наибольшее значение, равное 18 и наименьшее значение равное –18, причем $z_{наиб}=f(-3;0)=f(3;0)=18$, $z_{наим}=f(0;-3)=f(0;3)=-18$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$.

Решение.

Найдем критические точки функции z, лежащие внутри заданной области (см. рис.)

$$\text{Т.к. } z'_x = 6x^2 + 8x - 2y,$$
$$z'_y = 2y - 2x,$$



то, решая систему уравнений, $\begin{cases} Z'_x = 0 \\ Z'_y = 0 \end{cases}$, находим две критические точки $O(0;0)$ и $B(-1;1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области. Других критических точек функция z не имеет.

Ищем наибольшие значения функции z на границе заданной области. Она состоит из двух участков AOB и AB, имеющих различные уравнения. Поэтому вначале найдем наибольшие и наименьшие значения z на каждом из этих участков, затем, сопоставляя их, найдем наибольшие и наименьшие значения z на всей границе.

На участке AOB имеем $y = x^2$, $z_1(x) = x^4 + 4x^2$, где x изменяется на отрезке $[-2;2]$. Ищем наибольшие и наименьшие значения z_1 на отрезке $[-2;2]$:

$z_1' = 4x^3 + 8x$, $z_1' = 0$ при $x = 0$, $z'(0) = 0$;

$z'(-2) = z_1'(2) = 32$.

Сравнивая значения z_1 во внутренней критической точке $x = 0$ и на концах отрезка $x = 2$ и $x = -2$ заключаем: наибольшее значение z_1 на $[-2;2]$ равно 32 (в точках $x = \pm 2$), а наименьшее значение z_1 на этом отрезке равно нулю (в точке $x = 0$).

На участке AB имеем $y = 4$, $z_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$, где $-2 \le x \le 2$.

Ищем наибольшее и наименьшее значения z_2 на отрезке $[-2;2]$:

$z_2' = 6x^2 + 8x - 8$, внутри данного отрезка $z_2' = 0$ при $x = \frac{2}{3}$ x=-2; $z_2(\frac{2}{3}) = 16\frac{22}{27}$,

$z_2(-2) = z_2(2) = 32$.

Т.о. наибольшее значение z_2 на $[-2;2]$ равно 32 (в точках $x = \pm 2$), а наименьшее значение z_2 на этом отрезке равно $16\frac{22}{27}$ (в точке $x = \frac{2}{3}$).

Сопоставляя значения z на участках AOB и AB, приходим к выводу: на всей границе $AOBA$ наибольшее значение функции z равно 32 (в точках A и B), а ее наименьшее значение равно нулю (в точке 0).

Пример 3. Положительное число a требуется разбить на три неотрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение.

Пусть искомые слагаемые будут x, y, $a-x-y$.

Ищем max функции $z = f(x;y) = xy(a-x-y)$.

По смыслу задачи функция z рассматривается внутри замкнутого треугольника $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq a$.

Решая систему $\begin{cases} f'_x(x;y) = y(a-x-y) = 0 \\ f'_y(x;y) = x(a-x-y) = 0 \end{cases}$,

Получим единственную стационарную точку $(\frac{a}{3};\frac{a}{3})$, лежащую внутри треугольника. Для нее проверяем выполнение достаточных условий. Имеем $f''_{xx}(x;y) = -2y$, $f''_{xy}(x;y) = a-2x-2y$, $f''_{yy}(x;y) = -2x$.

Следовательно, $A = f''_{xx}(\frac{a}{3};\frac{a}{3}) = -\frac{2}{3}a$, $B = f''_{xy}(\frac{a}{3};\frac{a}{3}) = -\frac{1}{3}a$,

$$C = f''_{yy}(\frac{a}{3};\frac{a}{3}) = -\frac{2}{3}a, \text{ и } \Delta = AC - B^2,\ A < 0.$$

Итак, в точке $(\frac{a}{3};\frac{a}{3})$ функция достигает максимума. Так как на контуре треугольника функция $f(x;y) = 0$, то этот максимум будет наибольшим значением функции, т.е. произведение будет наибольшим, если $x = y = a-x-y = \frac{a}{3}$, причем наибольшее значение произведения равно $\frac{a^3}{27}$.

Примечание: задачу можно было решать методами условного экстремума, отыскивая максимум функции $U = xyz$ при условии $x+y+z = a$.

Задания.

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области D: $x \in [0;2]$, $y \in [-1;2]$ (область D - прямоугольник и границами его являются четыре отрезка).

$(Z_{наиб.} = Z(2;-1) = 13$, $Z_{наим.} = Z(1;1) = Z(0;-1) = -1)$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = f(x;y) = 3x + 3y$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

$(Z_{наиб.} = f(\sqrt{2};\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$, $Z_{наим.} = f(-\sqrt{2};-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2})$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = x^2y(4 - x - y)$ в треугольнике $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$.

$(Z_{наиб.} = f(2;1) = 4$, $Z_{наим} = f(4;2) = -64)$

4. Открытый прямоугольный ящик должен иметь данный объем V. Определить размеры ящика, при котором на его изготовление потребуется наименьшее количество материала.

$$(x = y = (2V)^{\frac{1}{3}},\ Z = \frac{1}{2}(2V)^{\frac{1}{3}}).$$

5. Найти прямоугольный параллелепипед данной поверхности S, имеющий наибольший объем.

$$(x = y = z = a = \sqrt{\frac{S}{6}})$$

6. Найти прямоугольник наибольшей площади, имеющий заданный периметр ℓ.

(квадрат ($S = xy$, $2x + 2y = \ell$, функция Лагранжа $F = xy + \lambda(2x + 2y - \ell)$)

Домашние задания.

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

$(Z_{наиб.} = Z(-2;2) = 8 + 4\sqrt{2}$, $Z_{наим.} = Z(1;1) = 2)$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = f(x;y) = x^3 + y^3 + 6xy$ в прямоугольнике с вершинами $A(-3;-3)$, $B(-3;2)$, $C(1;2)$, $D(1;-3)$.

$(Z_{наим} = Z(B) = -55$, $Z_{наиб} = Z(C) = 21)$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = x^3 + y^3 - 3xy$ в треугольнике $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

$(Z_{наим.} = f(2;-1) = 13$, $Z_{наим.} = f(1;1) = f(0;-1) = -1)$

4. Из круга проволоки длиной ℓ сделать каркас прямоугольного параллелепипеда с наибольшим объемом. (куб с ребром $\frac{\ell}{12}$)

5. Из всех треугольников данного периметра $2p$ найти тот, который имеет наибольшую площадь.

(равносторонний треугольник)

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Непосредственное интегрирование.

Пусть на интервале $(a;b)$ задана функция $f(x)$. Если $F'(x)=f(x)$, где $x\in(a;b)$, то функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

Любые две первообразные данной функции $f(x)$ отличаются друг от друга произвольной постоянной.

Совокупность первообразных $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, функции $f(x)$, $x\in(a;b)$ называется ***неопределенным интегралом функции*** $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Основные правила интегрирования:

1) $\int f'(x)dx = \int d(f(x)) = f(x)+C$, $d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = f(x)dx$

2) $\int (f(x)\pm\varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$

3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a=const)$;

4) Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, $a\neq 0$.

5) Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u)+C$

Правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием найденной первообразной, т.е.

$$(F(x)+C)' = f(x).$$

На основании определения неопределенного интеграла, правил интегрирования и таблицы производных, составлена таблица основных неопределенных интегралов.

Таблица основных неопределенных интегралов.

1) $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$

2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u|+C$

3) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+C$, $a>0$, $a\neq 1$

4) $\int e^u du = e^u + C$

5) $\int \sin u du = -\cos u + C$

6) $\int \cos u du = \sin u + C$

7) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$

8) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

9) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C$

10) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$ $(a>0)$

11) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

$(a \neq 0)$

12) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

13) $\int shudu = chu + C$

14) $\int chudu = shu + C$

15) $\int \frac{du}{ch^2u} = thu + C$

16) $\int \frac{du}{sh^2u} = -cthu + C$

17) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C$

18) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + C.$

Интегралы 1-18 называются ***табличными.***

Замечание. В приведенной таблице буква u может обозначать как независимую переменную, так и непрерывно дифференцируемую функцию $u=\varphi(x)$ аргумента x.

Непосредственное интегрирование.

а) *Применение элементарных преобразований*

Пример 1. Вычислить интеграл $\int(2x-1)(7-x)dx$.

Решение.

$$\int(2x-1)(7-x)dx = \int(14x-2x^2-7+x)dx =$$

$$= \int(15x-2x^2-7)dx = 15\int xdx - 2\int x^2dx - 7\int dx =$$

$$= \frac{15x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - 7x + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^3 - x\sqrt[3]{x} + 5}{\sqrt[4]{x}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{2x^3 - x\sqrt[3]{x} + 5}{\sqrt[4]{x}}dx = \int\left(\frac{2x^3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} + \frac{5}{\sqrt[4]{x}}\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{2x^3}{x^{\frac{1}{4}}} - \frac{x \cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{5}{x^{\frac{1}{4}}}\right)dx = \int\left(2x^{\frac{11}{4}} - x^{\frac{13}{12}} + 5x^{-\frac{1}{4}}\right)dx =$$

$$= 2\int x^{\frac{11}{4}}dx - \int x^{\frac{13}{12}}dx + 5\int x^{-\frac{1}{4}}dx =$$

$$=\frac{2x^{\frac{15}{4}}}{\frac{15}{4}}-\frac{x^{\frac{25}{12}}}{\frac{25}{12}}+\frac{5x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C=\frac{8}{15}\sqrt[4]{x^{15}}-\frac{12}{25}x^{1}\sqrt[12]{x^{25}}+\frac{20}{3}\sqrt[4]{x^{3}}+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$.

Решение.

$$\int \sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\cos x dx\right)=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int 2^{3x}\cdot 3^{2x}dx$.

Решение.

$$\int 2^{3x}\cdot 3^{2x}dx=\int 8^x\cdot 9^x dx=\int 72^x dx=\frac{72^x}{\ln 72}+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4(\frac{1}{4}-x^2)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin 2x+C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\frac{3x^2+1}{x^2-1}dx$.

