

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ СТЕРЖНЕЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЕ

Как известно, статически неопределимые системы – это такие системы, внутренние усилия в которых нельзя определить при помощи одних лишь уравнений равновесия. При их расчёте, кроме уравнений равновесия, необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения деформации, число которых соответствует степени статической неопределимости [1].

Целью данной работы является сравнительное исследование возможности достижения условия равнопрочности составных частей стержневой системы путём перераспределения напряжений одним из следующих способов: изменением соотношения площадей поперечного сечения стержней, изменением соотношения их модулей упругости, либо путём создания предварительного натяга.

Рассмотрим статически неопределимую систему, состоящую из трёх соединённых в шарнире стержней, нагруженных силой F (см. рис.1а). Используя уравнения равновесия и одно дополнительное уравнение деформации, получим следующие выражения для определения внутренних усилий в стержнях рассматриваемой системы:

$$N_{1нагр} = \frac{F \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \cos^2(\alpha)}{\left(2 \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \cos^3(\alpha) + 1\right)}; \quad N_{2нагр} = \frac{F}{\left(2 \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \cos^3(\alpha) + 1\right)}; \quad (1)$$

Используя соотношения $\frac{A_1}{A_2} = n$, $\frac{E_1}{E_2} = e$, получим выражения (1) в следующем виде:

$$N_{1нагр} = \frac{F \cdot n \cdot e \cdot \cos^2(\alpha)}{\left(2 \cdot n \cdot e \cdot \cos^3(\alpha) + 1\right)}; \quad N_{2нагр} = \frac{F}{\left(2 \cdot n \cdot e \cdot \cos^3(\alpha) + 1\right)}; \quad (2)$$

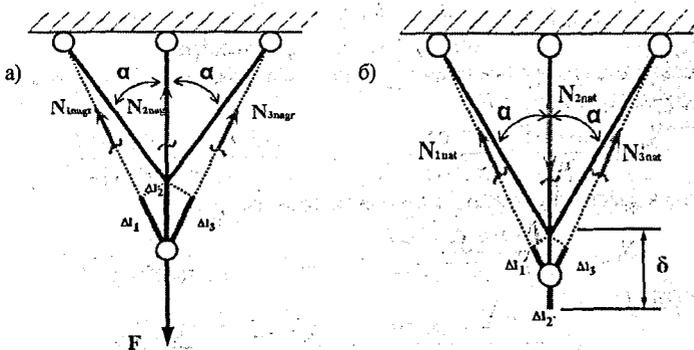


Рис.1. Расчётная схема: а) при действии нагрузки F ; б) при создании предварительного натяга

Как видно из (2), величина усилий $N_{1нагр}$, $N_{2нагр}$, $N_{3нагр}$ зависит от параметров F , n , e и α . Предположим, что F – величина постоянная, а все стержни системы выполнены из одного материала, т.е. $e = 1$. Задаваясь различными соотношениями для n , получаем различные значения усилий $N_{1нагр}$, $N_{2нагр}$, $N_{3нагр}$. Ввиду симметрии рассматриваемой схемы, внутренние силовые факторы, возникающие в первом и третьем стержнях, оказы-

ваются одинаковыми, поэтому в дальнейшем будем рассматривать работу только первого и второго стержня.

Задаваясь различными значениями угла α , нетрудно убедиться в том, что при $n = 1$, усилия, возникающие во втором стержне, всегда оказываются большими, чем в первом; при увеличении же площади поперечного сечения первого стержня, усилия в нём возрастают, в то время как во втором — убывают. Следовательно, для любого угла α можно подобрать такое соотношение площадей n , при котором усилия во всех стержнях окажутся равными. Однако возникающие при этом в стержнях напряжения оказываются различными по величине:

$$\sigma_{1nagr} = \frac{F \cdot e \cdot \cos^2(\alpha)}{(2 \cdot n \cdot e \cdot \cos^3(\alpha) + 1)} \cdot \frac{1}{n \cdot A_2}; \quad \sigma_{2nagr} = \frac{F}{(2 \cdot n \cdot e \cdot \cos^3(\alpha) + 1)} \cdot \frac{1}{A_2}; \quad (3)$$

Как известно, одним из наиболее важных моментов при расчёте конструкций на прочность является выполнение условия равнопрочности [2]. Анализ выражений (3) показывает, что достичь равенства напряжений в случае выполнения всех стержней из одного материала (т.е. при $e = 1$) не представляется возможным, что можно подтвердить, построив графики зависимости напряжений в стержнях для различных значений n и α , причем при любых сочетаниях значений n и α второй стержень всегда оказывается более напряжённым. Достижть такого равенства можно, приравнявая $\sigma_{1nagr} = \sigma_{2nagr}$, путём подбора коэффициента e , что вытекает из следующих выражений:

$$\frac{F \cdot n \cdot e \cdot \cos^2(\alpha)}{(2 \cdot n \cdot e \cdot \cos^3(\alpha) + 1)} \cdot \frac{1}{n \cdot A_2} = \frac{F}{(2 \cdot n \cdot e \cdot \cos^3(\alpha) + 1)} \cdot \frac{1}{A_2};$$

После упрощения:
$$e = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}; \quad (4)$$

Однако достижение условия равнопрочности путём подбора соответствующего соотношения модулей упругости является весьма трудоёмкой процедурой. Гораздо целесообразнее, с практической точки зрения, воспользоваться предварительным натягом (напряжением).

