МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для студентов экономических специальностей
второй курс, третий семестр
заочной формы обучения

Брест 2009

УДК 519.2.(076)

Работа содержит контрольные задания по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика», достаточно подробное решение типового варианта, вопросы для самопроверки, отражающие данный курс, и методические указания по оформлению контрольной работы. Подобраны задания к практическим занятиям, приведены основные теоретические сведения из теории вероятностей и математической статистики, рассмотрено достаточное количество примеров. Материалы данного пособия могут также быть использованы на занятиях со студентами всех форм обучения.

Составители: Лебедь С.Ф., доцент, к.ф.-м.н.,
Тузик Т.А., доцент

Рецензент: Савчук В.Ф., зав. кафедрой информатики и прикладной математики УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

1. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Основной формой работы студента-заочника является самостоятельное изучение материала. После прослушивания установочных лекций, приступая к любой теме, следует ознакомиться с содержанием основных ее вопросов, указанных в программе, с методическими указаниями, и, наконец, обратиться к рекомендуемой литературе. Для контроля за усвоением материала желательно ответить на вопросы для самопроверки. Выполнение письменной контрольной работы является важной составляющей при изучении курса "Теория вероятностей и математическая статистика". Она существенно способствует пониманию материала курса и является основой проверки степени усвоения студентом приобретенных знаний.

Номер варианта контрольной работы совпадает с двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими требованиями.

1. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена на проверку в срок, предусмотренный учебным планом.
2. Перед решением каждой задачи необходимо привести ее условие.
3. Решение задач сопровождается необходимыми формулами, развернутыми расчетами, краткими пояснениями.
4. Работа должна быть оформлена аккуратно, написана чисто, разборчиво, без зачеркиваний. Необходимо оставить поля для замечаний рецензента и пронумеровать страницы.
5. В конце работы надо указать перечень использованной литературы, поставить подпись и дату.

При удовлетворительном выполнении работа оценивается "допущена к защите". Студент обязан учесть все замечания рецензента и, не переписывая работу, внести в нее необходимые исправления. Только после этого проводится ее защита.

В случае, если работа "не допущена к защите", студент делает исправления, вносит дополнения и представляет на проверку оба варианта выполнения контрольной работы.

Если при работе над заданиями возникают затруднения, студенту следует обратиться за помощью на кафедру высшей математики УО «БрГТУ».

2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Тема 1. Случайные события. Основные теоремы теории вероятностей.

1. Какие события называют случайными? Что означает термин *«статистическая устойчивость»*?
2. Что называется суммой нескольких событий, произведением нескольких событий?
3. Что такое полная группа событий, ее определение?
4. Сформулируйте классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности.
5. Теорема сложения вероятностей двух и более несовместных событий.
6. Какие события называются зависимыми и независимыми? Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей нескольких событий.
7. Теоремы сложения вероятностей двух и более совместных событий.
8. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
9. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступления событий.
10. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона.

Тема 2. Случайные величины (СВ).

1. Определение случайной величины. Дискретные и непрерывные СВ.
2. Что называется законом распределения СВ? Способы его задания для дискретной и непрерывной СВ.
3. Интегральная функция распределения СВ, ее свойства.
4. Плотность вероятности СВ и ее свойства.
5. Как вычислить вероятность попадания СВ в заданный интервал?
6. Числовые характеристики СВ. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение. Расчетные формулы и свойства.
7. Классические распределения и их числовые характеристики:
   - биноминальное;
   - равномерное;
   - Пуассона;
   - показательное.
8. Нормальное распределение. Вероятность попадания нормально распределенной СВ в заданный интервал. Правило «трех сигм».

Тема 3. Понятие о законе больших чисел и предельных теоремах.

1. Закон больших чисел. Теорема Чебышева.
2. Теорема Бернулли. Свойство устойчивости относительных частот.
3. Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова, ее частные случаи.
4. *Локальная и интегральная теоремы Лапласа.*

Тема 4. Выборочный метод.

1. В чем заключаются основные задачи математической статистики?
2. Генеральная и выборочная совокупности. Объем совокупности.
3. Способы отбора выборочной совокупности.
4. Статистическое распределение. Что такое варианта, частота и частость?
5. Что такое интервальное распределение?
6. Эмпирическая функция распределения.
7. Полигон. Гистограмма. Кумулята.
8. Статистические оценки параметров распределения. Что такое несмещенность, эффективность и состоятельность оценки?
9. Выборочные средняя, дисперсия, среднее квадратичное отклонение. Что такое исправленная выборочная дисперсия? При каком условии она рассматривается?
10. Свойства выборочных средней и дисперсии. Формула вычисления дисперсии.
11. Что такое точность оценки и ее надежность (доверительная вероятность)?
12. Как найти доверительные интервалы для оценок параметров нормального распределения?
13. Что такое метод условных вариант? Когда он применим? В чем его преимущества?
14. Эмпирические и выравнивающие частоты. Построение функции плотности по опытным данным.

Тема 5. Проверка статистических гипотез.

1. Что такое статистическая гипотеза? Нулевая и конкурирующая гипотезы.
2. Ошибки первого и второго рода.
3. Критическая область. Критические точки. Статистический критерий.
4. Что такое уровень значимости гипотезы и мощность критерия?
5. Как определить объем выборки?
6. Сравнение двух средних.
7. Проверка гипотезы о виде распределения. В чем заключается критерий Пирсона?

Тема 6. Элементы теории корреляции.

1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
2. Что такое условные средние?
3. В чем заключаются две основные задачи теории корреляции?
4. Выборочное уравнение прямой линии регрессии. Нормальная система.
5. Расскажите об устройстве корреляционной таблицы.
6. Что такое выборочный коэффициент корреляции? Каковы его свойства и на что он указывает?
7. Уравнение прямой линии регрессии в случае сгруппированных данных.
8. Выборочное корреляционное отношение.
9. Понятие о нелинейной и множественной корреляции.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА № 1.

1.1 Первый рабочий изготавливает *40%* деталей второго сорта, а второй - *30%*. У каждого рабочего взято наугад по две детали. Какова вероятность того, что: а) все четыре детали – второго сорта; б) хотя бы три детали второго сорта; в) менее трёх деталей второго сорта.

1.2 Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены потребует его внимания первый станок, равна *0,7*, второй – 0.65, третий – 0.55. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют его внимания: а) два станка; б) не менее двух станков; в) хотя бы один станок.

1.3 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна *0,8*, второй – *0,7*, третий – *0,65*. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) хотя бы один экзамен.

1.4 На железобетонном заводе № 1 изготовляют панели, *90%* из которых – высшего сорта; на заводе № 2 – панели, *85%* из которых – высшего сорта. Для строительства взяли одну панель завода № 1 и две панели завода № 2. Какова вероятность того, что из трёх выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели.

1.5 В прибор входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: *0,2*; *0,15*; *0,25*. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна.

1.6 В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: *0,9*; *0,8*; *0,7*. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) три камеры.

1.7 Вероятность поражения цели первым стрелком равна *0,8*, вторым – *0,75*, третьим – *0,6*. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) три раза; в) один раз.

1.8 В первом ящике – *25* деталей, *18* из них – стандартные, во втором ящике – *30* деталей, *24* из них – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что среди четырех деталей: а) все детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь – стандартная; в) три детали – нестандартные.

1.9 Самолет обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями *0,6*; *0,75*; *0,8*. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) двумя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

1.10 В схему входят три узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: *0,3*; *0,2*; *0,4*. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух узлов; б) ни одного узла; в) хотя бы один узел.

1.11 Вероятность поражения цели первым стрелком равна *0,9*, вторым – *0,7*, третьим – *0,65*. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) один раз.

1.12 В прибор входят четыре радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: *0,3*; *0,2*; *0,4*; *0,25*. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее трех радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна.

1.13 Самолет обнаруживается четырьмя радиолокаторами с вероятностями 0,6; 0,9; 0,7; 0,8. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) тремя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

1.14 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,7, второй – 0,95, третий – 0,45. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) один экзамен; б) ни одного экзамена; в) хотя бы два экзамена.

1.15 На железобетонном заводе № 1 изготовляют панели, 90% из которых – высшего сорта; на заводе № 2 – панели, 85% из которых – высшего сорта. Для строительства взяли две панели завода № 1 и одну панель завода № 2. Какова вероятность того, что из трёх выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели.

1.16 Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,95, третьим – 0,8. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) более одного раза; б) три раза; в) ни одного раза.

1.17 Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение смены потребует его внимания первый станок, равна 0,5, второй – 0,5, третий – 0,55, четвертый – 0,6. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют его внимания: а) три станка; б) не менее трех станков; в) хотя бы один станок.

1.18 В первом ящике – 32 детали, из которых 24 – стандартные, во втором ящике – 28 деталей, 14 из них – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что среди четырех деталей: а) две детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь – стандартная; в) все детали – нестандартные.

1.19 В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,5; 0,6; 0,75. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) три камеры; б) не более двух камер; в) хотя бы одна камера.

1.20 В схему входят четыре узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее трех узлов; б) один узел; в) хотя бы один узел.

1.21 Первый рабочий изготавливает 35% деталей второго сорта, а второй – 20%. У каждого рабочего взято наугад по две детали. Какова вероятность того, что: а) все четыре детали – второго сорта; б) хотя бы одна деталь второго сорта; в) не менее двух деталей второго сорта.

1.22 Самолет обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,75; 0,85; 0,6. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) тремя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

1.23 Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,9, третьим – 0,5. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) менее двух раз; б) два раза; в) три раза.

1.24 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,75, второй – 0,9, третий – 0,85. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) три экзамена; б) не менее одного экзамена; в) более одного экзамена.

1.25 Первый рабочий изготавливает 25% деталей второго сорта, а второй – 35%. У каждого рабочего взято наугад по две детали. Какова вероятность того, что среди четырех деталей: а) ни одной детали второго сорта; б) хотя бы две детали второго сорта; в) не менее трёх деталей второго сорта.

1.26 В первом ящике – 24 детали, из которых 16 – стандартные, во втором ящике – 18 деталей, 15 из них – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что среди четырех деталей: а) три детали будут стандартными; б) хотя бы две детали – стандартные; в) ни одной стандартной детали.

1.27 В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: *0,7*; *0,85*; *0,75*. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более двух камер; в) хотя бы одна камера.

1.28 Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, высшего качества, равна *0,5*, для второго – *0,75*; для третьего – *0,9*. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) две высшего качества; б) хотя бы две высшего качества; в) одна высшего качества.

1.29 В схему входят три узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0.15; 0.3; 0.1. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) два узла; б) ни одного узла; в) хотя бы один узел.

1.30 В прибор входят четыре радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: *0,1*; *0,2*; *0,35*; *0,2*. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее трех радиоламп; б) одна радиолампа; в) хотя бы одна.

ЗАДАЧА № 2.

а) Вероятность появления события в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p. Найти вероятность того, что событие наступит ровно m раз.

№ варианта	n	m	p
1	144	120	0,8
2	110	18	0,15
3	220	140	0,6
4	112	13	0,1
5	99	17	0,2
6	117	85	0,7
7	240	80	0,3
8	115	100	0,9
9	62	5	0,1
10	154	90	0,6

б) Вероятность появления события в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p. Найти вероятность того, что событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз.

№ варианта	n	m_1	m_2	p
11	144	115	125	0,8
12	110	15	20	0,15
13	220	130	145	0,6
14	112	10	14	0,1
15	99	15	20	0,2
16	117	80	100	0,7
17	240	70	90	0,3
18	115	100	110	0,9
19	62	5	10	0,1
20	154	80	100	0,6

в) Вероятность производства бракованной детали равна p. Найти вероятность того, что из взятых на проверку n деталей m бракованных.

№ варианта	n	m	p
21	1000	6	0,008
22	2500	2	0,001
23	1500	10	0,006
24	3500	5	0,002
25	10000	4	0,0005
26	8000	6	0,0008
27	4500	5	0,0008
28	2000	1	0,0001
29	5000	3	0,0008
30	7000	4	0,0006

ЗАДАЧА № 3.

а) Из урны, содержащей n белых шаров и m чёрных шаров, наугад извлекают k шаров. Пусть X – число вынутых чёрных шаров. Составить закон распределения СВ X. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

№ варианта	n	m	p
1	10	5	4
2	9	6	3
№ варианта	n	m	p
3	8	10	2
4	7	6	4
5	9	4	3
6	8	7	2

б) В партии из n деталей – одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одну деталь за другой и каждую проверяют. Проверенную деталь в партию не возвращают. Составить закон распределения СВ X – числа проверенных деталей. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

№ варианта	n
7	7
8	9
9	10
10	6
11	5
12	8

в) Составить закон распределения СВ X, которая может принимать только два значения: x_1 и x_2. Причем $x_1 < x_2$. Известны математическое ожидание $M(X)$, дисперсия $D(X)$ и вероятность $p_1 = P(X = x_1)$.

№ варианта	$M(X)$	$D(X)$	p_1
13	3,7	0,21	0,3
14	3,5	0,25	0,5
15	3,1	0,09	0,9
16	3,6	0,24	0,4
17	3,2	0,16	0,8
18	5,8	0,96	0,6

г) Билет на право разового участия в азартной игре стоит x долларов. Игрок выбрасывает две игральные кости и получает выигрыш: n долларов, если выпали две шестёрки; m долларов при выпадении только одной шестёрки; проигрывает, если ни одна шестёрка не выпала. СВ X – величина выигрыша. Составить закон распределения СВ X. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Какова должна быть стоимость билета, чтобы игра приносила доход её учредителям?

№ варианта	n	m
19	100	15
20	150	25
21	270	20
22	200	30
23	100	20
24	120	25

д) Охотник, имеющий n патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Составить закон распределения СВ X – числа израсходованных патронов. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

№ варианта	n	p
25	5	0,4
26	4	0,6
27	6	0,8
28	5	0,7
29	4	0,8
30	6	0,6

ЗАДАЧА № 4.

Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X)$ и дисперсией $D(X)$. Записать плотность вероятности $f(x)$ и построить схематический график этой функции. Записать интервал практически наиболее вероятных значений случайной величины X. Что вероятнее:

$$X \in (\alpha;\beta) \text{ или } X \in (\gamma;\delta) ?$$

№ варианта	$M(X)$	$D(X)$	α	β	γ	δ
1	2	4	-1	4	5	6
2	-3	9	-5	-4	-2	-1
3	4	1	0	3	2	5
4	-5	16	-10	-6	0	4
5	3	4	0	5	6	7
6	-2	9	-6	-5	-4	0
7	5	1	0	3	2	6
8	-1	25	-3	1	0	4
9	1	9	-2	2	-1	5
10	-3	4	-4	0	1	6
№ варианта	$M(X)$	$D(X)$	α	β	γ	δ
11	2	16	0	3	2	5
12	-1	1	-3	0	1	4
13	3	4	-2	1	5	9
14	-2	16	-5	-1	0	3
15	4	25	-1	3	4	6
16	-3	9	-6	0	0	5
17	6	25	-2	1	5	7
18	-6	16	-4	2	4	9
19	0	4	-5	1	2	8
20	1	9	-2	3	4	8
21	1	16	-1	2	0	6
22	2	25	-2	3	4	10
23	5	9	1	6	7	9
24	-1	4	-4	-2	1	3
25	-3	9	-5	-1	2	4
26	2	1	-3	4	5	7
27	4	25	-3	1	2	8
28	6	100	-1	3	4	9
29	-3	64	-4	2	3	8
30	-5	16	-7	-3	-1	6

ЗАДАНИЕ К ЗАДАЧАМ 5, 6.

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные.

Требуется:

1) Составить дискретный или интервальный ряд распределения частот и относительных частот случайной величины X и построить полигон или гистограмму частот.

2) Найти эмпирическую функцию распределения признака X и построить ее график.

3) Вычислить числовые оценки параметров распределения: выборочные среднюю, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

4) Выдвинуть гипотезу о виде распределения рассматриваемой случайной величины X. На основании пунктов 1 и 3 обосновать выбор вида распределения. Написать аналитическое выражение функции плотности для выбранного распределения, используя оценки, полученные в пункте 3, и найти теоретические (выравнивающие частоты) и теоретическую интегральную функцию распределения.

5) Приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, по критерию согласия Пирсона подтвердить или отвергнуть выдвинутую гипотезу о виде распределения.

6) Для подтвердившегося нормального распределения найти вероятность попадания признака в интервал $(a-5;\ a+3)$.

ЗАДАНИЕ К ЗАДАЧЕ 7.

