

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСИЛИЙ В ТРЕХШАРНИРНЫХ КРУГОВЫХ АРКАХ, ЗАГРУЖЕННЫХ РАДИАЛЬНО ДЕЙСТВУЮЩИМИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ

Ветровые нагрузки на покрытия цилиндрической формы действуют в радиальных направлениях [1]. Расчет таких покрытий, которые широко применяются, может быть сведен к расчету арочных систем [2]. Поэтому расчет трехшарнирных арок кругового очертания на действие радиально направленных равномерно распределенных нагрузок (рис. 1) актуален и представляет интерес.

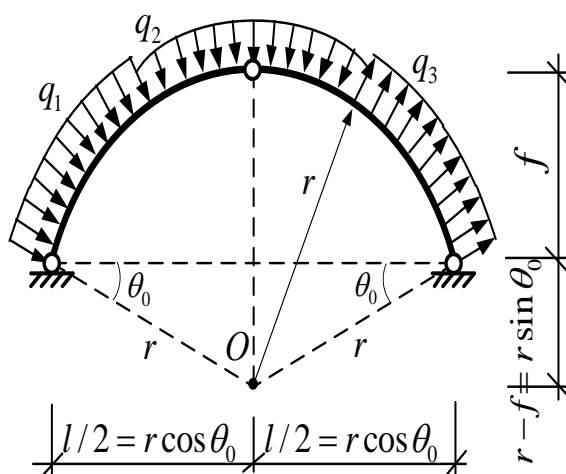


Рисунок 1 – Расчетная схема

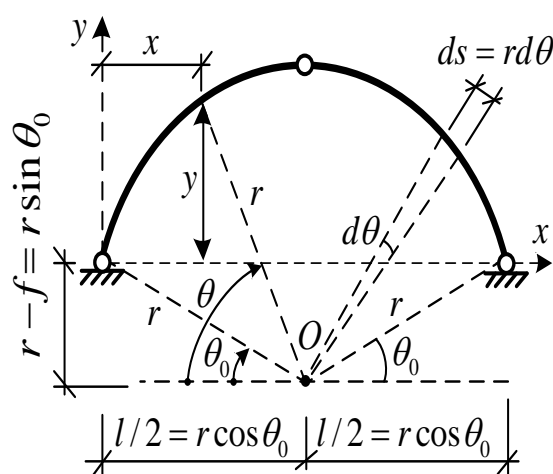


Рисунок 2 – Системы координат

Рассматриваются трехшарнирные арки кругового очертания постоянной жесткости пролетом l (рис. 1), загруженные статическими радиально действующими равномерно распределенными нагрузками. Получим для них выражения внутренних сил – изгибающих моментов, поперечных и продольных сил – в произвольном сечении системы. Расчет выполним статическим методом.

Так как оси арок изменяются по окружности, получение и интегрирование зависимостей удобно выполнять в полярной системе координат (рис. 2). За полюс примем точку O в центре окружности, а в качестве оси для отсчета угла (θ) – примем горизонтальную ось, направленную от полюса влево. Зависимость между декартовой (x, y) и полярной (r, θ) системами координат принимает вид:

$$x = r(\cos \theta_0 - \cos \theta); \quad y = r(\sin \theta - \sin \theta_0). \quad (1)$$

Геометрические соотношения здесь определяется зависимостями:

$$ds = r d\theta, \quad r = \frac{l^2 / 4 + f^2}{2f}, \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{2(r - f)}{l}. \quad (2)$$

Найдем опорные реакции в левой опоре арки (рис. 3), знания которых достаточно для определения усилий в сечениях, если находить их из рассмотрения равновесия левых частей арки.

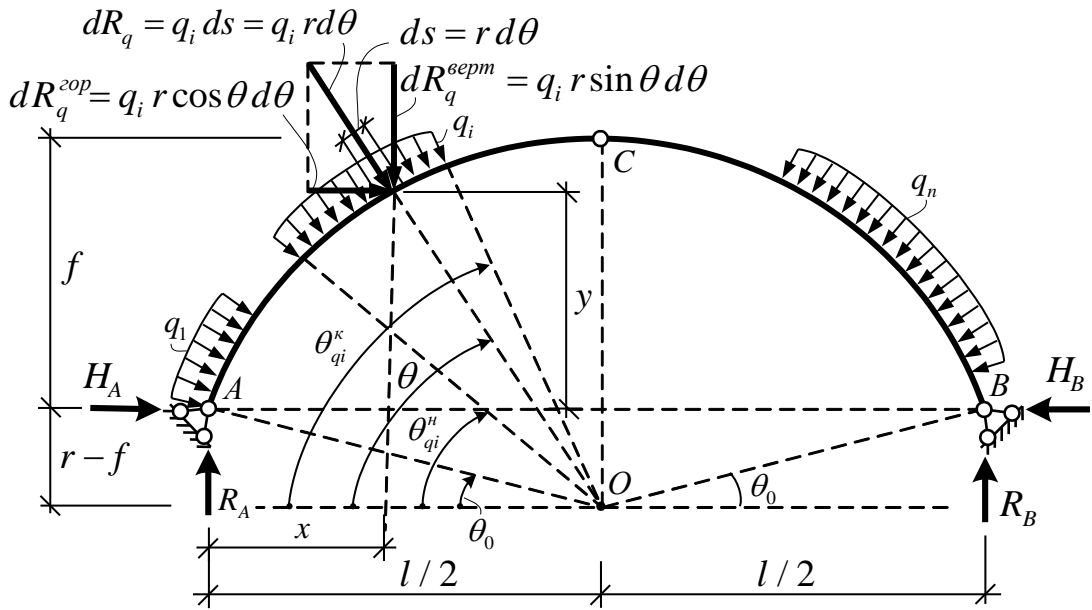


Рисунок 3 – Расчетная схема арки для определения опорных реакций

Для определения опорной реакции R_A составим сумму моментов всех сил, действующих на арку, относительно опорной точки B . Выполнив интегрирование и решив уравнение, получим:

$$R_A = -\sum_{i=1}^{n_q} \left[q_i r (\cos \theta_{q_i}^{\text{кон}} - \cos \theta_{q_i}^{\text{нач}}) \right] + \frac{r^2}{l} \sum_{i=1}^{n_q} q_i \left[-(\sin^2 \theta_{q_i}^{\text{кон}} - \sin^2 \theta_{q_i}^{\text{нач}}) + (\sin \theta_{q_i}^{\text{кон}} - \sin \theta_{q_i}^{\text{нач}}) \left(1 - \frac{f}{r} \right) + \left(\frac{l}{2r} \right) (\cos \theta_{q_i}^{\text{кон}} - \cos \theta_{q_i}^{\text{нач}}) \right], \quad (3)$$

где n_q – число равномерно распределенных радиально направленных нагрузок, действующих на арку.

Горизонтальную реакцию H_A определим из суммы моментов сил, действующих на левую полуарку, относительно шарнира C :

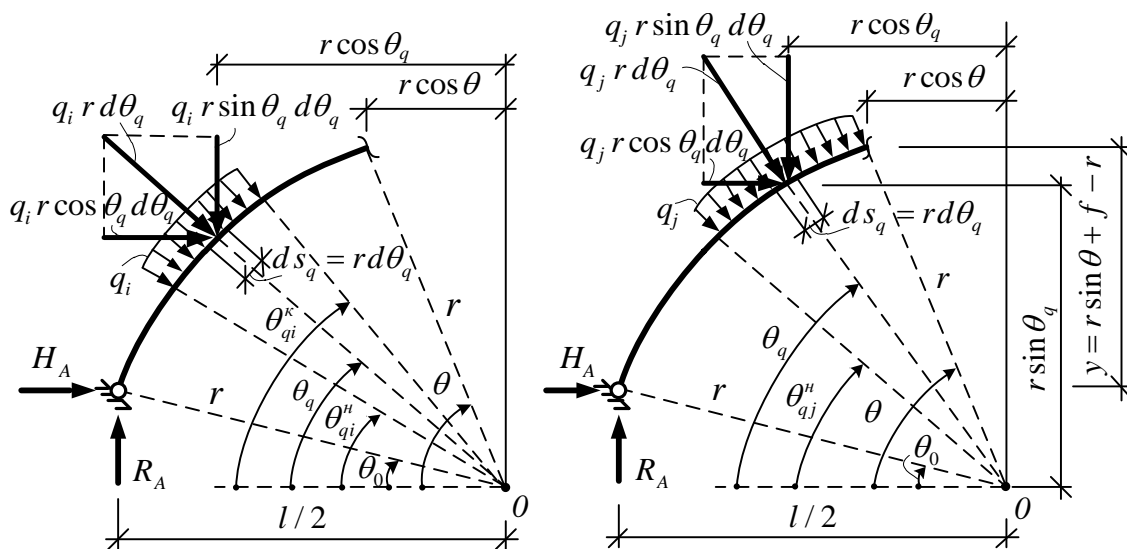
$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0;$$

$$-H_A f + R_A \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^{n_{q_i}^{\text{полн}}} \int_{\theta_{q_i}^{\text{нач}}}^{\theta_{q_i}^{\text{кон}}} \left[q_i r \sin \theta (r \cos \theta) + q_i r \cos \theta r (\sin \theta - 1) \right] d\theta - \int_{\theta_{q_i}^{\text{нач}}}^{\frac{\pi}{2}} \left[q_j r \sin \theta (r \cos \theta) + q_j r \cos \theta r (\sin \theta - 1) \right] d\theta = 0,$$

откуда, выполнив интегрирование и решив уравнение, получим:

$$H_A = \frac{1}{f} \left\{ R_A \cdot \frac{l}{2} - r^2 \sum_{i=1}^{n_q^{\text{кон}}} q_i \left[(\sin^2 \theta_{q_i}^{\text{кон}} - \sin^2 \theta_{q_i}^{\text{нач}}) - (\sin \theta_{q_i}^{\text{кон}} - \sin \theta_{q_i}^{\text{нач}}) \right] - q_j r^2 (\sin \theta_{q_i}^{\text{нач}} - \sin^2 \theta_{q_i}^{\text{нач}}) \right\}. \quad (4)$$

Для получения выражений внутренних сил в сечении ($\theta_{\text{сеч}}$) рассмотрим равновесие левой части арки относительно сечения и выразим их через элементарные нагрузки на бесконечно малых участках $ds = r d\theta$ (рис. 4, а, б):



а) учет распределенной нагрузки, расположенной полностью слева от сечения

б) учет распределенной нагрузки, рассекаемой сечением

Рисунок 4 – Отсеченная левая часть арки

Изгибающий момент в сечении вычислим, рассматривая левую часть системы относительно сечения:

$$M_P = R_A \left(\frac{l}{2} - r \cos \theta \right) - H_A (r \sin \theta - r) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n_q^{\text{лев, полн}}} \int_{\theta_{q_i}^{\text{нач}}}^{\theta_{q_i}^{\text{кон}}} \left[q_i r \sin \theta_q (r \cos \theta + r \cos \theta_q) + q_i r \cos \theta (r \sin \theta - r \sin \theta_q) \right] d\theta_q -$$

$$- \int_{\theta_{q_j}^{\text{нач}}}^{\theta_{q_j}^{\text{сеч}}} \left[q_j r^2 \sin \theta_q (\cos \theta_q - \cos \theta) + q_j r^2 \cos \theta (\sin \theta - \sin \theta_q) \right] d\theta_q;$$

после интегрирования будем иметь:

$$M_P = R_A \left(\frac{l}{2} - r \cos \theta \right) - H_A (r \sin \theta - r + f) +$$

$$+ r^2 \sum_{i=1}^{n_q^{\text{лев, полн}}} q_i \left[\frac{1}{2} (\cos^2 \theta_{q_i}^{\text{кон}} - \cos^2 \theta_{q_i}^{\text{нач}}) - \cos \theta (\cos \theta_{q_i}^{\text{кон}} - \cos \theta_{q_i}^{\text{нач}}) - \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_{q_i}^{\text{кон}} - \sin^2 \theta_{q_i}^{\text{нач}}) - \sin^2 \theta (\sin \theta_{q_i}^{\text{кон}} - \sin \theta_{q_i}^{\text{нач}}) \right] -$$

$$+ q_j r^2 \left[\frac{1}{2} (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_{q_j}^{\text{нач}}) - \cos \theta (\cos \theta - \cos \theta_{q_j}^{\text{нач}}) - \sin \theta (\sin \theta - \sin \theta_{q_j}^{\text{нач}}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_{q_j}^{\text{нач}}) \right]. \quad (5)$$

Поперечная сила в сечении равна:

$$Q_P = R_A \sin \theta - H_A \cos \theta - \sum_{i=1}^{n_q^{\text{полн}}} \int_{\theta_{q_i}^{\text{нач}}}^{\theta_{q_i}^{\text{кон}}} q_i r \cos(\theta - \theta_q) d\theta_q - \int_{\theta_{q_j}^{\text{нач}}}^{\theta_{q_j}^{\text{сеч}}} q_j r \cos(\theta - \theta_q) d\theta_q =$$

$$= R_A \sin \theta - H_A \cos \theta + r \sum_{i=1}^{n_{qi}^{\text{полн}}} q_i \left[\sin(\theta - \theta_{qi}^{\text{кон}}) - \sin(\theta - \theta_{qi}^{\text{нач}}) \right] - r q_j \sin(\theta - \theta_{qj}^{\text{нач}}). \quad (6)$$

Продольная сила:

$$\begin{aligned} N_P &= -R_A \cos \theta - H_A \sin \theta - \sum_{i=1}^{n_{qi}^{\text{полн}}} \int_{\theta_{qi}^{\text{нач}}}^{\theta_{qi}^{\text{кон}}} q_i r \sin(\theta - \theta_q) d\theta_q - \int_{\theta_{qi}^{\text{нач}}}^{\theta_{сеч}} q_i r \sin(\theta - \theta_q) d\theta_q = \\ &= -R_A \cos \theta - H_A \sin \theta - \sum_{i=1}^{n_q^{\text{полн}}} q_i r \left[\cos(\theta - \theta_{qi}^{\text{кон}}) - \cos(\theta - \theta_{qi}^{\text{нач}}) \right] - \\ & q_j r \left[1 - \cos(\theta - \theta_{qj}^{\text{нач}}) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где: q_i , $n_{qi}^{\text{лев}}$ – нагрузки и их число, которые полностью (от начала до конца) действуют слева от рассматриваемого сечения (рис. 4, а); q_j – нагрузки, которые пересекаются рассматриваемым сечением, в результате чего слева от сечения будет действовать только часть этих нагрузок (рис. 4, б).

Каждое из выражений (5)–(7) имеет три слагаемых, которые в зависимости от типа участка, на котором находится сечение, будут присутствовать или могут не присутствовать в выражениях.

Первое слагаемое определяет влияние на усилие опорных реакций и будет присутствовать всегда. Второе и третье слагаемые отражают воздействие распределенных нагрузок и будут присутствовать, если соответствующая нагрузка действует слева от сечения. При этом второе слагаемое учитывает распределенные нагрузки, которые полностью действуют слева от сечения (например, нагрузки q_1 и q_2 для сечений 5 и 6 на рис. 5), а третье слагаемое учитывает распределенные нагрузки, действующие частично слева от сечения, то есть пересекаемые сечением (например, нагрузки q_1 для сечения 2, q_2 для сечения 4, q_3 для сечения 6 на рисунке 5), поэтому третье слагаемое будет присутствовать в случае, если рассматриваемое сечение находится на участке действия распределенной нагрузки (q_j) (рисунок 4, б).

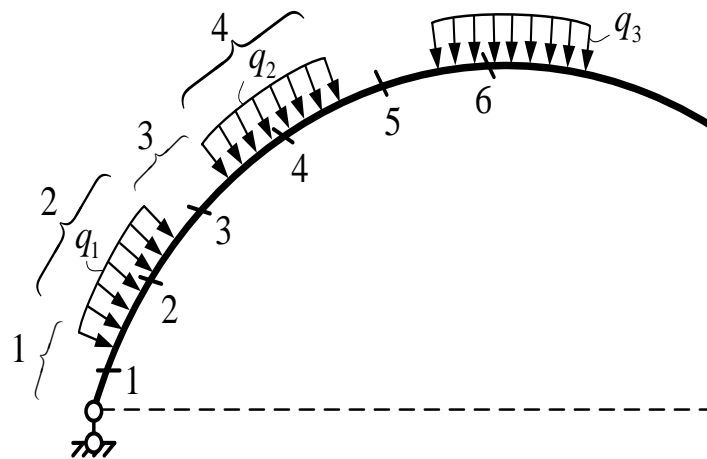


Рисунок 5. Схема возможных расположений расчетных сечений

Список цитированных источников

1. Воздействия на конструкции. Общие воздействия. Ветровые воздействия: СН 2.01.05-2019. – Минск : Стройтехнорм, 2020. – 120 с.
2. Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащенко, Н. Н. Шапошников; под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.