Решение.

$$\int\frac{3x^2+1}{x^2-1}dx=\int\left(3+\frac{4}{x^2-1}\right)dx=3\int dx+4\int\frac{dx}{x^2-1}=3x+4\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=$$

$$=3x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

б) ***Подведение части подынтегральной функции под знак дифференциала.***

Пример 1. Вычислить интеграл $\int(1-7x)^{10}dx$.

Решение.

$$\int(1-7x)^{10}dx=\left|d(1-7x)=-7dx\right|=-\frac{1}{7}\int(1-7x)^{10}(-7dx)=$$

$$=-\frac{1}{7}\int(1-7x)^{10}d(1-7x)=\left|1-7x=t\right|=-\frac{1}{7}\int t^{10}dt=$$

$$=-\frac{1}{7}\cdot\frac{t^{11}}{11}+C=-\frac{1}{77}(1-7x)^{11}+C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\cos^2 5x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\cos^2 5x}=\left|d(5x)=5dx\right|=\frac{1}{5}\int\frac{5dx}{\cos^2 5x}=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x)}{\cos^2 5x}=$$
$$=\frac{1}{5}tg5x+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int x\cos(1-3x^2)dx$.

Решение.

$$\int x\cos(1-3x^2)dx=\left|d(1-3x^2)=-6xdx\right|=$$
$$=-\frac{1}{6}\int\cos(1-3x^2)(-6xdx)=-\frac{1}{6}\int\cos(1-3x^2)d(1-3x^2)=$$
$$=-\frac{1}{6}\sin(1-3x^2)+C.$$

Пример 4 Вычислить интеграл $\int\frac{3x-1}{\sqrt{2x^2+3}}dx$.

Решение.

$$\int\frac{3x-1}{\sqrt{2x^2+3}}dx=\int\frac{3xdx}{\sqrt{2x^2+3}}-\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}=\left|d(2x^2+3)=4xdx\right|=$$
$$=\frac{3}{4}\int\frac{4xdx}{\sqrt{2x^2+3}}-\int\frac{dx}{\sqrt{2(x^2+\frac{3}{2})}}=\frac{3}{4}\int\frac{d(2x^2+3)}{\sqrt{2x^2+3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}}=$$
$$=\frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{2x^2+3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right|+C=\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right|+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\left|d(\ln x)=\frac{dx}{x}\right|=\int\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}=2\sqrt{\ln x}+C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin 2xdx}{4+\sin^2 x}$.

Решение.

$$\int\frac{\sin 2xdx}{4+\sin^2 x}=\left|\begin{matrix}d(4+\sin^2 x)=2\sin x\cdot\cos xdx=\\=\sin 2xdx\end{matrix}\right|=\int\frac{d(4+\sin^2 x)}{4+\sin^2 x}=$$
$$=\ln\left|4+\sin^2 x\right|+C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\frac{xdx}{1+x^4}$.

Решение.

$$\int\frac{xdx}{1+x^4}=\left|d(x^2)=2xdx\right|=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+(x^2)^2}==\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot arctgx^2+C.$$

Задания.

1. $\int\frac{3x^2-8x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx;$
2. $\int(2^x\cdot 3^{2x}-\frac{1}{9+4x^2}+2\cos^2\frac{x}{2})dx;$
3. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx;$
4. $\int(\cos 3x-\frac{1}{3x-1}+\ell^{2-3x})dx;$
5. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{2x^3+1}};$
6. $\int\frac{x-2x^3}{\sqrt{9-x^4}}dx;$
7. $\int\frac{dx}{(2x-1)\ln(2x-1)};$
8. $\int\frac{\arcsin x-3x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$
9. $\int\frac{\cos 2xdx}{\sqrt{1-\sin 2x}};$
10. $\int tg2xdx.$

Ответы.

1. $\frac{8}{9}\sqrt[3]{x^8}+\frac{24}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+C;$
2. $\frac{18^x}{\ln 18}-\frac{1}{6}arctg\frac{2x}{3}+x+\sin x+C;$
3. $-\frac{2}{\sin 2x}+C;$
4. $\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\ln|3x-1|-\frac{1}{3}\ell^{2-3x}+C;$
5. $\frac{5}{24}\sqrt[5]{(2x^3+1)^4}+C;$
6. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{3}+\sqrt{9-x^2}+C;$
7. $\frac{1}{2}\ln|\ln(2x-1)|+C;$
8. $\frac{1}{2}\arcsin^2 x+3\sqrt{1-x^2}+C;$
9. $-\sqrt{1-\sin^2 x}+C;$
10. $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C.$

Домашние задания.

1. $\int\frac{11x^3-8x^2+2}{\sqrt[3]{x}}dx;$
2. $\int(3^x\cdot 2^{3x}-\frac{1}{9-4x^2})dx;$
3. $\int(\frac{1}{\sin^2 3x}+\frac{1}{1-2x}-\ell^{4x+5})dx;$
4. $\int\frac{x-5x^3}{\sqrt{16-x^4}};$
5. $\int\frac{arctg^3 2x-5x}{\sqrt{4x^2+1}}dx;$
6. $\int\frac{dx}{(1-3x)\ln^2(1-3x)}.$

Ответы.

1. $3\sqrt[3]{x^{11}}-3\sqrt[3]{x^{8}}+3\sqrt[3]{x^{2}}+C$;
2. $\frac{24^{x}}{\ln 24}-\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+2x}{3-2x}\right|+C$;
3. $-\frac{1}{3}ctg3x-\frac{1}{2}\ln|1-2x|-\frac{1}{4}\ell^{4x+5}+C$;
4. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^{2}}{4}+\frac{5}{2}\sqrt{16-x^{4}}+C$;
5. $\frac{1}{8}arctg^{4}2x-\frac{5}{4}\sqrt{4x^{2}+1}+C$;
6. $\frac{1}{3\ln(1-3x)}+C$;

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (ПОДСТАНОВКОЙ). ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ.

Пусть функция $t=\varphi(x)$ определена и дифференцируема на множестве $\{x\}$, представляющем собой либо интервал, либо открытую полупрямую, либо прямую, и пусть $\{t\}$ обозначает множество значений этой функции. Тогда, если для функции $g(t)$ существует на множестве $\{t\}$ первообразная $G(t)$, т.е. $\int g(t)dt=G(t)+C$, то на множестве $\{x\}$ для функции $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ существует первообразная функция, равная $G(\varphi(x))$, т.е.

$$\int g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=G(\varphi(x))+C.$$

Такой способ нахождения интеграла называется ***методом замены переменной*** или ***методом подстановки***.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\frac{x+1}{3-\sqrt{2x-1}}dx$

Решение.

$$\int\frac{x+1}{3-\sqrt{2x-1}}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}=t;\ 2x-1=t^{2};\\ 2x=t^{2}+1;\ x=\frac{1}{2}(t^{2}+1);\\ dx=\frac{1}{2}\cdot 2t\cdot dt=tdt\end{array}\right|=\int\frac{(\frac{1}{2}(t^{2}+1)+1)tdt}{3-t}=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}t^{3}+\frac{3}{2}t}{3-t}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t^{3}+3t}{t-3}dt=-\frac{1}{2}\int(t^{2}+3t+12+\frac{36}{t-3})dt=$$

$$=-\frac{1}{2}(\int t^{2}dt+3\int tdt+12\int dt+36\int\frac{dt}{t-3})=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+12t+36\int\frac{d(t-3)}{t-3}=-\frac{t^3}{6}-\frac{3t^2}{4}-6t-18\ln|t-3|+C=\right.$$

$$=-\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6}-\frac{3(2x-1)}{4}-6\sqrt{2x-1}-18\ln\left|\sqrt{2x-1}-3\right|+C.$$

Здесь и далее при записи решений примеров, в которых и методы замены переменной и интегрирования по частям, все промежуточные выкладки будут заключены между вертикальными линиями.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\frac{3x-1}{2x^2-4x+3}dx$.

Решение.

$$\int\frac{3x-1}{2x^2-4x+3}dx=\left|\begin{array}{l}2x^2-4x+3=2(x^2-2x+\frac{3}{2})=\\=2(x^2-2x+1-1+\frac{3}{2})=\\=2((x-1)^2+\frac{1}{2})\end{array}\right|=\int\frac{3x-1}{2((x-1)^2+\frac{1}{2})}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x-1=t\\x=t+1\\dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{3(t+1)^{-1}}{2(t^2+\frac{1}{2})}dt=\frac{1}{2}\int\frac{3t+2}{t^2+\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{3tdt}{t^2+\frac{1}{2}}+\int\frac{2dt}{t^2+\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{tdt}{t^2+\frac{1}{2}}+2\cdot\sqrt{2}arctg\sqrt{2}t=\frac{3}{4}\int\frac{d(t^2+\frac{1}{2})}{t^2+\frac{1}{2}}+2\sqrt{2}arctg\sqrt{2}t=$$

$$=\frac{3}{4}\ln\left|t^2+\frac{1}{2}\right|+2\sqrt{2}arctg\sqrt{2}t+C=\frac{3}{4}\ln\left|(x-1)^2+\frac{1}{2}\right|+2\sqrt{2}arctg\sqrt{2}(x-1)+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\sqrt{4-x^2}dx$

Решение.

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{array}{l}x=2\sin t\\dx=2\cos dt\\t=\arcsin\frac{x}{2}\end{array}\right|=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt=4\int\cos^2 tdt=$$

$$=4\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=2(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C=$$

$$=2(\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\arcsin\frac{x}{2})+C=2\arcsin\frac{x}{2}+\sin 2\arcsin\frac{x}{2}+C=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}+2\sin\arcsin\frac{x}{2}\cdot\cos\arcsin\frac{x}{2}+C=2\arcsin\frac{x}{2}+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}+C=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C.$$

Интегрирование по частям.

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du, \qquad (1)$$

где *u(x)* и *v(x)* – непрерывно дифференцируемые функции ***(формула интегрирования по частям).***

В некоторых случаях формулу (1) необходимо применять несколько раз.

К интегралам, которые находятся по формуле (1), относятся, например, интегралы вида

$$\int P(x)f(x)dx, \qquad (2)$$

где *P(x)* – многочлен, *f(x)* – одна из следующих функций: $e^{\alpha x}$, $a^{\alpha x}$ $(a>0)$, $\sin\lambda x$, $\cos\lambda x$, $sh\,\lambda x$, $ch\,\lambda x$. Чтобы свести интеграл (2) к табличному, надо последовательно применять формулу (1) столько раз, какова степень многочлена *P(x)*, *dv=f(x)dx*. Если *f(x)* – одна из функций $\ln\lambda x$, $\arcsin\lambda x$, $\arccos\lambda x$, $arctg\lambda x$, $arcctg\lambda x$, то за *u* принимают эти функции, а за *dv* - выражение *P(x)dx*.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int(2x+3)\cos 3x dx$.