В результате группировки данных статистического наблюдения над признаками X и $У$ получена корреляционная таблица. С целью изучения линейной связи между этими признаками требуется:

1. найти их числовые показатели $\bar{x}_в,\ \bar{y}_в,\ \sigma_x,\ \sigma_y$;
2. выборочный коэффициент корреляции $r_в$ и оценить его надежность с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$;
3. найти уравнения прямых регрессий $У$ на X и X на $У$;
4. найти эмпирические и теоретические значения условных средних и рассмотреть отклонения между ними.

Вариант 1.

ЗАДАЧА 5.

2 4 2 4 3 3 3 2 0 6 1 2 3 2 2 4 3 3 5 1 3 6 4 1 3 2
0 2 4 3 2 2 3 3 1 3 3 3 1 1 2 3 1 4 3 1 4 1 3 1 0 0 7
4 3 4 2 3 2 3 3 1 4 3 1 4 5 3 4 2 4 5 4 6 4 7 4 1 3

ЗАДАЧА 6.

65 71 67 73 68 68 72 68 67 70 78 74 79 65 72
65 71 70 69 69 76 71 63 77 75 70 74 65 71 68
74 69 69 66 71 69 73 74 80 69 73 76 69 69 67
67 74 68 74 60 70 66 70 68 64 75 78 71 70 69
73 75 74 72 80 72 69 69 71 70 73 65 66 67 69
71 70 72 76 72 73 64 74 71 76 68 69 75 76 73
74 78 66 75 72 69 68 63 70 70 78 76 73 73 67

ЗАДАЧА 7.

X \ Y	12	16	20	24	28	32
20	3	4				
30		2	6			
40			8	31	10	
50			2	14	6	
60				5	7	2

Вариант 2.

ЗАДАЧА 5.

0 4 2 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1
3 1 5 2 0 2 2 3 2 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4
5 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1
2 3 4 3 2 3 2 4 2

ЗАДАЧА 6.

71 66 66 72 69 71 71 68 72 69 73 73 66 72 73
70 69 74 72 69 74 70 74 72 76 71 66 62 69 74
76 74 69 64 75 71 76 68 68 78 71 71 68 67 74
68 81 71 68 72 71 71 71 69 61 74 66 70 72 65
67 73 78 73 71 75 73 71 72 68 67 69 69 77 63
71 74 67 68 69 74 69 67 74 66 74 74 69 75 70
73 63 77 74 75

ЗАДАЧА 7.

X \ У	11	17	23	29	35	41
15	5	1				
25		6	2			
35			5	26	5	
45			7	12	10	
55				6	7	8

Вариант 3.

ЗАДАЧА 5.

3 7 4 6 1 4 2 4 6 5 3 2 9 0 5 6 7 7 3 1
5 5 4 2 6 2 1 5 3 3 1 5 6 4 4 3 4 1 5 5
3 4 3 7 4 5 6 7 5 2 4 6 6 7 7 3 5 4 4 3
5 5 7 6 6 1

ЗАДАЧА 6.

135	133	124	132	104	152	134	130	129	120	122	124
117	123	123	129	121	122	125	131	147	124	137	112
126	128	111	129	115	147	131	132	137	119	125	120
129	125	123	127	132	118	133	132	132	134	131	120
135	132	125	132	108	114	121	133	133	135	131	125
114	115	122	131	125	132	120	126	115	117	118	118
132	134	127	127	124	135	128	127	115	144	129	120
137	127	125	116	132	120	117	127	118	109	127	122

ЗАДАЧА 7.

X \ У	6	8	10	12	14	16
10				5	7	2
15			2	8	6	
20			8	21	10	
25	5	2	6			
30	3	5				

Вариант 4.

ЗАДАЧА 5.

4 6 0 2 1 3 3 1 2 5 3 1 2 2 4 4 4 3 2 5
2 5 1 2 3 0 3 0 5 1 2 1 3 0 4 0 2 2 1 0
5 1 4 2 4 2 1 3 1 0 6 1 2 1 4 2 2 0 2 4
2 2 1 2 2

ЗАДАЧА 6.

120 135 116 118 133 136 125 126 119 126 129 127
129 124 127 132 126 131 127 130 126 124 135 127
124 123 123 130 132 143 122 139 120 134 108 132
121 111 123 140 137 120 125 131 118 120 120 136
129 127 116 138 128 133 122 131 128 140 138 134
120 126 109 137 111 115 117 130 113 126 115 124
125 118 115 128 123 129 128 120 115 134 118 135
134

ЗАДАЧА 7.

X \ У	5	7	9	11	13	15
8					5	3
12				7	4	
16			5	18	8	
20		7	12	9		
24	3	4				

Вариант 5.

ЗАДАЧА 5.

0 0 3 1 0 0 1 3 1 4 1 0 3 0 2 0 0 0 0 1
1 1 1 3 2 0 0 1 4 1 0 5 0 2 0 1 2 1 2 0
1 2 1 0 0 1 0 1 1 0 2 1 4 2 0 1 5 0 0 2
1 2 0 1 1 1 2 6 0 2 2 1 2 2 0 0 0 2 0 0
0 1 0 4

ЗАДАЧА 6.

365 371 370 369 369 376 371 363 377 375 370 374 365 371 368
374 369 369 366 371 369 373 374 380 369 373 376 369 369 367
367 374 368 374 360 370 366 370 368 364 375 378 371 370 369
373 375 374 372 380 372 369 369 371 370 373 365 366 367 369
371 370 372 376 372 373 364 374 371 376 368 369 375 376 373
374 378 366 375 372 369 368 363 370 370 378 376 373 373 367
365 371 367 373 368 368 372 368 367 370 378 374 379 365 372

ЗАДАЧА 7.

X \ У	15	25	35	45	55	65
14	2	4				
22		4	7			
30		3	30	16	4	
38			12	7	6	
46				2	2	1

Вариант 6.

ЗАДАЧА 5.

2 0 0 3 1 2 2 2 3 4 1 2 3 3 2 1 1 3 3 0
4 1 3 3 0 1 0 0 1 2 1 1 3 2 3 0 1 0 4 2
3 1 2 1 1 1 1 2 1 2 5 2 1 3 2 3 1 1 1 1
2 1 1 1 3 1 3 1 2 1 2 1 1 0 0 3 3 1 2 3

ЗАДАЧА 6.

6,8 8,1 7,1 6,8 7,2 7,1 7,1 7,1 6,9 6,1 7,4 6,6 7,0 7,2 6,5
6,7 7,3 7,8 7,3 7,1 7,5 7,3 7,1 7,2 6,8 6,7 6,9 6,9 7,7 6,3
7,1 7,4 6,7 6,8 6,9 7,4 6,9 6,7 7,4 6,6 7,4 7,4 6,9 7,5 7,0
7,1 6,6 6,6 7,2 6,9 7,1 7,1 6,8 7,2 6,9 7,3 7,3 6,6 7,2 7,3
7,0 6,9 7,4 7,2 6,9 7,4 7,0 7,4 7,2 7,6 7,1 6,6 6,2 6,9 7,4
7,6 7,4 6,9 6,4 7,5 7,1 7,6 6,8 6,8 7,8 7,1 7,1 6,8 6,7 7,4
7,3 6,3 7,7 7,4 7,5

ЗАДАЧА 7.

x \ y	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	52,5
17	2	3				
19	3	4	4			
21		8	14	5		
23			10	5	3	2
25					5	2

Вариант 7.

ЗАДАЧА 5.

1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 1 1 2 0 1 6
1 5 0 2 0 1 1 2 1 0 0 2 1 0 2 5 1 1 2 1 0
1 2 3 0 0 0 3 0 3 1 1 0 2 3 2 2 1 0 2 1 1
1 0 2 0 5 0 0 2 1 0 2 1 1 4 0 1 0 2 3 2 2
2 1 0 1 0 1 3 1 1 2 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1

ЗАДАЧА 6.

12,6 12,8 11,1 1,29 11,5 14,7 13,1 13,2 13,7 11,9 12,5 12,0
12,9 12,5 12,3 12,7 13,2 11,8 13,3 13,2 13,2 13,4 13,1 12,0
13,5 13,2 12,5 13,2 10,8 11,4 12,1 13,3 13,3 13,5 13,1 12,5
11,4 11,5 12,2 13,1 12,5 13,2 12,0 12,6 11,5 11,7 11,8 11,8
13,2 13,4 12,7 12,7 12,4 13,5 12,8 12,7 11,5 14,4 12,9 12,0
13,7 12,7 12,5 11,6 13,2 12,0 11,7 12,7 11,8 10,9 12,7 12,2
13,5 13,3 12,4 13,2 10,4 15,2 13,4 13,0 12,9 12,0 12,2 12,4
11,7 12,3 12,3 12,9 12,1 12,2 12,5 13,1 14,7 12,4 13,7 11,2

ЗАДАЧА 7.

X \ У	11	14	17	20	23	26
7					4	5
9			3	9	2	
11		8	15	4		
13	6	5	7			
15	3	6	3			

Вариант 8.

ЗАДАЧА 5.

1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3
2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0
1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 3 0 0 0 3 0 3 1 1
0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 1 0 2 1 1 0 1 1 4 0
0 5 0 0 2 1 2 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 0 2 1

ЗАДАЧА 6.

12,9 12,4 12,7 13,2 12,6 13,1 12,7 13,0 12,6 12,4 13,5 12,7
12,4 12,3 12,3 13,0 13,2 14,3 12,2 13,9 12,0 13,4 10,8 13,2
12,1 11,1 12,3 14,0 13,7 12,0 12,5 13,1 11,8 12,0 12,0 13,6
12,9 12,7 11,6 13,8 12,8 13,3 12,2 13,1 12,8 14,0 13,8 13,4
12,0 12,6 10,9 13,7 11,1 11,5 11,7 13,0 11,3 12,6 11,5 12,4
12,5 11,8 11,5 12,8 12,3 12,9 12,8 12,0 11,5 13,4 11,8 13,5
12,0 13,5 11,6 11,8 13,3 13,6 12,5 12,6 11,9 12,6 12,9 12,7
13,4

ЗАДАЧА 7.

X \ У	22	36	50	64	78	92
200	5	3	4			
250		7	8	1		
300			9	10	14	
350				12	8	2
400				5	1	7

Вариант 9.

ЗАДАЧА 5.

2 0 1 4 2 0 1 5 2 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0
1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1
0 2 1 1 4 0 6 0 2 1 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2
2 1 3 0 1 0 3 3 1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1
2 1 0 1 0 1 0 2 1 4 1 2 1 2 0 5 0 0 0 1

ЗАДАЧА 6.

8,5 9,1 8,7 9,3 8,8 8,8 9,2 8,8 8,7 9,0 9,8 9,4 9,9 8,5 9,2
8,5 9,1 9,0 8,9 8,9 9,6 9,1 8,3 9,7 9,5 9,0 9,4 8,5 9,1 8,8
9,4 8,9 8,9 8,6 9,1 8,9 9,3 9,4 9,9 8,9 9,3 9,6 8,9 8,9 8,7
8,7 9,4 8,8 9,4 8,0 9,0 8,6 9,0 8,8 8,4 9,5 9,8 9,1 9,0 8,9
9,3 9,5 9,4 9,2 9,9 9,2 8,9 8,9 9,1 9,0 7,3 8,5 8,6 8,7 8,9
9,1 9,0 9,2 9,6 9,2 9,3 8,4 9,4 9,1 9,6 8,8 8,9 9,5 9,6 9,3
9,4 9,8 8,6 9,5 9,2 8,9 8,8 8,3 9,0 9,0 9,8 9,6 9,3 9,3 8,7

ЗАДАЧА 7.

X \ У	16	20	24	28	32	36
18	2	1				
20	1	3	3			
24		3	5	7		
26			2	7	7	
28				1	5	1

Вариант 10.

ЗАДАЧА 5.

1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 0 5 0 0 0 1 2 1 0 1
1 1 2 0 1 5 0 3 1 6 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3
2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 4 0
0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 1 3 3 1 0 2 1 1 4 0
0 0 2 1 1 0 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 1 1 2

ЗАДАЧА 6.

7,7 7,4 7,6 7,1 7,3 7,7 7,4 7,8 7,8 7,1 7,5 7,4 7,1
7,9 7,7 7,4 7,9 7,5 7,9 7,7 8,1 7,6 7,1 6,7 7,3 8,6
8,1 7,9 7,4 6,9 7,9 7,6 8,1 7,3 7,3 8,3 7,6 7,6 7,3
7,6 7,3 7,7 7,6 7,6 7,6 7,3 6,6 7,9 7,1 7,5 8,0 7,5
7,2 7,8 8,3 7,8 7,6 8,2 7,8 7,6 7,9 7,3 7,2 7,4 7,4
7,6 7,9 7,2 7,3 7,4 7,9 7,3 7,2 7,9 7,1 7,9 7,9 7,4
7,8 6,8 8,2 7,9 8,0 7,7 7,8 7,4 7,9 7,2 7,9 7,7 7,0
8,2 6,8 7,6 7,1

Задача 7.

X \ У	10	15	20	25	30	35
2	3	4				
5		10	9	3		
8			6	40	5	
11				4	8	3
14					2	3

Вариант 11.

ЗАДАЧА 5.

6 1 0 2 3 1 1 2 1 2 1 1 2 1 0 4 1 3 3 0
2 1 1 4 0 0 0 2 1 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 2
1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 0 5 6 0 0 1 2 1 0 1
1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 1 5 0 0 1 2 1 3 0
0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 2 0 1 1 0 3 3 1 2 0

ЗАДАЧА 6.

1,26 1,28 1,11 1,29 1,15 1,47 1,31 1,32 1,37 1,19 1,25 1,20
1,29 1,25 1,23 1,27 1,32 1,18 1,33 1,32 1,32 1,34 1,31 1,20
1,35 1,32 1,25 1,32 1,08 1,14 1,21 1,33 1,33 1,35 1,31 1,25
1,14 1,15 1,22 1,31 1,25 1,32 1,20 1,26 1,15 1,17 1,18 1,18
1,32 1,34 1,27 1,27 1,24 1,35 1,28 1,27 1,15 1,44 1,29 1,20
1,37 1,27 1,25 1,16 1,32 1,20 1,17 1,27 1,18 1,09 1,27 1,22
1,35 1,33 1,24 1,32 1,04 1,52 1,34 1,30 1,29 1,20 1,22 1,24
1,17 1,23 1,23 1,29 1,21 1,22 1,25 1,31 1,47 1,24 1,37 1,12

ЗАДАЧА 7.

X \ У	10	13	16	19	22	25
20					4	3
22			9	10	8	
24		10	30	6		
26		6	7	3		
28	4	2	4			

Вариант 12.

ЗАДАЧА 5.

0 1 0 1 0 2 0 1 1 2 1 2 1 1 2 0 1 1 0 1 0
3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 0 5 0 0 0 1 2 1
1 5 0 0 0 2 1 3 2 1 0 1 1 3 3 1 2 0 2 1 1
3 1 1 2 1 0 2 0 2 3 2 2 0 0 0 2 1 1 0 0 0
0 1 1 2 0 1 1 1 0 2 3 3 0 2 4 3

ЗАДАЧА 6.

136 134 125 133 105 153 135 131 130 121 123 125
118 124 124 130 122 123 126 132 148 125 138 113
127 129 112 130 116 148 132 133 138 120 126 121
130 126 124 128 133 119 134 133 133 135 132 121
136 133 126 133 109 115 122 134 134 136 132 126
115 116 123 132 126 133 121 127 116 118 119 119
133 135 128 128 125 136 129 128 116 145 130 121
138 128 126 117 133 121 118 128 119 110 128 123

ЗАДАЧА 7.

X \ У	14	22	30	38	46	54
16	3	7	2			
24		2	12	6		
32		7	27	11		
40			10	6		
48				2	1	1
56					2	1

Вариант 13.

ЗАДАЧА 5.

1 2 1 2 1 3 4 1 0 3 3 0 5 5 0 0 1 2 1 0 7 0 0 0 2
1 1 2 1 6 1 1 1 2 5 2 1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 1 1 0 2
2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 0 0 3 0 3 2 2 1 0 1
1 0 1 0 2 1 0 2 3 2 0 2 3 0 2 1 1 4 1 2 1 3 3 1 1

ЗАДАЧА 6.

565 571 567 573 568 568 572 568 567 570 578 574 579
565 571 570 569 569 576 571 563 577 575 570 574 565
574 569 569 566 571 569 573 574 580 569 573 576 569
567 574 568 574 560 570 566 570 568 564 575 578 571
573 575 574 572 580 572 569 569 571 570 573 565 566
571 570 572 576 572 573 564 574 571 576 568 569 575
574 578 566 575 572 569 568 563 570 570 578 576 573
565 572 571 568 569 567 570 569 567 569 576 573 573

ЗАДАЧА 7.

X \ У	13	19	25	31	37	43
17	3					
23	7	2	6			
29		2	11	32		
35			10	12	2	
41					6	3
47						4

Вариант 14.

ЗАДАЧА 5.

2 1 1 1 2 1 2 2 0 5 1 2 7 1 5 0 0 0 2 1
1 1 2 6 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3
1 0 2 0 1 1 3 3 1 2 1 6 0 0 3 0 3 1 1 0
1 1 2 0 1 0 2 3 2 2 1 0 2 1 1 3 1 0 1 1
0 0 2 1 1 0 2 3 2 0 4 0 5 0 0 0 1 2 1 0

ЗАДАЧА 6.

22 19 21 21 18 22 19 23 23 16 22 23 17 23 28
24 22 19 24 20 24 22 26 21 16 12 19 24 23 21
26 24 19 14 25 21 26 18 18 28 21 21 18 17 24
18 31 21 18 22 21 21 21 19 11 24 16 20 22 15
25 23 21 22 18 17 19 19 27 13 23 13 27 24 25
21 24 17 18 19 24 19 17 24 16 24 24 19 25 20
21 16 16 20 19

ЗАДАЧА 7.

Х \ У	5	9	13	17	21	25
3						3
8				6	7	2
13		4	10	25		
18		8	7	4		
23		5	2			
28	3	1	1	2		

Вариант 15.

ЗАДАЧА 5.

1 1 4 3 1 4 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 0 1 0 1
2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0
1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1
0 2 1 1 4 0 0 6 2 1 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2
0 2 1 1 2 0 1 2 1 1 1 1 2 0 2 0 5 0 0 1

ЗАДАЧА 6.

10,4	15,2	13,4	13,0	12,9	12,0	12,2	12,4	11,8	10,9	12,7	12,2
12,1	12,2	12,5	13,1	14,7	12,4	13,7	11,2	13,2	13,4	12,7	12,7
12,9	11,5	14,7	13,1	13,2	13,7	11,9	12,5	12,0	11,4	11,5	12,2
13,2	11,8	13,3	13,2	13,2	13,4	13,1	12,0	13,5	13,2	12,5	13,2
10,8	11,4	12,1	13,3	13,3	13,5	13,1	12,5	12,9	12,5	12,3	12,7
13,1	12,5	13,2	12,0	12,6	11,5	11,7	11,8	11,8	12,6	12,8	11,1
12,4	13,5	12,8	12,7	11,5	14,4	12,9	12,0	11,7	12,3	12,3	12,9
13,7	12,7	12,5	11,6	13,2	12,0	11,7	12,7	13,5	13,3	12,4	13,2

ЗАДАЧА 7.

X \ У	16	18	20	22	24	26
6					1	2
8			4	3	5	
10			3	7	2	
12		2	6	8		
14		10	15			
16	4	3	5			

Вариант 16.

ЗАДАЧА 5.

1 2 1 5 1 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 0 2 3 2 2 0 2 1 1 4
1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 3 0 3 1 1
2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 7 2 1 0 2 1 1 2 1 0 0 5 0 0 0
1 1 2 1 0 1 6 3 3 1 2 1 0 0 0 0 0 6 2 1 1 0 2 3 2

ЗАДАЧА 6.

752 734 730 729 720 722 724 737 727 725 716 732
723 729 721 722 725 731 747 724 737 712 732 734
726 728 711 729 715 747 731 732 737 719 725 720
729 725 723 727 732 718 733 732 732 734 731 720
735 732 725 732 708 714 721 733 733 735 131 725
714 715 722 731 725 732 720 726 715 717 718 718
727 727 724 735 728 727 715 744 729 720 717 723
720 717 727 718 709 727 722 735 733 724 732 704

ЗАДАЧА 7.

X \ У	17	22	27	32	37	42
17	1	2				
19	1	2	4			
21		4	4	8		
23			2	10	7	
25				3	7	2
27					2	1

Вариант 17.

ЗАДАЧА 5.

6 0 1 2 1 0 1 6 1 0 2 1 1 1 2 1 2 0 2 1 1 4 0 2 0
1 1 2 0 1 1 0 3 5 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 0 5 0 2 3
2 0 1 1 4 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 3 2 2 1 0
1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 0 0 2 1 2

ЗАДАЧА 6.

68 68 72 68 67 70 78 74 79 65 72 65 71 67 73
76 71 63 77 75 70 74 65 71 68 65 71 72 69 69
66 71 69 73 74 80 69 73 76 69 69 67 74 69 69
70 68 64 75 78 74 70 69 67 74 68 74 60 70 66
74 72 80 72 69 69 71 70 73 65 66 67 69 73 75
64 74 71 76 68 69 75 76 73 73 72 72 76 72 73
75 72 69 67 63 70 70 78 76 73 73 67 74 78 66

ЗАДАЧА 7.

x \ y	16,5	21,5	26,5	31,5	36,5	41,5
17,5	2	2				
19,5	3	4				
21,5		13	6	4		
23,5			9	21	10	2
25,5				19	20	1
27,5						4

Вариант 18.

ЗАДАЧА 5.

0 5 0 0 5 1 2 1 6 1 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 1 1 2 0 1 1 0
3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 2 0 1 1 2 0 1 5 0 1 1 2 1 0
0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 0 2 5 1 4 6 0 0 2 1 1 0 2 3 2 0
1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 2 3 2 2

ЗАДАЧА 6.

966 972 969 971 971 968 972 969 973 973 966 972 973 971
974 972 969 974 970 974 972 976 971 966 962 969 974 973
969 964 975 971 976 968 968 978 971 971 968 967 974 963
971 968 972 971 971 971 969 961 974 966 970 972 965 977
967 973 978 973 971 975 973 971 972 968 967 969 969 970
974 967 968 969 974 969 967 974 966 974 974 969 975 981
963 977 974 975 971 966 970 969 976 974 968

ЗАДАЧА 7.

X \ Y	120	140	160	180	200	220
150	1	6	4			
160			4	7	5	
170			16	15	6	
180				18	8	4
190				5	5	6
200					2	3

Вариант 19.

ЗАДАЧА 5.

0 1 2 1 0 2 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 0 2 1 1 4 0 0 4 2 3 2 0
1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 5 0 3 0
2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 2 3 2 2
1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 6 0 0 3 0 3 1 1 2 1 1 0

ЗАДАЧА 6.

12,4 13,2 10,4 15,2 13,4 13,0 12,9 12,0 12,2 12,4 13,5 13,3
12,3 12,9 12,1 12,2 12,5 13,1 14,7 12,4 13,7 11,2 11,7 12,3
11,1 12,9 11,5 14,7 13,1 13,2 13,7 11,9 12,5 12,0 12,6 12,8
13,2 13,2 13,4 13,1 12,0 12,9 12,5 12,3 12,7 13,2 11,8 13,3
10,8 11,4 12,1 13,3 13,3 13,5 13,1 12,5 13,5 13,2 12,5 13,2
11,4 11,5 12,2 13,1 12,5 13,2 12,0 12,6 11,5 11,7 11,8 11,8
12,4 13,5 12,8 12,7 11,5 14,4 12,9 12,0 13,2 13,4 12,7 12,7
13,7 12,7 12,5 11,6 13,2 12,0 11,7 12,7 11,8 10,9 12,7 12,2

ЗАДАЧА 7.

X \ У	130	150	170	190	210	230
85	3	4	2			
95		5	7	5		
105			8	14	6	
115				6	8	9
125				5	6	3
135					5	4

Вариант 20.

ЗАДАЧА 5.

6 5 0 1 5 1 0 2 1 1 4 2 1 2 1 1 4 0 0 0 2 1 1 1 1 2
0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 1 1 2 1 0 1 1 3 3
2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 0 0 0 1 2 1
1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 0 2 0 2 7 2 0 2 3 2 2

ЗАДАЧА 6.

424 404 434 430 429 420 422 424 437 427 425 416
421 422 425 431 447 424 437 412 432 434 427 427
426 428 411 429 415 447 431 432 437 419 425 420
423 427 432 418 433 432 432 434 431 420 429 425
435 432 425 432 408 414 421 433 433 435 431 425
414 415 422 431 425 432 420 426 415 417 418 418
424 435 428 427 415 444 429 420 417 423 423 429
432 420 417 427 418 409 427 422 435 433

ЗАДАЧА 7.

X \ У	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
115				4	3	2
120				8	7	
125			8	7	4	
130			7	15	3	
135		2	9	8		
140	1	4	6			

Вариант 21.

ЗАДАЧА 5.

5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 2 3 4 3 2 3 2 4
2 0 2 2 3 2 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 2 3 1 5 0 1 1
5 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 0 4 2 0

ЗАДАЧА 6.

75 79 67 75 72 69 68 63 70 70 78 76 74 73 68
69 69 73 68 67 70 78 74 79 65 72 65 72 71 69
69 77 72 63 77 75 70 74 65 71 68 66 72 67 74
74 69 69 66 71 69 73 74 80 69 73 76 69 69 67
68 75 69 74 60 70 66 70 68 64 75 78 72 70 69
74 76 75 72 80 72 69 69 71 70 73 66 67 67 69
72 71 73 76 72 73 64 74 71 76 68 69 76 76 73

ЗАДАЧА 7.

X \ У	300	500	700	900	1000	1100
8	1	2	5			
12		2	7	4		
16		9	6	4		
20			14	6	7	
24				1	8	9
28				4	5	6

Вариант 22.

ЗАДАЧА 5.

1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 3 1 5 2 0 5 5 3 0 2
2 2 3 2 0 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 2 1 4 3 2 3 2 4 2 0
2 1 1 3 1 3 5 3 5 2 5 2 1 1 0 4 2 0 5

ЗАДАЧА 6.

711 662 663 724 695 716 717 688 729 690 731 732 663 724 735
706 697 748 729 690 749 700 748 729 767 716 665 624 693 742
761 742 693 644 755 716 767 688 689 780 715 716 687 678 748
689 810 715 684 724 713 712 711 696 617 748 669 700 721 652
673 734 785 736 717 758 739 710 727 686 675 694 693 772 631
714 745 676 687 697 748 695 675 749 668 743 745 696 757 709
731 632 773 744 755

ЗАДАЧА 7.

X \ У	210	310	410	510	610	710
3					7	2
8				7	8	
13			15	5	9	
18		6	6	7		
23		5	9	2		
28	2	4	6			

Вариант 23.

ЗАДАЧА 5.

2 1 1 0 4 2 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 1 1 2
3 1 5 2 0 2 2 3 2 2 0 6 2 1 3 1 3 1 5 4 5 5 3 2
2 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 1 3 4 3 2 3 2 4 2 6

ЗАДАЧА 6.

0,35 0,33 0,24 0,32 0,04 0,52 0,34 0,30 0,29 0,20 0,18
0,17 0,23 0,23 0,29 0,21 0,22 0,25 0,31 0,47 0,24 0,31
0,26 0,28 0,11 0,29 0,15 0,47 0,31 0,32 0,37 0,19 0,20
0,29 0,25 0,23 0,27 0,32 0,18 0,33 0,32 0,32 0,34 0,25
0,35 0,32 0,25 0,32 0,08 0,14 0,21 0,33 0,33 0,35 0,22
0,14 0,15 0,22 0,31 0,25 0,32 0,20 0,26 0,15 0,17 0,18
0,32 0,34 0,27 0,27 0,24 0,35 0,28 0,27 0,15 0,44 0,29
0,37 0,27 0,25 0,16 0,32 0,20 0,17 0,27 0,18 0,09 0,27
0,22 0,24 0,37 0,12 0,25 0,20 0,31 0,22

ЗАДАЧА 7.

X \ У	35	40	45	50	55	60
6	3	2	3			
12		1	4	5		
18			7	18	6	
24				9	6	3
30				3	8	4
36					2	1

Вариант 24.

ЗАДАЧА 5.

4 2 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 5 5
3 1 5 2 0 2 2 3 1 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0
3 2 2 0 2 1 1 0 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 1 3 2
4 3 2 3 2 4

ЗАДАЧА 6.

12,9	12,0	12,2	12,4	13,6	13,3	12,4	13,2	10,4	15,2	13,4	13,0
12,1	12,2	12,5	13,1	14,7	12,4	13,7	11,2	11,7	12,3	12,3	12,9
11,1	12,9	11,5	14,7	13,1	13,2	13,7	11,9	12,5	12,0	12,6	12,8
12,9	12,5	12,3	12,7	13,2	11,8	13,3	13,2	13,2	13,4	13,1	12,0
13,3	13,5	13,1	12,5	13,5	13,2	12,5	13,2	10,7	11,4	12,1	13,3
11,4	11,5	12,2	13,1	12,5	13,2	12,0	12,6	11,5	11,7	11,8	11,9
13,4	12,7	12,7	12,4	13,5	12,8	12,7	11,5	14,4	12,9	12,0	13,2
12,5	11,6	13,2	12,0	11,7	12,7	11,8	10,9	12,7	12,2	13,7	12,7

ЗАДАЧА 7.

X \ У	16,5	21,5	26,5	31,5	36,5	41,5
17	1	2				
19		2	3	6		
21			4	8	2	
23				8	8	7
25				3	8	2
27					3	1

Вариант 25.

ЗАДАЧА 5.

6 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 0 4 2 3
4 2 3 2 2 0 6 2 1 3 1 3 1 5 4 1 1 5 2 0 4 3
5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 3 5 1 5 2 5 2 1 1 5 2 3
2 4 2

ЗАДАЧА 6.

731 682 683 725 684 677 706 788 741 798 654 727 625 710 675
651 716 703 698 691 768 718 631 775 757 709 743 651 712 688
691 662 713 694 739 748 807 696 735 764 694 694 678 744 695
676 747 681 745 604 707 669 708 683 643 755 787 711 701 697
699 698 710 700 731 658 666 676 695 738 753 741 722 804 727
717 702 726 764 723 738 647 747 717 765 685 691 750 760 730
755 725 694 689 632 703 704 787 769 733 733 674 744 789 669

ЗАДАЧА 7.

X \ У	7	9	11	13	15	17
15					3	2
18			2	6	4	
21		1	9	13		
24		3	2	1		
27	2	2				

Вариант 26.

ЗАДАЧА 5.

2 4 2 0 4 2 0 5 1 1 3 0 0 2 4 3 2 1 3 0 4 5 1 2 3
3 1 5 2 0 0 2 3 2 1 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 2 3 4 3 5
5 3 2 6 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 1 1 1

ЗАДАЧА 6.

672 668 671 671 668 672 669 673 673 666 672 673 673 663 677
669 674 670 674 672 676 671 666 662 669 674 674 669 675 670
676 674 669 664 675 672 676 668 668 678 671 671 668 667 674
671 668 672 671 671 671 669 661 674 665 670 672 665 674 675
667 673 678 673 671 675 673 671 672 668 667 669 669 677 663
671 674 667 668 664 674 669 667 674 666 674 668 681 674 672
671 666 666 670 669

ЗАДАЧА 7.

x \ y	12	15	16	21	24	27
2	2	3				
5		10	9	3		
8		6	35	5	1	
11			4	8	3	
14				1	2	4

Вариант 27.

ЗАДАЧА 5.

1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 5 5 3 2 2 0 2 3 2 4 2 1
3 1 5 2 0 2 2 1 2 1 0 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0 4 2 0 5 1
1 3 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 2 3 4 3 1

ЗАДАЧА 6.

1241 1323 1045 1527 1349 1302 1294 1206 1318 1220 1245
1178 1231 1234 1296 1213 1224 1257 1317 1472 1249 1221
1260 1280 1111 1296 1153 1478 1319 1324 1373 1198 1257
1297 1257 1235 1271 1320 1185 1336 1328 1328 1344 1200
1351 1323 1253 1325 1087 1149 1219 1331 1337 1357 1185
1140 1150 1222 1311 1255 1322 1200 1266 1155 1177 1188
1325 1341 1270 1277 1249 1353 1285 1270 1157 1449 1291
1371 1278 1256 1164 1323 1200 1174 1278 1187 1097 1274
1372 1120 1251 1201 1318 1206 1357 1333

ЗАДАЧА 7.

X \ y	25	50	75	100	125	150
34	5	4	3	1		
46		6	9	5		
58			12	8	4	
70				4	5	4
82					4	6

Вариант 28.

ЗАДАЧА 5.

0 2 0 5 1 2 6 4 3 2 3 3 0 4 5 1 4 1 3 0 3 1 5 0 0
2 2 1 2 2 1 6 2 1 3 1 3 1 5 4 5 5 3 2 2 2 4 2 1 1
0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 1 2 3 4 3 2 3 1 7 6

ЗАДАЧА 6.

10	42	34	30	29	20	22	24	35	33	24	32
29	21	22	25	31	47	24	37	12	17	23	23
11	29	15	47	31	32	37	19	25	20	29	25
23	27	32	18	33	32	32	34	31	20	26	28
35	32	25	32	8	14	21	33	33	35	31	25
31	25	32	20	26	15	17	18	18	37	27	22
32	34	27	27	24	35	28	27	15	44	29	20
25	16	32	20	17	27	38	9	27	22	14	15

ЗАДАЧА 7.

X \ У	20	26	32	38	44	50
4	6	4	3			
9		8	7	2		
14			13	8	9	
19			6	5	7	
24				6	2	4

Вариант 29.

ЗАДАЧА 5.

0 2 2 4 3 0 3 3 0 4 5 1 3 1 6 2 0 2 1 3 1 2 3 2 4
2 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0 4 2 0 5 1 1 3 2 3 4 2 6
5 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 0 5 3 5 2 5 2 1 1 4 7

ЗАДАЧА 6.

651 716 671 732 688 681 724 685 677 700 788 743 794 650 724
654 712 700 695 692 768 719 639 772 754 704 745 653 719 684
743 693 695 667 719 691 735 744 803 690 730 767 698 691 674
671 745 689 748 604 702 666 707 683 640 750 787 715 703 698
736 752 744 721 809 720 691 698 716 709 732 654 667 675 693
712 706 727 768 724 733 641 749 715 760 682 690 750 769 731
740 780 667 756 724 692 685 637 708 703 785 764 736 737 679

ЗАДАЧА 7.

X \ У	18	21	24	27	30	33
25	4	3	6			
30		7	4	8		
35		15	19	7		
40			8	5	6	
45				4	3	1

Вариант 30.

ЗАДАЧА 5.

0 4 2 0 5 1 1 3 0 2 1 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 1
3 1 5 2 0 2 2 3 2 2 1 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0
5 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 3 0 0 5 3 5 2 5 2 1 1
2 3 4 3 2 3 2 4 2 6 7 1 0

ЗАДАЧА 6.

79 74 74 88 77 79 79 76 86 77 81 81 74 80 81
78 77 82 80 77 82 78 82 80 84 79 74 70 77 82
84 82 77 72 83 78 84 76 76 86 79 79 76 75 84
76 89 79 76 80 79 79 79 77 69 84 74 78 80 73
73 81 86 81 79 83 81 79 80 76 75 77 77 85 71
79 84 75 76 77 82 77 75 82 74 82 82 77 83 78
81 71 85 82 83 76 87 76

ЗАДАЧА 7.

x \ y	14	19	24	29	34	39
4	3	3	4	6		
7		5	8	9		
10		2	13	7	6	
13			1	9	2	4
16					3	5

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Каждый блок заданий состоит из однотипных задач. Поэтому мы надеемся, что примеры решений аналогичных задач, которые приведены здесь, помогут вам справиться с контрольной работой, а заодно глубже понять темы этого раздела высшей математики.

ЗАДАЧА № 1.0. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, – высшего качества, равна *0,9*, для второго – *0,7*, для третьего – *0,6*. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) все высшего качества; б) две высшего качества; в) хотя бы одна высшего качества.

Решение: Перед решением задачи необходимо внимательно прочитать условие задачи и обозначить буквами все события, которые могут произойти.

Пусть событие A состоит в том, что все взятые детали высшего качества; событие B состоит в том, что только две из взятых деталей высшего качества; событие C состоит в том, что из взятых деталей хотя бы одна высшего качества. При этом возможны следующие гипотезы: H_1 – деталь, взятая с первого автомата, будет высшего качества, H_2 – деталь, взятая со второго автомата, будет высшего качества, H_3 – деталь, взятая с третьего автомата, будет высшего качества. Из условий задачи находим:

$$P(H_1)=0,9,\ P(H_2)=0,7,\ P(H_3)=0,6,\ P(\overline{H}_1)=1-0,9=0,1,$$

$$P(\overline{H}_2)=1-0,7=0,3,\ P(\overline{H}_3)=1-0,6=0,4.$$

а) Событие A состоит в том, что все три взятые детали высшего качества. *Событие, которое состоит в том, что несколько событий произойдут одновременно, называется их произведением.* Тогда – $A=H_1\cdot H_2\cdot H_3$. Все эти три гипотезы – независимые события (независимые в совокупности, так как вероятность любого из событий H_i не меняется при наступлении любой из двух других гипотез или обеих вместе). *Вероятность произведения событий, независимых в совокупности, равна произведению их вероятностей.* Тогда вероятность события A найдем по формуле:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=0,9\cdot 0,7\cdot 0,6=0,378.$$

б) *Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в том, что произойдет хотя бы одно из этих событий.* Событие B равно сумме трех событий. Первое событие: детали с первого и второго автоматов – высшего качества, а с третьего – нет $(H_1\cdot H_2\cdot \overline{H}_3)$. Второе событие: детали с первого и третьего автоматов – высшего качества, а со второго – нет $(H_1\cdot \overline{H}_2\cdot H_3)$. Третье событие: детали со второго и третьего автоматов – высшего качества, а с первого – нет $(\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3)$. Таким образом,

$$B=H_1\cdot H_2\cdot \overline{H}_3+H_1\cdot \overline{H}_2\cdot H_3+\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3.$$

Все три слагаемых – несовместные события, так как появление любого из них исключает появление других. *Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей.* Так как гипотезы – независимые в совокупности события, то вероятность их произведения равна произведению их вероятностей. Тогда вероятность события B найдем по формуле:

$$P(B) = P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\overline{H}_3) + P(H_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(H_3) + P(\overline{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3) =$$
$$= 0,9\cdot 0,7\cdot 0,4 + 0,9\cdot 0,3\cdot 0,6 + 0,1\cdot 0,7\cdot 0,6 = 0,252 + 0,162 + 0,042 = 0,456.$$

в) *Два события, одно из которых обязательно должно произойти, но наступление одного из них исключает возможность наступления другого, называются противоположными. Событие, противоположное событию A обозначается $\overline{A}$. Вероятность суммы противоположных событий равна сумме их вероятностей и равна единице, то есть* $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Событие C противоположно событию, которое состоит в том, что ни одна из взятых деталей не будет высшего качества. Тогда $\overline{C} = \overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3$. Все эти три гипотезы – независимые в совокупности события и вероятность их произведения равна произведению их вероятностей. Тогда вероятность события C равна

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{H}_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(\overline{H}_3) = 1 - 0,1\cdot 0,3\cdot 0,4 = 1 - 0,012 = 0,988.$$

ЗАДАЧА № 2.0[a]. Вероятность появления события в каждом из 245 независимых испытаний постоянна и равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит ровно 50 раз.

Решение: Так как число испытаний велико (245), то пользоваться формулой Бернулли крайне затруднительно. Формально ответ может быть получен. Однако нахождение окончательных численных значений связано с очень громоздкими вычислениями. Поэтому для таких случаев были найдены приближенные формулы, которые дают достаточно точные значения искомых вероятностей при сравнительно несложных вычислениях.

В данном примере воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. *Если вероятность* **p** *наступления события* **A** *в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие* **A** *наступит ровно* **m** *раз в* **n** *независимых испытаниях, приближенно равна*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ *определяется равенством* $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, *а* $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ *и* $q = 1 - p$.

По условию, $n = 245$, $m = 50$, $p = 0,25$, $q = 1 - p = 0,75$. Получим

$$x = \frac{50 - 245\cdot 0,25}{\sqrt{245\cdot 0,75\cdot 0,25}} = \frac{-11,25}{\sqrt{45,9375}} = -\frac{11,25}{6,778} \approx -1,66.$$

Так как $\varphi(x)$ – функция четная ($\varphi(-1,66) = \varphi(1,66)$), то по приложению 1 находим искомую вероятность $P_{245}(50) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(1,66) = \dfrac{0,1006}{6,778} \approx 0,0148$.

ЗАДАЧА № 2.0б. Вероятность появления события в каждом из 245 независимых испытаний постоянна и равна $0,25$. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 45 раз и не более 60 раз.

Решение: Если требуется найти вероятность того, что число наступлений события A заключено в каких-то границах, то в этом случае используют интегральную теорему Муавра-Лапласа. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что событие A наступит в n независимых испытаниях число раз, заключенное в границах от m_1 до m_2 включительно, приближенно равна*

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где функция $\Phi(x)$ – функция Лапласа – определяется равенством

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \text{ а } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

По условию, $n = 245$, $m_1 = 45$, $m_2 = 60$, $p = 0,25$, $q = 1 - p = 0,75$. Получим

$$x_1 = \frac{45 - 245 \cdot 0,25}{\sqrt{245 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{-16,25}{\sqrt{45,9375}} \approx -2,40,$$

$$x_2 = \frac{60 - 245 \cdot 0,25}{\sqrt{245 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{-1,25}{\sqrt{45,9375}} \approx -0,18.$$

Так как $\Phi(x)$ – функция нечетная ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$), то по приложению 2 находим: $\Phi(-2,40) = -\Phi(2,40) \approx -0,4918$, $\Phi(-0,18) = -\Phi(0,18) \approx -0,0714$. Таким образом, искомая вероятность:

$$P_{245}(45 \le m \le 60) \approx \Phi(-0,18) - \Phi(-2,40) = -0,0714 + 0,4918 = 0,4204.$$

ЗАДАЧА № 2.0в. Вероятность производства бракованной детали равна 0,002. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 5 бракованных.

Решение: Если число независимых испытаний n достаточно велико ($n > 100$), а вероятность появления события в каждом испытании p постоянна, но мала ($p \le 0,3$), и произведение np остается небольшим (не больше 10), то для отыскания вероятности того, что в этих испытаниях событие A появится ровно m раз, используют приближенную *формулу Пуассона:*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda_n^m e^{-\lambda_n}}{m!},$$

где $\lambda_n = np$ (среднее число появлений события A).

Поскольку число независимых испытаний $n = 1000$ достаточно велико, а вероятность $p = 0,002$ мала, то воспользуемся формулой Пуассона. По условию задачи $m = 5$. Так как $\lambda_n = np = 1000 \cdot 0,002 = 2$, то искомая вероятность:

$$P_{1000}(5) \approx \frac{2^5 e^{-2}}{5!} = \frac{32e^{-2}}{120} \approx 0,0361.$$

ЗАДАЧА № 3.0в. Составить закон распределения СВ X, которая может принимать только два значения: x_1 и x_2. Причем $x_1 < x_2$. Известны математическое ожидание $M(X)=3,8$, дисперсия $D(X)=0,16$ и вероятность $p_1 = P(X=x_1)=0,2$.

Решение: Запишем закон распределения СВ X, которая может принимать только два значения: x_1 и x_2

X	x_1	x_2
Вероятность	p_1	p_2

Так как случайная величина обязательно принимает одно и только одно из значений, то $p_1+p_2=1$. Дана вероятность $p_1=P(X=x_1)=0,2$. Тогда найдем $p_2=P(X=x_2)=1-p_1=1-0,2=0,8$.

X	x_1	x_2
P	0,2	0,8

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X)=0,2\cdot x_1+0,8\cdot x_2;\ D(X)=0,2\cdot x_1^2+0,8\cdot x_2^2-\left(M(X)\right)^2.$$

Так как по условию даны $M(X)=3,8$ и $D(X)=0,16$, то получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,2\cdot x_1+0,8\cdot x_2=3,8\,; \\ 0,2\cdot x_1^2+0,8\cdot x_2^2-3,8^2=0,16\,. \end{cases}$$

Найдем искомые значения, решив эту систему:

$$\begin{cases} x_1+4x_2=19\,; \\ x_1^2+4x_2^2=73\,; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=19-4x_2\,; \\ (19-4x_2)^2+4x_2^2=73\,; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=19-4x_2\,; \\ 5x_2^2-38x_2+72=0\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=19-4x_2\,; \\ \left[\begin{array}{l} x_2=4\,; \\ x_2=3,6\,; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3\,; \\ x_2=4\,; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1=4,6\,; \\ x_2=3,6\,. \end{cases}$$

Так как $x_1 < x_2$, то закон распределения имеет вид:

X	3	4
P	0,2	0,8

ЗАДАЧА № 3.0г. Билет на право разового участия в азартной игре стоит x долларов. Игрок выбрасывает две игральные кости и получает выигрыш: $n=150$ долларов, если выпали две шестёрки; $m=50$ долларов при выпадении только одной шестёрки; проигрывает, если ни одна шестёрка не выпала. СВ X – величина выигрыша. Составить закон распределения СВ X. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Какова должна быть стоимость билета, чтобы игра приносила доход её учредителям?

Решение: Составим закон распределения СВ X – величины выигрыша игрока. Для этого рассчитаем вероятности. При бросании игральной кости шестёрка выпадает с вероятностью $\frac{1}{6}$, а любое другое значение – с вероятностью $\frac{5}{6}$. Следовательно, вероятность выпадения двух шестёрок равна произведению $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. В случае выпадения одной шестерки вероятность равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{36}$. Вероятность того, что ни одна шестёрка не выпадет и игрок проиграет, равна $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$. Сумма вероятностей всех значений случайной величины X равна единице. Запишем закон распределения:

Величина выигрыша X	0	50	150
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

$$M(X)=0\cdot\frac{25}{36}+50\cdot\frac{10}{36}+150\cdot\frac{1}{36}=\frac{650}{36}\approx 18{,}06;$$

$$D(X)=0^2\cdot\frac{25}{36}+50^2\cdot\frac{10}{36}+150^2\cdot\frac{1}{36}-\left(\frac{650}{36}\right)^2\approx 993{,}44;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 31{,}52.$$

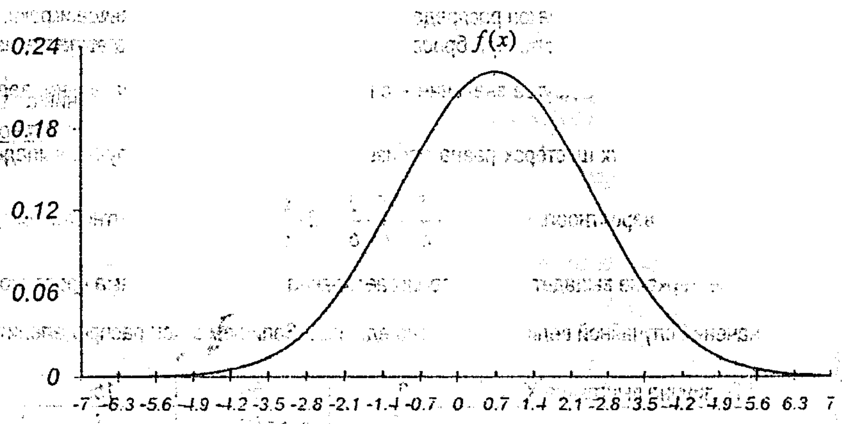
Так как среднее ожидаемое значение выигрыша $M(X)=18{,}06$ доллара, то и стоимость билета должна быть не ниже этого значения.

ЗАДАЧА № 4.0. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X)=0{,}7$ и дисперсией $D(X)=3{,}24$. Записать плотность вероятности $f(x)$ и построить схематический график этой функции. Записать интервал практически наиболее вероятных значений случайной величины X. Что вероятнее: $X\in(-1;1)$ или $X\in(0;2)$?

Решение: Функция плотности распределения вероятностей для нормального распределения имеет вид: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a=M(X)$ и $\sigma=\sqrt{D(X)}$. Так как по условию $M(X)=0{,}7$ и $D(X)=3{,}24$, то $a=0{,}7$, $\sigma=\sqrt{3{,}24}=1{,}8$. Тогда

$$f(x)=\frac{1}{1{,}8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-0{,}7)^2}{2\cdot 1{,}8^2}}$$

$f(x)$



Построим схематический график этой функции. При $x = a = 0,7$ функция достигает максимального значения $f(0;7) = f_{max} = \dfrac{1}{1,8\sqrt{2\pi}} \approx 0,22163$. При $x = a \pm \sigma$ график функции имеет перегиб (в данном случае в точках $x = -1,1$ и $x = 2,5$; $f(-1,1) = f(2,5) = \dfrac{1}{1,8\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,1344$).

Интервал практически наиболее вероятных значений для любой нормально распределенной случайной величины X определяется правилом «трех сигм»:

$$P\left(X \in (a - 3\sigma; a + 3\sigma)\right) = 0,9973.$$

В данном случае, значения случайной величины X практически принадлежат интервалу $(0,7 - 3 \cdot 1,8; 0,7 + 3 \cdot 1,8)$ или $(-4,7; 6,1)$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(\alpha; \beta)$ определяется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Тогда

$$P(-1 < X < 1) = \Phi\left(\frac{1 - 0,7}{1,8}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - 0,7}{1,8}\right) = \Phi\left(\frac{0,3}{1,8}\right) - \Phi\left(-\frac{1,7}{1,8}\right) =$$

$$= \Phi(0,167) + \Phi(0,944) = 0,06618 + 0,32753 = 0,39371;$$

$$P(0 < X < 2) = \Phi\left(\frac{2 - 0,7}{1,8}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 0,7}{1,8}\right) = \Phi\left(\frac{1,3}{1,8}\right) - \Phi\left(-\frac{0,7}{1,8}\right) =$$

$$= \Phi(0,722) + \Phi(0,389) = 0,26492 + 0,15132 = 0,41624.$$

Таким образом, случайная величина X вероятнее примет значения из интервала $(0;2)$, чем из интервала $(-1;1)$.

5.3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

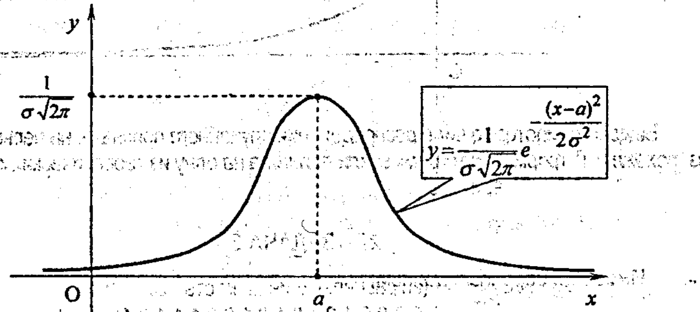
Каждый блок заданий состоит из 30 однотипных задач. Поэтому мы надеемся, что примеры решений аналогичных задач, которые приведены здесь, помогут вам справиться с работой, а заодно глубже понять темы этого раздела высшей математики.

Прежде всего, напомним некоторые виды распределения случайной величины (СВ) X, рассматриваемые в теории вероятностей.

1. *Нормальное распределение* задается функцией плотности вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

график которой имеет вид

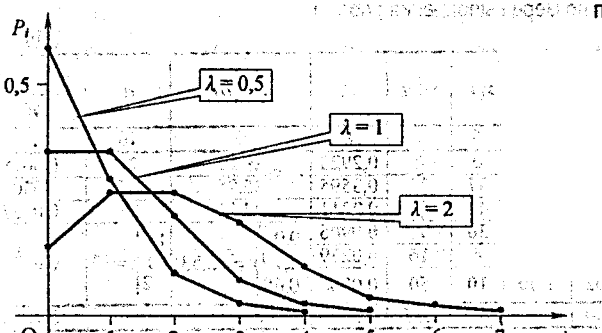


Здесь a – математическое ожидание, σ – среднее квадратичное отклонение, σ^2 – дисперсия СВ X. Одним из характерных свойств нормально распределенной величины является "правило 3-х σ", согласно которому практически все значения ее (99,73 %) попадают в интервал $(a-3\sigma; a+3\sigma)$, длиною 6σ.

2. *Распределение Пуассона* рассматривается для дискретных СВ и задает вероятность того, что X примет значение i, формулой

$$P_i=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}.$$

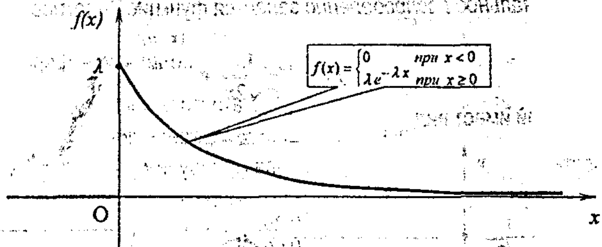
Отличительной особенностью этого распределения является равенство математического ожидания и дисперсии: $M(X)=\sigma_X^2=\lambda$. На чертеже приводятся многоугольники этого распределения при некоторых λ.



3. *Показательное распределение* непрерывной неотрицательной СВ задается функцией плотности

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при\ x\geq 0\end{cases}$$

и отличается тем, что у него совпадают математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение $M(X)=\sigma_X=\frac{1}{\lambda}$. Ниже приведен график.



Выдвигая гипотезу о виде распределения случайного признака, на первом шаге исходят из "похожести" формы гистограммы или полигона на одну из теоретических кривых.

ЗАДАЧА 5.

Имеем выборочные данные:

0 5 0 0 0 1 2 1 0 1 0 1 0 2 1 1 1 2 1
1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3
2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1
1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1
0 2 1 1 4 0 0 0 2 1 1 0 2 3 2 0 2 3 2
2 3 0 1 2

Обозначим через x_i варианты признака X. Из условия видим, что x_i принимает одно из значений 0, 1, 2, 3, 4, 5. Следовательно, X – дискретная случайная величина. Объем выборки n = 100. Просматривая данные, подсчитываем частоты n_i вариант x_i и записываем в таблицу (графы 2 и 3). Мы предлагаем формировать общую таблицу, которая содержит вспомогательные и итоговые результаты подсчетов по всем пунктам задания. Она заполняется по мере выполнения работы.

Таблица 1.

i	x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$F^*(x_i)$	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	P_i	$n_i' = nP_i$	n_i	$\frac{(n_i'-n_i)^2}{n_i'}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	29	0,29	0,29	0	0	0,2923	29,23	29	0.0018
1	1	37	0,37	0,66	37	37	0,3595	35,95	37	0,0307
2	2	21	0,21	0,87	42	84	0,2211	22,11	21	0,0557
3	3	10	0,10	0,97	30	90	0,0906	9,06	10	0,0176
4	4	1	0,01	0,98	4	16	0,0279	2,79 = 12,53	1 = 13	
5	5	2	0,02	1,00	10	50	0,0068	0,68	2	
Σ		100	1,00		123	277	0,9982			0,1058

Вычисляем относительные частоты вариант x_i по формуле $\frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{100}$ $(i = 0,1,2,\dots,5)$. Результаты вносим в графу 4. Теперь совокупность граф 2 и 3 есть статистический ряд распределения частот, а столбцов 2 и 4 – статистический ряд распределения относительных частот.

Начертим полигон частот, откладывая на горизонтальной оси варианты x_i, а на вертикальной – соответствующие частоты n_i. Затем полученные точки последовательно соединяем отрезками прямых.

Эмпирическая функция распределения определяется формулой $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – сумма частот вариант, меньших x. В статистике она является аналогом интегральной функции распределения $F(x) = P(X < x)$ в теории вероятностей. Исходя из таблицы 1 (графа 4), получим (чертеж см. ниже):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 0{,}29, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 0{,}66, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0{,}87, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 0{,}97, & \text{если } 3 < x \le 4, \\ 0{,}98, & \text{если } 4 < x \le 5, \\ 1{,}00, & \text{если } 5 < x. \end{cases}$$

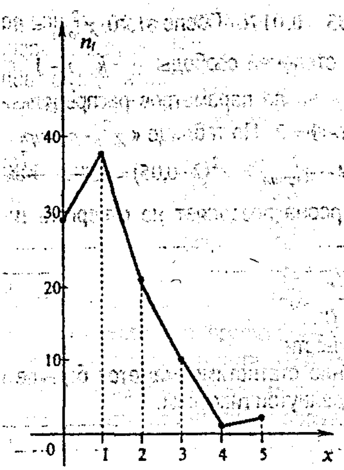
Вычислим выборочные оценки параметров распределения по формулам:

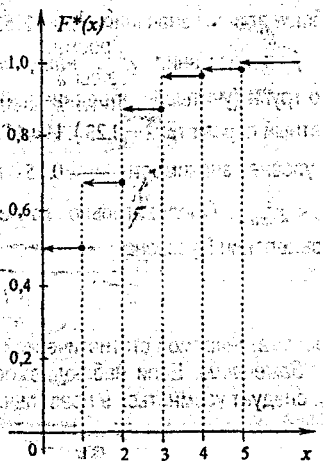
выборочную среднюю $\bar{x}_в = \frac{\sum x_i n_i}{n}$,

выборочную дисперсию $\sigma_в^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_в)^2$;

выборочное среднее квадратичное отклонение $\sigma_в = \sqrt{\sigma_в^2}$.

Для этого заполняем графы 5 и 6. Получим: $\bar{x}_в = 123/100 = 1{,}23$; $\sigma_в^2 = 277/100 - 1{,}23^2 = 1{,}2571$; $\sigma_в = \sqrt{1{,}2571} = 1{,}12$.





По виду полигона, а также из того, что $\bar{x}_в$ и $\sigma_в^2$ почти совпадают, что является признаком распределения Пуассона, выдвинем гипотезу о том, что рассматриваемый признак X распределен по закону Пуассона $P_i = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$, $(i = 0,1,2,3,\ldots)$, где λ — математическое ожидание и дисперсия распределения. Положим в нашем случае $\lambda = 1.23$. Тогда $P_i = \frac{1,23^i e^{-1,23}}{i!}$.

Вычисляем теоретические вероятности P_i: $P_0 = \frac{1,23^0 e^{-1,23}}{0!} = 0,2923$;

$P_1 = \frac{1,23^1 \cdot 0,2923}{1!} = 0,3595$; $P_2 = \frac{1,23^2 \cdot 0,2923}{2!} = 0,2211$; $P_3 = \frac{1,23^3 \cdot 0,2923}{3!} = 0,0906$;

$P_4 = \frac{1,23^4 \cdot 0,2923}{4!} = 0,0279$; $P_5 = \frac{1,23^5 \cdot 0,2923}{5!} = 0,0069$ (графа 8).

Вопрос: почему сумма P_i отличается от единицы?

Сравнивая графы 4 и 8, еще раз убеждаемся, что распределение близко к пуассоновскому.

Согласно критерию согласия Пирсона вычисляется статистика

$$\chi^2_{набл} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'},$$

где $n_i' = nP_i$ – теоретические (выравнивающие) частоты. Для их вычисления элементы графы 8 умножаем на n = 100 (графа 9). В графу 11 вносим величины $\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$. При этом учитываем, что значения вариант, частоты которых меньше 5, надо объединить с соседними вариантами так, чтобы их общая сумма оказалась больше пяти. В нашем случае объединяем последние три варианты, считая при этом, что эмпирическая сумма вариант равна $n_i = 13$ (графа 10), а $n_i' = (0{,}0906 + 0{,}0279 + 0{,}0068) \cdot 100 = 12{,}53$. Соответственно, в графе 11 считаем общее для них значение $(13 - 12{,}53)^2/12{,}53 = 0{,}0176$. После этого $\chi^2_{набл.} = 0{,}1058$.

Для отыскания $\chi^2_{крит}$ находим число степеней свободы $\nu = k - r - 1$, где k=4 - число групп (учитывая объединение), $r = 1$ – число параметров распределения (один расчетный параметр $\lambda = 1{,}23$). Итак, $\nu = 4 - 1 - 1 = 2$. По таблице « χ^2 – *распределение* » при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим $\chi^2_{крит} = \chi^2(2;\ 0{,}05) = 5{,}991$. Как видим, $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$. Следовательно, критерий Пирсона позволяет не отвергать гипотезу о распределении Пуассона

$$P_i = \frac{1.23^i e^{-1.23}}{i!}$$

для рассматриваемой статистической совокупности.

Замечание. Если наблюдаемое значение статистики окажется больше критического, следует усомниться в правильности выдвинутой гипотезы.

ЗАДАЧА 2.

Имеются данные выборочного наблюдения над признаком X:

61,0	64,8	51,8	52,8	68,9	70,2	95,6	52,8	87,3	68,1	20,8	31,8	55,8
32,3	56,8	54,8	53,3	65,8	59,6	59,5	85,8	73,8	26,1	65,8	57,7	57,7
73,6	89,3	71,8	45,3	60,7	59,6	60,5	79,8	40,8	40,8	33,2	62,8	81,2
67,8	34,6	60,8	82,0	33,7	58,6	58,6	61,1	89,1	37,8	67,5	62,1	69,4
39,2	53,2	65,2	65,2	59,6	68,3	60,2	58,2	44,3	60,8	37,8	55,0	68,3
68,3	29,2	64,4	39,2	48,4	60,3	37,5	64,8	79,4	40,1	40,1	42,0	54,6
54,8	79,9	57,1	87,5	47,9	80,0	50,1	50,1	53,8	56,9	100,8	73,8	40,8
54,6	75,6	31,8	49,6	49,6	75,6	51,6	28,6	40,8				

Судя по тому, что повторяющихся значений, как это было в задаче 1, практически нет, этот признак следует отнести к непрерывным. Следовательно, требуется построить для него интервальное распределение, для чего, подсчитав количество данных, определяем объем выборки $n = 100$. Затем находим наименьшую и наибольшую варианты: x_{min}=20,8 и x_{max}=100,8 и по формуле Стерджеса находим длину интервала *варьирования*

$$h \cong \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1+3{,}322\cdot\lg n} = \frac{100{,}8-20{,}8}{1+3{,}322\cdot\lg 100} = \frac{80}{7{,}644} \cong 10{,}45.$$

Начало первого интервала определяем по формуле $a_0 = x_{\min} - \frac{h}{2} = 20{,}8 - \frac{10{,}45}{2} = 15{,}58$. Далее, последовательно прибавляя h, получаем границы интервалов: a_1 = 26,03; a_2 = 36,48; a_3 = 46,93; a_4 = 57,38; a_5 = 67,83; a_6 = 78,28; a_7 = 88,73; a_8 = 99,18; a_9 = 109,63. Последний интервал должен "накрывать" x_{max} = 100,8.

Теперь подсчитаем *интервальные частоты* – количества вариант, попавших в каждый интервал. Это удобно делать с помощью приводимой ниже таблицы.

Таблица 2.

№ интервала	Интервалы	Подсчет частот	Частоты n_i
1	(15,58; 26,03)	L	2
2	(26,03; 36,48)	⊠ ⊔	8
3	(36,48; 46,93)	⊠ ⊠ □	14
4	(46,93; 57,38)	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ L	22
5	(57,38; 67,83)	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊔	28
6	(67,83; 78,28)	⊠ ⊠ ⊔	13
7	(78,28; 88,73)	⊠ □	9
8	(88,73; 99,18)	⊔	3
9	(99,18; 109,63)	I	1
Объем выборки			n = 100

Последовательно просматривая данные, каждое значение отмечаем чертой в строке соответствующего интервала, формируя квадратики с диагональю, что соответствует пяти вариантам, попавшим в интервал, и удобно при подсчете частот n_i.

Результаты дальнейшей обработки данных вносятся в таблицу, аналогичную таблице 3.

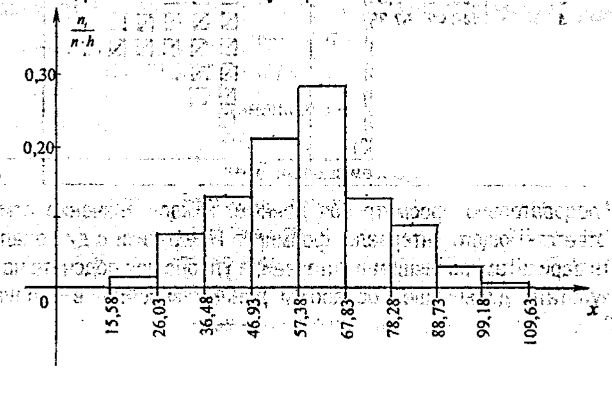
Таблица 3

i	$(a_{i-1}; a_i)$	x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$\frac{a_{i-1}-\bar{x}_в}{\bar{s}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	(15,58; 26,03)	20,80	2	0,02	41,60	865,28	–2,55
2	(26,03; 36,48)	31,25	8	0,08	250,00	7812,50	–1,93
3	(36,48; 46,93)	41,70	14	0,14	583,80	24344,46	–1,31
4	(46,93; 57,38)	52.15	22	0,22	1147,30	59831,70	–0,69
5	(57,38; 67,83)	62,60	28	0,28	1752,80	109725,28	–0,07
6	(67,83; 78,28)	73,05	13	0,13	949,65	69371,93	0,54
7	(78,28; 88,73)	83,50	9	0,09	751,50	62750,25	1,16
8	(88,73; 99,18)	93.95	3	0,03	281,85	26479,81	1,78
9	(99,18; 109,63)	104,40	1	0,01	104,40	10899,36	2,40
10	109,63						3,02
Всего			100	1,00	5862,90	372080,57	

Продолжение таблицы 3

i	$\Phi\left(\frac{a_{i-1}-\bar{x}_в}{\bar{s}}\right)$	P_i	$n_i' = nP_i$	n_i	$\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$
–	9	10	11	12	13
1	–0,4946	0,0214	2,14 } = 8,97	2 } = 10	0,1183
2	–0,4732	0,0683	6,83	8	
3	–0,4049	0,1500	15,00	14	0,0667
4	–0,2549	0,2270	22,70	22	0,0216
5	–0,0279	0,2333	23,33	28	0,9348
6	0,2054	0,1716	17,16	13	1,0085
7	0,3770	0,0855	8,55 } = 12,17	9 } = 13	0,0566
8	0,4625	0,0293	2,93	3	
9	0,4918	0,0069	0,69	1	
10	0,4987				
Всего		0,9936	99,33	100	2,2065

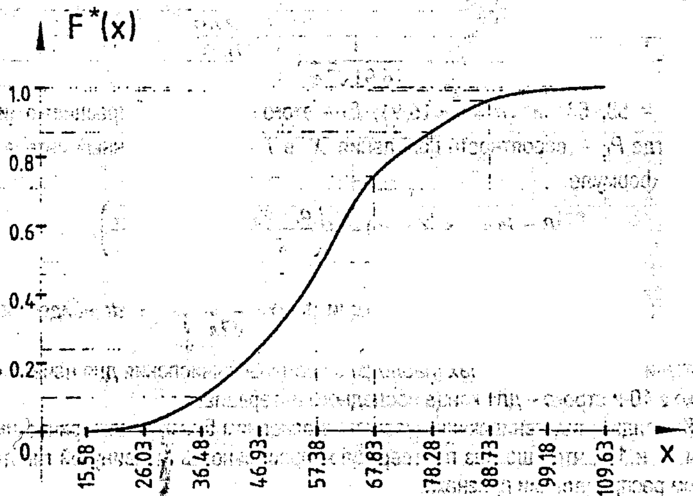
Введем в рассмотрение x_i – середины интервалов и, приписав им соответствующие интервальные частоты n_i, получим, как и в задаче 1, вариационный ряд (графы 3 и 4). Исходная совокупность граф 2 и 4 называется *интервальным распределением*. На их данных строится *гистограмма относительных частот*: прямоугольники с основаниями – интервалами вариации и высотами, равными соответствующим интервальным относительным частотам.



Эмпирическую *функцию распределения* зададим таблично, исходя из данных столбца 5 по правилу накопления частот.

a_i	15,58	26,03	36,48	46,93	57,38	67,83	78,28	88,73	99,18	109,63
$F(a_i)$	0	0,02	0,10	0,24	0,46	0,74	0,87	0,96	0,99	1,00

Строим график эмпирической функции распределения. Для интервального распределения частот эта функция должна быть непрерывна, поэтому в системе координат отмечаем точки, исходя из данных последней таблицы, и соединяем их плавной линией.



Для выдвижения гипотезы о виде распределения вычислим основные числовые оценки признака X:

средняя выборочная $\bar{x}_в = \dfrac{\Sigma x_i n_i}{n} = \dfrac{5862,90}{100} = 58,629 \cong 58,63$;

выборочная дисперсия:

$$D_в(x) = \frac{\Sigma x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_в)^2 = \frac{372080,57}{100} - (58,63)^2 = 283,32;$$

выборочное среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_в(X) = \sqrt{D_в(X)} = \sqrt{283,32} = 16,83$$

исправленное среднее квадратичное отклонение:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\ \sigma_в(X) = \sqrt{\frac{100}{99}}\ 16,83 \doteq 16,91.$$

При этом мы воспользовались итоговыми данными 6 и 7 граф.

В пользу того, что X имеет нормальное распределение, говорят следующие факты:

а) полигон относительных частот напоминает кривую Гаусса;

б) оценивая теоретическое математическое ожидание a величиной $\bar{x}_в = 58,63$, а теоретическое среднее квадратичное отклонение σ величиной $\sigma_в(X) = 16,83$, получим

$$(a-3\sigma;\, a+3\sigma) \cong (\bar{x}_в - 3\sigma_в(X);\, \bar{x}_в + 3\sigma_в(X)) =$$
$$= (58{,}63 - 3\cdot 16{,}83;\, 58{,}63 + 3\cdot 16{,}83) =$$
$$= (8{,}14;\, 109{,}12).$$

Как видим, исходные данные попадают в этот интервал, что согласуется с "правилом 3σ".

В силу этого при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ выдвинем и проверим гипотезу о том, что рассматриваемый признак X имеет нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{16{,}91\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-58{,}63)^2}{571{,}90}}$$

с $a = \bar{x}_в = 58{,}63$ и $\sigma = \bar{s} = 16{,}91$. Для этого вычислим выравнивающие частоты $n_i' = nP_i$, где P_i – вероятность попадания X в i-й вариационный интервал определяется по формуле

$$P_i = P(a_{i-1} \le X \le a_i) = \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}_в}{\bar{s}}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \bar{x}_в}{\bar{s}}\right),$$

a_i – концы интервалов, а значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ найдем по таблицам (приложение 2). В 8 и 9 графах *таблицы 3* сделаны вычисления для начал интервалов, и только в 10-й строке – для конца последнего интервала.

Как видим, выравнивающие частоты в основном близки к эмпирическим частотам (графы 11 и 12), что еще раз подтверждает правильность выдвинутой гипотезы о нормальном распределении признака.

Гипотезу о виде распределения проверим, применяя *критерий согласия Пирсона*, в котором вычисляется статистика

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

При этом интервалы, имеющие частоты меньшие пяти, объединяются с соседними (графы 11 и 12). В итоге получено $\chi^2_{набл.} = 2{,}2065$.

Далее определим число степеней свободы $\nu = k - r - 1$, где $k = 6$ – число интервалов с учетом их объединения, а $r = 2$ – число параметров распределения, вычисленных по выборке (a и σ^2). У нас получится $\nu = 3$. Тогда при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ и $\nu = 3$ по таблице "*Критические точки распределения* χ^2" находим $\chi^2_{крит.} = \chi^2(3;\, 0{,}01) = 11{,}3$. Так как $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, то с 99%-ой уверенностью можно утверждать, что признак X распределен нормально и его функция плотности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{16{,}91\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-58{,}63)^2}{571{,}90}}$$

с $a = 58{,}63$ и $\sigma = 16{,}91$.

Теперь для отыскания вероятности попадания признака X в интервал $(58{,}63-5;58{,}63+3)=(53{,}63;61{,}63)$ воспользуемся формулой

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

У нас

$$P(53{,}63<X<61{,}63)=\Phi\left(\frac{61{,}63-58{,}63}{16{,}91}\right)-\Phi\left(\frac{53{,}63-58{,}63}{16{,}91}\right)=\Phi(0{,}18)+\Phi(0{,}30)=$$
$$=0{,}0714+0{,}1179=0{,}1893.$$

Задача 7.

Предварительные вычисления вносим в "расширенную" таблицу:

$x \backslash y$	10	15	20	25	30	m_x	xm_x	x^2m_x	$\overline{Y}_x$
2	3	4				7	14	28	12,86
5		10	9	3		22	110	550	18,41
8		6	40	5		51	408	3264	19,90
11			4	8	3	15	165	1815	24,67
14				2	3	5	70	980	28,00
m_y	3	20	53	18	6	$n=100$	767	6637	
ym_y	30	300	1060	450	180	2020			
y^2m_y	300	4500	21200	11250	5400	42650			
$\overline{X}_y$	2	5,30	7,72	9,50	12,50				

Сначала подсчитываются частоты составляющих признаков m_x и m_y суммированием совместных частот по строкам и столбцам соответственно.

Числа в столбцах m_x, xm_x, x^2m_x, стоящие под двойной чертой, и строках m_y, ym_y, y^2m_y, стоящие справа от двойной черты, получены суммированием и равны n, $\sum xm_x$, $\sum x^2m_x$ и соответственно n, $\sum ym_y$, $\sum y^2m_y$. Находим числовые характеристики составляющих признаков X и Y:

$$\bar{x}=\frac{\sum xm_x}{n}=\frac{767}{100}=7.67,$$

$$D(x)=\frac{\sum x^2m_x}{n}-\bar{x}^2=\frac{6637}{100}-7.67^2=7.54,\quad \sigma_x=\sqrt{7.54}=2.75,$$

$$\bar{y}=\frac{\sum ym_y}{n}=\frac{2020}{100}=20.2,$$

$$D(y)=\frac{\sum y^2m_y}{n}-\bar{y}^2=\frac{42650}{100}-20.2^2=16.46,\quad \sigma_y=\sqrt{16.46}=4.06.$$

Далее,

$$\sum xym_{xy} = 2(10\cdot3+15\cdot4)+5(15\cdot10+20\cdot9+25\cdot3)+8(15\cdot6+20\cdot40+25\cdot5)+$$
$$+11(20\cdot4+25\cdot8+30\cdot3)+14(25\cdot2+30\cdot3) = 16355.$$

Находим выборочный коэффициент корреляции по формуле:

$$r_в = \frac{\sum xyn_{xy} - n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}}{n\,\sigma_x\sigma_y} = \frac{16355-100\cdot7{,}67\cdot20{,}2}{100\cdot2{,}75\cdot4{,}06} = 0{,}772.^{(*)}$$

Близость $r_в$ к единице говорит о достаточно тесной связи признаков X и Y. Для оценки существенности этой связи на уровне значимости α, равном 0,01 или 0,05 вычислим статистику $t_{набл.} = \frac{|r_в|}{\sigma_r}$, где среднеквадратическая ошибка коэффициента корреляции вычисляется по формуле $\sigma_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}772^2}{100-2}} = 0{,}064$.

Отсюда $t_{набл.} = \frac{0{,}772}{0{,}064} = 12{,}06$. Далее, принимая уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, при числе степеней свободы $\nu = n-2 = 100-2 = 98$ по таблице распределения Стьюдента (приложение 3) находим $t_{крит.} = 2{,}626$. Так как $t_{набл.} > t_{крит.}$, то с 99%-ой уверенностью можно говорить о существенности тесной связи между признаками Y и X.

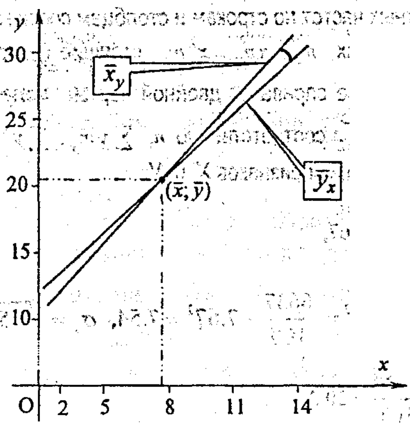
Теперь находим уравнения прямых регрессии по формулам:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_в\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\bar{x}), \quad \bar{x}_y - \bar{x} = r_в\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot(y-\bar{y}),$$

$$\bar{y}_x - 20{,}2 = 0{,}772\cdot\frac{4{,}06}{2{,}75}\cdot(x-7{,}67), \quad \bar{x}_y - 7{,}67 = 0{,}772\cdot\frac{2{,}75}{4{,}06}\cdot(y-20{,}2).$$

После преобразований получим $\bar{y}_x = 1{,}14\,x + 11{,}46$, $\bar{x}_y = 0{,}52\,y - 10{,}56$.

Если изобразить обе прямые на одном чертеже, то, чем ближе к нулю острый угол между ними (отмечен дугой), тем теснее связь между признаками. Если же этот угол близок к 90°, то это говорит о слабой связи или об отсутствии таковой вообще.



(*) Значение выборочного коэффициента корреляции может быть отрицательным, что говорит об обратной связи между признаками: при возрастании одной из них другая убывает. Внимание! Всегда $|r_в| \le 1$.

6. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта, называется *случайным*.

Количественной мерой возможности появления некоторого случайного события служит вероятность.

Классическое определение вероятности. *Вероятностью события* A называется отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов m к общему числу всех равновозможных исходов n:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Для вычисления числа благоприятствующих рассматриваемому событию исходов или общего числа элементарных исходов используют следующие формулы комбинаторики.

Множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками* этих элементов. Число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

Размещениями называются множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их следования. Число размещений находится по формуле

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Сочетаниями из n различных элементов по m называются множества, содержащие m элементов из числа n заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний находится по формуле

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример. Из 100 изготовленных деталей 10 имеют дефект. Какова вероятность того, что среди отобранных двух деталей две окажутся бракованными?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что среди отобранных деталей две окажутся бракованными. Вероятность этого события будем находить по классическому определению. В нашем случае число благоприятствующих исходов, означает, сколькими способами из 10 бракованных деталей можно выбрать две, то есть $m=C_{10}^2$; число всевозможных исходов означает, сколькими способами из 100 деталей можно выбрать две, то есть $n=C_{100}^2$. В результате имеем:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}^2}{C_{100}^2}=\frac{10!}{2!8!}:\frac{100!}{2!98!}=\frac{9\cdot 10}{99\cdot 100}=\frac{1}{110}.$$

Ответ: $\frac{1}{110}$.

События называются *несовместными*, если они не могут появиться вместе в одном опыте. Множество событий образуют полную группу, если они попарно-несовместны и появление одного и только одного из них является достоверным событием.

Суммой событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из рассматриваемых событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице. Имеет место формула $P(A)+P(\overline{A})=1$, где $\overline{A}$ - событие, противоположное событию A.

Произведением событий называется событие, которое состоит в совместном появлении этих событий.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что произошло событие B, называется условной вероятностью события A и обозначается $P(A/B)$.

Если появление одного из событий не влияет на вероятность появления другого, то такие события называются независимыми.

Теорема умножения вероятностей двух событий. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго относительно первого:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Для независимых событий вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

События называются *совместными*, если они могут появиться одновременно в одном опыте.

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность суммы совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Пример 1. В урне 40 шаров: 15 голубых, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шарик?

Решение. Введем события A={из урны извлечен голубой шар}, B={из урны извлечен зеленый шар}, C={из урны извлечен цветной шар}. Событие C=A+B, так как события A и B несовместны, то

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{15}{40}+\frac{5}{40}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 2. В урне 6 голубых и 4 красных шара. Из нее извлекают подряд два шара. Какова вероятность того, что оба шара голубые?

Решение. Пусть событие A={появление голубого шара при первом извлечении}, событие B={появление голубого шара при втором извлечении}, событие C={оба шара голубые}. C=AB, тогда имеем

$$P(C)=P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{6}{10}\cdot\frac{6-1}{10-1}=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 3. На 30 одинаковых жетонах написаны 30 чисел от 1 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность достать жетон с номером, кратным 2 или 3?

Решение. Обозначим события: A={извлечен жетон с четным номером (таких чисел от одного до 30 имеется 15)}, B={извлечен жетон с номером, кратным 3 (таких чисел от одного до 30 имеется 10)}, AB={извлечен жетон с четным номером, кратным 3 (таких чисел от одного до 30 имеется 5)}, C={извлечен жетон с номером, кратным 2 или 3}. C=A+B, поскольку A и B совместные события, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}-\frac{5}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Формула полной вероятности и формула Байеса. Если некоторое событие A совершается с одним из n несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий, то для определения вероятности этого события может быть использована формула полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\ldots+P(H_n)P(A/H_n)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i),$$

где $P(H_i)$ - вероятность события H_i, $P(A/H_i)$ - условная вероятность события A.

Для определения вероятностей гипотез H_i при условии, что произошло событие A, используются формулы Байеса

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)},\ i=\overline{1,n}.$$

Пример. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что: а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока; б) проработавший без дефекта двигатель изготовлен на втором заводе?

Решение. Обозначим через H_1, H_2, H_3 события установки на автомашину двигателей, изготовленных соответственно на первом, втором или третьем моторных заводах. Вероятности этих событий:

$$P(H_1)=\frac{10}{20}=0{,}5;\ P(H_2)=\frac{6}{20}=0{,}3;\ P(H_3)=\frac{4}{20}=0{,}2$$

а) Вероятность того, что наугад взятый двигатель проработает без дефектов, найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$

$$=0{,}5\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}7=0{,}83.$$

б) Если двигатель проработал без дефектов, то вероятность того, что он изготовлен на втором заводе найдем по формуле Байеса:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}8}{0{,}83}=0{,}29.$$

Ответ: а) 0,83; б) 0,29.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными. (24/91)

2. В коробке 5 изделий, 3 из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие. (а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9)

3. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель. (0,9)

4. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны наудачу выбирают 2 шара. Найти вероятность того, что шары разного цвета. (15/28).

5. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

6. В урне 10 белых и 16 красных шаров. Наудачу выбирают одновременно четыре шара. Какова вероятность того, что среди выбранных шаров один белый; два белых?

7. В магазине имеются 30 телевизоров, причем 20 из них импортные. Найти вероятность того, что среди 5 проданных в течение дня телевизоров окажется более 3 импортных телевизоров, предполагая, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы.

8. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности безотказной работы (за время t) равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

9. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем $\frac{3}{4}$ продукции с процентом брака 4%, вторая – $\frac{1}{4}$ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие: а) окажется бракованным; б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

10. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела – 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

11. Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: первый класс – малый риск, второй класс – средний риск и третий класс – большой риск. Среди клиентов банка 50% клиентов первого класса, 30% - второго и 20% - третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01; для второго – 0,03 и для третьего – 0,08. Какова вероятность того, что: а) застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования; б) застрахованный получил вознаграждение. Какому классу риска вероятнее всего он принадлежит?

7. ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Если при проведении испытаний вероятность события A не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми*.

Формула Бернулли определяет вероятность появления ровно m раз события A в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, где\ C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}, q=1-p.$$

При больших n и малых p вычисления по формуле Бернулли затруднены. В этих случаях обычно используется *формула Пуассона*:

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}, где\ \lambda=n\cdot p.$$

Пример 1. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней: а) одного мальчика; б) двух мальчиков.

Решение. Вероятность появления мальчика или девочки равна $p=0,5$. Вероятность появления мальчика в семье, имеющей четырех детей $(m=1, n=4, q=1-0,5=0,5)$, находится по формуле Бернулли:

$$P_4(1)=C_4^1\cdot 0,5^1\cdot 0,5^3=\frac{4!}{3!1!}\cdot 0,0625=0,25.$$

Вероятность появления в семье двух мальчиков равна

$$P_4(2)=C_4^2\cdot 0,5^2\cdot 0,5^2=\frac{4!}{2!2!}\cdot 0,0625=0,375.$$

Ответ: а) 0,25; б) 0,375.

Пример 2. В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажут два замка.

Решение. Используем формулу Пуассона. В нашем случае $n=10000, m=2, p=0,0002, \lambda=10000\cdot 0,0002=2$. Тогда:

$$P_{10000}(2)=\frac{2^2}{2!}\cdot e^{-2}=0,27.$$

Ответ: 0,27.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0<p<1)$, то вероятность $P_n(m)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно m раз, приближенно выражается формулой

$$P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), где\ x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \varphi(-x)=\varphi(x).$$

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(m_1; m_2)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз, приближенно выражается формулой

$$P_n(m_1; m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1); где\ x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

$$\Phi(x) - функция\ Лапласа, т.е.\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Вероятность появления события A в каждом из пяти независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что: а) событие A появится 3 раза; б) появится не менее двух и не более четырех раз.

2. Завод отправил на базу 10 000 стандартных изделий. Среднее число изделий, повреждаемых при транспортировке, составляет 0,02%. Найти вероятность того, что из 10 000 изделий будет повреждено: а) четыре изделия; б) не более трех.

3. Рабочий за смену изготавливает 300 деталей. Вероятность получить деталь первого сорта равна 075. Найти вероятность того, что за смену будет изготовлено: а) 240 деталей первого сорта; б) от 210 до 225 деталей первого сорта.

4. Подбрасывается 5 симметричных монет. Найти вероятность того, что: а) выпало ровно 2 герба; б) выпало более одного герба.

5. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных.

6. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий бракованных будет не более 17?

7. Вероятность изготовления детали первого сорта равна 0,8. Найти вероятность того, что среди наугад взятых 100 деталей окажется 75 деталей первого сорта.

8. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Случайной величиной (СВ) называется величина, которая в результате опыта может принять любые заранее неизвестные значения. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Случайная величина называется *дискретной* (ДСВ), если она принимает отдельные друг от друга значения, которые можно заранее перечислить.

Случайная величина называется *непрерывной* (НСВ), если ее значения непрерывно заполняют некоторый промежуток.

Законом распределения вероятностей (рядом распределения) ДСВ называется последовательность возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Причем должно выполняться условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Функцией распределения СВ называется функция действительной переменной x, определяемая равенством:

$$F(x) = P(X < x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Если дискретные значения случайной величины расположены в порядке возрастания $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $F(x)$ можно задать в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ p_1, & x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3; \\ \ldots & \\ p_1 + p_2 + \ldots p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n; \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

Математическим ожиданием ДСВ называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i.$$

Дисперсией СВ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \text{ или } D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Для ДСВ имеет место формула:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - M^2(X)$$

Средним квадратичным отклонением СВ называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Два консервных завода поставляют продукцию в магазин в пропорции 2:3. Доля продукции высшего качества на первом заводе составляет 90%, а на втором - 80%. В магазине куплено 3 банки консервов. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа банок с продукцией высшего качества.

Решение. Составим закон распределения случайной величины X - числа банок с продукцией высшего качества среди купленных трех. Вероятность появления события A={куплена банка с продукцией высшего качества}, зависит от того, на каком заводе была произведена банка, поэтому эту вероятность будем искать по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\frac{2}{5}\cdot 0,9+\frac{3}{5}\cdot 0,8=0,84.$$

Закон распределения случайной величины X можно определить, используя формулу Бернулли $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$.

Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения с учетом того, что $p=0,84; q=1-p=0,16$:

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0\cdot 0,84^0\cdot 0,16^3=0,004;$$

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1\cdot 0,84^1\cdot 0,16^2=0,066;$$

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2\cdot 0,84^2\cdot 0,16^1=0,337;$$

$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3\cdot 0,84^3\cdot 0,16^0=0,593.$$

Закон распределения случайной величины имеет вид

X	0	1	2	3
P	0,004	0,066	0,337	0,593

Тогда

$$M(X)=0\cdot 0,004+1\cdot 0,066+2\cdot 0,337+3\cdot 0,593=2,519,$$

$$D(X)=0^2\cdot 0,004+1^2\cdot 0,066+2^2\cdot 0,337+3^2\cdot 0,593-2,519^2=0,406,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{0,406}\approx 0,64.$$

Ответ: $M(X)=2,519, \sigma(X)=0,64$.

Для НСВ вводится понятие функции плотности распределения вероятности (плотности вероятности).

Производная от функции распределения вероятности называется *плотностью вероятности*:

$$f(x)=F'(x).$$

Причем, функция плотности вероятностей должна удовлетворять условию нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1,\ f(x)\ge 0$.

Функция распределения вероятности выражается через плотность вероятности в виде интеграла:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Вероятность попадания СВ в интервал $(a;b)$ равна приращению функции распределения вероятностей на этом интервале:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a) \text{ или } P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Числовые характеристики НСВ вычисляются по следующим формулам:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx-M^2(X);$$

где $f(x)$ - плотность вероятности.

Модой $M_0(X)$ НСВ X называется такое значение этой величины, плотность вероятности которого максимальна.

Медианой $Me(X)$ НСВ X называется такое ее значение, при котором выполняется равенство $P(X<Me(X))=P(X>Me(X))=0{,}5$.

Пример. СВ X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

Найти числовые характеристики СВ X.

Решение. Сначала найдем плотность распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}(0)', & x\le 0;\\ (x^3)', & 0<x\le 1;\\ (1)', & x>1.\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 3x^2, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases} \text{ или } f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ и } x>1;\\ 3x^2, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

Вычисляем числовые характеристики:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=3\int_0^1 x^3dx=\frac{3}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx-\left(\frac{3}{4}\right)^2=3\int_0^1 x^4dx-\frac{9}{16}=$$

$$=3\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1-\frac{9}{16}=\frac{3}{5}-0-\frac{9}{16}=\frac{3}{80};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{3}{80}}\approx 0{,}19.$$

Ответ: $M(X)=\frac{3}{4}$; $D(X)=\frac{3}{80}$; $\sigma(X)\approx 0{,}19$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения и начертить ее график.

2. Дан ряд распределения СВ X

X	-5	-3	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Наугад взято 2 детали. Составить ряд распределения СВ X, означающей число стандартных деталей среди выбранных. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

4. Стрелок два раза стреляет по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Случайная величина X – число попаданий в мишень. Составить закон распределения СВ X. Найти ее числовые характеристики.

5. Монету подбросили 6 раз. Составить закон распределения СВ X - числа выпадений герба. Построить график функции распределения. Найти числовые характеристики СВ X.

6. Известно, что $F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ ax^2, x\in[0;2],\\ 1, x>1.\end{cases}$ Найти коэффициент a, функцию $f(x)$, вероятность попадания СВ X на отрезок $[1;2]$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

7. СВ X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ a+bx^2, & 1\le x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$ Найти параметры a и b, плотность вероятности $f(x)$, числовые характеристики СВ X, вероятность попадания СВ X в интервал от 1,5 до 2. Построить графики функции распределения и плотности вероятности.

8. Плотность распределения вероятностей СВ X $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0, x>4,\\ \dfrac{x}{8}, \ 0<x\le 4.\end{cases}$ Найти $M(X), D(X), \sigma(X)$.

9. Плотность распределения вероятностей СВ X $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0, x\ge\pi,\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

Найти дисперсию случайной величины.

10. СВ X задана плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases} ax^3, x\in(0;2); \\ 0, x\notin(0;2). \end{cases}$ Найти параметр a, математическое ожидание СВ X; ее дисперсию и среднее квадратичное отклонение. Найти $P(|X-M(X)|<0{,}5)$.

11. Найти моду, медиану и математическое ожидание СВ X с плотностью вероятности $f(x)=3x^2$ при $x\in[0;1]$.

9. КЛАССИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Непрерывная случайная величина называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a;b]$, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x\in[a;b]; \\ 0, x\notin[a;b]. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределено случайной величины определяются выражениями: $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$; $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Распределение непрерывной случайной величины называется *показательным* (экспоненциальным), если плотность вероятности этой величины описывается функцией

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0, \end{cases} \quad где\ \lambda>0.$$

Соответственно, функция распределения вероятностей и числовые характеристики определяются формулами

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0; \end{cases} \quad M(X)=\frac{1}{\lambda}, D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Случайная величина распределена по *нормальному* закону, если ее функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $M(X)=a; D(X)=\sigma^2; \sigma(X)=\sigma$.

Вероятность попадания нормально распределенной СВ X в интервал $(\alpha;\beta)$ находится по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. СВ X распределена равномерно на отрезке $[-1;5]$. Записать ее плотность вероятности, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение. Вычислить вероятность попадания в интервал $(0;3)$.

2. Известны $M(X)=6$ и $D(X)=3$, где СВ X распределена равномерно. Записать плотность ее вероятности.

3. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно 5, дисперсия равна 9. Написать выражение для плотности вероятности.

4. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 12 и 2. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (14;16).

5. Имеется случайная величина, распределенная по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 3. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,9972 попадает случайная величина.

6. Рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная СВ X с параметрами $a=173$, $\sigma=6$. Определить доли костюмов четвертого роста (176-182) и третьего роста (170-176), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.

7. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda=6$.

8. Непрерывная показательная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x)=3e^{-3x}, x\geq 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,13; 0,7).

9. Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение показательного распределения, заданного плотностью вероятности $f(x)=10e^{-10x}, x\geq 0$.

10. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина T, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратичное отклонение СВ T.

11. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид $f(x)=\begin{cases} Ce^{-0,1x}, x\geq 0 \\ 0, x<0. \end{cases}$

Найти параметр C.

10. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Совокупность всех возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения, или совокупность всех возможных наблюдений, проводимых в одинаковых условиях над некоторой случайной величиной, называется *генеральной совокупностью.*

Отобранные из генеральной совокупности объекты называются *выборочной совокупностью* или *выборкой*. Число N элементов генеральной совокупности и число n элементов выборки называют *объемами генеральной* и *выборочной совокупности* $(N >> n)$.

Расположение выборочных наблюдений значений случайной величины в порядке неубывания называется *ранжированием*. Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называется *вариантой*.

Численность отдельной группы сгруппированного ряда наблюдаемых данных называется *частотой варианты.*

Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариант x_i с соответствующими им частотами или относительными частотами.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная последовательность интервалов варьирования случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений случайной величины.

Выборочной (эмпирической) функцией распределения называется функция $F^*(x)$, задающая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Следовательно, по определению

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n},$$

где n - объем выборки, n_x - число выборочных значений величины X, меньших x.

Пример. В супермаркете проводились наблюдения над числом X покупателей, обратившихся в кассу за один час. Наблюдения в течение 30 часов (15 дней в период с 9 до 10 и с 10 до 11 часов) дали следующие результаты:

70, 75, 100, 120, 75, 60, 100, 120, 70, 60, 65, 100, 65, 100, 70, 75, 60, 100, 100, 120, 70, 75, 70, 120, 65, 70, 75, 70, 100, 100.

Число X является дискретной случайной величиной, а полученные данные представляют собой выборку из $n=30$ наблюдений. Требуется составить ряд распределения частот и найти эмпирическую функцию распределения.

Решение. Составим ранжированный ряд:

60, 60, 60, 65, 65, 65, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 120, 120, 120, 120.

Получено 6 групп, то есть шесть различных значений случайной величины (шесть вариант). Для каждой группы подсчитаем частоту значений варианты и соответствующую относительную частоту. Результаты сведем в таблицу, где i - номер группы, x_i - число обращений покупателей в кассу, n_i - частота, w_i - относительная частота:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	60	65	70	75	100	120
n_i	3	3	7	5	8	4
$w_i=\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

Составим эмпирическую функцию распределения. Объем выборки по условию примера $n=30$. Наименьшая варианта равна 60, значит, $n_x=0$ при $x\le 60$. Тогда $F^*(x)=\frac{0}{30}=0$ при $x\le 60$. Если $60<x\le 65$, то неравенство $X<x$ выполняется для варианты $x_1=60$, которая встречается 3 раза, поэтому $n_x=3$ и $F^*(x)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$. Если $65<x\le 70$, то неравенство $X<x$ выполняется для вариант $x_1=60$ и $x_2=65$, которые встречаются по 3 раза, поэтому $n_x=6$ и $F^*(x)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$ и т.д. В результате имеем:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x\le 60;\\ \frac{1}{10}, & 60<x\le 65;\\ \frac{1}{5}, & 65<x\le 70;\\ \frac{3+3+7}{30}=\frac{13}{30}, & 70<x\le 75;\\ \frac{3+3+7+5}{30}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}, & 75<x\le 100;\\ \frac{3+3+7+5+8}{30}=\frac{26}{30}=\frac{13}{15}, & 100<x\le 120;\\ \frac{3+3+7+5+8+4}{30}=\frac{30}{30}=1, & x>120.\end{cases}$$

Наблюденные данные, представленные в виде вариационного ряда, можно изобразить графически.

Если вариационный ряд дискретной случайной величины представить в виде ломаной линии, соединяющей на плоскости точки с координатами $(x_i;n_i)$, то такой график называют *полигоном* или *многоугольником распределения*.

Интервальный вариационный ряд графически изображают с помощью *гистограммы*. Для ее построения в прямоугольной системе координат на оси x откладывают отрезки частичных интервалов варьирования и на этих отрезках как на основаниях строят прямоугольники с высотами, равными плотности частоты или плотности относительной частоты соответствующих интервалов.

Оценки параметров генеральной совокупности, полученные на основании выборки, называются *статистическими*. Если статистическая оценка характеризуется одним числом, называется *точечной*. К числу таких оценок относятся выборочная средняя и выборочная дисперсия.

Выборочная средняя определяется как среднее арифметическое полученных по выборке значений:

$$\overline{x_в} = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n},$$

где x_i - варианта выборки, n_i - частота варианты, n - объем выборки.

Выборочная дисперсия представляет собой среднюю арифметическую квадратов отклонений вариант от их выборочной средней:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \left(\overline{x}\right)^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2.$$

Величину s^2 называют *несмещенной* или *«исправленной» выборочной дисперсией* и вычисляют по формуле:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в.$$

В некоторых случаях для удобства расчетов при определении статистических оценок переходят к условным вариантам:

1) если варианты x_i - большие числа, то вводят $u_i = x_i - c,\ c \in R$, тогда

$$\overline{x} = c + \overline{u} = c + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n},\ D_в(X) = D_в(U);$$

2) если варианты x_i - маленькие числа, то вводят $u_i = x_i \cdot c,\ c \in R$, тогда

$$\overline{x} = \frac{1}{c}\overline{u} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n},\ D_в(X) = \frac{1}{c^2}\cdot D_в(U).$$

Пример. Найти несмещенную оценку дисперсии случайной величины X на основании данного распределения выборки:

x_i	2	7	9	10
n_i	8	14	10	18

Решение. Находим выборочную среднюю:

$$\overline{x} = \frac{8\cdot 2 + 14\cdot 7 + 10\cdot 9 + 18\cdot 10}{8+14+10+18} = 7{,}68;$$

Далее находим выборочную дисперсию:

$$D_в(X) = \frac{8\cdot 2^2 + 14\cdot 7^2 + 10\cdot 9^2 + 18\cdot 10^2}{8+14+10+18} - (7{,}68)^2 = 7{,}58.$$

Находим несмещенную оценку дисперсии:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в(X) = \frac{50}{49}\cdot 7{,}58 = 7{,}73.$$

Ответ: $s^2 = 7{,}73$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Дана выборка объема 20:

15 10 21 16 11 24 16 20 21 11

19 11 24 16 21 16 20 19 20 15

Составить вариационный ряд, дискретное распределение частот, построить полигон частот.

2. Найти эмпирическую функцию распределения по данным вариационным рядам:

а)

x_i	1	3	7	9	12
n_i	2	10	4	24	10

б)

x_i	-2	0	5	8	14
n_i	3	17	28	22	10

3. Выборка дана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7	8	11	13
n_i	10	9	21	25	30	5

Найти распределение относительных частот и построить полигон частот и полигон относительных частот.

4. Построить гистограмму выборки, заданной интервальным вариационным рядом:

i	$(x_i;x_{i+1})$	n_i
1	1-5	10
2	5-9	20
3	9-13	50
4	13-17	12
5	17-21	8

5. Из генеральной совокупности извлечены выборки. Найти выборочную среднюю.

а)

x_i	1	3	5	7	12
n_i	8	16	6	22	10

б)

x_i	1450	1480	1490
n_i	3	5	2

в)

x_i	3140	3150	3180
n_i	12	6	12

6. Найти несмещенную оценку дисперсии случайной величины по данному распределению выборки:

x_i	2	7	9	10
n_i	8	14	10	18

7. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки:

а)

x_i	0,02	0,05	0,08
n_i	3	2	5

б)

x_i	0,002	0,005	0,006
n_i	9	6	5

8. Найти числовые характеристики для интервального распределения частот

Интервалы	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
Частоты	5	10	20	18	7

11. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ ПИРСОНА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При решении практических задач модель закона распределения в общем случае заранее неизвестна, поэтому возникает необходимость выбора модели закона распределения, согласующейся с результатами выборочных наблюдений.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - выборка наблюдений СВ X с неизвестной непрерывной функцией распределения $F(x)$. Проверяется гипотеза H_0, утверждающая, что X распределена по закону, имеющему функцию распределения $F(x)$, равную функции $F_0(x)$, то есть проверяется нулевая гипотеза $H_0: F(x) = F_0(x)$.

Критерии, с помощью которых проверяется нулевая гипотеза о неизвестном распределении, называются *критериями согласия*. Рассмотрим критерий согласия Пирсона.

Схема проверки нулевой гипотезы $H_0: F(x) = F_0(x)$.

1. По выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ строят вариационный ряд; он может быть как дискретным, так и интервальным.

2. По данным предыдущих исследований или по предварительным данным делают предположение (принимают гипотезу) о модели закона распределения СВ X.

3. По выборочным данным проводят оценку параметров выбранной модели закона распределения. Пусть закон распределения имеет r параметров (для нормального распределения $r = 2$, для показательного распределения $r = 1$).

4. Подставляя выборочные оценки параметров распределения, находят теоретические значения вероятностей $P_i = P(X = x_i),\ i = \overline{1,k}$:

- для нормального распределения:

$$P_i = P(a_{i-1} < x < a_i) = \Phi\left(\frac{a_i - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \overline{x}}{s}\right);$$

- для показательного распределения:

$$P_i = P(a_{i-1} < x < a_i) = e^{-\lambda a_{i-1}} - e^{-\lambda a_i},\ \lambda = \frac{1}{\overline{x}}.$$

5. Рассчитывают теоретические частоты $n_i' = P_i \cdot n$, где n - объем выборки.

6. Составляют выборочную статистику $\chi^2_{набл} = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}$.

7. По таблице «Критические точки распределения «хи-квадрат» (приложение 4) находим $\chi^2_{крит}(\alpha; k - r - 1)$, где α - уровень значимости, k - число пар значений в таблице распределения частот. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}$, то гипотеза H_0 отклоняется и принимается альтернативная гипотеза о том, что выбранная модель закона распределения не подтверждается выборочными данными, при этом допускается ошибка, вероятность которой равна α.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i', которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

n_i	5	10	20	8	7
n_i'	6	14	18	7	5

2. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

Эмп. частоты	6	12	16	40	13	8	5
Теор. частоты	4	11	15	43	15	6	6

3. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о виде распределения генеральной совокупности, выдвинув ее для заданного распределения частот:

Интервалы	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
Частоты	5	10	20	18	7

4. В результате испытания 200 элементов на длительность работы получено эмпирическое распределение, приведенное в таблице (в первом столбце указаны интервалы времени в часах, во втором столбце – частоты, то есть количество элементов, проработавших время в пределах соответствующего интервала).

$(x_i;x_{i+1})$	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
n_i	133	45	15	4	2	1

Требуется, при уровне значимости 0,05, проверить гипотезу о том, что время работы элементов распределено по показательному закону.

12.ЛИНЕЙНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ. ПРЯМЫЕ РЕГРЕССИИ.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Двумерной называют случайную величину $(X;Y)$, каждое возможное появление которой представляет собой пару чисел $(x;y)$. Случайные величины X и Y, рассматриваемые совместно, образуют систему двух случайных величин.

Общей характеристикой двумерной случайной величины является *функция распределения вероятностей*, которая представляет собой вероятность события $(X<x;Y<y)$:

$$F(x,y)=P(X<x;Y<y).$$

Для дискретной случайной величины распределение может быть задано в виде таблицы распределения, в которой каждой паре значений $(x_i; y_j), i=\overline{1;n}; j=\overline{1;m}$ ставится в соответствие вероятность появления этой пары $P(X=x_i, Y=y_j)$.

Среди числовых характеристик двумерной случайной величины важными являются условное математическое ожидание и ковариация.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X=x$ называют сумму произведений возможных значений Y на их условные вероятности

$$M(Y/X=x)=\sum_{j=1}^{n} y_j \cdot P(y_j/x).$$

Условное математическое ожидание $M(Y/X=x)$ называется также *регрессией* Y на X.

Аналогично определяется регрессия X на Y: $M(X/Y=y)=\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(x_i/y)$.

Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется отношение вида:

$$r_B=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}, \text{ где } \overline{x}=M(X), \overline{y}=M(Y),\ \sigma_x=\sqrt{D(X)}, \sigma_y=\sqrt{D(Y)}.$$

Уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид: $\overline{y}_x-\overline{y}=r_B\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x})$.

Уравнение прямой регрессии X на Y имеет вид: $\overline{x}_y-\overline{x}=r_B\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y})$.

Прямые регрессий Y на X и X на Y различны, но они проходят через точку $(\overline{x};\overline{y})$. Чем меньше угол между ними, тем теснее линейная зависимость между X и Y.

В случае не сгруппированных данных числовые характеристики вычисляются по формулам:

$$\overline{x}=\frac{\sum_i x_i}{n}, \overline{x^2}=\frac{\sum_i x_i^2}{n}, \sigma_x=\sqrt{\overline{x^2}-\overline{x}^2};$$

$$\overline{y}=\frac{\sum_i y_i}{n}, \overline{y^2}=\frac{\sum_i y_i^2}{n}, \sigma_x=\sqrt{\overline{y^2}-\overline{y}^2}; \overline{xy}=\frac{\sum_i x_i\cdot y_i}{n}.$$

Пример. Задан закон распределения двумерной случайной величины *(X;Y)*

X\Y	2	5
8	0,15	0,10
10	0,22	0,23
12	0,10	0,20

Найти коэффициент корреляции между величинами X и Y.

Решение. Находим вероятности значений $X=8, X=10, X=12$:

$P(X=8)=0,15+0,10=0,25;$

$P(X=10)=0,22+0,23=0,45;$

$P(X=12)=0,10+0,20=0,30.$

Находим вероятности значений $Y=2, Y=5$:

$P(Y=2)=0,15+0,22+0,10=0,47;$

$P(Y=5)=0,10+0,23+0,20=0,53.$

Находим $M(Y)$: $M(Y)=2\cdot 0,47+5\cdot 0,53=3,59.$

Находим $M(X)$: $M(X)=8\cdot 0,25+10\cdot 0,45+12\cdot 0,30=10,1.$

Вычисляем $M(X^2), M(Y^2)$:

$M(X^2)=8^2\cdot 0,25+10^2\cdot 0,45+12^2\cdot 0,30=104,2;$

$M(Y^2)=2^2\cdot 0,47+5^2\cdot 0,53=15,13.$

Находим $D(X), D(Y)$:

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=104,2-10,1^2=2,19;$

$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=15,13-3,59^2=2,2419.$

Отсюда: $\sigma_x=\sqrt{2,19}=1,48; \sigma_y=\sqrt{2,2419}=1,48.$

Находим значение выражения $\overline{xy}$:

$\overline{xy}=8\cdot(2\cdot 0,15+5\cdot 0,10)+10\cdot(2\cdot 0,22+5\cdot 0,23)+12\cdot(2\cdot 0,10+5\cdot 0,20)=36,7$

В итоге имеем: $r_в=\dfrac{36,7-3,59\cdot 10,1}{1,48\cdot 1,48}=0,2.$

Ответ: $r_в=0,2.$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Составить уравнения прямых регрессий для случая не сгруппированных данных, вычислить коэффициент корреляции и оценить его значимость.

а)

x_i	2	4	6
y_i	5	3	7

б)

x_i	2	4	6	8
y_i	5	4	7	10

2. Для заданной корреляционной таблицы составить уравнения прямых регрессий, найти выборочный коэффициент корреляции, оценить тесноту линейной зависимости и значимость выборочного коэффициента:

X\Y	3	4	5	6	7
1	3				
2		2	1		
3			2	1	
4					1

Приложение 1. Плотность вероятностей нормального распределения

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (При $x>4$ принимают $\varphi(x)=0$).

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2331	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	0001

Приложение 2. Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115	1.80	0.4641	2.50	0.4938
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131	1.81	0.4649	2.52	0.4941
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147	1.82	0.4656	2.54	0.4945
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162	1.83	0.4664	2.56	0.4948
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177	1.84	0.4671	2.58	0.4951
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192	1.85	0.4678	2.60	0.4953
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207	1.86	0.4686	2.62	0.4956
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222	1.87	0.4693	2.64	0.4959
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236	1.88	0.4699	2.66	0.4961
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251	1.89	0.4706	2.68	0.4963
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265	1.90	0.4713	2.70	0.4965
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279	1.91	0.4719	2.72	0.4967
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292	1.92	0.4726	2.74	0.4969
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306	1.93	0.4732	2.76	0.4971
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319	1.94	0.4738	2.78	0.4973
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332	1.95	0.4744	2.80	0.4974
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345	1.96	0.4750	2.82	0.4976
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357	1.97	0.4756	2.84	0.4977
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370	1.98	0.4761	2.86	0.4979
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382	1.99	0.4767	2.88	0.4980
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394	2.00	0.4772	2.90	0.4981
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406	2.02	0.4783	2.92	0.4982
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3686	1.57	0.4418	2.04	0.4793	2.94	0.4984
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	0.3708	1.58	0.4429	2.06	0.4803	2.96	0.4985
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441	2.08	0.4812	2.98	0.4986
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452	2.10	0.4821	3.00	04987
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463	2.12	0.4830	3.20	0.4993
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474	2.14	0.4838	3.40	0.4997
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484	2.16	0.4846	3.60	0.4998
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495	2.18	0.4854	3.80	0.4999
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4515	2.20	0.4861	4.00	0.4999
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4505	2.22	0.4868	4.50	0.5000
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525	2.24	0.4875	5.00	0.5000
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535	2.26	0.4881		
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4545	2.28	0.4887	↓	↓
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554	2.30	0.4893	+∞	0.5
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564	2.32	0.4898		
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573	2.34	0.4904		
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582	2.36	0.4909		
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591	2.38	0.4913		
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599	2.40	0.4918		
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608	2.42	0.4922		
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4066	1.77	0.4616	2.44	0.4927		
0.43	0.1654	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625	2.46	0.4931		
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633	2.48	0.4934		

Приложение 3. Распределение Стьюдента (двусторонняя критическая область).

α - уровень значимости, $\gamma = 1 - \alpha$ - доверительная вероятность,
ν - число степеней свободы, $n = \nu + 1$ - объем выборки.

α / γ / ν↓	0,10 / 0,90	0,05 / 0,95	0,02 / 0,98	0,01 / 0,99	0,002 / 0,998	0,001 / 0,999
1	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,562	3,850
21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
300	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Приложение 4. χ^2 – распределение.

ν - число степеней свободы. α - уровень значимости.

ν \ α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,237	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,795	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	24,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	32,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,678	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	42,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Приложение 5. Критические значения коэффициентов корреляции для уровней значимости 0,05 и 0,01.

d. f.	α = 0,05	α = 0,01	d. f.	α = 0,05	α = 0,01
1	0,996717	0,9998766	17	0,4555	0,5751
2	0,995000	0,990000	18	0,4438	0,5614
3	0,8783	0,95873	19	0,4329	0,5487
4	0,8114	0,91720	20	0,4227	0,5368
5	0,7545	0,8745	25	0,3809	0,4869
6	0,7067	0,8343	30	0,3494	0,4487
7	0,6664	0,7977	35	0,3246	0,4182
8	0,6319	0,7646	40	0,3044	0,3932
9	0,6021	0,7348	45	0,2875	0,3721
10	0,5760	0,7079	50	0,2732	0,3541
11	0,5529	0,6835	60	0,2500	0,3248
12	0,5324	0,6614	70	0,2919	0,3017
13	0,5139	0,6411	80	0,2172	0,2830
14	0,4973	0,6226	90	0,2050	0,2673
15	0,4821	0,6055	100	0,1946	0,2540
16	0,4683	0,5897			

Число степеней свободы d. f. = n – 2 для парной корреляции, и d.f. = n – 2 – k для множественной. n – объем выборки совокупности, k – число исключаемых переменных.

Приложение 6. Таблица значений $q = q(\gamma, n)$.

$$(1-q)s < \sigma < (1+q)s, \text{ если } q < 1, \quad 0 < \sigma < (1+q)s, \text{ если } q > 1.$$

$$\left(s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right).$$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0, 22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

14. ЛИТЕРАТУРА

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика.– М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 543 с.
2. Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – Мн.: Выш. шк., 1993. – 269 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш.шк., 1991.
4. Лихолетов И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Выш. шк., 1976.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., 1979.
6. Рябушко А.П. и др. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Выш. шк., 1992.
7. Колемаев В.А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Высш. шк., 1991.– 400 с.
8. Тернер Д. Вероятность, статистика и исследование операций. – М., "Статистика", 1976 - 431 с.
9. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высш. шк., 1971. – 328 с.
10. Денисович О.К., Емельянова Г.Р., Санюкевич А.В., Тузик Т.А. Теория вероятностей: Контрольная работа №5; Задания и методические указания для студентов экономических специальностей заочной формы обучения. - Брест: УО «БрГТУ», 2006. - 34с.
11. Годунов Б.А., Рубанов В.С., Тузик Т.А. Математическая статистика: Задания, методические указания, статистические таблицы. - Брест: УО «БрГТУ», 2002. - 58с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:
Лебедь Светлана Федоровна,
Тузик Татьяна Александровна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для студентов экономических специальностей
второй курс, третий семестр
заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Т.А. Тузик
Редактор Т.В. Строкач
Компьютерная верстка: Е.А. Боровикова
Корректор: Е.В. Никитчик

Подписано в печать 13.04.2009 г. Формат 60x84 1/16. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 5,1. Уч.-изд. л. 5,5. Заказ № 462. Тираж 200 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.