МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

Интегралы. Дифференциальные уравнения

Практикум по дисциплине «Высшая математика»
для студентов технических специальностей

Брест 2009

УДК 519. 2 (076)

Практикум, составленный в соответствии с рабочей программой курса «Высшая математика» для технических специальностей, включает в себя материалы по комплексным числам, неопределенному интегралу, определенному интегралу, дифференциальным уравнениям, кратным и криволинейным интегралам. Он содержит краткий теоретический материал по указанным разделам, задания для аудиторных занятий, блоки заданий для индивидуального выполнения. К большей части заданий приведены ответы.

Практикум может быть использован как преподавателями при проведении практических занятий, так и студентами для самостоятельного изучения указанных разделов.

Составители: ***Лизунова И.В., доцент***
Денисович О.К., ассистент
Остапчук Е.М., ассистент

Рецензент: Савчук В. Ф., зав. кафедрой информатики и прикладной математики БрГУ им. А. С. Пушкина, к. ф. – м.н., доцент.

ГЛАВА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Формы записи комплексных чисел. Изображение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

Комплексным числом z называют упорядоченную пару (x, y) действительных чисел x и y. Пара $z=(0;0)=0$ называется нулем, пара $z=(1;0)=1$ - единицей, пара $z=(0;1)=i$ - мнимой единицей.

Любое комплексное число z может быть записано в виде $z=x+iy$, т.е. в алгебраической форме. При этом x является его действительной частью, $x=\operatorname{Re}z$, а y - мнимой, $y=\operatorname{Im}z$. Если $y=0$, то $z=x\in R$, если $x=0$, то $z=iy$ представляет собой чисто мнимое число.

Геометрически комплексному числу $z=x+iy$ соответствует точка $M(x;y)$ или вектор $\overline{OM}$ на плоскости (рис.1)

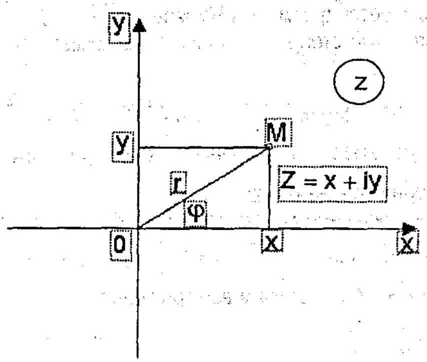

Рис.1

Каждой точке $M(x;y)$ соответствует комплексное число $z=x+iy$. Плоскость для изображения комплексных чисел называется комплексной и обозначается (z).

Точки $z=x$, соответствующие действительным числам, расположенным на оси Ox, которую называют действительной осью. Чисто мнимые числа $z=iy$, расположены на оси Oy, которую называют мнимой осью.

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ равны, если $\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$, т.е. $z_1=z_2$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$.

Над комплексными числами $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ можно выполнять арифметические операции по правилам:

$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$;

$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$;

$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)}{x^2_2+y^2_2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x^2_2+y^2_2},\ z_2\neq 0.$$

Всякое комплексное число $z=x+iy$ может быть представлено в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ или в показательной форме $z=re^{i\varphi}$, где число

$r=|\overline{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}$ - модуль комплексного числа Z, а угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с положительным направлением оси Ox - аргумент комплексного числа, $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Главное значение $\varphi=\arg Z$ удовлетворяет условию: $-\pi<\arg Z\le\pi$ или $0\le\arg Z<2\pi$.

Тригонометрическую и показательную формы комплексного числа целесообразно применять при умножении, делении комплексных чисел и возведении их в степень.

Если $Z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $Z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то

$Z_1\cdot Z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i(\varphi_1+\varphi_2))=$

$=r_1r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$, $Z_2\neq0$;

$$Z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^ne^{in\varphi}. \qquad (1.1)$$

Формула (1.1) называется формулой Муавра.

Извлечение корня n - ой степени $(n>1, n\in Z)$ из комплексных чисел осуществляется по формуле

$$Z_k=\sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\quad k=\overline{0,n-1} \qquad (1.2)$$

Придавая k последовательно n значений от 0 до $n-1$, получим n различных корней.

Пример: Найти корни уравнения $Z^3+1=0$.

Решение: Данное уравнение можно записать $Z^3=-1$ или $Z=\sqrt[3]{-1}$. По формуле (1.2) $Z_k=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1(\cos\pi+i\sin\pi)}=1(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3})$, где $k=\overline{0,2}$.

Придавая значения $k=\overline{0,2}$, получим все три корня:

$Z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt3}{2}$;

$Z_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1$;

$Z_2=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt3}{2}$.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти значения выражения $(Z_1-2Z_2)Z_3$, если

а) $Z_1=2+3i$, $Z_2=1-5i$, $Z_3=1-i$;

б) $Z_1=3+2i$, $Z_2=4-i$, $Z_3=5-i$.

Ответ: а) $13+13i$; б) $-21+25i$.

2. Выполнить действия:

а) $\frac{(-1-3i)(2+i)}{2+3i}$; б) $\frac{(3-i)(1+i)}{-1+2i}$; в) $\frac{(1-4i)^2}{5i}$; г) $\frac{(1-i)^3}{6i}$.

Ответ: а) $-\frac{19}{13}-\frac{17}{13}i$; б) $-2i$; в) $-\frac{8}{5}+3i$; г) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$.

3. Изобразить комплексные числа и представить их в тригонометрической и показательной формах.

А) 3; б) -6; в) $4i$; г) $-5i$; д) $\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i$; е) $-\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}i$; ж) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i$.

4. Выполнить действия:

5. а) $(1+i)^{12}$; б) $(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)^{10}$; в) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^{6}$; г) $(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{8}$.

Ответ: а) -64; б) i; в) -1; г) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

6. Найти корни уравнения: а) $z^2+4=0$; б) $z^2-i=0$; в) $z^3+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$; г) $z^4+16=0$.

Ответ: а) $z_1=-2i, z_2=2i$; б) $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$;

в) $z_0=\cos\frac{4}{9}\pi+\sin\frac{4}{9}\pi$, $z_1=\cos\frac{10}{9}\pi+i\sin\frac{10}{9}\pi$, $z_2=\cos\frac{19}{9}\pi+i\sin\frac{16}{9}\pi$;

г) $z_0=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_1=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_2=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, $z_3=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Выполнить действия:

I	а) $\frac{(3-2i)(2+i)}{5i}$; б) $\frac{(2-i)^2\cdot 7i}{1+i}$; в) $(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)^6$
II	а) $\frac{(2-3i)(1-i)}{4i}$; б) $\frac{(1-2i)^2\cdot 5i}{1-i}$; в) $(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)^4$
III	а) $\frac{(1+i)(1-2i)}{6i}$; б) $\frac{(1+i)^2\cdot 4i}{2-i}$; в) $(1-i)^4$
IV	а) $\frac{(2-i)(5+i)}{3i}$; б) $\frac{(1-i)^2\cdot 3i}{1-i}$; в) $(-1+i)^6$

Ответы:

I	а) $-\frac{1}{5}-\frac{8}{5}i$; б) $\frac{49}{2}-\frac{7}{2}i$; в) $-i$
II	а) $-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}i$; б) $\frac{35}{2}+\frac{5}{2}i$; в) -1
III	а) $-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}i$; б) $-\frac{16}{5}-\frac{8}{5}i$; в) -4
IV	а) $-1-\frac{11}{3}i$; б) $3+3i$; в) $8i$

2. Найти корни уравнения

I	а) $z^4+1=0$; б) $z^3-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=0$
II	а) $z^4+81=0$; б) $z^3+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=0$
III	а) $z^4+4=0$; б) $z^3-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$
IV	а) $z^4+9=0$; б) $z^3-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=0$

Ответы:

I	а) $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; б) $z_0=\cos\frac{11}{18}\pi+i\sin\frac{11}{18}\pi$; $z_1=\cos\frac{23}{18}\pi+i\sin\frac{23}{18}\pi$; $z_3=\cos\frac{35}{18}\pi+i\sin\frac{35}{18}\pi$
II	а) $z_0=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $z_1=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $z_2=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $z_3=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$; б) $z_0=\cos\frac{5}{18}\pi+\sin\frac{5}{18}\pi$; $z_1=\cos\frac{17}{18}\pi+i\sin\frac{17}{18}\pi$; $z_2=\cos\frac{29}{18}+i\sin\frac{29}{18}\pi$
III	а) $z_0=1+i$; $z_1=-1+i$; $z_2=-1-i$; $z_3=1-i$; б) $z_0=\cos\frac{5}{9}\pi+i\sin\frac{5}{9}\pi$; $z_1=\cos\frac{11}{9}\pi+i\sin\frac{11}{9}\pi$; $z_2=\cos\frac{17}{9}\pi+i\sin\frac{17}{9}\pi$
IV	а) $z_0=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i, z_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i, z_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i, z_3=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$ б) $z_0=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}, z_1=\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}, z_2=\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}$

ГЛАВА 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Простейшие методы интегрирования

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F'(x)=f(x)$ для любого $x\in(a;b)$.

Любые две первообразные отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных этой функции. Если $F(x)$ - какая-либо первообразная $f(x)$, то по определению $\int f(x)dx=F(x)+C$, где C - произвольная постоянная.

Нахождение неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называется интегрированием данной функции. Эта операция является обратной дифференцированию.

Простейшие методы интегрирования включают в себя нахождение неопределенных интегралов с помощью основных правил интегрирования и таблицы интегралов, путем внесения производной под знак дифференциала.

Основные правила интегрирования

1. $\int a f(x)dx=a\int f(x)dx$, $a-\text{const}$.
2. $\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$.
3. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, а $u=\varphi(x)$ - дифференцируемая функция от x, то $\int f(u)du=F(u)+C$.
4. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием найденной первообразной, т.е. $(F(x)+C)'=f(x)$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $\alpha\neq-1$.
2. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.
3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$.
4. $\int e^x dx=e^x+C$.
5. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$.
6. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$.
7. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$.
8. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$.
9. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.
10. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C$.
11. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{x}{a}+C$, $(a>0)$.
12. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C$, $(a>0)$.
13. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C=-\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$.
14. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$, $(a\neq0)$.

15. $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{1}{\sin x}-ctgx\right|+C$.

16. $\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|+C=\ln\left|\frac{1}{\cos x}+tgx\right|+C$.

17. $\int shx\,dx=ch\,x+C$.

18. $\int ch\,x\,dx=sh\,x+C$.

19. $\int\frac{dx}{ch^2x}=th\,x+C$.

20. $\int\frac{dx}{sh^2x}=-cth\,x+C$.

Из основного правила 3 вытекает, что все табличные интегралы 1-20 остаются справедливыми, если в них вместо x стоит некоторая функция от x.

Рассмотрим примеры нахождения некоторых неопределенных интегралов.

Пример 1. $\int(4x^3-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}+1)dx=4\int x^3dx-2\int x^{\frac{2}{3}}dx+2\int x^{-3}dx+\int dx=$

$=4\frac{x^4}{4}-2\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+2\frac{x^{-2}}{-2}+x+C=x^4-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{x^2}+x+C$.

Пример 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+7}}=\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{7}{5}}}=\frac{1}{\sqrt5}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{7}{5}}\right|+C$.

Пример 3. $\int\frac{dx}{(2x-1)^5}=\int(2x-1)^{-5}dx=\frac{1}{2}\frac{(2x-1)^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{8}\frac{1}{(2x-1)^4}+C$.

Пример 4. $\int(2\cos(3x-4)+\frac{5}{\sin^2(2x-3)})dx=2\int\cos(3x-4)dx+5\int\frac{dx}{\sin^2(2x-3)}=$

$=\frac{2}{3}\sin(3x-4)-\frac{5}{2}ctg(2x-3)+C$.