Решение.

$$\int(2x+3)\cos 3x dx=\left|\begin{array}{l} u=2x+3;\ du=2dx \\ dv=\cos 3x dx \\ v=\int\cos^3 x dx=\frac{1}{3}\sin 3x \\ \int u dv - uv - \int v du \end{array}\right|=\frac{1}{3}(2x+3)\sin 3x-\frac{2}{3}\int\sin 3x dx=$$

$$= \frac{1}{3}(2x+3)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int x\ln(x+1)dx$.

Решение.

$$\int x\ln(x+1)dx = \begin{vmatrix} u = \ln(x+1); du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = xdx; v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{x+1} = \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2-1}{x+1}dx + \int \frac{dx}{x+1}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\int (x-1)dx + \int \frac{d(x+1)}{x+1}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + \ln(x+1) + C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int e^x \cdot \cos xdx$.

Решение.

$$\int e^x \cdot \cos xdx = \begin{vmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ \cos xdx = dv \\ v = \sin x \end{vmatrix} = e^x \cdot \sin x - \int e^x \sin xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ \sin xdx = dv \\ v = -\cos x \end{vmatrix} = e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos xdx) =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cdot \cos xdx;$$

Получим уравнение относительно искомого интеграла:

$$\int e^x \cos x dx + \int e^x \cdot \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x;$$

отсюда $$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C.$$

Задания.

1. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx;$
2. $\int x\sqrt{3-x} dx;$
3. $\int \frac{(3+x)}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx;$
4. $\int (x^2+3x)\sin x dx;$
5. $\int \arccos 2x dx;$
6. $\int xe^{-6x} dx;$
7. $\int \ln(2x+3) dx;$
8. $\int \frac{x \arccos 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$

Ответы.

1. $-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{3} + C;$
2. $-2\sqrt{(3-x)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(3-x)^5} + C;$
3. $\sqrt{(x+2)^2+1} + \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right| + C;$
4. $(2-x^2-3x)\cos x + (2x+3)\sin x + C;$
5. $x\arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C;$
6. $-\frac{1}{6}e^{-6x}(x+\frac{1}{6}) + C;$
7. $x\ln(2x+3) + \frac{3}{2}\ln|2x+3| - x + C;$
8. $-\frac{1}{4}\arccos(2x)\cdot\sqrt{1-4x^2} - \frac{1}{2}x + C.$

Домашние задания.

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx;$
2. $\int x^2\sqrt{3+2x} dx;$
3. $\int \frac{(1-3x)dx}{x^2-4x+5};$
4. $\int (1-3x^2)e^x dx;$
5. $\int x \,\mathrm{arctg}\, x dx.$

Ответы.

1. $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C;$

2. $\frac{1}{28}\sqrt{(3+2x)^7}-\frac{3}{10}\sqrt{(3+2x)^5}+\frac{3}{4}\sqrt{(3+2x)^3}+C;$

3. $-\frac{3}{2}\ln\left|(x-2)^2+1\right|-5arctg(x-2)+C;$

4. $e^x(6x-3x^2-5)+C;$

5. $\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C.$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

Рациональной функцией $R(x)$ называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m}{B_0x^n+B_1x^{n-1}+\ldots+B_n},$$

где m , n целые положительные числа, $A_i, B_j \in R$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$.

Если $m \geq n$, то $R(x)$ называется ***неправильной дробью***, если $m<n$, — ***правильной дробью:***

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде целой части M_{m-n} и правильной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=M_{m-n}(x)+\frac{Q_l(x)}{P_n(x)},\ \text{где } l<n.$$

Пример 1.

$$\frac{x^5+x^4-7}{x^3-4x}= \quad \begin{array}{r|l} x^5+x^4-7 & x^3-4x \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^5-4x^3} & x^2+x+4 \\ x^4+4x^3 & \\ -\ \underline{x^4-4x^2} & \\ 4x^3+4x^2 & \\ -\ \underline{4x^3-16x} & \\ 4x^2+16x-7 & \end{array} \quad =x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-7}{x^3-4x}$$

Чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь, необходимо её разложить на сумму простейших дробей.

Рассмотрим два случая:

1. $$\frac{Q_m(X)}{P_n(X)}=\frac{Q_m(X)}{(X-a)^{\alpha}...(X-l)^{\alpha}}=\frac{A_1}{X-a}+\frac{A_2}{(X-a)^2}+...+\frac{A_{\alpha}}{(X-a)^{\alpha}}+...+\frac{B_1}{X-l}+...+\frac{B_{\lambda}}{(X-l)^{\lambda}},$$

где $A_1,...,A_{\alpha},B_1,B_2,...,B_{\alpha}$ - действительные числа (т.е. многочлены нулевой степени), $a,...,$ l – действительные корни многочлена $P_n(x)$ кратностей $\alpha,...,\lambda$ соответственно.

Пример 2. Разложить рациональную дробь $\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^3}$ на сумму простейших дробей

Решение.

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}.$$

Приведем дроби в правой части к общему знаменателю и сравним получившийся в правой части числитель с числителем данной дроби:

$$3x^2+5x=A(x+1)^3+B_1(x+1)^2(x-1)+B_2(x+1)(x-1)+B_3(x-1)$$

пусть $x=1;\ 8=8A=>A=1;\ x=-1;\ -2=-2B_3=>B_3=1$

$$x=0;\ 0=A-B_1-B_2-B_3=>B_1+B_2=0;$$

$$x=-2;\ 2=-A-3B_1+3B_2-3B_3=>B_2-B_1=2.$$

$$\begin{cases}B_1+B_2=0; & B_1=-1\\ B_2+B_1=2; & B_2=1\end{cases}$$ (метод частных значений)

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^3}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3};$$

2. $$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Q_m(x)}{(x^2+px+q)^2}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}++...+\frac{A_{\alpha}x+B_{\alpha}}{(x^2+px+q)^{\alpha}},$$

где x^2+px+q имеет комплексные корни (т.е. $p^2-4pq<0$).

Пример 3. Представить дробь $\frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение.

Т.к. уравнение $x^2+x+1=0$ имеет дискриминант $D=1-4<0$, то данную дробь можно записать в виде:

$$\frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+x+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+x+1)^2},$$

откуда $x^2+2x+1=(A_1x+B_1)(x^2+x+1)+(A_2x+B_2)$.

Методом частных значений найдем A_1, A_2, B_1, B_2.

$$\text{Пусть } x=0;\ -1=B_1+B_2;$$
$$x=1,\ 2=3A_1+3B_1+A_2+B_2$$
$$x=-1,\ -2=-A_1+B_1-A_2+B_2$$
$$x=-2,\ -1=-6A_1+3B_1-2A_2+B_2$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}-6A_1+3B_1-2A_2+B_2=-1\\ 3A_1+3B_1+A_2+B_2=2\\ -A_1+B_1-A_2+B_2=-2\\ B_1+B_2=-1\end{cases}$$

Решение этой системы: $\begin{cases}A_1=0\\ B_1=1\\ A_2=1\\ B_2=-2\end{cases}$, т.е. $\dfrac{x^2+2x+1}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{1}{x^2+x+1}+\dfrac{x-2}{(x^2+x+1)^2}$.

Примеры интегрирования рациональных функций.

Пример 4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$.

Решение.

$$\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx=\left|\begin{array}{ll}5x^3+2 & \underline{|x^3-5x^2+4x}\\ - & \quad 5\\ \underline{5x^3-25x^2+20x} & \\ 25x^2-20x+2 & \end{array}\right|=\int\Big(5+\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}\Big)dx=$$

$$=5\int dx+\int\frac{25x^2-20x+2}{x(x^2-5x+4)}=5x+\int\frac{25x^2-20x+2}{x(x-4)(x-1)}dx=$$

$$=5x+\int\Big(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{D}{x-1}\Big)dx=5x+A\ln|x|+B\ln|x-4|+D\ln|x-1|+C.$$

Найдем коэффициенты $A;B;D$.

$$\frac{25x^2-20x+2}{x(x-4)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{D}{x-1}$$

$$25x^2-20x+2=A(x-4)(x-1)+Bx(x-1)+Dx(x-4)$$

при $x=0$ $4A=2$ $A=\frac{1}{2}$, $x=1$ $D=-\frac{7}{3}$;$x=4$; $B=\frac{161}{6}$

Итак, $\int\frac{5x^2+2}{x^3-5x^2+4x}dx=5x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{161}{6}\ln|x-4|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+C$.

Пример 5.

$$\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx=\int\frac{x^3+x+1}{x^3+x}dx=\int(1+\frac{1}{x^3+x})dx=$$

$$=\int dx+\int\frac{dx}{x^3+x}=x+\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=x+\int(\frac{A}{x}+\frac{A_1x+B}{x^2+1})dx=$$

$$=\left|\begin{array}{lll} A(x^2+1)+(A_1x+B)x=1 & & \\ x=0 & & \\ x=1 & \begin{cases} A=1 \\ 2A+A_1+B=1 \\ 2A+A_1-B=1 \end{cases} & \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ A_1=-1 \end{cases} \\ x=-1 & & \end{array}\right|=x+\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}=$$

$$=x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C.$$

Задания.

1. $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$;
2. $\int\frac{4x^3-1}{x^3-x}dx$;
3. $\int\frac{3x^2+2x}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx$;
4. $\int\frac{x^3+1}{x^2(x-1)}dx$;
5. $\int\frac{x^2}{x^4-1}dx$;
6. $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

Ответы.

1. $\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+\dfrac{1}{x+1}+C;$

2. $4x+\ln|x|+\dfrac{3}{2}\ln|x-1|-\dfrac{5}{2}\ln|x+1|+C;$

3. $\ln|x-1|+\ln\left|x^2+2x+2\right|+C;$

4. $x-\ln|x|+\dfrac{1}{x}+2\ln|x-1|+C;$

5. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+\dfrac{1}{2}arctgx+C;$

6. $\dfrac{1}{4}x+\ln|x|-\dfrac{7}{16}\ln|2x-1|-\dfrac{9}{16}\ln|2x+1|+C.$

Домашние задания.