С этой целью, установим предварительный натяг величиной δ путем увеличения расчётной длины второго, наиболее напряженного, стержня (см. рис.16):

$$\delta = \Delta l_2 + \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha)} = \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2} + \frac{N_1 \cdot l_2}{A_1 \cdot E_1 \cdot \cos^2(\alpha)}; \quad (5)$$

Воспользовавшись уравнениями равновесия и выражением (5), выразим возникающие в стержнях усилия N_{1nat} и N_{2nat} :

$$N_{1nat} = \frac{\delta \cdot A_2 \cdot E_2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^2(\alpha)}{l_2(2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha) + 1)}; \quad N_{2nat} = \frac{2 \cdot \delta \cdot A_2 \cdot E_2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha)}{l_2(2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha) + 1)}; \quad (6)$$

Добавляя действие нагрузки F к данной системе, получаем:

$$N_{1nagr} = \frac{F \cdot e \cdot n \cdot \cos^2(\alpha)}{(2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha) + 1)}; \quad N_{2nagr} = \frac{F}{(2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha) + 1)}; \quad (7)$$

Суммируя (7) и (2):

$$N_1 = \frac{F \cdot e \cdot n \cdot \cos^2(\alpha)}{(2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha) + 1)} + \frac{\delta \cdot A_2 \cdot E_2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^2(\alpha)}{l_2(2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha) + 1)}; \quad (8)$$

$$N_2 = \frac{F}{(2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha) + 1)} + \frac{2 \cdot \delta \cdot A_2 \cdot E_2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha)}{l_2(2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha) + 1)};$$

$$\sigma_1 = \frac{e \cdot n \cdot \cos^2(\alpha)}{(2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha) + 1)} \left(\frac{F}{A_1} + \frac{\delta \cdot E_2}{n \cdot l_2} \right)$$

$$\sigma_2 = \frac{e \cdot n \cdot \cos^2(\alpha)}{(2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^3(\alpha) + 1)} \left(\frac{F}{A_2 \cdot e \cdot n \cdot \cos^2(\alpha)} - \frac{2 \cdot \delta \cdot E_2 \cdot \cos(\alpha)}{I_2} \right) \quad (9)$$

Приравняв полученные значения напряжений (9), получим условие равнопрочности стержней, откуда выразим величину δ :

$$\delta = \frac{I_2}{E_2 \cdot (1 + 2 \cdot n \cdot \cos(\alpha))} \cdot \frac{F}{A_2 \cdot n} \left(\frac{1}{e \cdot \cos^2(\alpha)} - 1 \right) = \frac{F \cdot I_2 \cdot (1 - e \cdot \cos^2(\alpha))}{n \cdot e \cdot \cos^2(\alpha) \cdot E_2 \cdot A_2 \cdot (1 + 2 \cdot n \cdot \cos(\alpha))}; \quad (10)$$

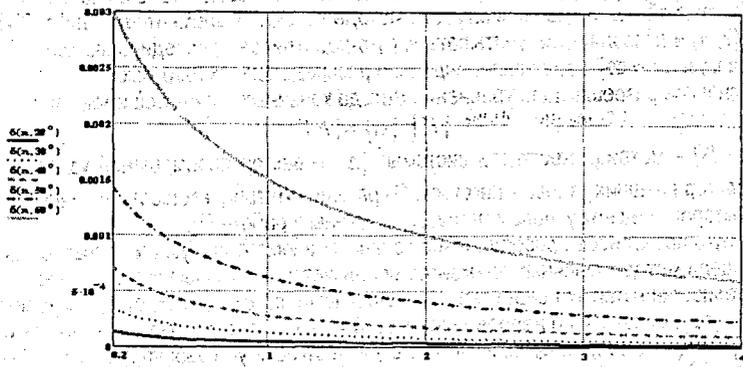


Рис. 2. Зависимость величины предварительного натяга δ от соотношения площадей поперечного сечения стержней n при различных значениях угла

Анализируя графики, представленные на рис. 2, можно отметить, что при увеличении значения n величина δ уменьшается, т.е. чем большим значением площади первого стержня по отношению ко второму мы задаемся, тем на меньшую величину δ нужно увеличивать второй стержень для достижения условия равнопрочности. Кроме того, при любом фиксированном значении δ равнопрочности можно достичь, задаваясь различными комбинациями α и n .

Таким образом, проведенное исследование показало, что достичь условия «равнопрочности» составных частей статически неопределимой системы за счёт перераспределения напряжений посредством изменения только соотношения площадей поперечного сечения стержней, составляющих систему, не представляется возможным. Однако необходимого равенства напряжений в стержнях можно добиться путем изменения соотношения модулей упругости стержней, при этом с практической точки зрения наиболее эффективным способом достижения необходимого соотношения является использование эффекта предварительного натяга.

Помимо этого, анализ зависимости напряжений, вызываемых натягом, от угла α показывает, что известное положение о вредности наличия начальных напряжений, приводящее к неравномерности работы стержней [3], нуждается в уточнении. Во-первых, степень подобной «вредности» не является величиной постоянной и зависит от величины угла α , и, во-вторых, изменение степени «вредности» в зависимости от угла α не является линейным, причем кривая этой зависимости наиболее точно описывается выражением (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высш. школа, 1975. С.49.
2. Надёжность строительных конструкций и оснований. СТ СЭВ 4868-84.
<http://www.remontnik.ru/docs/2344/>
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. С.80-81.