УДК 519.6+517.983

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ В НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Шлойда К. С.
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, г. Брест, Беларусь
Научный руководитель: Матысик О. В., канд. физ.-мат. наук, доцент

Для решения уравнения *Ax* = y с положительным ограниченным самосопряжённым оператором *A*, для которого нуль является точкой спектра, предлагается использовать неявный итерационный метод

$$(E + \alpha A)x_{n+1} = (E - \alpha A)x_n + 2\alpha y,\ x_0 = 0. \qquad (1)$$

Он является аналогом метода второго порядка $y_{m+1} - y_m = \frac{h}{2}\,(y'_{m+1} + y'_m)$ для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ [1]. В случае приближённой правой части $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (1) примет вид

$$(E + \alpha A)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \qquad (2)$$

Справедливы

Теорема 1. *Итерационный процесс* (1) *при условии* $\alpha > 0$ *сходится*.

Теорема 2. *Если выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$, *то при условии* $\alpha > 0$ *итерационный процесс* (2) *сходится.*

Теорема 3. *Если решение уравнения* Ax = y *истокопредставимо* ($x = A^s z,\ s > 0$), *то при условии* $\alpha > 0$ *для метода итераций* (2) *справедлива оценка погрешности*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \max\left\{ s^s (4n\alpha)^{-s},\ M^s \left(\frac{\alpha M - 1}{\alpha M + 1}\right)^n \right\}\|z\| + 2n\alpha\delta. \qquad (3)$$

Очевидно, при $n \to \infty$ величина $M^s \left(\frac{\alpha M - 1}{\alpha M + 1}\right)^n$, убывающая как геометрическая прогрессия, станет меньше величины $s^s(4n\alpha)^{-s}$, убывающей как $\frac{1}{n^s}$. Следовательно, для достаточно больших *n* в оценке (3) будет фигурировать величина $s^s(4n\alpha)^{-s}\|z\|$.

Рассмотрим погрешность метода (2) при счёте с округлением. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, получаемое по формуле (2), а z_n – значение с учётом вычислительной погрешности, т. е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha A)^{-1}\left[(E - \alpha A)z_n + 2\alpha y_\delta\right] + \alpha\gamma_n,\ z_0 = 0. \qquad (4)$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (4) равенство (2), получим $\varepsilon_{n+1} = (E+\alpha A)^{-1}(E-\alpha A)\varepsilon_n + \alpha\gamma_n,\ \varepsilon_0 = 0$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции получаем $\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n-1}(E+\alpha A)^{-(n-1-k)}(E-\alpha A)^{n-1-k}\alpha\gamma_k$.

В силу $\alpha > 0$ и принадлежности нуля спектру оператора *A* $\left\|(E+\alpha A)^{-1}(E-\alpha A)\right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma,\ \gamma = \sup_k |\gamma_k|$.

Таким образом, с учётом вычислительной погрешности для метода (2) справедлива следующая оценка

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le \max\left\{ s^s(4n\alpha)^{-s},\ M^s\left(\frac{\alpha M - 1}{\alpha M + 1}\right)^n \right\}\|z\| + 2n\alpha\delta + n\alpha\gamma.$$

Список цитированных источников

1. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики: учеб. пособие : в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Вышэйш. шк., 1975. – Т. 2. – 672 с.

УДК 519.6+517.983

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ АПОСТЕРИОРНОГО ВЫБОРА ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

Шостакович И. О.,

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, г. Брест, Беларусь

Научный руководитель: Матысик О. В., канд. физ.-мат. наук, доцент

В гильбертовом пространстве *H* решается уравнение I рода $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением, но $0 \in Sp\ A$ (поэтому рассматриваемая задача некорректна). Используется явный итерационный метод

$$x_n = (E - \alpha A)^2 x_{n-1} + 2\alpha y - \alpha^2 Ay,\ x_0 = 0, \tag{1}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения $Ax = y$ при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод примет вид

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Здесь $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$. В случае, когда неизвестна истокопредставимость точного решения, т. е. что $x = A^s z,\ s > 0$, метод (2) можно сделать эффективным, если восполь-