1. $\displaystyle\int\frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx;$

2. $\displaystyle\int\frac{7x-10}{x^3+8}dx;$

3. $\displaystyle\int\frac{2x+3}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)}dx;$

4. $\displaystyle\int\frac{3x^2-17x+2}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx;$

Ответы.

1. $2x+\ln|x|+\dfrac{1}{x}+2\ln|x+1|+C;$

2. $\ln\left|x^2-2x+4\right|-2\ln|x+2|+\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}+C;$

3. $-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2}arctg\dfrac{x}{2}+C;$

4. $20\ln|x+3|-\ln|x-1|-16\ln|x+2|+C.$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

1) ***Интегралы вида*** $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}}, ...)dx$ находятся с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = Z^n$, где n - наименьшее общее кратное чисел $q_1, q_2, ...$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \left| \begin{array}{l} 2x-1 = Z^n \\ x = \frac{1}{2}(Z^n + 1) \\ dx = 2Z^3 dZ \end{array} \right| = \int \frac{2Z^3 dZ}{Z^2 - Z} = 2\int \frac{Z^2 dZ}{Z-1} =$$

$$= 2\int \frac{(Z^2-1)+1}{Z-1} dZ = 2\int (Z + 1 + \frac{1}{Z-1}) dZ =$$

$$= 2(\frac{Z^2}{2} + Z + \ln|Z-1|) + C =$$

$$= \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1} - 1\right| + C.$$

2) ***Интегралы вида*** $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, вычисляются по формуле:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где Q_{n-1} - многочлен степени *n-1* с неопределенными коэффициентами.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Решение.

Интеграл ищем в виде

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = (Ax+B) \cdot \sqrt{x^2-x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}},$$

где A, B, λ – неопределенные числовые коэффициенты.

Дифференцируя это тождество, получим:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} = A \cdot \sqrt{x^2-x+1} + (Ax+B) \cdot \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \lambda \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

или, приведя к общему знаменателю и сравнив числители получившихся дробей в правой и левой частях, получим уравнение:

$$2x^2 = (Ax+B)(2x-1) + 2\lambda.$$

Вычислим числовые коэффициенты A, B, λ из следующей системы:

$$\begin{matrix}\text{при } x=0\\ x=1\\ x=-1\end{matrix}\quad \begin{cases}2A-B+2\lambda=0\\ 3A-B+2\lambda=2\\ 9A-B+2\lambda=2\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}A=\dfrac{1}{2}\\ B=\dfrac{3}{4}\\ \lambda=-\dfrac{1}{8}\end{cases}$$

Тогда $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4})\cdot\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}=$

$$=\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\ln\left|(x-\frac{1}{2})+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right|+C.$$

3) ***Интеграл вида*** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к виду 2) с помощью подстановки $\dfrac{1}{x-\alpha}=t$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}=\left|\begin{matrix}\dfrac{1}{x+1}=t\\ x+1=\dfrac{1}{t}\\ x=\dfrac{1}{t}-1\\ dx=-\dfrac{dt}{t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{2-\dfrac{1}{t}+1-(\dfrac{1}{t}-1)^2}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t\sqrt{3-\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{2}{t}-1}}=-\int\frac{dt}{\dfrac{t\cdot\sqrt{2t^2+t-1}}{t}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{t^2+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{(t+\dfrac{1}{4})^2-\dfrac{9}{16}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\frac{1}{4}+\sqrt{(t+\frac{1}{4})^2-\frac{9}{16}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}}\right|+C.$$

4) Применение тригонометрических подстановок:

1) Если интеграл содержит $\sqrt{a^2-x^2}$, то $x=a\sin t$.
2) Если интеграл содержит $\sqrt{x^2-a^2}$, то $x=\frac{a}{\cos t}$.
3) Если интеграл содержит $\sqrt{x^2+a^2}$, то $x=a tgt$, $a=const$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}dx$.

Решение.

$$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}dx=\left|\begin{array}{l}x=tgt\\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\\ t=arctgt\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\cdot\frac{dx}{\cos^2 t}}{\frac{\sin^4 t}{\cos^4 t}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos^3 t}\cdot\frac{\cos^4 t}{\sin^4 t}=\int\frac{\cos t dt}{\sin^4 t}=\int\frac{d(\sin t)}{\sin^4 t}=-\frac{1}{3\sin^3 t}+C=$$

$$=-\frac{1}{3\sin^3 arctgx}+C.$$

Задания:

1. $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$;
2. $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;
3. $\int\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x}dx$;
4. $\int\frac{(x^3-3)dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$;
5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;
6. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

Ответы:

1. $\sqrt[6]{x^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+6arctg\sqrt[6]{x}+C$;
2. $-2arctg\sqrt{1-x}+C$;

3. $-2\,\mathrm{arcctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\right|+C;$

4. $\dfrac{1}{2}(x+3)\sqrt{x^2-2x+10}-\dfrac{13}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+10}\right|+C;$

5. $C-\ln\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|;$

6. $\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}+C.$

Домашние задания:

1. $\displaystyle\int\frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}dx;$

2. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}};$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}};$

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}.$

Ответы:

1. $2\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x-2}{2}}+C;$

2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+\dfrac{3}{8}\sqrt[6]{x}+\dfrac{3}{32}\ln\left|\dfrac{2\sqrt[6]{x}-1}{2\sqrt[6]{x}+1}\right|+C;$

3. $-\ln\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{1-3x-2x^2}}{x}\right|+C;$

4. $\dfrac{1}{9}\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}+C.$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

1) Подынтегральное выражение содержит *sinx* или *cosx* в нечетной степени. Тогда

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx = |m = 2k+1| = \int \sin^{2m} x \cdot \cos^n x \cdot \sin x \, dx =$$

$$= \int (\sin^2 x)^m x \cdot \cos^n x \, d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^m \cdot \cos^n x \, d(\cos x).$$

Аналогично поступают, если $n = 2k+1$ $(k \in Z)$.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

Решение:

$$\int \frac{\cos^5 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{\cos^4 x \cdot d(\sin x)}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2 \, d(\sin x)}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = |\sin x = t| =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^{\frac{2}{3}}} dt = \int t^{-\frac{2}{3}} dt - 2\int t^{\frac{4}{3}} dt + \int t^{\frac{10}{3}} dt =$$

$$= 3\sqrt[3]{t} - \frac{6}{7}\sqrt[3]{t^7} + \frac{3}{13}\sqrt[3]{t^{13}} + C = 3\sqrt[3]{\sin x} - \frac{6}{7}\sqrt[3]{\sin^7 x} + \frac{3}{13}\sqrt[3]{\sin^{13} x} + C.$$

2) Подынтегральное выражение содержит *sinx* или *cosx* в четных степенях. Тогда используют формулы понижения степени.

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx = \left| \begin{array}{l} m = 2k;\ n = 2p;\ k,p \in N \\ \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}; \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{array} \right| = = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^p dx;$$

Пример 2. Вычислить $\int \cos^2 3x \cdot \sin^4 3x \, dx$.

Решение.

$$\int \cos^2 3x \cdot \sin^4 3x \, dx = \int \frac{1+\cos 6x}{2} \cdot \left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 6x)(1-\cos 6x)(1-\cos 6x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 6x)(1-\cos 6x) dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 6x - \cos^2 6x + \cos^3 6x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}(x - \frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{2}\int (1+\cos 12x) dx + \frac{1}{6}\int \cos^2 6x \, d(\sin 6x)) =$$

$$=\frac{1}{8}(x-\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{24}\sin 12x+\frac{1}{6}\int(1-\sin^2 6x)d(\sin 6x))=$$

$$=\frac{1}{8}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{1}{24}\sin 12x+\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{1}{18}\sin^3 6x)+C=$$

$$=\frac{1}{8}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{24}\sin 12x-\frac{1}{8}\sin^3 6x)+C.$$

3) Подынтегральное выражение содержит $\sin x$ и $\cos x$ в отрицательных степенях (т.е. в знаменателе), либо tgx. Тогда применяют тригонометрические тождества:

а) $$\int\frac{dx}{\sin^n x\cos^m x}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{\sin^2 x}=1+ctg^2 t=1+\frac{1}{tg^2 t}\\ \frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 t\end{array}\right|==\int(1+\frac{1}{tg^2 x})^{\frac{n}{2}}\cdot(1+tg^2 x)^{\frac{m-2}{2}}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\int(1+\frac{1}{tg^2 x})^{\frac{n}{2}}\cdot(1+tg^2 x)^{\frac{m-2}{2}}d(tgx);$$

Пример 3. Вычислить $\int\frac{dx}{\sin^3 2x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sin^3 2x}=\int\frac{dx}{(2\sin x\cdot\cos x)^3}=\frac{1}{8}\int\frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^3 x}=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{\cos^3 x dx}{\sin^3 x\cdot\cos^6 x}=\frac{1}{8}\int tg^{-3}x\cdot\frac{1}{\cos^4 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{1}{8}\int tg^{-3}x(1+tg^2 x)^2 d(tgx)=|tgx=t|=$$

$$=\frac{1}{8}\int t^{-3}(1+2t^2+t^4)dt=\frac{1}{8}\int(t^{-3}+\frac{2}{t}+t)dt=\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2t^2}+2\ln|t|+\frac{t^2}{2}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{16tg^2 x}+\frac{1}{4}\ln|tgx|+\frac{1}{16}tg^2 x+C.$$

б) $$\int tg^m x\,dx=\left|\begin{array}{l}m=2k;\ k\in N\\ tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1\end{array}\right|=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)\cdot tg^{m-2}x\,dx=$$

$$=\int tg^{m-2}x\,d(tgx)-\int tg^{m-2}x\,dx;$$

Пример 4. Вычислить $\int tg^4 x\,dx$.