Метод внесения производной под знак дифференциала основан на использовании формулы $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$, из которой, в частности, следует, что $xdx=\frac{1}{2}(x^2)'dx=\frac{1}{2}d(x^2)$,

$\frac{dx}{x}=(\ln x)'dx=d(\ln x)$,

$\cos x\,dx=(\sin x)'dx=d(\sin x)$,

$\sin x\,dx=-(\cos x)'dx=-d(\cos x)$,

$\frac{dx}{\cos^2x}=(tgx)'dx=d(tgx)$,

$\frac{dx}{\sin^2x}=-(ctgx)'dx=-d(ctgx)$,

$\frac{dx}{1+x^2}=(arctgx)'dx=d(arctgx)$,

$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=(\arcsin x)'dx=d(\arcsin x)$ и т.д.

Пример 5. Найти $\int\sqrt[3]{\sin x}\,\cos x\,dx$.

$\int\sqrt[3]{\sin x}\,\cos x\,dx=\int(\sin x)^{\frac{1}{3}}d(\sin x)=\frac{3}{4}(\sin x)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^4x}+C$.

Пример 6. Найти $\int\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int\frac{(\ln(x+1))'dx}{\ln(x+1)}==\int\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\ln|\ln(x+1)|+C.$$

Пример 7. Найти $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$.

$$\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{(e^x)'dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}=\operatorname{arctg}e^x+C.$$

Пример 8. Найти $\int\frac{x-\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

$$\int\frac{x-\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}-\int\frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{8}\int(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-4x^2)'dx-\frac{1}{2}\int\arcsin 2x(\arcsin 2x)'dx=$$

$$=-\frac{1}{8}\int(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-4x^2)-\frac{1}{2}\int\arcsin 2x\,d(\arcsin 2x)=$$

$$=-\frac{1}{8}\cdot 2(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\arcsin^2 2x+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}-\frac{1}{4}\arcsin^2 2x+C.$$

Задания для аудиторных занятий

Найти указанные интегралы (в заданиях 1-4 результаты интегрирования проверить дифференцированием).

1. $\int(5x^7-3\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{x^4})dx$;
2. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$;
3. $\int(3\sin x+2^x\cdot 3^{2x}-\frac{1}{9+x^2})dx$;
4. $\int\sqrt[7]{(5x+3)^3}dx$;
5. $\int(\sin 7x-e^{3-2x}+\frac{1}{\cos^2 4x})dx$;
6. $\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+7)^2}}dx$;
7. $\int\sin^3 x\cdot\cos x\,dx$;
8. $\int\operatorname{tg}3x\,dx$;
9. $\int\frac{x-x^3}{\sqrt{9-x^4}}dx$;
10. $\int\frac{3^x}{\sqrt{9-9^x}}dx$;
11. $\int\frac{x-3}{1-x^2}dx$;
12. $\int\frac{\sqrt{\arcsin x-x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Задания для индивидуального выполнения

Найти неопределенные интегралы (в заданиях 1-5 результаты интегрирования проверить дифференцированием).

I. 1. $\int(4\sqrt{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{3x^2}{\sqrt{x}})dx$;

2. $\int(\frac{1}{3x^2+5}+\frac{1}{\sqrt{4x^2-5}})dx$;

3. $\int(3x+4)^{10}+\frac{1}{(2x-1)^5}dx$;

4. $\int(3\sin(4x-1)+6e^{2x+1})dx$;

5. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{5+x^3}}$;

6. $\int\frac{dx}{(x+3)\ln^2(x+3)}$;

7. $\int\sin x\cos^2 x\,dx$;

8. $\int\frac{tg^2x+1}{\cos^2 x}dx$;

9. $\int\frac{x-2arctgx}{1+x^2}dx$;

10. $\int\frac{e^{3x}dx}{3+e^{3x}}$.

II. 1. $\int(2\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{2x}-\frac{8\sqrt{x}}{x^2})dx$;

2. $\int(\frac{1}{2x^2-4}+\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}})dx$;

3. $\int((7x-11)^9+\frac{2}{(3x-4)^{10}})dx$;

4. $\int(2\cos(3x+4)+3e^{1-7x})dx$;

5. $\int\frac{x^2dx}{5+3x^3}$;

6. $\int\frac{\ln^3(x-1)}{x-1}dx$;

7. $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$;

8. $\int\frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$;

9. $\int\frac{x-arctg^2x}{1+x^2}dx$;

10. $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+5}$.

III. 1. $\int(3\sqrt{x^3}+\frac{5}{2x}-\frac{7\sqrt[3]{x}}{x})dx$;

2. $\int(\frac{1}{3x^2+4}-\frac{2}{\sqrt{3x^2+4}})dx$;

3. $\int(\frac{2}{(3x+8)^{13}}-(8x+7)^{20})dx$;

4. $\int(2\sin(4-5x)+e^{4x+2})dx$;

5. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{8-x^3}}$;

6. $\int\frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)}$;

7. $\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx$;

8. $\int\frac{\sqrt{ctgx+1}}{\sin^2 x}dx$;

9. $\int\frac{x+3arctgx}{1+x^2}dx$;

10. $\int\frac{e^{4x}}{5+e^{8x}}dx$.

IV. 1. $\int(3\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{3\sqrt{x^3}}{x})dx$;

2. $\int(\frac{2}{\sqrt{2x^2+5}}-\frac{3}{2x^3+8})dx$;

3. $\int(\frac{2}{(1+5x)^{12}}-3(1-5x)^{14})dx$;

4. $\int(3\sin(1-3x)+2e^{8x+4})dx$;

5. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$;

6. $\int\sqrt{\ln(x+3)}\frac{dx}{x+3}$;

7. $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$

8. $\int\frac{dx}{tgx\cdot\cos^2 x}$;

9. $\int \frac{3x-2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$;   10. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+4}$

2.2. Интегрирование методом замены. Интегрирование по частям

Интегрирование путем введения новой переменной (метод замены или подстановки) основано на использовании формулы

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt, \tag{2.1}$$

где $x=\psi(t)$ - дифференцируемая функция переменной t. После нахождения интеграла справа в формуле (2.1) необходимо вернуться к старой переменной x.

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-1}\,dx$.

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \left|\begin{matrix}\sqrt{x-1}=t, & dx=2tdt\\ x=t^2+1 & \end{matrix}\right| = 2\int(t^2+1)t^2dt =$$

$$=2\int(t^4+t^2)dt = 2\int t^4dt + 2\int t^2dt = \frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C=$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C.$$

Пример 2. Найти $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix}x=a\sin t,\ \sin t=\frac{x}{a},\ t=\arcsin\frac{x}{a}\\ dx=\arccos t\,dt,\ \cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\end{matrix}\right| =$$

$$=a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = a^2\int\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2})+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

При нахождении некоторых неопределенных интегралов часто целесообразно осуществлять переход к новой переменной с помощью подстановки $\varphi(x)=t$. В частности метод внесения производной под знак дифференциала в $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ эквивалентен замене переменной $\varphi(x)=t$.

Пример 3. Найти $\int\sqrt[3]{1+\mathrm{tg}x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \left|1+\mathrm{tg}x=t, \frac{dx}{\cos^2 x}=dt\right| =$

$$=\int\sqrt[3]{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\mathrm{tg}x)^4}+C.$$

Метод интегрирования по частям основан на применении формулы:

$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{2.2}$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции от x.

Использование равенства (2.2) целесообразно, если интеграл в его правой части легче найти, чем исходный.

В некоторых случаях формулу интегрирования по частям необходимо применять несколько раз.

Пример 4. Найти $\int(3x+1)e^{2x-1}dx$.

$$\int(3x+1)e^{2x-1}dx=\left|\begin{matrix} u=3x+1, & du=3dx \\ dv=e^{2x-1}dx, & v=\frac{1}{2}e^{2x-1}\end{matrix}\right|=$$

$$=(3x+1)\frac{1}{2}e^{2x-1}-\int\frac{3}{2}e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}(3x+1)e^{2x-1}-\frac{3}{4}e^{2x-1}+C.$$

Пример 5. Найти $\int(x^2+4)\cos 3x\,dx$.

$$\int(x^2+4)\cos 3x\,dx=\left|\begin{matrix} u=x^2+4, & du=2xdx \\ dv=\cos 3x\,dx, & v=\frac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right|=$$

$$=(x^2+4)\frac{1}{3}\sin 3x-\int\frac{2}{3}x\sin 3xdx=\frac{1}{3}(x^2+4)\sin 3x-\frac{2}{3}\int x\sin 3xd=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=\sin 3xdx, & v=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}(x^2+4)\sin 3x-\frac{2}{3}(-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx)=$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+4)\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos x-\frac{2}{27}\sin 3x+C.$$

Пример 6. Найти $\int(2x+1)\ln^2 xdx$.

$$\int(2x+1)\ln^2 xdx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x, & du=2\ln x\frac{1}{x}dx \\ dv=(2x+1)dx, & v=x^2+x\end{matrix}\right|=$$

$$=(x^2+x)\ln^2 x-2\int(x^2+x)\ln x\frac{1}{x}dx=$$

$$=(x^2+x)\ln^2 x-2\int(x+1)\ln xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x} \\ dv=(x+1), & v=\frac{x^2}{2}+x\end{matrix}\right|=(x^2+x)\ln^2 x-2((\frac{x^2}{2}+x)\ln x-\int(\frac{x^2}{2}+x)\frac{dx}{x}x)=$$

$$=(x^2+x)\ln^2 x-(x^2+2x)\ln x+2\int(\frac{x}{2}+1)dx=$$

$$=(x^2+x)\ln^2 x-(x^2+2x)\ln x+\frac{x^2}{2}+2x+C.$$

Пример 7. Найти $\int x\,\mathrm{arctg}x\,dx$.

$$\int x\,\mathrm{arctg}x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\mathrm{arctg}x, & du=\frac{dx}{1+x^2} \\ v=xdx; & v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

Пример 8. Найти $\int e^{2x}\sin x\,dx$.

$$\int e^{2x}\sin x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\sin x, & du=\cos x dx\\ dv=e^{2x}dx, & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\cos x, & du=-\sin x dx\\ dv=e^{2x}dx, & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}e^{2x}\cos x+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x-\frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx.$$

Перенеся последний интеграл в левую часть равенства, получим

$$\frac{3}{4}\int e^{2x}\sin x dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{3}{4}C.$$

Следовательно, $\int e^{2x}\sin x\,dx=\frac{2}{3}e^{2x}\sin x-\frac{1}{3}e^{2x}\cos x+C.$

Задания для аудиторных занятий

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int x\sqrt{4x+3}\,dx$; Ответ: $\frac{1}{8}(\frac{1}{5}\sqrt{(4x+3)^5}-\sqrt{(4x+3)^3})+C$.
2. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$; Ответ: $2(\sqrt{x+3}-\ln|1+\sqrt{x+3}|)+C$.
3. $\int x\sqrt[5]{(5x^2-3)^7}dx$; Ответ: $\frac{1}{24}\sqrt[5]{(5x^2-3)^{12}}+C$.
4. $\int\frac{\cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$; Ответ: $\sin\sqrt{2x+1}+C$.
5. $\int\frac{\sqrt[3]{\ln x+1}}{x}dx$; Ответ: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\ln x+1)^4}+C$.
6. $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; Ответ: $\frac{3}{7}\sqrt[3]{\cos^7 x}-3\sqrt[3]{\cos x}+C$.
7. $\int x\cos 3x dx$; Ответ: $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$.
8. $\int(x^2-2x+5)e^{-x}dx$; Ответ: $-e^{x}(x^2+5)+C$.
9. $\int(1-3x)\ln 4x dx$; Ответ: $(x-\frac{3}{2}x^2)\ln 4x-x+\frac{3}{4}x^2+C$.
10. $\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; Ответ: $-\frac{1}{x}\ln^2 x-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+C$.
11. $\int\arccos x\,dx$; Ответ: $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.
12. $\int e^x\cos 2x\,dx$; Ответ: $\frac{1}{5}e^x\cos 2x+\frac{2}{5}e^x\sin 2x+C$.

Задания для индивидуального выполнения

Найти интегралы:

I	1. $\int\frac{dx}{2+\sqrt{3-x}}$; 2. $\int\frac{\sin\sqrt{3x+4}\,dx}{\sqrt{3x+4}}$; 3. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{4-x^3}}$; 4. $\int(3-x)\sin 2x\,dx$; 5. $\int(x^2-4x+3)e^{-2x}dx$; 6. $\int\arcsin x\,dx$.
II	1. $\int x^2\sqrt{1-2x^3}dx$; 2. $\int e^{\sqrt{2x+5}}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; 3. $\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$; 4. $\int(1-x)\cos 2x\,dx$; 5. $\int(x^2+3)e^{-2x}dx$; 6. $\int(x-1)\mathrm{arctg}\,x\,dx$.
III	1. $\int\frac{dx}{2+\sqrt{1-4x}}$; 2. $\int\frac{\cos\sqrt{4+2x}}{\sqrt{4+2x}}dx$; 3. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{5-x^4}}$; 4. $\int(x^2-2)\cos 3x\,dx$; 5. $\int(3x+1)e^{-2x}dx$; 6. $\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.
IV	1. $\int x^3\sqrt{4x^4+3}\,dx$; 2. $\int e^{\sqrt{4-3x}}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; 3. $\int\frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}dx$; 4. $\int(2x^2-3)\sin x\,dx$; 5. $\int(1-5x)e^{-3x}dx$; 6. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Ответы:

I	1. $-2\sqrt{3-x}+4\ln(2+\sqrt{3-x})+C$; 2. $-\frac{2}{3}\cos\sqrt{3x+4}+C$; 3. $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(4-x^3)^2}+C$; 4. $-\frac{1}{2}(3-x)\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$; 5. $-\frac{1}{4}(2x^2-6x+3)e^{-2x}+C$; 6. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.
II	1. $-\frac{1}{9}\sqrt{(1-2x^3)^3}+C$; 2. $e^{\sqrt{2x+5}}+C$; 3. $3\sqrt[3]{\sin x}-\frac{3}{7}\sqrt[3]{\sin^7 x}+C$; 4. $\frac{1}{2}(1-2x)\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$; 5. $-\frac{1}{4}(2x^2+2x+7)e^{-2x}+C$; 6. $\frac{1}{2}(x^2-2x+1)\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.
III	1. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}+\ln(2+\sqrt{1-4x})+C$; 2. $\sin\sqrt{4+2x}+C$; 3. $-\frac{1}{2}\sqrt{5-x^4}+C$; 4. $\frac{1}{3}(x^2-2)\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+C$; 5. $-\frac{1}{4}(6x+5)e^{-2x}+C$; 6. $-\frac{1}{x}\ln^2 x-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+C$.
IV	1. $\frac{1}{24}\sqrt{(4x^4+3)^3}+C$; 2. $-\frac{2}{3}e^{\sqrt{4-3x}}+C$; 3. $\frac{3}{14}\sqrt[3]{\cos^7 2x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos 2x}+C$; 4. $-(2x^2-3)\cos x+4x\sin x+4\cos x+C$; 5. $\frac{1}{9}(15x+2)e^{-3x}+C$; 6. $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$.

2.3. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен. Интегрирование простейших дробей

Для нахождения интеграла вида:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \qquad (2.3)$$

необходимо в знаменателе выделить полный квадрат, т.е. представить

$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})$.

Тогда $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}=\left|\begin{matrix} x+\frac{b}{a}=t \\ dx=dt \end{matrix}\right|=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}$.

В зависимости от знака $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$ получим один из табличных интегралов 9 или 13.

Аналогичным образом можно свести к табличным интегралам 11 или 14 неопределенный интеграл, в котором квадратный трехчлен стоит в знаменателе под знаком корня или $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Если интеграл имеет вид:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx, \qquad (2.4)$$

то вначале надо выделить производную знаменателя, преобразуя

$Ax+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}=\frac{A}{2a}(ax^2+bx+c)'+B-\frac{Ab}{2a}$.

В результате интеграл (2.4.) разобьется на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int \frac{(ax^2+bx+c)'dx}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=$$

$$=\frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=$$

$$=\frac{A}{2a}\ln(ax^2+bx+c)+(B-\frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Один из интегралов легко находится внесением производной под знак дифференциала, а второй имеет вид (2.3.).

Точно так же находится интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Пример 1. Найти $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$.

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=\frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)+(4-\frac{2}{3})}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=\frac{3}{2}\int \frac{(x^2-4x+8)'dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}+5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}}=$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-4x+8)}{\sqrt{x^2-4x+8}}+5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}}=3\sqrt{x^2-4x+8}+5\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}\right|+C.$$

Для нахождения интеграла вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$

применяется замена $\frac{1}{x-\alpha}=t$.

Пример 2. Найти $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}$.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{(x+1)}=t,\ dx=-\frac{t}{t^2}dt\\ x=\frac{1}{t}-1\end{array}\right|=-\int\frac{tdt}{t^2\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+\frac{2}{t}-2+10}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{9t^2+1}}=-\frac{1}{3}\ln\left|3t+\sqrt{9t^2+1}\right|+C=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{x+1}+\sqrt{\frac{9}{(x+1)^2}+1}\right|+C.$$

Простейшими называются дроби следующих типов:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\frac{A}{(x-a)^m}$;

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$;

где A, a, B, p, q - постоянные числа, m- целое, $m\geq 2$, $p^2-4q<0$.

Интегралы от простейших дробей первого и второго типов находятся легко:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C,$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int(x-a)^{-m}dx=\frac{A}{(x-a)^{m-1}(1-m)}+C.$$

Интегрирование дроби третьего типа уже рассмотрено ранее (см. нахождение интеграла 2.4.).

Неопределенный интеграл от дроби четвертого типа представим в виде суммы двух интегралов (см. интеграл 2.4.).

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^m}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^m}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^m}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^m}=$$

$$=\frac{A}{2}\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}(1-m)}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4})^m}.$$

Итак, задача свелась к отысканию интеграла вида:

$$\int\frac{dx}{(u^2+a^2)^m}, \qquad (2.5)$$

где $u=x+\frac{p}{2}$, $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ $(4q-p^2>0)$.

Для нахождения интеграла (2.5) используют рекуррентную формулу понижения степени знаменателя:

$$\int\frac{du}{(u^2+a^2)^m}=\frac{u}{2a^2(m-1)(u^2+a^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2a^2(m-1)}\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{m-1}}.$$

Пример 3. Найти $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx$.

$$\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2-2+\frac{10}{3}}{(x^2+2x+5)^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+2x+5)}{(x^2+2x+5)^2}+2\int\frac{dx}{((x+1)^2+4)^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+5}+2(\frac{x+1}{8((x+1)^2+4)}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{4+(x+1)^2})=$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+5}+\frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+2x+5}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Задания для аудиторных занятий

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{dx}{x^2+4x+20}$. Ответ: $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C$.
2. $\int\frac{3x-7}{x^2+x+1}dx$. Ответ: $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{17}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.
3. $\int\frac{x-2}{x^2-8x+7}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-8x+7\right|+\frac{11}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right|+C$.
4. $\int\frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$. Ответ: $\arcsin\frac{x-4}{\sqrt{20}}+C$.
5. $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-8x+18}}dx$. Ответ: $3\sqrt{x^2-8x+18}+5\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+18}\right|+C$.
6. $\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$. Ответ: $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$.
7. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. Ответ: $-\ln\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}+C$.
8. $\int\frac{3x-1}{(x^2+2x+10)^2}dx$. Ответ: $-\frac{4x-13}{x^2+2x+10}+\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C$.
9. $\int\frac{dx}{(2x-1)^{15}}$. Ответ: $-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{(2x-1)^{14}}+C$.
10. $\int\frac{dx}{(5-4x)^{12}}$. Ответ: $\frac{1}{44}\cdot\frac{1}{(5-4x)^{11}}+C$.

Задания для индивидуального выполнения

Найти неопределенные интегралы.

I	1. $\int\frac{3x+9}{x^2-6x+12}dx$; 2. $\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$; 3. $\int\frac{dx}{(3x-4)^{10}}$; 4. $\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}$.
II	1. $\int\frac{x-7}{x^2-10x+9}dx$; 2. $\int\frac{7x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$; 3. $\int\frac{dx}{(4x-3)^9}$; 4. $\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}$.
III	1. $\int\frac{7x+3}{2x^2+4x+9}dx$; 2. $\int\frac{4x-5}{\sqrt{x^2+10x+29}}dx$; 3. $\int\frac{dx}{(5-10x)^{11}}$; 4. $\int\frac{dx}{(16+x^2)^2}$.
IV	1. $\int\frac{5x-4}{x^2+8x+3}dx$; 2. $\int\frac{7x-3}{\sqrt{3-2x+x^2}}dx$; 3. $\int\frac{dx}{(3-8x)^{13}}$; 4. $\int\frac{dx}{(25+x^2)^2}$.

Ответы:

I	1. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-6x+12\right|+\frac{18}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}}+C$; 2. $\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$; 3. $-\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{(3x-4)^9}+C$; 4. $\frac{x}{8(x^2+4)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.
II	1. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-10x+9\right|+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x-9}\right|+C$;

	2. $-7\sqrt{5-4x-x^2}-16\arcsin\frac{x+2}{3}+C$; 3. $-\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{(4x-3)^8}+C$; 4. $\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\mathrm{arctg}\frac{x}{3}+C$.
III	1. $\frac{7}{4}\ln\left|2x^2+4x+9\right|-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{7}}+C$; 2. $4\sqrt{x^2+10x+29}-25\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x+29}\right|+C$; 3. $\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{(5-10x)^{10}}+C$; 4. $\frac{x}{32(16+x^2)}+\frac{1}{128}\mathrm{arctg}\frac{x}{4}+C$.
IV	1. $\frac{5}{2}\ln\left|x^2+8x+3\right|+\frac{12}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{x+4+\sqrt{13}}{x+4-\sqrt{13}}\right|+C$; 2. $7\sqrt{3-2x-x^2}+4\ln\left|x-1+\sqrt{3-2x-x^2}\right|+C$; 3. $\frac{1}{96}\cdot\frac{1}{(3-8x)^{12}}+C$; 4. $\frac{x}{50(25+x^2)}+\frac{1}{250}\mathrm{arctg}\frac{x}{5}+C$.

2.4. Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией (рациональной дробью) $R(x)$ называется отношение двух многочленов, т.е. $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, $Q_m(x)$ - многочлен степени m.

Если $n<m$, то $R(x)$ называется правильной рациональной дробью, если $n\ge m$, то – неправильной рациональной дробью.

Всякую неправильную рациональную дробь путем деления числителя $P_n(x)$ на знаменатель $Q_m(x)$ можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Например, $\frac{x^4-1}{x^3+2x^2-3x}$ - неправильная дробь. Разделив числитель на знаменатель уголком, получим $\frac{x^4-1}{x^3+2x^2-3x}=x-2+\frac{7x^2-6x-1}{x^3+2x^2-3x}$.

Так как нахождение первообразной от многочлена не представляет труда, то интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

Чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь, надо представить ее в виде суммы простейших дробей, рассмотренных в пункте 2.3. Для осуществления такого представления знаменатель $Q_m(x)$ надо разложить на множители, каждый из которых является либо степенью линейной функции $x-a$, либо степенью квадратного трехчлена x^2+px+q, не имеющего действительных корней. Каждому множителю $(x-a)^k$ знаменателя $Q_m(x)$ соответствует сумма простейших дробей первого и второго типов: $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$, а каждому множителю $(x^2+px+q)^s$ - сумма простейших дробей третьего и четвертого типов.

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+px+q)^s}.$$

Для вычисления значений A, B, C в разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших используют метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим суть метода на примерах.

Пример 1. Найти $\int \frac{2x-1}{x(x-1)(x+2)}dx$.

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

После приведения суммы простейших дробей к общему знаменателю получим дробь, знаменатель которой равен знаменателю исходной дроби. Числители таких дробей также должны быть равны.

Следовательно, $2x-1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$.

Полученное равенство является тождественным, т.е. справедливым при любых значениях x. В частности, при $x=0$ имеем $-1=-2A$ или $A=\frac{1}{2}$,

при $x=1$ имеем $1=3B$ или $B=\frac{1}{3}$, при $x=-2$ имеем $-5=6C$ или $C=-\frac{5}{6}$.

Неизвестные коэффициенты A, B, C в данном случае найдены методом частных значений.

Тогда $\int \frac{2x-1}{x(x-1)(x+2)}dx = \int (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x+2})dx =$

$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{5}{6}\ln|x+2| + C$.

Пример 2. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2(x+2)}dx$.

Представление подынтегральной функции в виде суммы простейших дробей имеет вид:

$$\frac{3x+1}{x^2(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A_1x(x+2) + A_2(x+2) + Bx^2}{x^2(x+2)}.$$

Как и в предыдущем примере имеем тождественное равенство

$$3x+1 = A_1x(x+2) + A_2(x+2) + Bx^2 \qquad (2.6)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_2 и B воспользуемся методом частных значений.

При $x=0$ получим $1=2A_2$ или $A_2=\frac{1}{2}$, при $x=-2$ получим $-5=4B$ или $B=-\frac{5}{4}$. Коэффициент A_1 найдем приравнивая коэффициенты при x^2 в обеих частях равенства (2.6.) $x^2|0 = A_1 + B$.

Следовательно, $A_1 = -B = \frac{5}{4}$.

Окончательно получим $\int \frac{3x+1}{x^2(x+2)}dx = \int (\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x+2})dx =$

$= \frac{5}{4}\ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{5}{4}\ln|x+2| + C$.

Пример 3. Найти $\int \frac{x+5}{x(x^2+4)}dx$.

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей и приведем их к общему знаменателю.

$$\frac{x+5}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)x}{x(x^2+4)}.$$

Приравнивая числители, получим тождественное равенство

$x+5 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$.

Для определения неизвестных коэффициентов A, B, C получим систему уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + B \\ x & 1 = C \\ x^0 & 5 = 4A \end{array}$$

решение которой, $A = \frac{5}{4}$, $B = -\frac{5}{4}$, $C = 1$.

Следовательно, $\int \frac{x+5}{x(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{5}{4x} - \frac{\frac{5}{4}x - 1}{x^2+4} \right) dx =$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x} - \frac{5}{8}\int \frac{2x dx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{5}{4}\ln|x| - \frac{5}{8}\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} + \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{5}{4}\ln|x| - \frac{5}{8}\ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Задания для аудиторных занятий

1. Для данных правильных рациональных дробей записать вид разложения на простейшие, не вычисляя коэффициентов.

а) $\frac{2x^2-6x-9}{x^3-16x}$; б) $\frac{3x^3-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2}$;

в) $\frac{x^2-8x+12}{(x^3+25x)(x-1)^2}$; г) $\frac{2x-4}{(x-1)^2(x^2+x+7)^2}$.

Найти неопределенные интегралы:

2. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$; Ответ: $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4 + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)}\right| + C$.

3. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$; Ответ: $x + \frac{1}{2} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C$.

4. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$; Ответ: $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|} + \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x-1}{2} + C$.

5. $\int \frac{x^2}{x^4-1} dx$; Ответ: $\frac{1}{2}\text{arctg}x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C$.

6. $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} dx$; Ответ: $\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C$.

Задания для индивидуального выполнения

Найти неопределенные интегралы:

I	1. $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)} dx$; 2. $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} dx$; 3. $\int \frac{6-9x}{x^3+8} dx$.
II	1. $\int \frac{2x^4-7x^3+2x^2+13}{(x^2-5x+6)(x+1)} dx$; 2. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx$; 3. $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$.
III	1. $\int \frac{2x^4-3x^3-21x^2-26}{(x^2-5x+4)(x+3)} dx$; 2. $\int \frac{4x}{(x^2-1)(x+1)} dx$; 3. $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$.
IV	1. $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx$; 2. $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x} dx$; 3. $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8} dx$.

Ответы:

I	1. $6\ln\lvert x+3\rvert-2\ln\lvert x+1\rvert-2\ln\lvert x+5\rvert+C$; 2. $2\ln\lvert x-1\rvert-\frac{2}{x-1}+\ln\lvert x+1\rvert+C$; 3. $2\ln\lvert x+2\rvert-\ln\lvert x^2-2x+4\rvert-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.
II	1. $x^2+x+2\ln\lvert x+1\rvert+\ln\lvert x-2\rvert+\ln\lvert x-3\rvert+C$; 2. $2\ln\lvert x\rvert+\frac{6}{x+1}-\ln\lvert x+1\rvert+C$; 3. $\frac{1}{2}\ln\lvert x^2-2x+10\rvert-\ln\lvert x+2\rvert+\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{3}+C$.
III	1. $x^2+x+4\ln\lvert x-1\rvert+\ln\lvert x+3\rvert-2\ln\lvert x-4\rvert+C$; 2. $\ln\lvert x-1\rvert-\ln\lvert x+1\rvert-\frac{2}{x+1}+C$; 3. $2\ln\lvert x-1\rvert+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}+C$.
IV	1. $20\ln\lvert x+3\rvert-\ln\lvert x-1\rvert-16\ln\lvert x+2\rvert+C$; 2. $-\ln\lvert x\rvert-\ln\lvert x-1\rvert-\frac{3}{x-1}+C$; 3. $2\ln\lvert x+2\rvert+\ln\lvert x^2-2x+4\rvert+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.

2.5. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Для нахождения интегралов вида $\int \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx$ $(m, n\ge 0)$ подынтегральную функцию надо преобразовать с помощью формул понижения степени:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

В интегралах $\int \sin m\cos n\,dx$, $\int \sin mx\sin nx\,dx$, $\int \cos mx\cos nx\,dx$, необходимо произведение тригонометрических функций заменить суммой:

$$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x),$$

$$\sin mx\cdot\sin nx=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x),$$

$$\cos mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x).$$

Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R - рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ всегда можно свести к интегралу от рациональной функции:

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\left|\begin{matrix}\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t, & \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}, & \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int R_1(t)dt.$$

Однако в ряде случаев для нахождения $\int R(\sin x,\cos x)dx$ удобно использовать другие более простые подстановки:

а) если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то применяют упрощенную подстановку $\mathrm{tg}x=t$, при этом $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

б) если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то используют подстановку $\cos x = t$.

в) если $R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то удобной является подстановка $\sin x = t$.

Пример 1. Найти $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 5}$.

$$\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 5} = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2} = t, & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(\frac{4t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} + 5)} =$$

$$2\int \frac{dt}{4t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 4} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 3} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{1 + tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 3. Найти $\int tg^3 2x\, dx$.

$$\int tg^3 2x\, dx = \left| \begin{matrix} tg2x = t, \\ dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int t^3 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int (t - \frac{t}{1+t^2})dt =$$

$$= \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}\int \frac{d(t^2+1)}{1+t^2} = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}\ln(1+t^2) + C = \frac{1}{4}tg^2 2x - \frac{1}{4}\ln(1 + tg^2 2x) + C.$$

Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью определенных подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций.

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[m]{x}, ..., \sqrt[s]{x})dx$, где R рациональная функция своих аргументов, замена $x = t^n$, где n - наименьшее общее кратное показателей $k, m, ..., s$ приводит к интегралу от рациональной функции переменной t.

Интеграл более общего вида $\int R(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ приводится

к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, где n - наименьшее общее кратное показателей $k, m, ..., s$.

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[6]{x^7}}dx$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[6]{x^7}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^{12}, \sqrt{x} = t^6, \sqrt[6]{x} = t^2 \\ dx = 12t^{11}dt, \sqrt[4]{x} = t^3 \end{matrix} \right| = 12\int \frac{t^6 \cdot t^{11}}{t^{15} + t^{14}}dt = 12\int \frac{t^3}{t+1}dt =$$

$$= 12\int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1}dt = 12\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1})dt = 12\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= 4\sqrt[4]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} - 12\ln(\sqrt[12]{x} + 1) + C.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[6]{(x+1)^5}}$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[6]{(x+1)^5}}=\left|\begin{matrix} x+1=t^6, \ \sqrt[3]{x+1}=t^2 \\ dx=6t^5dt, \sqrt[6]{x+1}=t \end{matrix}\right| = 6\int \frac{(t^6-1)t^5}{t^8-t^5}dt = 6\int \frac{t^6-1}{t^3-1}dt =$$

$$=6\int (t^3+1)dt = 6(\frac{t^4}{4}+t)+C=\frac{3}{2}\sqrt[6]{(x+1)^4}+6\sqrt[6]{(x+1)}+C.$$

Задания для аудиторных занятий

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \sin^4 3x\,dx$; ответ: $\frac{3}{8}x-\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{8}\cos 12x+C$.
2. $\int \cos 2x\cdot \sin 6x\,dx$; ответ: $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{8}\cos 4x+C$.
3. $\int \cos x\cdot \cos 2x\,dx$; ответ: $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{6}\sin 3x+C$.
4. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; ответ: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$.
5. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$; ответ: $\frac{2}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C$.
6. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$; ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}x}{\sqrt{3}}+C$.
7. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$; ответ: $\frac{1}{15}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}\mathrm{tg}x}{\sqrt{5}}+C$.
8. $\int \mathrm{ctg}^2 5x\,dx$; ответ: $-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}5x-x+C$.
9. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$; ответ: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5}+\frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|+C$.
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}+2\sqrt[4]{3x+4}}$; ответ: $\frac{4}{3}(\frac{1}{2}\sqrt{3x+4}-2\sqrt[4]{3x+4}+4\ln(\sqrt[4]{3x+4}+2))+C$.

Задания для индивидуального выполнения

I	1. $\int \cos^4 x\,dx$; 2. $\int \sin x\cdot\cos 9x\,dx$; 3. $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx$; 4. $\int \frac{\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{ctg}^2 x}dx$; 5. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$; 6. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$; 7. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$.
II	1. $\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx$; 2. $\int \sin 3x\cdot\sin 5x\,dx$; 3. $\int \cos^3 x\cdot\sin^2 x\,dx$; 4. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$; 5. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$; 6. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$; 7. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

III	1. $\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx$; 2. $\int \cos 2x\cdot\sin 6x\,dx$; 3. $\int \sin^3 2x\cdot\cos^2 2x\,dx$; 4. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}$; 5. $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$; 6. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}dx$; 7. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.
IV	1. $\int \sin^2 4x\,dx$; 2. $\int \cos 6x\cdot\cos 8x\,dx$; 3. $\int \cos^3 2x\cdot\sin^2 2x\,dx$; 4. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; 5. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; 6. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$; 7. $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$.

Ответы:

I	1. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 2. $\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{20}\cos 10x+C$; 3. $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$; 4. $\frac{1}{4}\ln\left\|tg^4 x-1\right\|+C$; 5. $arctg\frac{tg\frac{x}{2}-1}{2}+C$; 6. $-\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}-4\ln\left\|1-\sqrt[4]{x}\right\|+C$; 7. $\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5}+C$.
II	1. $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$; 2. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$; 3. $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$; 4. $\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2tgx}{\sqrt{3}}+C$; 5. $\frac{1}{5}\ln\left\|\frac{tg\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{tg\frac{x}{2}+2}\right\|+C$; 6. $\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt[6]{x}+\frac{2\sqrt{3}}{9}arctg\sqrt[6]{9x}+C$; 7. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-(x+1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+C$.
III	1. $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$; 2. $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{8}\cos 4x+C$; 3. $\frac{1}{10}\cos^5 2x-\frac{1}{6}\cos^3 6x+C$; 4. $\frac{1}{\sqrt{14}}arctg\frac{\sqrt{2}tgx}{\sqrt{7}}+C$; 5. $\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{tg\frac{x}{2}-4}{tg\frac{x}{2}-1}\right\|+C$; 6. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+\ln\left\|\sqrt[3]{x}+1\right\|+C$; 7. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+\ln\left\|\sqrt[6]{2x+1}\right\|+C$.
IV	1. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$; 2. $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{28}\sin 14x+C$; 3. $\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x+C$; 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tgx)+C$; 5. $-\frac{1}{4}\ln\left\|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{tg\frac{x}{2}+2}\right\|+C$; 6. $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[6]{x}-4\ln\|\sqrt[4]{x}+1\|+C$; 7. $3\sqrt[3]{x+1}-4(x+1)+C$.

ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1. Вычисление определенного интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям

Пусть на отрезке $[a;b]$ определена функция $f(x)$. Произвольно разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Из каждого отрезка (x_{i-1}, x_i) возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Эта сумма называется интегральной суммой, а ее предел при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется определенным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

При этом говорят, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Для интегрируемости достаточно, чтобы на отрезке $[a;b]$ функция была или непрерывна или имела конечное число конечных разрывов.

Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, есть первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$ при $a \le x \le b$.

Тогда имеет место формула $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, которая называется формулой Ньютона-Лейбница. Первообразная $F(x)$ вычисляется путем нахождения неопределенного интеграла $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1, t_2]$, причем $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Задания для аудиторных занятий

1. Вычислить интегралы.

а) $\int_{-3}^{0}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; б) $\int_0^1\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; в) $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; г) $\int_0^1\frac{x^3dx}{x^8+1}$;

д) $\int_0^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; е) $\int_0^2\frac{2x-1}{2x+1}dx$; ж) $\int_0^1\frac{dx}{4x^2+4x+5}$; з) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi$.

Ответы: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{4}$; в) 2; г) $\frac{\pi}{16}$; д) $e-\sqrt{e}$; е) $2-\ln 5$; ж) $\frac{1}{4}(\mathrm{arctg}\frac{3}{2}-\mathrm{arctg}\frac{1}{2})$; з) $\frac{2}{3}$.

2. Вычислить интегралы с помощью замены переменной.

а) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$; б) $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; в) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}$;

д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\frac{1}{6}\sin^2 x}$; е) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

Ответы: а) $\frac{2}{3}(3+\ln\frac{2}{5})$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $2-\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}2$; д) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$; е) π.

3. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям.

а) $\int\limits_0^{\ln 2} x\cdot e^{-x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos 2x\,dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$;

г) $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$; д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$; е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin 4x\,dx$.

Ответы: а) $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$; б) $\frac{\pi^2-8}{32}$; в) $\pi\sqrt{2}-4$; г) $e-2$; д) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; е) $\frac{4}{25}(e^{\frac{3\pi}{4}}+1)$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Вычислить интегралы.

I	а) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$; б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;
II	а) $\int\limits_0^1 \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^6+4}}$; б) $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$; в) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$;
III	а) $\int\limits_{-13}^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$; б) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;
IV	а) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; б) $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$; в) $\int\limits_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

Ответы:

I	а) $\frac{7}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$;
II	а) $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; б) $1-\cos 1$; в) $0{,}2\ln\frac{4}{3}$;
III	а) $5(\sqrt[5]{16}-1)$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\mathrm{arctg}3-\mathrm{arctg}2$;
IV	а) $\frac{7}{72}$; б) $\sin 1$; в) $\frac{\pi}{6}$.

2. Вычислить интегралы с помощью замены переменной.

I	а) $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$; б) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2-\sin x}$;
II	а) $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$; в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+2\cos x}$;
III	а) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$; б) $\int\limits_{-3}^{-2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+\cos x}$;
IV	а) $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; б) $\int\limits_{3}^{4}\frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$; в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5+4\sin x}$.

Ответы:

I	а) $0{,}2\ln 112$; б) $\ln(3+\sqrt{8})$; в) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$;
II	а) $4-2\ln 3$; б) $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$; в) $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$;
III	а) $2(\ln 2-\frac{1}{4})$; б) $\arcsin\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{6}})$;
IV	а) $2-\ln 2$; б) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; в) $\frac{2}{3}(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}\frac{4}{3})$.

3. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям.

I	а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\cdot\sin 2x\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\ln(x+1)\,dx$;
II	а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; б) $\int\limits_{1}^{e}x\ln x\,dx$;
III	а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos x\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}x\cdot\operatorname{arctg}x\,dx$;
IV	а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\limits_{1}^{2}x^2\ln x\,dx$.

Ответы:

I	а) $\frac{1}{4}$; б) $2\ln 2-1$;
II	а) $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3)$; б) $\frac{e^2+1}{4}$;
III	а) $\frac{\pi}{2}-1$; б) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
IV	а) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln 2$; б) $8\ln\frac{2}{3}-\frac{7}{9}$.

3.2. Несобственные интегралы. Несобственные интегралы первого рода. Несобственные интегралы второго рода. Признаки сходимости. Интегралы с бесконечными пределами

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < \infty$, то несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом (несобственным интегралом первого рода) от этой функции называется предел $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$.

Если этот предел конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, если предел не существует или равен бесконечности, то он называется расходящимся.

Аналогично определяются несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

Признаки сходимости.

1. Пусть при $a \le x < +\infty$ выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$. Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

2. Если при $a \le x < +\infty$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Если сходится $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и он называется абсолютно сходящимся.

4. Если $f(x) \ge 0$ и существует конечный предел $\lim_{x \to \infty}(f(x)x^{\alpha}) = A \ne 0$, т.е. $f(x) = \frac{A}{x^{\alpha}}$ при $x \to +\infty$, то при $\alpha > 1$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а при $\alpha \le 1$ интеграл расходится.

2) Интегралы от неопределенных функций.

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le c$ и в точке с она имеет бесконечный разрыв, т.е. $f(c) = \infty$, то несобственный интеграл от этой функции (несобственный интеграл второго рода) определяется формулой:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \qquad (3.1).$$

Если оба предела в правой части равенства (3.1.) существуют и конечны, то несобственный интеграл называется сходящимся, а если хотя бы один из них не существует, – расходящимся.

В случае $c = a$ или $c = b$, в правой части равенства (3.1) будет только один предел:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{b-\varepsilon_1} f(x)dx \text{ или } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{a+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны соответствующим признакам для интегралов с бесконечными пределами.

Задания для аудиторных занятий

1. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

а) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int_0^{+\infty} e^{-kx}dx$ $(k > 0)$; в) $\int_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$; г) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;

д) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$; е) $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x}dx$; ж) $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$.

Ответы: а) расходится; б) $\frac{1}{k}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; д) 0; е) 1; ж) расходится.

2. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$; г) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$; д) $\int_0^1 x^2 \ln x\,dx$;

е) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3}$; ж) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{2}$; б) расходится; в) расходится; г) π; д) $-\frac{1}{9}$; е) расходится; ж) расходится.

3. исследовать сходимость интегралов.

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2+5x^4}$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}$; в) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$; г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$;

д) $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$; е) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; ж) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$; з) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Ответы: а) сходится; б) расходится; в) сходится; г) сходится; д) расходится; е) сходится; ж) сходится; з) сходится.

Задания для индивидуального выполнения

1. Вычислить несобственные интегралы первого рода или установить их расходимость.

I	а) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$;
II	а) $\int_e^{+\infty} \frac{x\,dx}{x\ln x}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+3)^2}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$;

Ответы:

I	а) $\frac{1}{2}$; б) расходится; в) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$;
II	а) расходится; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{2\pi}{\sqrt{31}}$;

III	а) $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;	III	а) 1; б) расходится; в) π;
IV	а) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty}x e^{-x^2}dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$.	IV	а) расходится; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

2. Вычислить несобственные интегралы второго рода или установить их расходимость. Ответы:

I	а) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\arccos}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}\ln x\,dx$;	I	а) 1; б) $\frac{3\pi^2}{8}$; в) $-\frac{4}{9}$;
II	а) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; в) $\int\limits_{0}^{1}x\ln x\,dx$;	II	а) 2; б) π; в) $-\frac{1}{4}$;
III	а) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int\limits_{0}^{1}\ln x\,dx$;	III	а) расходится; б) $\frac{\pi^2}{8}$; в) -1;
IV	а) $\int\limits_{1}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}x\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{1}x^2\ln x\,dx$.	IV	а) $2\sqrt{2}$; б) расходится; в) $-\frac{1}{9}$.

3.3. Приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Вычисление объёмов. Длина дуги плоской и пространственной кривых

Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$ (рис.2.), определяется по формуле

$$S = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$; $x = b$ (рис.3.), вычисляется по формуле:

$$S = \int\limits_{a}^{b}(f_2(x) - f_1(x))dx$$

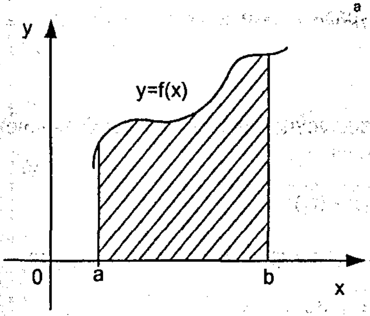

Рис.2

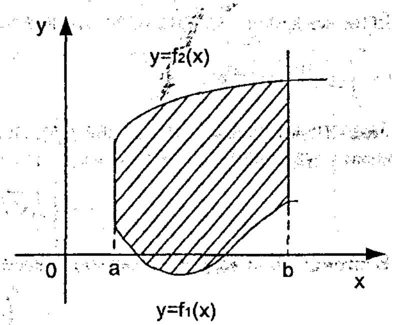

Рис.3

Объемы тел, образованных вращением криволинейной трапеции (рис. 2) вокруг оси Ox и оси Oy выражаются соответственно равенствами:

$V_x = \pi \int\limits_a^b y^2 dx$; $V_y = 2\pi \int\limits_a^b xy\,dx$.

Если фигура ограничена кривой, имеющей параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, то площадь ее и объёмы тел, образованных вращением этой фигуры вокруг осей, вычисляются по формулам:

$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, $V_x = \pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt$, $V_y = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)x'(t)dt$, где пределы интегрирования находятся из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ ($y(t) \geq 0$ на отрезке $[t_1;t_2]$).

Пусть фигура ограничена графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рис. 4), где φ и r - полярные координаты.

Тогда площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой графика функции $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

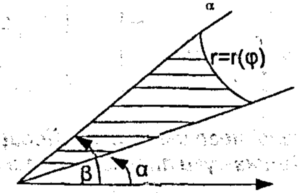

Рис.4

Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$, то объем тела определяется по формуле: $V = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Длина дуги гладкой кривой $y = f(x)$, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, равна $\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

Если же кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(t_1 \leq t \leq t_2)$, то $\ell = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$.

Аналогично выражается длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\ell = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt.$$

В случае, если задано полярное уравнение гладкой кривой $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то

$$\ell = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

Задания для аудиторных занятий

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

а) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$; б) $y=3-2x-x^2$, $y=0$; в) $y^2=x^3$, $y=8$, $x=0$;

г) $y=2x-x^2$, $y=-x$; д) $y=2-x^2$, $y^3=x^2$; е) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t),\ y=0 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} x=a(t^2+1) \\ y=b(t^3-3t) \end{cases}$; з) $r=a\sin 3\varphi$; и) $r^2=a^2\cos\varphi$.

Ответы: а) $8\ln 2$; б) $\frac{32}{3}$; в) $19{,}2$; г) $4{,}5$; д) $\frac{32}{15}$; е) $3\pi a^2$; ж) $\frac{24}{5}ab\sqrt{3}$; з) $\frac{\pi a^2}{4}$ и) a^2.

2. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг указанной оси.

а) $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, V_x, V_y; б) $x^2-y^2=a^2$, $x=\pm 2a$, V_x;

в) $y^2=4-x$, $x=0$, V_y; г) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$; д) $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$, V_y;

е) $x+y-2=0$; $x^2+y^2=4$, V_x.

Ответы: а) $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$, 2π; б) $\frac{8\pi a^3}{3}$; в) $\frac{512\pi}{15}$; г) $\frac{3}{10}\pi$; д) $\frac{32\pi a^3}{105}$; е) $\frac{8}{3}\pi$.

3. Вычислить дину дуги кривой.

а) $y=\ln x$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$; б) $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$, $0\le t\le 1$; в) $r=a(1+\cos\varphi)$;

г) $x=at^2$, $y=a(t+\frac{1}{3}t^3)$, $z=a(t-\frac{1}{3}t^3)$, $0\le t\le\sqrt{3}$.

Ответы: а) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; б) $\sqrt{2}(e-1)$; в) $8a$; г) $2a\sqrt{6}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями

I	а) $y=4x-x^2$, $y=0$; б) $y=x^2$, $y=2x$; в) $r=a\sin 2\varphi$; г) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$, $y=0$
II	а) $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$; б) $y=2-x^2$, $y=x^2$; в) $r=a\cos\varphi$; г) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$.
III	а) $y^2=2x+4$, $x=0$; б) $y=x^2+2x$, $y=x+2$; в) $r=a\cos 3\varphi$; г) $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=2t^2-t^3 \end{cases}$.
IV	а) $y=x^2$, $y=8$, $x=0$; б) $y=x^2+4x$, $y=x+4$; в) $r=a\sin 5\varphi$; г) $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$.

Ответы:

I	а) $\frac{32}{3}$; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{\pi a^2}{8}$; г) 12π.

II	а) 1; б) $\frac{8}{3}$; в) $\frac{\pi a^2}{2}$; г) πab.
III	а) $\frac{16}{3}$; б) $\frac{9}{2}$; в) $\frac{\pi a^2}{4}$; г) $\frac{8}{15}$.
IV	а) 12; б) $20\frac{5}{6}$; в) $\frac{\pi a^2}{4}$; г) $\frac{3\pi}{2}$.

2. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг указанной оси.

I	а) $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, V_x; б) $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$, V_y; в) $r = a(1+\cos\varphi)$, V;
II	а) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, V_x; б) $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, V_y; в) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $y = 0$, V_x;
III	а) $y^2 = 2px$, $x = h$, V_x; б) $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$, V_y; в) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $y = 0$, V_y;
IV	а) $y = ax - x^2$, $y = 0$, V_x; б) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, V_y; в) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin 2t, \ y = 0 \end{cases}$, $0 \le x \le a$, V_x

Ответы:

I	а) $\frac{\pi^2}{2}$; б) $\frac{64\pi}{3}$; в) $\frac{8}{3}\pi a^3$;
II	а) 12π; б) $2\pi^2$; в) $5\pi^2 a^3$;
III	а) $\pi p h^2$; б) $58{,}5\pi$; в) $6\pi^3 a^3$;
IV	а) $\frac{\pi a^5}{30}$; б) $9{,}2\pi$; в) $\frac{8}{15}\pi a^3$.

3. Вычислить длину дуги кривой.

I	а) $y^2 = x^3$, $0 \le x \le \frac{4}{3}$; б) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t), \ 0 \le t \le T \end{cases}$;
II	а) $y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$; б) $r = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;
III	а) $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$; б) $r = 2(1 - \cos\varphi)$;
IV	а) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; б) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$.

Ответы:

I	а) $\frac{112}{27}$; б) $\frac{1}{2}aT^2$;
II	а) $\ln 3$; б) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$;
III	а) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$; б) 16;
IV	а) $6a$; б) $8a$.

ГЛАВА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

4.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (4.1)$$

связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производную y'.

Если уравнение (4.1.) разрешимо относительно y', то его можно записать в нормальной форме:

$$y' = f(x, y) \qquad (4.2)$$

Иногда дифференциальное уравнение первого порядка удобно задавать в дифференциальной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (4.3)$$

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения (4.1., 4.2. или 4.3) называется любая действительная функция $y = y(x)$, которая вместе со своей производной обращает данное дифференциальное уравнение в тождество. В случае, если эта функция задана в неявном виде, решение называется интегралом. График решения (или интеграла) дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Любое дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесчисленное множество решений. Для описания этого множества вводится понятие общего решения.

Общим решением дифференциального уравнения (4.1) (4.2.) или (4.3) называется функция $y = \varphi(x, C)$, где C - произвольная постоянная, обращающая данное уравнение в тождество.

Общее решение $F(x, y, C) = 0$, заданное в неявном виде, называется общим интегралом.

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящее от параметра C.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего решения при фиксированном значении C: $y = \varphi(x, C_0)$, где C_0 - число. Аналогично определяется частный интеграл: $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка имеет следующую формулировку. Найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$; другими словами, найти интегральную кривую этого уравнения, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0, \qquad (4.4)$$

где - $X(x)$, $X_1(x)$ - функции только от x;

$Y(y)$, $Y_1(y)$ - функции только от y. Предположив, что $X_1(x)Y(y) \neq 0$ и разделив на это произведение обе части уравнения (4.4), получим уравнение

$\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \frac{Y_1(y)}{Y_2(y)}dy = 0$, которое называется уравнением с разделенными переменными. Оно имеет общий интеграл

$$\int\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \int\frac{Y_1(y)}{Y_2(y)}dy = C.$$

Корни уравнений $X_1(x)=0$, $Y(y)=0$ являются решениями уравнения (4.4).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' = -\dfrac{x+xy^2}{y+yx^2}$.

Решение. Так как после замены $y' = \dfrac{dy}{dx}$ данное уравнение приводится к виду $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$, то оно является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части на $(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$, получим уравнение с разделенными переменными $\dfrac{x}{1+x^2}dx + \dfrac{y}{1+y^2}dy = 0$ или $\dfrac{2x}{1+x^2}dx + \dfrac{2y}{1+y^2}dy = 0$.

Интегрируя это уравнение, находим $\ln(1+x^2)+\ln(1+y^2) = \ln C$ или $(1+x^2)(1+y^2) = C$.

Здесь произвольная постоянная взята в логарифмической форме, что законно, поскольку всякое действительное число C_1 может быть представлено как логарифм другого числа: $C_1 = \ln C$, где $C = e^{C_1}$. Ответ: $(1+x^2)(1+y^2) = C$.

Функция $F(x,y)$ называется однородной m-ого измерения, если для любых t выполняется тождество $F(tx,ty) = t^m F(x,y)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{4.5}$$

называется однородным, если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ - однородные функции одного и того же измерения.

С помощью новой переменной u, вводимой по формуле $y = ux$, однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $(x+y)dx + x\,dy = 0$.

Решение: Здесь $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = x$ - однородные функции первого измерения, так как $P(tx,ty) = tx+ty = t(x+y) = tP(x,y)$ и $Q(tx) = tx = tQ(x)$; $m=1$.

Вводим новую переменную u через подстановку $y = ux$, тогда $dy = udx + xdu$. Подставляя это выражение в уравнение, получим $(x+xu)dx + x(xdu+udx) = 0$ или $xdu + (2u+1)dx = 0$.

Разделяем переменные: $\dfrac{du}{2u+1} = -\dfrac{dx}{x}$.

Для удобства умножим обе части последнего равенства на 2.

Тогда, интегрируя почленно, будем иметь: $\displaystyle\int \frac{2du}{2u+1} = -2\int \frac{dx}{x}$;

Отсюда находим $\ln|2u+1| = -2\ln|x| + \ln|C|$ и $2u+1 = \dfrac{C}{x^2}$.

Так как $u = \dfrac{y}{x}$, то $\dfrac{2y}{x}+1 = \dfrac{C}{x^2}$ и, следовательно, $y = -\dfrac{x}{2}+\dfrac{C_1}{x}$,

где $C_1 = \dfrac{C}{2}$ - произвольная постоянная.

В процессе решения нам приходилось делить на функции x и $2u+1$. Приравнивая их к нулю, получаем возможные решения: 1) $x=0$ и 2) $2u+1=0$; отсюда $y=-\dfrac{x}{2}$. Обе функции 1) и 2), как легко убедиться проверкой, удовлетворяют данному уравнению; последняя получается из общего решения при $C_1=0$. Ответ: $y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{C_1}{x}$, $C_1 \in R$.

Уравнение

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \tag{4.6}$$

можно привести к однородному уравнению с помощью преобразований $x=u+h$, $y=v+k$, где h и k определяются системой уравнений $\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0, \end{cases}$ в случае, когда $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Если $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$, то дифференциальное уравнение (4.6.) сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными с помощью преобразования $ax+by=z$.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{x-y}{2x-2y+5}$.

Решение: Для данного дифференциального уравнения выполняется условие $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0$. Вводим новую переменную z: $x-y=z$, $dx-dy=dz$, $dy=dx-dz$. Поскольку $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{2(x-y)+5}$, то $\dfrac{dx-dz}{dx}=\dfrac{z}{2z+5}$, $1-\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z}{2z+5}$, $\dfrac{dz}{dx}=1-\dfrac{2}{2z+5}=\dfrac{2z+5-z}{2z+5}$, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z+5}{2z+5}$.

Интегрируем полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{2z+5}{z+5}dz=dx$, $(2-\dfrac{5}{z+5})dz=dx$, $2z-5\ln|z+5|=x+c$.

Подставим вместо z его выражение и получим общий интеграл исходного уравнения: $x-2y-5\ln|x-y+5|=C$.

Задания для аудиторных занятий

1. Является ли функция $y(x,C)$, где C - произвольная постоянная, решением (интегралом) данного дифференциального уравнения:

а) $y=x^2(1+Ce^{\frac{1}{x}})$, $x^2y'+(1-2x)y=x^2$; б) $y=Ce^x-e^{-x}$, $xy''+2y'-xy=0$;

в) $x^2+y^4=Cy^2$, $xy\,dx=(x^2-y^4)dy$; г) $e^{\frac{y}{x}}=Cy$, $xyy'-y^2=x^2y$.

Ответы: а) да; б) нет; в) да; г) да.

2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

а) $e^{x+3y}dy = x\,dx$;

б) $y'\sin x = y\ln y$;

в) $(x+1)dx + (y-1)dy = 0$;

г) $(y+4)dx + (x-5)dy = 0$.

Ответы: а) $e^{3y} = 3(C - xe^{-x} - e^{-x})$; б) $\ln y = C\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$; в) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2C$; г) $(x-5)(y+4) = C$.

3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение, построить интегральную кривую, проходящую через указанную точку M_0.

а) $y' = y$; $M_0(0;1)$;

б) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $M_0(0;1)$;

в) $y' = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; $M_0(1;1)$;

г) $y' = y\,\mathrm{ctg}x$; $M_0(\dfrac{\pi}{4};3)$.

Ответы: а) $y = Ce^x$, $y = e^x$; б) $y = \sqrt{1+x^2} + C$, $y = \sqrt{1+x^2}$; в) $y = (\dfrac{C}{2} - \sqrt{x})^2$, $y = (2-\sqrt{x})^2$; г) $y = C\sin x$, $y = 3\sqrt{2}\sin x$.

4. Найти общее или частное решение (общий или частный интеграл) дифференциального уравнения.

а) $(2x+y)dy - (x+2y)dx = 0$;

б) $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$;

в) $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$, $y(1) = 1$;

г) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$, $y(1) = 1$;

д) $y' = \dfrac{x+y+3}{3x+3y+1}$.

Ответы: а) $(y-x)^2 = C^2(x+y)$; б) $x^3 + y^3 = Cxy$; в) $\dfrac{y^2}{x} = e^{1-\frac{x}{y}}$; г) $\dfrac{y}{x} + 2\ln\dfrac{y}{x} = 1 - \ln x$; д) $(3y - x) + \ln|x+y+1| = C$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Является ли функция $y(x,C)$, где C - произвольная постоянная, решением (интегралом) данного дифференциального уравнения.

I	$y = \dfrac{Cx}{x+1} + 1$; $y - xy' = 1 + x^2y'$.
II	$y = C\cos x + 2$; $y'\mathrm{ctg}x + y = 2$.
III	$\dfrac{y}{y+1} = Cx$; $xy' - y = y^2$.
IV	$y = C\sqrt{x^2-1}$; $(x^2-1)y' - xy = 0$.

2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение и найти его частное решение.

I	$\sqrt{1-x^2}dy-3dx=0,\ y(\frac{1}{2})=\pi.$
II	$x\,dy-(1-\sqrt{x})^3dx=0,\ y(1)=2.$
III	$\cos\sqrt{x}\ dx-\sqrt{x}\ dy=0,\ y(0)=1.$
IV	$(xy^2+y)dx-x\,dy=0$ Указание. Преобразовать уравнение, положив $xy=u$), $y(1)=2$.

3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

I	$ydx-(x+\sqrt{x^2+y^2})dy=0.$
II	$(x^2+y^2+xy)dx-x^2dy=0.$
III	$2x^3y'=y(2x^2-y^2).$
IV	$x^2y'=y(x+y).$

4. Проинтегрировать уравнение.

I	II	III	IV
$y'=\dfrac{x+y}{2x+2y+5}$	$y'=\dfrac{x-2y-3}{2x+y+1}$	$y'=\dfrac{x+y}{x+4y+3}.$	$y'=\dfrac{x+y-1}{x+2y-4}$

Ответы: I. да; II. да; III. да; IV. да.

2. I. $y=3\arcsin x+\frac{\pi}{2}$; II. $y=\ln x-6\sqrt{x}+3x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{17}{3}$; III. $y=2\sin\sqrt{x}+1$;

IV. $x^2(1+\frac{2}{xy})=2.$

3. I. $y^2-2Cx=C^2$; II. $y=x\,\mathrm{tg}(\ln Cx)$; III. $y^2=\dfrac{x^2}{\ln(Cx)^4}$; IV. $y=-\dfrac{x}{\ln(Cx)}$.

4. I. $\frac{2}{3}(x+y)+\frac{5}{9}\ln|3x+3y+5|=x+C$. II. $(y+2x+1)^2=C^2+5(x+1)^2$;

III. $(2y+x+1)(2y-x+3)^3=C^4$;

IV. $(x+2)^2-2(y-3)^2=C^2\left(\dfrac{\sqrt{2}(y-3)+x+2}{\sqrt{2}(y-3)-x-2}\right)^{\frac{1}{8}}$

4.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$a(x)y'+b(x)y+C(x)=0, \tag{4.7}$$

где $a(x), b(x), C(x)$ - заданные функции. Если $a(x)\neq 0$, то уравнение (4.7) можно записать в приведенном виде

$$y'+p(x)y=f(x), \tag{4.8}$$

где $p(x)=\dfrac{b(x)}{a(x)}$ и $f(x)=-\dfrac{C(x)}{a(x)}$ ($f(x)$ - свободный член или правая часть уравнения). Предполагаем, что коэффициент $p(x)$ и свободный член $f(x)$ уравнения (4.8) непрерывны на некотором интервале (a,b). Если в уравнении (4.8) $f(x)=0$ или $p(x)=0$, то получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. В случае $f(x)=0$ уравнение (4.8) называется однородным линейным дифференциальным уравнением.

Общее решение уравнения (4.8) всегда можно записать в виде

$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$, где C - произвольная постоянная.

При решении уравнения (4.8) искомую функцию y можно представить в виде произведения двух множителей: $y=uv$; где u и v функции от x. Так как $y'=u'v+uv'$, то подстановка выражений для y и y' в уравнение (4.8) приводит его к виду $uv'+v(u'+p(x)u)=f(x)$. В качестве u выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению $u'+p(x)u=0$; тогда функция v определяется уравнением $uv'=f(x)$.

Подставляя полученные выражения для функций u и v в выражение $y=uv$, получим искомую функцию y.

На практике нет необходимости линейное уравнение (4.7) приводить к виду (4.8); можно сразу применять подстановку $y=uv$.

Пример 1. Решить уравнение $xy'+2y=x^2$.

Решение: Данное уравнение линейное. Полагаем $y=uv$, $y'=vu'+uv'$. Подставляем эти выражения в уравнение, получаем $v(xu'+2u)+xuv'=x^2$. Подбираем функцию u так, чтобы $xu'+2u=0$; тогда $xuv'=x^2$.

$x\dfrac{du}{dx}=-2u$, $\dfrac{du}{u}=-2\dfrac{dx}{x}$; интегрируя, находим $\displaystyle\int\frac{du}{u}=-2\int\frac{dx}{x}$, т.е.

$\ln|u|=-2\ln|x|+\ln|C_0|$.

Выбирая $C_0=1$, получим $u=\dfrac{1}{x^2}$. Так как $xuv'=x^2$, то $x\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{dv}{dx}=x^2$, $\dfrac{dv}{dx}=x^3$,

и, таким образом, $u=\displaystyle\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$; где C - произвольная постоянная. Итак, окончательно находим $y=uv=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x^4}{4}+C\right)$, т.е. $y=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{C}{x^2}$.

Ответ: $y=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{C}{x^2}$.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y'+p(x)y=f(x)y^{\alpha}, \tag{4.9}$$

где - α действительное число. Это уравнение является линейным, если $\alpha=0$, $\alpha=1$. В других случаях оно сводится к линейному с помощью подстановки $z=y^{1-\alpha}$.

Пример 2. Решить уравнение $y'+\dfrac{y}{x}=x^2y^2$.

Решение: Данное уравнение является уравнением Бернулли, для которого $\alpha=2$. Разделим обе части уравнения на y^2: $\dfrac{y'}{y^2}+\dfrac{1}{xy}=x^2$. Введём новую переменную

$z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$. Так как $z' = -\frac{1}{y^2}y'$, то последнее уравнение примет вид:

$-z' + \frac{z}{x} = x^2$ или $z' - \frac{z}{x} = -x^2$. Это линейное уравнение, его решение находится с помощью подстановки $z = uv$. Подставляя функцию z и ее производную $z' = u'v + uv'$ в последнее уравнение, получим:

$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -x^2$ или $u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = -x^2$.

Выберем функцию v так, чтобы $v' - \frac{v}{x} = 0$, $u'v = -x^2$. Откуда следует, что $v = x$, $u = C - \frac{x^2}{2}$, а $z = x(C - \frac{x^2}{2})$.

Возвращаясь к переменной y по формуле $y = \frac{1}{z}$, получаем общий интеграл исходного уравнения: $y = \frac{1}{(C - \frac{x^2}{2})x}$ или $xy(C - \frac{x^2}{2}) = 1$.

Ответ: $xy(C - \frac{x^2}{2}) = 1$.

Линейные уравнения и уравнения Бернулли можно решить методом вариации произвольной постоянной. Он состоит в следующем: сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения (т.е. уравнения, для которого $f(x) = 0$); затем величину C, входящую в это общее решение, полагают функцией от x и определяют её.

Пример 3. Решить методом вариации произвольной постоянной линейное дифференциальное уравнение $xy' - 4y = 2x^2 - 3x$.

Решение: Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение:

$$xy' - 4y = 0,\ xy' = 4y,\ \frac{dy}{y} = \frac{4dx}{x},\ \ln|y| = 4\ln|x| + \ln|C|,\ y = Cx^4,\ C \neq 0.$$

Решение исходного уравнения ищем в виде $y = C(x)x^4$, где $C(x)$ - некоторая функция от x. Подставляя в уравнение выражение для y и $y' = C'(x)x^4 + 4C(x)x^3$, получаем: $C'(x)x^4 = 2x - 3$, $C(x) = \int \frac{2x-3}{x^4}dx$, $C(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + C_1$, где C_1 - постоянная. Тогда решение исходного уравнения имеет вид:

$y = C_1x^4 - x^2 + x$.

Ответ: $y = C_1x^4 - x^2 + x$.

Задания для аудиторных занятий

1. Решить линейное дифференциальное уравнение.

а) $y'\sin x - y\cos x = \sin x - x\cos x$;

б) $xy' - 2y = 2\sin x - x\cos x$;

в) $y'\ln x-\frac{y}{x}=1-\ln x$;

г) $y'\operatorname{arctg}x-\frac{y}{1+x^2}=2x\operatorname{arctg}x-\frac{x^2}{1+x^2}$;

д) $y'\arcsin x-\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

е) $y'\operatorname{ch}x-y\operatorname{sh}x=2\operatorname{ch}x--2x\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}x$.

Ответы: а) $y=C\sin x+x$; б) $y=Cx^2-\sin x$; в) $y=C\ln x-x$;

г) $y=C\operatorname{arctg}x+x^2$; д) $y=C\arcsin x+x$; е) $y=C\operatorname{ch}x+2x-1$.

2. Найти решение, удовлетворяющее указанному условию.

а) $y'-2y=e^{-x}$, $y(0)=-1$; б) $xy'-2y=x$, $y(1)=1$;

в) $xy'-3y=3-4x-x^2$, $y(1)=3$.

Ответы: а) $y=-\frac{2e^{2x}+e^{-x}}{3}$; б) $y=2x^2-x$; в) $y=x^3+x^2+2x-1$.

3. Проинтегрировать уравнение Бернулли.

а) $y'-xy=x^3y^2$; б) $xy'+y=y^2\ln x$;

в) $2y'+y=\frac{x}{y}$; г) $y'+\frac{y}{x}=-xy^2$.

Ответы: а) $y(Ce^{-\frac{x^2}{2}}-x^2+2)=1$; б) $y(Cx+\ln x+1)=1$;

в) $y=Ce^{-x}+2x-2$; г) $y(x^2+Cx)=1$.

4. Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных.

а) $y'-y=e^x$; б) $y'+y=x$; в) $xy'-2y=x^3+x$.

Ответы: а) $y=Ce^x+xe^x$; б) $y=Ce^{-x}+x-1$; в) $y=Cx^2+x^3-x$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

I) $y'+y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$; II) $y'+\frac{y}{x}=1+2\ln x$;

III) $(x^2-x)y'+y=x^2(2x-1)$; IV) $y'\sin x-y\cos x=1$.

2. Найти частное решение (частный интеграл) линейного дифференциального уравнения.

I) $xy'-2y=2x^4$, $y(1)=0$; II) $y'=2x(x^2+y)$, $y(0)=0$;

III) $x(y'-y)=e^x$, $y(1)=0$; IV) $xy'+y=\sin x$, $y(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$.

3. Найти общее решение уравнения Бернулли.

I) $y'+y=x\sqrt{y}$; II) $xy^2y'=x^2+y^3$;

III) $yx'+x=-yx^2$; IV) $y'-y\operatorname{tg}x+y^2\cos x=0$.

4. Решить методом вариации произвольной постоянной и найти частное решение линейного дифференциального уравнения.

I) $xy' + y = \sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$; II) $(x^2-1)y' - xy = x^3 - x$, $y(\sqrt{2}) = 1$;

III) $(1-x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$; IV) $x^2y' = 2xy + 3$, $y(1) = -1$.

Ответы: I) $y = (\operatorname{tg}x + C)\cos x$; II) $y = x\ln x + \frac{C}{2}$; III) $y = x^2 + \frac{Cx}{x-1}$;

IV) $y = C\sin x - \cos x$.

1. I) $y = x^4 - x^2$; II) $y = x^2 + 1 - e^{x^2}$; III) $y = e^x \ln x$; IV) $y = \frac{1-\cos x}{x}$.

2. I) $y = (xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + C)^2 \cdot e^{-x}$; II) $y = x\sqrt[3]{3(C - \frac{1}{x})}$; III) $x = \frac{1}{y(C + \ln y)}$;

IV) $y = \frac{1}{(x+C)\cos x}$.

4. I) $y = \frac{1-\cos x}{x}$; II) $y = x^2 - 1$; III) $y = x + \sqrt{1-x^2}$; IV) $y = -\frac{1}{x}$.

4.3. Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Приложения к техническим задачам

Дифференциальным уравнением n - ого порядка называется уравнение относительно неизвестной функции $y = y(x)$ и ее производных y', y'',..., $y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (4.10)$$

Если уравнение (4.10) разрешимо относительно старшей производной, то его можно представить в нормальной форме:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (4.11)$$

Решением дифференциального уравнения n - ого порядка называется любая действительная функция $y = y(x)$, которая вместе со своими производными обращает данное уравнение в тождество.

Задача Коши: найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения n -ого порядка, удовлетворяющее условиям:

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Рассмотрим некоторые типы уравнений высших порядков, допускающее понижение порядка.

1. Общее решение уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$, где правая часть является функцией только от x, находят методом n - кратного интегрирования.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' = 3x + 1$.

Решение: Умножая обе части на dx и интегрируя, получим

$y'' = \int (3x+1)dx = \frac{3}{2}x^2 + x + C_1$.

Повторяя эту операцию, приходим к уравнению первого порядка:

$y' = \int (\frac{3}{2}x^2 + x + C_1)dx = \frac{1}{2}x^3 + C_1x + C_2$.

И, наконец, $y = \int(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2)dx = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

Ответ: $y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$.

2. Пусть уравнение (4.10) не содержит $k-1$ первых последовательных производных, т.е. имеет вид:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k-1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (4.12)$$

Это уравнение подстановкой $y^{(k)} = z$ приводится к уравнению:

$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$, порядок которого равен $n-k$.

Пример 2. Найти решение уравнения $\sin x y^{IV} - \cos y y''' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(\frac{\pi}{2}) = 3 - \pi$, $y'(\frac{\pi}{2}) = -3$, $y''(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'''(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Решение: Данное дифференциальное уравнение четвертого порядка не содержит первых двух производных. Это уравнение вида (4.12). Введем новую неизвестную функцию z, положив $y''' = z$. Поскольку $y^{IV} = z'$, то искомое уравнение примет вид $\sin x z' - \cos x z = 0$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим $\ln|z| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|$, откуда $z = C_1 \sin x$, $y''' = C_1 \sin x$.

Правая часть полученного уравнения зависит только от x. Интегрируя это уравнение, будем иметь: $y'' = C_1 \cos x + C_2, y' = -C_1 \sin x + C_2 x + C_3$

$y = C_1 \cos x + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$.

Общее решение данного уравнения содержит четыре произвольных постоянных, так как исходное уравнение является уравнением четвертого порядка.

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Подставляя значение $x = \frac{\pi}{2}$ в выражения для y''', y'', y', y и приравнивая их данным числам, получим:

$y'''(\frac{\pi}{2}) = C_1 \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $y''(\frac{\pi}{2}) = -C_1 \cos\frac{\pi}{2} + C_2 = 0$.

$y'(\frac{\pi}{2}) = C_1 \sin\frac{\pi}{2} + C_2\frac{\pi}{2} + C_3 = -3$.

$y(\frac{\pi}{2}) = C_1 \cos\frac{\pi}{2} + \frac{C_2}{2}(\frac{\pi}{2})^2 + C_3\frac{\pi}{2} + C_4 = 3 - \pi$

из которых определяем значения произвольных постоянных:

$C_0 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = -2$, $C_4 = 3$. Подставляя найденные значения произвольных постоянных в общее решение получим искомое частное решение: $y = \cos x - 2x + 3$.

Ответ: $y = \cos x - 2x + 3$.

3. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее явно аргумента x: $F(y, y', y'') = 0 \qquad (4.13)$

В этом случае порядок уравнения можно понизить на единицу, вводя новую функцию $p(y) = y'$, где y рассматривается как её аргумент. Используя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$y' = \frac{dp}{dx} = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $y'' = \frac{6}{y^3}$.

Решение: Это уравнение вида (4.13). Применяя подстановку $y' = p$, тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Уравнение примет вид $p\frac{dp}{dy} = \frac{6}{y^3}$, поэтому $pdp = 6y^{-3}dy$, $\frac{p^2}{2} = -\frac{3}{y^2} + C_1$, $p^2 = 2C_1 - \frac{6}{y^2}$, $p = \pm\sqrt{2C_1 - \frac{6}{y^2}}$. Следовательно, $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2C_1 - \frac{6}{y^2}}$, $\frac{dy}{\sqrt{2C_1 - \frac{6}{y^2}}} = \pm dx$. Откуда $\frac{1}{2C_1}\sqrt{2C_1y^2 - 6} = \pm(x + C_2)$,

$\frac{1}{2C_1}(C_1y^2 - 3) = (x + C_2)^2$, $C_1y^2 - 3 = 2C_1(x + C_2)^2$.

Ответ: $C_1y^2 - 3 = 2C_1(x + C_2)^2$.

Решение многих научных и технических задач приводит к интегрированию дифференциальных уравнений. В этих задачах требуется установить зависимость между переменными величинами некоторого физического, химического или другого процесса, найти уравнение линии или поверхности и т.д.

При решении таких задач необходимо:

1. составить дифференциальное уравнение по условию задачи;
2. определить тип полученного уравнения и выбрать метод его решения;
3. найти общее решение уравнения;
4. получить частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям;
5. в случае необходимости вычислить значения вспомогательных параметров;
6. найти, если это требуется, численные значения искомых величин.

При составлении дифференциальных уравнений используются геометрический или механический смысл производной, кроме того, в зависимости от условия задачи, применяются соответствующие законы физики, механики и других наук.

Пример 4. Определить закон движения материальной точки с массой m, брошенной с начальной скоростью v_0 вертикально вверх.

Решение: Если пренебречь сопротивлением воздуха, то единственная сила, действующая на нашу точку, есть сила тяжести, численно равная mg и направленная вертикально вниз. Согласно закону Ньютона имеем дифференциальное уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} = -g.$$

Кроме того, должны быть соблюдены начальные условия: $x|_{t=0} = 0$ и $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0$.

Произведя подстановку $\frac{dx}{dt} = v$ и $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ в последнее уравнение, получим $\frac{dv}{dt} = -g$ или $dv = -gdt$. Интегрируя, будем иметь $v = C_1 - gt$. Полагая здесь $t = 0$ и используя начальные условия, находим $C_1 = v_0$. Отсюда $v = v_0 - gt$ или $\frac{dx}{dt} = v_0 - gt$. Интегрируя еще раз, будем иметь $x = C_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Для определения C_2 заметим, что $x = 0$ при $t = 0$. Подставляя эти значения в наше последнее уравнение, получим $C_2 = 0$. Следовательно, закон движения материальной точки, брошенной вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (без учета сопротивления воздуха) равен: $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Ответ: $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Задания для аудиторных занятий

1. Проинтегрировать дифференциальные уравнения второго порядка.

а) $y'' = 3x^2 - 4x + 1$; б) $y'' = x^2 - \cos x$; в) $y'' = 3y'$;
г) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$; д) $yy'' - (y')^2 = 0$; е) $y^2 y'' = -1$;
ж) $yy'' + (y')^2 = 1$.

Ответы: а) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^2}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$; б) $y = \frac{x^4}{12} + \cos x + C_1 x + C_2$;
в) $y = C_1 e^{3x} + C_2$; г) $y = C(\frac{x^3}{3} + x)$; д) $y = C_2 e^{C_1 x}$; е) $1 + C_1 y^2 = (C_1 x + C_2)^2$;
ж) $(x + C_2)^2 - y^2 = C_1$.

2. Найти частные решения уравнений при указанных начальных условиях.

а) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
б) $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$;
в) $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$;
г) $2(y')^2 = y''(y - 1)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$;
д) $y'' = xy' + y + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ответы: а) $y = x^3 + 3x + 1$; б) $y = 2 + \ln\frac{x^2}{4}$; в) $y = \frac{4}{(x+4)^2}$; г) $y = \frac{x+1}{x}$;
д) $y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$.

3. Найти общее решение уравнений.

а) $y''' = \frac{1}{x}$; б) $xy^{V} = y^{IV}$; в) $y'y''' = 3(y'')^2$; г) $(y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$; д) $y''\operatorname{tg}x = y' + 1$.

Ответы: а) $y = x^2 \ln\sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$;
б) $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$; в) $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$;
г) $y = C_2(xe^{C_1 x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1 x}) + C_3$; д) $y = -C_1 \cos x - x + C_2$.

4. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2;3)$ и обладающей следующими свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к кривой, равна абсциссе точки касания.

Ответ: $(x-\frac{13}{4})^2+y^2=\frac{169}{16}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижения порядка.

I	а) $y'''=x$; б) $xy''=y'$.
II	а) $y'''=\cos x$; б) $y''=y'+x$.
III	а) $y'''=e^{-x}$; б) $xy''=y'+x^2$.
IV	а) $y'''=\operatorname{sh}x+x$; б) $xy''+y'=\ln x$

2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

I) $2yy''=(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$; II) $y''=2-y$, $y(0)=2$; $y'(0)=2$;

III) $y''=y'+(y')^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$; IV) $y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

3. Проинтегрировать дифференциальные уравнения.

I) $y'''\sin x-y''\cos x=0$; II) $xy'''-y''=0$;

III) $y^{IV}\operatorname{sh}x-y'''\operatorname{ch}x=0$; IV) $(x+1)y^{V}-y^{IV}=0$.

4. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0;y_0)$ и обладающей следующими свойствами: отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси Oy, равен квадрату абсциссы точки касания.

I) $A(4;1)$; II) $A(3;0)$; III) $A(2;8)$; IV) $A(3;-2)$.

Ответы:

1.I) а) $y=\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$; б) $y=\dfrac{C_1x^2}{2}+C_2$.

II) а) $y=-\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$; б) $y=-\dfrac{x^2}{2}-x+C_1e^x+C_2$.

III) а) $y=-e^{-x}+C_1x^2+C_2x+C_3$; б) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{C_1x^2}{2}+C_2$.

IV) а) $y=\dfrac{x^4}{24}+\operatorname{ch}x+C_1x^2+C_2x+C_3$; б) $y=(x+C_1)\ln x-2x+C_2$.

2. I) $y=(\dfrac{x}{2}+1)^2$, $y=1$; II) $y=2\sin x+2$;

III) $x=\ln\dfrac{2e^y-1}{e^y}$, $y=0$; IV) $y=1-\dfrac{1}{x+1}$, $y=0$.

3. I) $y=C_2x+C_1\sin x+C_3$; II) $y=C_1x^3+C_2x^2+C_3$;

III) $y=C_1\operatorname{ch}x+C_2x^2+C_3x+C_4$;

IV) $y=\frac{C_1}{120}x^5+\frac{C_1}{24}x^4+\frac{C_2}{6}x^3+\frac{C_3}{2}x^2+C_4x+C_5$.

4. I) $y=\frac{17x}{4-x^2}$; II) $y=3x-x^2$; III) $y=6x-x^2$; IV) $y=\frac{7x}{3-x^2}$.

4.4. Однородные линейные дифференциальные уравнения. Однородные ЛДУ второго порядка. Однородные ЛДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Приложения к задачам теоретической механики

Уравнение вида $y''+py'+qy=f(x)$, где p,q - постоянные числа, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если $f(x)=0$, то уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (или уравнение без правой части):

$$y''+py'+qy=0. \tag{4.14}$$

Уравнение $k^2+pk+q=0$ называется характеристическим уравнением для уравнения (4.14).

В зависимости от корней характеристического уравнения получаем общее решение этого уравнения:

1. Если корни k_1 и k_2 характеристического уравнения действительны и различны, то $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$, где C_1 и C_2 постоянные.

2. Если корни k_1 и k_2 действительны и равны k, то $y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$.

3. Если корни k_1 и k_2 комплексные числа, то (т.е. $k_1=\alpha-i\beta$, $k_2=\alpha+i\beta$) $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''-2y'-8y=0$.

Решение: Так как корни характеристического уравнения $k^2-2k-8=0$, $k_1=4$, $k_2=-2$ действительны и различны, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+9y=0$.

Решение: Поскольку характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0$, имеет один двукратный корень $k_1=k_2=3$, то общее решение запишется в виде $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+13y=0$.

Решение: Решая характеристическое уравнение $k^2-6k+13=0$, получим комплексные корни $k_{1,2}=3\pm 2i$. Здесь $\alpha=3$ и $\beta=2$. