Программа «ArkBes» имеет объем 1,9 Мбт, составлена в среде программирования Delphi 7, работает под управлением Windows 98 и выше, не требует специальной установки, может работать в сети, имеет удобный интерфейс для работы в ней, развитый и подробный «Help», графическое представление и исходных данных, и результатов расчета. Имеются возможности ряда настроек вида программы и изображений в ней, включая масштабирование графических объектов, изображение (удаление) вертикальной сетки.

Изложенные подходы в создании учебной программы «ArkBes», с нашей точки зрения, создают условия и базу для более глубокого изучения методов расчета и понимания физических основ работы сооружений, способствуют интенсификации и активизации учебного процесса, индивидуализации познавательной деятельности, развитию творческого и инженерного мышления будущих специалистов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатюк В.И. Создание учебных компьютерных программ для курса строительной механики // Вышэйшая школа. – 2001. – № 6. – С. 35–38.

2. Рудлевский Д.В., Игнатюк В.И. К расчету бесшарнирных арок на вертикальные нагрузки // Сборник конкурсных работ студентов и магистрантов – 2008 / УО БрГТУ. – Брест, 2008.

УДК 624.04

Рудлевский Д.В.

Научный руководитель: доц. Игнатюк В.И.

К РАСЧЕТУ БЕСШАРНИРНЫХ АРОК НА ВЕРТИКАЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ

Рассматриваются плоские симметричные арочные системы бесшарнирного типа, а также длинные своды и протяженные арочно-оболочечные покрытия, расчет которых при неизменной по их длине нагрузке может быть приведен к расчету плоских бесшарнирных арок.

Расчет бесшарнирных арок (рис. 1) на неподвижные нагрузки заключается [1] в определении внутренних сил (изгибающих моментов *M*, поперечных *Q* и продольных *N* сил) в сечениях, построении их эпюр, а также в определении перемещений сечений и соответственно деформированного вида арок.

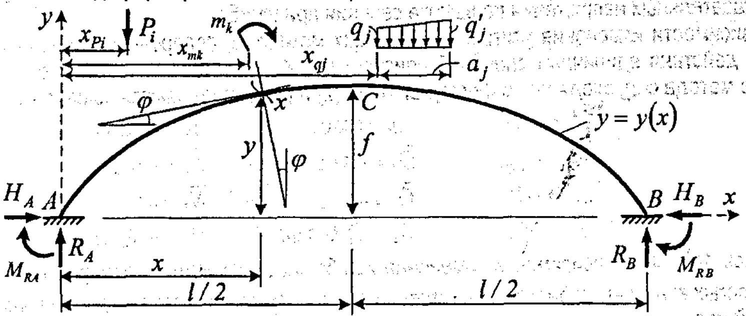

Рис. 1. Расчетная схема бесшарнирной арки

Бесшарнирные арки являются статически неопределимыми системами, имеют три "лишние" связи и их расчет обычно выполняется методом сил. Основную систему метода сил с учетом симметричности системы выберем путем разрезания арок посередине с перенесением неизвестных в упругий центр (рис. 2,а). Неизвестные метода сил определяются из уравнений

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

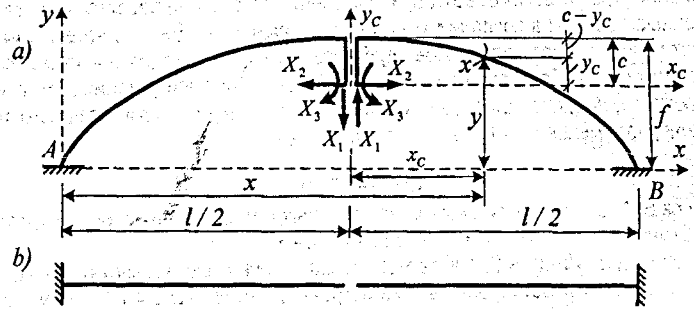

Рис. 2. Основная система метода сил

Коэффициенты δ_{ii} и Δ_{iP} в (1) *представляют собой перемещения* в направлении отброшенных связей (взаимное расхождение по вертикали, по горизонтали и взаимный угол поворота точек (сечений) в месте разрезания) от действия соответственно единичных значений неизвестных X_i и внешних нагрузок, и определяются по формулам [1]:

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{\overline{M}_i^2 ds}{EJ} + \int_0^s \eta \frac{\overline{Q}_i^2 ds}{GA} + \int_0^s \frac{\overline{N}_i^2 ds}{EA}; \tag{2}$$

$$\Delta_{iP} = \int_0^s \frac{\overline{M}_i M_p ds}{EJ} + \int_0^s \eta \frac{\overline{Q}_i Q_p ds}{GA} + \int_0^s \frac{\overline{N}_i N_p ds}{EA}, \tag{3}$$

где EJ, GA, EA – жесткости (их изменение) стержня арки соответственно при изгибе, сдвиге и продольном растяжении-сжатии; $ds = dx/\cos\varphi$, dx – бесконечно малые участки дуги и пролета арки; η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения при изгибе.

Зависимости изменения усилий (изгибающих моментов, поперечных и продольных сил) от действия единичных значений неизвестных X_i и внешних нагрузок в основной системе метода сил, входящие в формулы Мора (2) и (3), определяются выражениями:

$$\begin{array}{lll} \overline{M}_1 = x_C; & \overline{Q}_1 = \cos\varphi; & \overline{N}_1 = -\sin\varphi; \\ \overline{M}_2 = -y_C; & \overline{Q}_2 = -\sin\varphi; & \overline{N}_2 = -\cos\varphi; \\ \overline{M}_3 = -1; & \overline{Q}_3 = 0; & \overline{N}_3 = 0; \\ M_p = M_p^0; & Q_p = Q_p^0 \cos\varphi; & N_p = -Q_p^0 \sin\varphi. \end{array} \tag{4}$$

Здесь M_p^0, Q_p^0 – зависимости изменения изгибающих моментов и поперечных сил в двух простых консольных балках, защемленных по краям, длины которых равны вылетам консолей полуарок в основной системе метода сил (рис. 2,b); φ – угол наклона касательной к оси арки по отношению к оси x (нормали к оси арки по отношению к оси y) (рис. 1).

Положение упругого центра арки найдем из условия равенства нулю перемещений $\delta_{23} = \delta_{32}$:

$$c=\frac{\int_0^l \frac{y_c\,dx}{EJ\cos\varphi}}{\int_0^l \frac{dx}{EJ\cos\varphi}}=\frac{\int_0^l \frac{(y-f)\,dx}{EJ\cos\varphi}}{\int_0^l \frac{dx}{EJ\cos\varphi}}. \qquad (5)$$

С учетом зависимостей для усилий (4) и перейдя к интегрированию по x ($ds=dx/\cos\varphi$), выражения (2) и (3) получим в виде:

$$\delta_{11}=\int_0^l \frac{x_c^2\,dx}{EJ\cos\varphi}+\int_0^l \eta\frac{\cos\varphi\,dx}{GA}+\int_0^l \frac{\sin^2\varphi\,dx}{EA\cos\varphi};$$

$$\Delta_{1P}=\sum\int_0^l \frac{x_c M_P^0\,dx}{EJ\cos\varphi}+\sum\int_0^l \eta\frac{Q_P^0\,dx}{GA\cos\varphi}+\sum\int_0^l \frac{Q_P^0\sin^2\varphi\,dx}{EA\cos\varphi};$$

$$\delta_{22}=\int_0^l \frac{y_c^2\,dx}{EJ\cos\varphi}+\int_0^l \eta\frac{\sin^2\varphi\,dx}{GA\cos\varphi}+\int_0^l \frac{\cos\varphi\,dx}{EA}; \qquad (6)$$

$$\Delta_{2P}=-\int_0^l \frac{y_c M_P^0\,dx}{EJ\cos\varphi}-\int_0^l \eta\frac{Q_P^0\sin\varphi\,dx}{GA}+\int_0^l \frac{Q_P^0\sin\varphi\,dx}{EA};$$

$$\delta_{33}=\int_0^l \frac{dx}{EJ\cos\varphi}; \qquad \Delta_{3P}=-\int_0^l \frac{M_P^0\,dx}{EJ\cos\varphi}.$$

Неизвестные метода сил вычисляются из решения уравнения (1). Окончательные значения усилий в арке определяются по формулам:

$$M=\bar{M}_1X_1+\bar{M}_2X_2+\bar{M}_3X_3+M_P=x_cX_1-y_cX_2-X_3+M_P^0;$$

$$Q=\bar{Q}_1X_1+\bar{Q}_2X_2+\bar{Q}_3X_3+Q_P=\cos\varphi X_1-\sin\varphi X_2+Q_P^0\cos\varphi;$$

$$N=\bar{N}_1X_1+\bar{N}_2X_2+\bar{N}_3X_3+N_P=-\sin\varphi X_1-\cos\varphi X_2-Q_P^0\sin\varphi.$$

Вычисление интегралов в (5) и (6) в большинстве случаев является непростым делом, и поэтому непосредственное интегрирование их чаще всего заменяют численным суммированием при разбивке пролета арки на конечное число участков (n). При этом разбивать пролет удобнее на равные части, что позволяет вынести их длины $\Delta x=l/n$ за знаки сумм. В этом случае выражение для определения положения упругого центра арки получим в виде

$$c=\frac{\sum_1^n \frac{y-f}{EJ\cos\varphi}}{\sum_1^n \frac{1}{EJ\cos\varphi}},$$ а выражения (5) принимают следующий вид:

$$\delta_{11}=\left(\sum_1^n \frac{x_c^2}{EJ\cos\varphi}+\sum_1^n \eta\frac{\cos\varphi}{GA}+\sum_1^n \frac{\sin^2\varphi}{EA\cos\varphi}\right)\Delta x;$$

$$\Delta_{1P}=\left(\sum_1^n \frac{x_c M_P^0}{EJ\cos\varphi}+\sum_1^n \eta\frac{Q_P^0}{GA\cos\varphi}+\sum_1^n \frac{Q_P^0\sin^2\varphi}{EA\cos\varphi}\right)\Delta x;$$

$$\delta_{22}=\left(\sum_1^n \frac{y_c^2}{EJ\cos\varphi}+\sum_1^n \eta\frac{\sin^2\varphi}{GA\cos\varphi}+\sum_1^n \frac{\cos\varphi}{EA}\right)\Delta x; \qquad (7)$$

$$\Delta_{2P}=\left(-\sum_1^n \frac{y_c M_P^0}{EJ\cos\varphi}-\sum_1^n \eta\frac{Q_P^0\sin\varphi}{GA}+\sum_1^n \frac{Q_P^0\sin\varphi}{EA}\right)\Delta x;$$

$$\delta_{33}=-\left(\sum_1^n \frac{1}{EJ\cos\varphi}\right)\Delta x; \qquad \Delta_{3P}=-\left(\sum_1^n \frac{M_P^0}{EJ\cos\varphi}\right)\Delta x.$$

Для арок постоянного сечения их жесткости будут константами и их также можно вынести за суммы. Если ввести при этом обозначения:

$$k_G = \frac{GA}{EJ}; \qquad k_N = \frac{EA}{EJ}, \tag{8}$$

то выражения (7) можно записать в виде:

$$\delta_{11} = \frac{\Delta x}{EJ}\left(\sum_1^n \frac{x_C^2}{\cos\varphi} + \sum_1^n \eta\frac{\cos\varphi}{k_G} + \sum_1^n \frac{\sin^2\varphi}{k_N\cos\varphi}\right);$$

$$\Delta_{1P} = \frac{\Delta x}{EJ}\left(\sum_1^n \frac{x_C M_P^0}{\cos\varphi} + \sum_1^n \eta\frac{Q_P^0}{k_G\cos\varphi} + \sum_1^n \frac{Q_P^0\sin^2\varphi}{k_N\cos\varphi}\right);$$

$$\delta_{22} = \frac{\Delta x}{EJ}\left(\sum_1^n \frac{y_C^2}{\cos\varphi} + \sum_1^n \eta\frac{\sin^2\varphi}{k_G\cos\varphi} + \sum_1^n \frac{\cos\varphi}{k_N}\right); \tag{9}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{\Delta x}{EJ}\left(-\sum_1^n \frac{y_C M_P^0}{\cos\varphi} - \sum_1^n \eta\frac{Q_P^0\sin\varphi}{k_G} + \sum_1^n \frac{Q_P^0\sin\varphi}{k_N}\right);$$

$$\delta_{33} = -\frac{\Delta x}{EJ}\left(\sum_1^n \frac{1}{\cos\varphi}\right); \qquad \Delta_{3P} = -\frac{\Delta x}{EJ}\left(\sum_1^n \frac{M_P^0}{\cos\varphi}\right).$$

Заметим, что первые слагаемые в этих выражениях учитывают изгибающие моменты, вторые слагаемые – поперечные силы, а третьи – продольные силы в арке.

При использовании численного интегрирования ось арки заменяется ломаной линией, а все величины, входящие в формулы (7) и (9), должны вычисляться в средних точках участков разбивки. Точность расчета будет, естественно, тем выше, чем на большее число участков будет разбит пролет арки. Вычисление величин δ_{ij} и Δ_{iP}, таким образом, довольно трудоемкое дело.

Для определения перемещений точек (сечений) и соответственно деформированного вида арки воспользуемся формулой Мора. Вычисление интегралов Мора также будем выполнять путем численного суммирования по конечному числу участков, на которые разбивается пролет арки, с применением формулы трапеций

$$\Delta_{iP} = \sum\int\frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ_j} = \sum_{j=1}^{n_{уч}}\frac{\Delta x_j}{EJ_j\cos\varphi_j}\left(2\bar{M}_{ij}^{лев}\cdot M_{Pj}^{лев} + \bar{M}_{ij}^{лев}\cdot\bar{M}_{Pj}^{пр} + \bar{M}_{ij}^{пр}\cdot M_{Pj}^{лев} + 2\bar{M}_{ij}^{пр}\cdot M_{Pj}^{пр}\right), \tag{10}$$

где: Δ_{iP} – перемещение точки в i-ом направлении; $n_{уч}$ – число участков, на которые разбивается пролет арки; EJ_j – жесткость j-го участка арки; $\bar{M}_i$, $\bar{M}_{ij}^{лев}$, $\bar{M}_{ij}^{пр}$ – зависимость изменения изгибающих моментов от действия единичной силы, приложенной в направлении искомого перемещения, и ее левая и правая ординаты на j-ом участке; M_P, $M_{Pj}^{лев}$, $M_{Pj}^{пр}$ – зависимость изменения изгибающих моментов от действия внешней нагрузки и ее ординаты (левая и правая) на на j-ом участке; $\cos\varphi_j$ – косинус угла наклона касательной к оси арки на том же участке по отношению к оси x.

Для построения схемы деформирования арки необходимо вычислить с использованием формулы (10) вертикальные и горизонтальные перемещения для сечений (точек) арки с заданным шагом. В качестве таких точек примем центры сечений арок, которые ранее использовались для расчета усилий. Чем больше будет этих точек, тем точнее сможем представить форму деформирования арки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.