Решение.

$$\int tg^4 x\,dx=\int tg^2 x(\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx=\int tg^2 x\,d(tgx)-\int tg^2 x\,dx=$$

$$=\frac{tg^3x}{3}-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{tg^3x}{3}-tgx+x+C.$$

4) Интегралы вида $\int \sin mx\cdot\cos nx\,dx$, $\int \sin mx\cdot\sin nx\,dx$, $\int \cos mx\cdot\cos nx\,dx$ вычисляют с использованием тригонометрических формул:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)).$$

Например, $\int \sin mx\cdot\cos nx\,dx=\left|\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))\right|=$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin(mx-nx)+\sin(mx+nx))dx;$$

Пример 5.

$$\int \sin 3x\cdot\sin 5x\,dx=\left|\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C.$$

5) Интегралы вида $\int R(\sin x;\cos x)dx$, **где** $R(\sin x;\cos x)$ **- рациональная функция от** $\sin x$ и $\cos x$, вычисляют с помощью т.н. ***универсальной тригонометрической подстановки*** $tg\frac{x}{2}=t$, либо заменой $tgx=t$.

$$\int R(\sin x;\cos x)dx=\left|\begin{matrix}\sin x=\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\\[2ex] \cos x=\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\end{matrix}\right|=$$

$$= \int R\left(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right)dx = \left|\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t \\ \frac{x}{2}=arctgt \\ x=2arctgt \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right| = \int R(t)dt;$$

Пример 6. Вычислить $\int \frac{dx}{1+\sin 3x+\cos 3x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{1+\sin 3x+\cos 3x} = \int \frac{dx}{1+\frac{2tg\frac{3x}{2}}{1+tg^2\frac{3x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{3x}{2}}{1+tg^2\frac{3x}{2}}} =$

$$= \left|\begin{array}{l} tg\frac{3x}{2}=t \\ \frac{3x}{2}=arctgt \\ x=\frac{2}{3}arctgt \\ dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{dt}{1+t^2} \end{array}\right| = \int \frac{\frac{2dt}{3(1+t^2)}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2}{3}\int\left(\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1+t^2+2t+1-t^2}\right)dt = \frac{2}{3}\int\frac{dt}{2(t+1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1} = 3\ln|t+1| + C = \frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{3x}{2}+1\right| + C.$$

Пример 7. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x-4\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x-4\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(tg^2 x+3tgx-4)} =$$

$$= \int \frac{d(tgx)}{tg^2 x+3tgx-4} = |tgx=t| = \int \frac{dt}{t^2+3t-4} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4}} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-1}{t+4}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{tgx-1}{tgx+4}\right| + C.$$

Задания.

Вычислить интегралы:

1. $\int \sin^3 \frac{x}{3} \cos^5 \frac{x}{3} dx;$
2. $\int \sin^4 x\, dx;$
3. $\int \frac{dx}{\sin^4 x};$
4. $\int ctg^3 x dx;$
5. $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx;$
6. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx;$
7. $\int (\frac{1+tgx}{1-tgx}) dx;$
8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx.$

Ответы.

1. $\frac{3}{8}\cos^8 \frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos^6 \frac{x}{3} + C;$
2. $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C;$
3. $-ctgx - \frac{ctg^3 x}{3} + C;$
4. $-\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + C;$
5. $3\sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5}\sin \frac{5x}{6} + C;$
6. $x - tg\frac{x}{2} + C;$
7. $-\ln|\cos x - \sin x| + C;$
8. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right| + C.$

Домашние задания.

1. $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \cdot \sin^3 2x\, dx;$
2. $\int \sin^4 3x \cdot \cos^2 3x\, dx;$
3. $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x};$
4. $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x - \cos^2 x} dx;$
5. $\int \sin 5x \cdot \sin 7x\, dx;$
6. $\int \frac{dx}{ctg^3 x}.$

Ответы.

1. $\frac{5}{36}\sqrt[5]{\cos^{18} 2x} - \frac{5}{16}\sqrt[5]{\cos^8 2x} + C;$
2. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^3 6x + C;$
3. $\frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{tg\frac{x}{2} + 3 - \sqrt{10}}{tg\frac{x}{2} + 3 + \sqrt{10}} \right| + C;$
4. $\frac{1}{3}tgx + \frac{\sqrt{3}}{9} arctg(\sqrt{3}tgx) + C;$
5. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C;$
6. $\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C.$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА.

Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$, непрерывной на отрезке [a, b] $(F'(x)=f(x))$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),\ \text{где } F'(x)=f(x),$$

которое называется ***формулой Ньютона-Лейбница.***

Основные свойства определенного интеграла.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на соответствующих отрезках. Тогда:

1) $\int_a^b (f(x)\pm\varphi(x)dx) = \int_a^b f(x) + \int_a^b \varphi(x)dx;$

2) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad (c=const);$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

5) если $f(x)\ge 0$ на $[a;b]$ и $a<b$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0;$

6) если $\varphi(x)\le f(x)$, $x\in[a;b]$ и $a<b$, то $\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx;$

7) если $m=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $M=\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и $a<b$, то $m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a);$

8) если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка

$x=c,\ a\le c\le b$, такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a);$

9) если $f(x)$ непрерывна и $\Phi(x)=\int_a^b f(x)dx$, то $\Phi'(x)=f(x)$.

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{Z^3dZ}{Z^8+1}$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{Z^3dZ}{Z^8+1}=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{d(Z^4)}{(Z^4)^2+1}=\frac{1}{4}arctgZ^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}-0)=\frac{\pi}{16}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

Решение.

$$\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int\limits_1^e \sin(\ln x)d(\ln x)=-\cos(\ln x)\Big|_1^e==-(\cos 1-\cos 0)=1-\cos 1;$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}dx$.

Решение.

$$\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{x-2}=t & t_в=\sqrt{6-2}=2\\ x-2=t^2 & t_н=\sqrt{2-2}=0\\ dx=2t\,dt & \end{matrix}\right|=\int\limits_0^2 t\cdot 2t\cdot dt==2\int\limits_0^2 t^2\cdot dt=\frac{2t^3}{3}\Big|_0^2=\frac{2}{3}(2^3-0)=\frac{16}{3};$$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_{2\sqrt{2}}^4 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$.

Решение.

$$\int\limits_{2\sqrt{2}}^4 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}=\left|\begin{matrix}x=\frac{2}{\cos t} & t_в=\frac{\pi}{6}\\ dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt & \\ t=\arccos\frac{2}{x} & t_н=\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right|=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{8}{\cos^3 t}\cdot 2\cdot tgt}=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{16}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{1}{16}(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})=\frac{1}{16}(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{12}).$$

Пример 6. Вычислить $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\ln\frac{1-x}{1+x}dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\ln\frac{1-x}{1+x}dx = \left| \begin{matrix} U=\ln\frac{1-x}{1+x};\ dU=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}dx=\frac{2dx}{x^2-1} \\ xdx=dV \qquad V=\frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2dx}{x^2-1}=\frac{1}{8}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\ln 3-\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{x^2-1})dx=$$

$$-\frac{1}{8}\ln 3-\frac{1}{8}\ln 3-(x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}==-\frac{1}{4}\ln 3-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln\frac{1}{3}-\ln 3))=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln 3-1-\ln 3=-(1+\frac{5}{4}\ln 3).$$

Задания.

Вычислить интегралы.

1. $\int\limits_0^1 \frac{(2x-1)dx}{x^2+4x+5}$;
2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x-\sin^3 x}\ dx$;
3. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$;
4. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin 2x}$;
5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\cdot\cos x\,dx$;
6. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

Ответы.

1. $\ln 2-3arctg3+3arctg2$;
2. $\frac{2}{3}$;
3. $8,15$;
4. $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$;
5. $\frac{1}{16}\sqrt{3}-\frac{\pi}{48}$;
6. $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{2}+\frac{3}{10}\ln 3$.

Домашние задания.
Вычислить интегралы.

1. $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$;

2. $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

3. $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{2}{3}} \frac{x}{e^{3x}}dx$;

4. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{(x-1)^3}$;

5. $\int\limits_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$;

6. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Ответы.

1. $0,63$;
2. $1,07$;
3. $0,82$;
4. $-1,25$;
5. $0,04$;
6. $-0,2$.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

1) ***Интегралы с бесконечными пределами.***

Если функция $f(x)$ непрерывна на $a \le x < \infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = I(B)$ - некоторая непрерывная функция от B. Тогда предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется ***несобственным интегралом с бесконечным пределом (I рода) функции*** $y=f(x)$ на интервале $[a;+\infty)$ и обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

В зависимости от существования или несуществования конечного предела в правой части равенства, несобственный интеграл называется ***сходящимся*** или ***расходящимся***.

Аналогично $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{arctgx}{x^2+1}dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{arctgx}{x^2+1}dx=\int\limits_0^{\infty}arctgx\ d(arctgx)=\frac{1}{2}arctg^2x\Big|_0^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}(arctg^2x\Big|_0^a)=\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}(arctg^2a-0)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{\pi}{2})^2=\frac{\pi^2}{8};\ \text{интеграл сходится.}$$

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin 2x\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{-\infty}^{\infty}=-\frac{1}{2}(\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\cos 2x\Big|_a^b)=$$

$$=-\frac{1}{2}(\lim_{b\to\infty}\cos 2b-\lim_{a\to\infty}\cos 2a).$$

Полученный предел не существует, значит, интеграл расходится.

Пример 3. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}=\begin{vmatrix}1+x=t & t_в=\infty\\ x=t-1 & t_н=1\\ dx=dt & \end{vmatrix}=\int\limits_1^{\infty}\frac{(t-1)dt}{t^3}==\int\limits_1^{\infty}\frac{dt}{t^2}-\int\limits_1^{\infty}\frac{dt}{t^3}=$$

$$-\frac{1}{t}\Big|_1^{\infty}+\frac{1}{2t^2}\Big|_1^{\infty}=\lim_{a\to\infty}((\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{t})\Big|_1^a)==\lim_{a\to\infty}(\frac{1-2t}{2t^2}\Big|_1^a)=\lim_{a\to\infty}(\frac{1-2a}{2a^2}+0{,}5)=$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1-2a}{2a^2}+0{,}5=\lim_{a\to\infty}\frac{a^2(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a})}{2a^2}+0{,}5=0{,}5.$$

Интеграл сходится.

Признак сравнения.

Если при $x \geq a$, $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$, и из расходимости интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$.

Пример 4. Установить, что $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^3 + \sqrt[3]{x^4+1}}$ сходится.

Решение.

$$\frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x^4+1}} < \frac{1}{x^2} \text{ при } x \in R, \text{ значит, и при } x \geq -1.$$

Рассмотрим интеграл $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{a} = -\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{a}+1\right) = -1.$

Этот интеграл сходится. Значит, и данный интеграл сходится.

2. *Интеграл от разрывной функции.*

Если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a\,;b]$, за исключением точки $x = C$ $(a < C < b)$, где она терпит бесконечный разрыв, то этот интеграл называется ***несобственным (II рода)*** и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_a^{C-\varepsilon_1} f(x) + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{C+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx, \quad \text{где } \varepsilon_1 > 0; \varepsilon_2 > 0.$$

Пример 5. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^e \ln x\,dx$.

Решение.

$$\int_0^e \ln x\,dx = \begin{vmatrix} U = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dx = dV & V = x \end{vmatrix} = x\ln x\Big|_0^e - \int_0^e dx =$$

$$= (x\ln x - x)\Big|_0^e = \lim_{\varepsilon\to 0}(x\ln x - x)\Big|_{0+\varepsilon}^{e} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(0 - (\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon)) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon(\ln\varepsilon - 1)}{1} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\ln\varepsilon - 1)}{\varepsilon^{-1}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\varepsilon^{-2}} = = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}:\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon) = 0,$$

интеграл сходится.

Пример 6. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{100}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$.

Решение.

Т.к. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3} \le \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, то рассмотрим $\int\limits_0^{100}\frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}\Big|_0^{100} =$

$= -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}\right)\Big|_{\varepsilon}^{100} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{40}{3}\sqrt{10} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\right) = -\frac{40\sqrt{10}}{3}$, значит, интеграл сходится, поэтому по признаку сравнения сходится и интеграл от меньшей функции.

Пример 7. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)}}$.

Решение.

$$\int\limits_1^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)}} = \int\limits_1^3\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)}} + \int\limits_3^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)}} = -\int\limits_1^3\frac{d(3-x)}{\sqrt[3]{(3-x)}} - \int\limits_3^4\frac{d(3-x)}{\sqrt[3]{(3-x)}} =$$

$$= -\int\limits_1^3(3-x)^{-\frac{1}{3}}d(3-x) - \int\limits_3^4(3-x)^{-\frac{1}{3}}d(3-x) = -\frac{3}{2\sqrt[3]{(3-x)^2}}\Bigg|_1^3 - \frac{3}{2\sqrt[3]{(3-x)^2}}\Bigg|_3^4 =$$

$$= -\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{3}{2\sqrt[3]{(3-x)}}\Bigg|_2^{3-\varepsilon_1} - \lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{3}{2\sqrt[3]{(3-x)}}\Bigg|_{3+\varepsilon_2}^{4} = -\frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{\varepsilon_1}} - 3\right) + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(-3 + \frac{2}{2\sqrt[3]{\varepsilon_2}}\right)\right) = \infty.$$

Интеграл расходится.

Задания.

1. $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$;
3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}ctgx\,dx$;
4. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$;
5. $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}+2x}$;
6. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$.

Ответы.

1. расходится;

2. $\frac{\pi}{2}$;

3. расходится;

4. -2;

5. $\ln 3$;

6. $-\frac{1}{2}$.

Домашние задания.

1. $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{16x^4+1}$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5}$;

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$;

4. $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$;

5. $\int\limits_0^2\frac{dx}{(1+x)^2-\sqrt{x+1}}$.

Ответы.

1. $\frac{\pi}{16}$;

2. $\frac{7}{4}$;

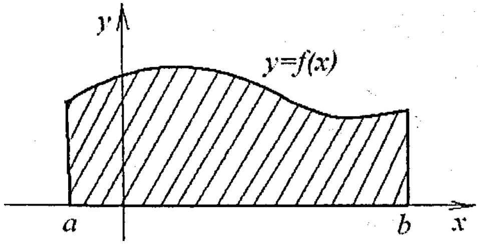
3. интеграл расходится;

4. $-\frac{5}{3}$;

5. интеграл расходится.

ВЫЧИСЛЕНЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР.

С геометрической точки зрения определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ (при $f(x)\geq 0$) определяет площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox (см. рис.).



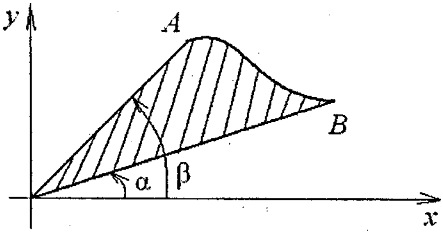
Так как площадь любой плоской фигуры можно рассматривать как сумму или разность площадей криволинейных трапеций, ее составляющих, то с помощью определенных интегралов можно вычислять площади различных плоских фигур.

Если $f(x)\leq 0$, то

$$S=-\int_a^b f(x)dx.$$

Если непрерывная кривая, ограничивающая ***криволинейную*** трапецию, задана ***параметрическими уравнениями*** $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где $t\in[\alpha;\beta]$, то

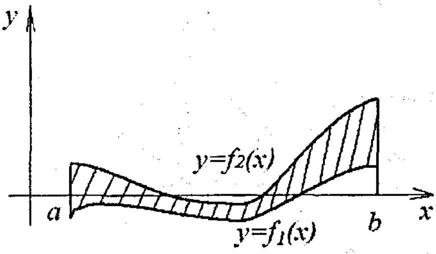
$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$, где α и β определяются уравнениями $\varphi(\alpha)=a$; $\psi(\beta)=b$ ($\psi(t)\geq 0$), на отрезке $[\alpha;\beta]$.



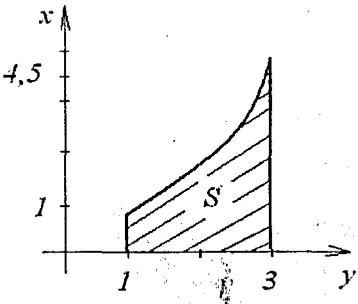
Если непрерывная кривая задана в ***полярных координатах*** уравнением $r=r(\varphi)$, то площадь криволинейного сектора AOB, ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами OA и OB, соответствующим значениям φ_1 и φ_2 (см. рис.), выразятся интегралом

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(f(\varphi))^2 d\varphi.$$

В более общем случае, если плоская фигура ограничена двумя непрерывными кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ (где $f_1(x)\leq f_2(x)$) и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, то ее площадь вычисляется по формуле $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$. (см. рис.).



Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, и прямыми $x = 1$, $x = 3$ и $y = 0$. (см. рис.).



Решение.

$$S = \int_1^3 \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^3}{6}\Big|_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{2}.$$

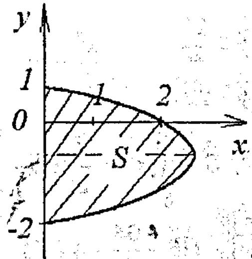
Ответ: $\frac{13}{2}$.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = 2 - y - y^2$ и осью координат.

Решение.

Найдем точки пересечения кривой с осью ординат: $0 = 2 - y - y^2$; $y^2 + y - 2 = 0$; $y_1 = 1$; $y_2 = -2$.

$y_в = -\frac{1}{2}$; $y_в = 2\frac{1}{4}$. (см. рис.).

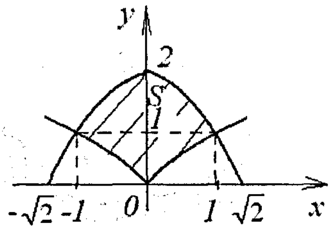


Здесь изменены роли осей координат и поэтому искомая площадь выразится интегралом

$$S = \int_{-2}^{1}(2 - y - y^2)\,dy = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = 4\frac{1}{2}.$$

Ответ: $4\frac{1}{2}$

Пример 3. Вычислить площадь, заключенную между кривыми $y = 2 - x^2$ и $y^3 = x^2$.



Решение.

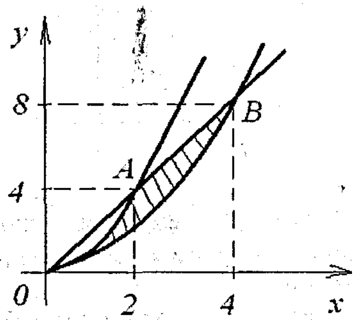
Решая совместно систему уравнений $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y^3 = x^2 \end{cases}$, находим $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Строим фигуру.

$$S = \int_{-1}^{1}(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}})dx = (2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}})\Big|_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}$$

или в силу симметрии $S = 2 \cdot \int_{0}^{1}(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}})dx = 2\frac{2}{15}$.

Ответ: $2\frac{2}{15}$.

Пример 4. Вычислить площадь, заключенную между параболами $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ и прямой $y = 2x$.



Решение.

Строим фигуру. Найдем абсциссы точек A и B.

$A: \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \qquad x^2 = 2x \qquad x_1 = 0; \; x_2 = 2$

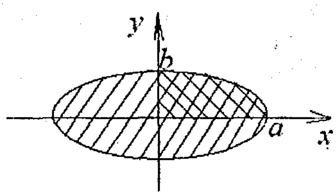
$B: \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases} \qquad \frac{x^2}{2} = 2x \qquad x_1 = 0; \; x_2 =$

$$\text{Тогда, } S = \int_{0}^{2}(x^2 - \frac{x^2}{2})dx + \int_{2}^{4}(2x - \frac{x^2}{2})dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^2dx + (x^2 - \frac{x^3}{6})\Big|_{2}^{4} =$$

$$= \frac{x^3}{6}\Big|_{0}^{2} + (16 - \frac{64}{6} - 4 + \frac{8}{6}) = \frac{4}{3} + 12 - \frac{28}{3} = 4$$

Ответ: 4.

Пример 5. Найти площадь эллипса, заданного параметрически:



$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}.$$

Решение.

В силу симметрии достаточно вычислить площадь одной четверти эллипса. Полагая в уравнении $x = a\cos t$ сначала $x = 0$, затем x=a, получим пределы интегрирования $t_1 = \frac{\pi}{2}$; $t_2 = 0$. Поэтому

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt =$$

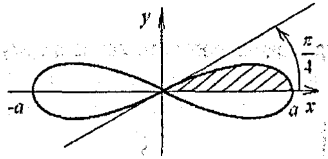
$$= ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt = \frac{ab}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}; \quad S = \pi ab.$$

Ответ: πab ед. кв.

Пример 6. найти площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Решение.

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4};$$



$S = a^2$.

Ответ: a^2.

Задания.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^3 = x$, прямыми $y = 1$ и $x = 8$. (4,5 ед. кв.)
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{2}$.

   ($\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ ед. кв.)
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $y = a(1-\cos t)$, $x = a(t - \sin t)$ и осью Ox. ($3\pi a^2$ ед. кв.)
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей линии

   $x = 3t^2$

   $y = t - t^3$. ($\frac{8}{5}$ ед. кв.)

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=2(1-\cos\varphi)$. (16 ед. кв.)
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=a\cos 2\varphi$.

(πa^2 ед. кв.)

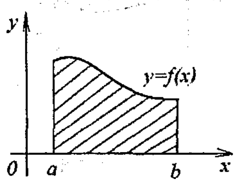
Домашние задания.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

1. $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$; (0,42)
2. $x=7\cos^3 t$, $y=7\sin^3 t$; (57,7)
3. $\rho=3\cos 2\varphi$; (14,13)
4. $y^2=4y$, $y=\dfrac{8}{x^2+4}$; (4,95)
5. $y^2=(4-x)^3$, $x=0$. (25,16)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЁМОВ И ДЛИН ДУГ.

Объёмы тел, образованных вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, вокруг осей Ox и Oy, выражаются соответственно формулами $V_x=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx$ и $V_y=2\pi\int\limits_a^b xy\,dx$



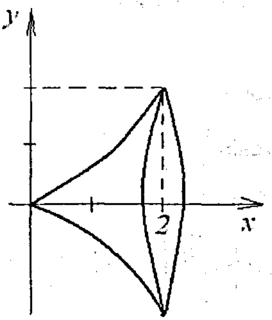
Пример 1. Вычислить объемы тел, образуемых вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{x^2}{2}$; $y=0$; $x=2$.

а) вокруг оси Ox;

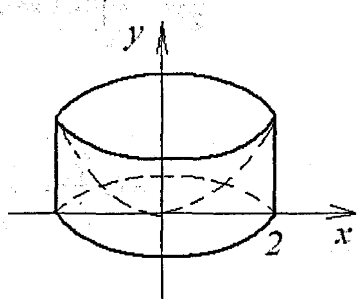
б) вокруг оси Oy.

См. рисунки.

а)



б)

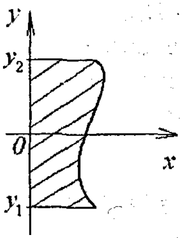


Решение.

а) $V_x = \pi \int\limits_0^2 \frac{x^4}{4} dx = \frac{\pi x^5}{20}\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{20} = \frac{8\pi}{5}$ куб. ед.

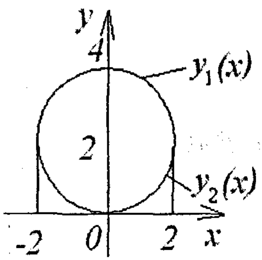
б) $V_y = 2\pi \int\limits_0^2 x \cdot \frac{x^2}{2} dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^2 x^3 dx = \frac{\pi x^4}{4}\Big|_0^2 = 4\pi$ куб. ед.

Ответ: 1) $V_x = \frac{8\pi}{5}$; 2) $V_y = 4\pi$.



Замечание. При вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции, изображенной на рисунке, образуется тело вращения, объем которого равен $V_y = \pi \int\limits_{y_1}^{y_2} x^2 dy$.

Если фигура, ограниченная графиками двух функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in [a;b])$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения равен $V_{ox} = \pi \int\limits_a^b (f_2^{\,2}(x) - f_1^{\,2}(x)) dx$.



Пример 2. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2 + (y-2)^2 \le 4$ вокруг оси Ox.

Решение.

Имеем $y_1 = 2 + \sqrt{4 - x^2}$; $y_2 = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.

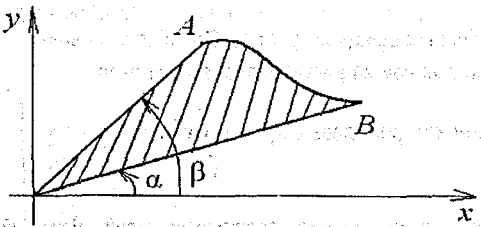
$$\frac{1}{2}V_x=\pi\int_0^2((2+\sqrt{4-x^2})^2-(2-\sqrt{4-x^2})^2)\,dx=$$

$$=8\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=2\sin t \\ t=\arcsin\frac{x}{2} \\ dx=2\cos t\,dt \\ t_в=\frac{\pi}{2};\ t_н=0 \end{array}\right|=$$

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=16(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=8\pi^2;\quad V=16\pi^2.$$

Ответ: $V_x=16\pi^2$ ед. куб.



Объем тела, полученного при вращении сектора, ограниченного дугой $r=f(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$, вокруг полярной оси, может быть вычислен по формуле

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3\sin\varphi d\varphi.$$

Пример 3. Определить объем тела, образованного вращением кривой $r=\sin 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение.

$$\frac{1}{2}V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}8\sin^4\varphi\cos^3\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\cos^2\varphi\, d(\sin\varphi)=\left|\begin{array}{l} \sin\varphi=t \\ t_в=1 \\ t_н=0 \end{array}\right|=\frac{16}{3}\pi\int_0^1 t^4\cdot(1-t^2)dt=$$

$$=\frac{16}{3}\pi\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\right)\Big|_0^1=\frac{16}{3}\pi\cdot\frac{2}{35}=\frac{32\pi}{105}.$$

$$V_p=\frac{64\pi}{105}.$$

Ответ: $\frac{64}{105}\pi$ ед.куб.

Вычисление длин дуг.

Длина l дуги в прямоугольных координатах:

$$\ell=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Длина l дуги кривой, заданной ***параметрически*** уравнениями $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t_1\le t\le t_2$, вычисляется по формуле

$$\ell=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\;dt.$$

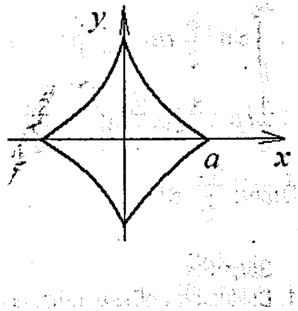
Длина l дуги кривой, заданной в полярных координатах $r=r(\varphi)$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$,

$$\ell=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+(r')^2}\;d\varphi.$$

Пример 1. Найти длину астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Решение.

Находим y', дифференцируя уравнение астроиды: $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0$



$$y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

$$\frac{1}{4}S=\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx=\int_0^a\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx=\int_0^a\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx=$$

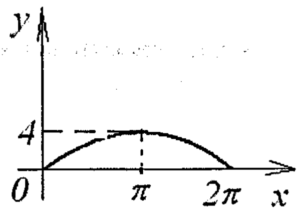
$$= a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^a = \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{2} \cdot a^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} a.$$

Ответ: $\frac{3}{2}a$.

Пример 2. Найти длину дуги одной арки циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

Решение.

Имеем $\begin{cases} x' = 2(1 - \cos t) \\ y' = 2\sin t \end{cases}$



$$d\ell = \sqrt{4(1 - \cos t)^2 + 4\sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{4 - 8\cos t + 4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = \sqrt{8 - 8\cos t} =$$

$$= 4\sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = 4\sin\frac{t}{2},$$

$$\ell = 4\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = -8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -8(-1-1) = 16.$$

Ответ: 16 ед.

Пример 3. Найти длину всей кривой $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$. Вся кривая описывается точкой $(r;\varphi)$ при изменении φ от 0 до 3π.

Решение.

Т.к. $r' = \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos\frac{\varphi}{3}$, то $\ell = \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{3}}\, d\varphi =$

$$= \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3}\, d\varphi = \frac{1}{2}\int (1 - \cos\frac{2\varphi}{3})\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3})\Big|_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$ ед.

Задания.

1. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченного линиями $y^2 = 4 - x$, $x = 0$. (107,17)

2. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, вокруг оси Ox. (0,96)

3. Найти объем тела, образованного вращением кривой $r = a\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси. $(\frac{64}{105}\pi a^3)$

4. Найти длину дуги кривой $y = \arcsin(e^{-x})$ от $x = 0$ до $x = 1$. $(\ln\left|e + \sqrt{e^2 - 1}\right|)$

5. Найти длину дуги данной линии, заданной параметрически $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$. $(\frac{3}{2}\pi^2)$

6. Найти длину дуги данной линии $r = 4(1 + \cos\varphi)$. (64)

Домашние задания.

1. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси координат.

а) F: $y = 2 - \frac{x^2}{2}$; $x + y = 2$ Oy; (4,17)

б) F: $x = \cos^3 t$ $y = \sin^3 t$ Ox; (0,96)

в) F: $r = (1 + \cos\varphi)$, полярная ось. (33)

2. Вычислить длину дуги данной линии:

1) $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$; (24,81)

2) $x = \sqrt{3}\,t^2$, $y = t - t^3$; (4)

3) $\rho = 5(1 + \cos\varphi)$. (40)

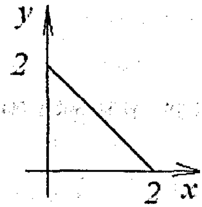
ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ И МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ.

***Координаты** $(\bar{x};\bar{y})$ **центра тяжести криволинейной трапеции**,* ограниченной линиями $0 \le x \le b$ и $0 \le y \le f(x)$ вычисляются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{S};\ \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{S},\text{ где } S = \int_a^b ydx \text{ площадь фигуры.}$$

Пример 1. Найти координаты центра тяжести треугольника, ограниченного прямыми: $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

Решение.



$$\text{Т.к. } S = \int_0^2 (2-x)dx = (2x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^2 = 2;\text{ то}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 x(2-x)dx}{2} = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x - x^2)dx = \frac{1}{2}(x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 (2-x)^2 dx}{2} = -\frac{1}{4}\frac{(2-x)^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$.

Координаты центра тяжести** $(\bar{x};\bar{y})$ **дуги плоской кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ вычисляются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx};\quad \bar{y} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx}.$$

Пример 2. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии $y = 2\,ch\frac{x}{2}$ от $x = -2$ до $x = 2$.

Решение.

Находим производную $y' = sh\frac{x}{2}$ $\sqrt{1 + sh^2\frac{x}{2}} = \sqrt{ch^2\frac{x}{2}} = ch\frac{x}{2}$.

Тогда $\overline{x}=\dfrac{\int\limits_{-2}^{2} x\cdot ch\frac{x}{2}dx}{\int\limits_{-2}^{2} ch\frac{x}{2}dx}=\dfrac{(2x\,sh\frac{x}{2}-4ch\frac{x}{2})\Big|_{-2}^{2}}{2sh\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}}=\dfrac{0}{4sh1}=0;$

$$\overline{y}=\frac{\int\limits_{-2}^{2} 2ch\frac{x}{2}\cdot ch\frac{x}{2}}{4\,sh1}=\frac{\int\limits_{-2}^{2} ch^2\frac{x}{2}dx}{2sh1}=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}(chx+1)dx}{2sh1}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(shx+x)\Big|_{-2}^{2}}{2sh1}=\frac{\frac{1}{2}(2sh2+4)}{2sn1}=\frac{sh2+2}{2sh1}.$$

Ответ: $(0\,;\dfrac{sh2+2}{2sh1})$.

Вычисление моментов инерции.

С помощью определенного интеграла также можно вычислять моменты инерции плоских фигур и материальных линий.

Момент инерции материальной линии отоситељно начала координат находится по формуле

$$I_0^L=\int\limits_a^b \rho(x)(x^2+f^2(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

где $\rho(x)$ - линейная плотность линии АВ, заданной уравнением y=f(x), $a\le x\le b$.

Моменты инерции линии относительно осей *Ох и Оу* соответственно равны

$$I_x=\int\limits_a^b \rho(x)f^2(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx;$$

$$I_y=\int\limits_a^b \rho(x)x^2\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx;$$

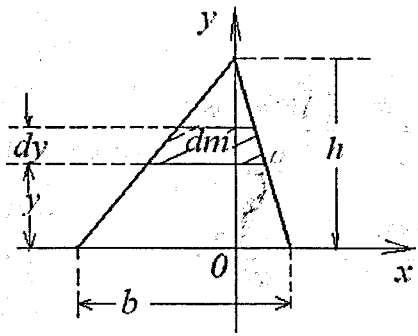
Статические моменты *дуги* M_x и M_y относительно координат осей *Ох и Оу*:

$$M_x=\int\limits_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx;$$

$$M_y=\int\limits_a^b \rho(x)x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

При вычислении ***момента инерции плоской фигуры*** руководствуются следующим правилом.

Момент инерции материальной точки массой m относительно точки 0 равен произведению массы этой точки на квадрат ее расстояния до точки 0. Момент инерции системы материальных точек равен сумме (интегралу) моментов инерции всех точек этой системы.



Пример 3. Найти момент инерции треугольника с основанием b и высотой h относительно его основания.

Решение.

Основание треугольника примем за ось Ox, а его высоту за ось Oy.

Разобьём треугольник на бесконечно тонкие горизонтальные полоски толщины dy, играющие роль элементарных масс dm. Используя подобие треугольников, получаем

$$dm = \frac{b(h-y)}{h}dy.$$

Тогда $dI_x = y^2 \cdot dm = \frac{b}{h} y^2(h-y)dy$;

$$I_x = \frac{b}{h}\int_a^b y^2(h-y)dy = \frac{1}{12}bh^3.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ФИЗИКИ, ГИДРАВЛИКИ.

Вычисление пройденного пути по скорости.

Путь, пройденный точкой за время от t_1 до t_2 определяется формулой $S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$, где $V(t)$ - скорость движения точки по некоторой прямой.

Пример 1. Скорость движения точки равна $v = 0{,}1\,t^3$ м/сек. Найти путь, пройденный точкой за 10 сек от начала движения.

Решение.

Имеем $S = \int_0^{10} 0{,}1t^3dt = 0{,}1 \cdot \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^{10} = 250$ (метров).

Ответ: 250 (метров).

Вычисление работы силы.

Если переменная сила *F=f(x)* действует в направлении оси Ox, то работа силы на отрезке $[x_1; x_2]$ равна $A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила 1 кН растягивает ее на 1см?

Решение.

По закону Гука $F=f(x)=k\cdot x$. При $x=0{,}01$ м и F=1 кН из равенства 1=0,01 k найдем $k=100$, следовательно, F=100x.

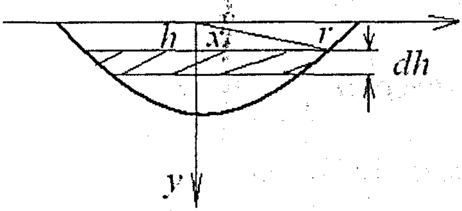
Искомая работа $A=\int_0^{0{,}06}100x\,dx=50x^2\Big|_0^{0{,}06}=0{,}18$ кДж.

Ответ: 0,18 кДж.

Вычисление давления жидкости.

Для вычисления *силы давления жидкости* используют закон Паскаля, согласно которому сила давления жидкости на площадку S с глубиной погружения h равна $P=\gamma h\cdot S$, где γ - удельная плотность жидкости.

Пример 3. Найти силу давления, испытываемую полукругом радиуса r, погруженным вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.



Решение.

Разобьем полукруг на элементы-полоски, параллельные поверхности воды. Площадь одного такого элемента находящегося на расстоянии h от поверхности воды, равна

$$dS=2x\cdot dh=2\sqrt{r^2-h^2}dh,$$

тогда

$$dp=\gamma\cdot hdS=2\gamma h\sqrt{r^2-h^2}dh,$$

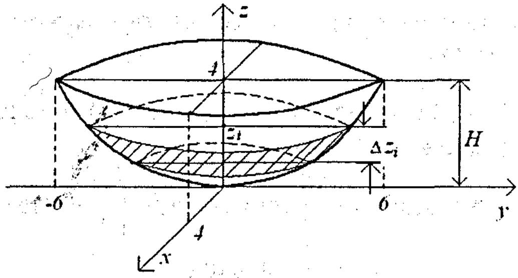
$$P=2\gamma\int_0^r h\sqrt{r^2-h^2}dh=-\gamma\int_0^r\sqrt{r^2-h^2}d(r^2-h^2)=$$

$$=-\frac{2\gamma}{3}(r^2-h^2)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^r=\frac{2}{3}r^3.$$

Ответ: $\frac{2}{3}r^3$.

Пример 4. Котел, имеющий форму эллиптического параболоида $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ высотой H=4 м, заполнен жидкостью плотностью $\rho=0{,}8$ т/м³. Вычислить работу, которую нужно затратить на перекачивание жидкости через край котла.

Сделаем рисунок.



Выделим на высоте z_i элементарный слой жидкости толщиной Δz_i, объем которого $\Delta V_i=\pi\cdot 2\sqrt{z_i}\cdot 3\sqrt{z_i}\Delta z_i$, а масса $\Delta m_i\approx 6\pi\rho z_i\cdot\Delta z_i$, т.к. в горизонтальном сечении получается эллипс с полуосями $a=2\sqrt{z_i}$, $b=3\sqrt{z_i}$.

Работа, затраченная на перекачивание жидкости,

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(6\pi g\rho z_i(H-z_i)\cdot\Delta z_i\right)=$$

$$=\int_0^H 6\pi g\rho z(H-z)dz=6\pi g\rho\left(H\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^H=$$

$$=\pi\rho g H^3=64\pi\rho g\approx 1575{,}53 \text{ кДж.}$$

Ответ: 1575,53 кДж.

Задания.

1. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$. $(\bar{x}=\bar{y}=\frac{9}{20})$
2. Найти координаты центра масс однородной дуги первой арки циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, где $0\le t\le 2\pi$. $(\bar{x}=2\pi;\ \bar{y}=\frac{8}{3})$
3. Найти момент инерции однородного стержня длиной L и весом P относительно его конца. $(\frac{1}{3}\cdot\frac{P}{g}L^2)$

4. Скорость движения точки $V = t \cdot L^{-0,01t}$ м/сек. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки. (10^4 ед.)

5. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферического котла имеющего радиус 10 метров.

($0,79 \cdot 10^7$ кг/м)

6. Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить силу давления воды на всю плотину, если известно, что верхнее основание плотины $a = 70$ метров, нижнее $b = 50$ метров, а высота плотины $h = 20$ метров.

($11,3 \cdot 10^3$ т)

Домашние задания:

1. Найти координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2 - 2x$. $\left(\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{5}\right)\right)$

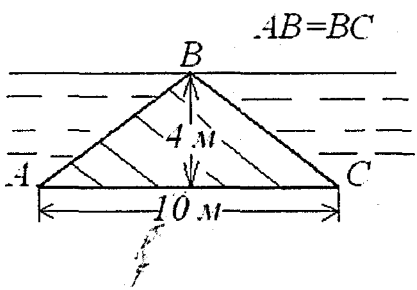
2. Найти координаты центра масс плоской кривой L, где L: дуга астроиды $x = 2\cos^3 \frac{t}{4}$; $y = 2\sin^3 \frac{t}{4}$ в первом квадранте. $\left(\left(\bar{y} = \bar{x} = \frac{4}{5}\right)\right)$

3. Найти момент инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно его сторон. $\left(I_a = \frac{1}{3}ab^3, I_b = \frac{1}{3}a^3b\right)$

4. Какую работу нужно затратить, чтобы выкачать воду из вертикальной цилиндрической бочки, имеющей радиус основания R и высоту H?

$\left(\frac{\pi\gamma}{2}R^2H^2\right)$

5. Вычислить силу давления воды на пластинку, вертикально погруженную в воду, считая, что удельный вес $\gamma = 9,81$ КН/ м²
форма пластины и расположение см на рисунке. (523 КН)



РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1985 г., т. 1.
2. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика, ч.1-2, Минск, ВШ, 1984-1988 г.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., Наука, 1985.
4. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича). М., Наука, 1981 г., ч.1.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П. Рябушко). Минск, ВШ, 2000 г., ч.1, ч.2.
6. Гусак А.А. Высшая математика, т.1. Минск, ВШ, 1988 г.
7. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. Минск, ВШ, 1988 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Составители: Мороз Людмила Трофимовна, доцент
Джура Валентина Тимофеевна, ассистент
Емельянова Галина Романовна, ассистент

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ III

Ответственный за выпуск: Л.Т. Мороз
Редактор: Т.В. Строкач
Компьютерный набор: А.В. Мороз, М.И. Байдук

Подписано к печати 9.01.2007 г. Формат 60×84/16. Усл. п. л. 5,0. Уч. изд. л. 5,4. Заказ № 34. Тираж 150 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267.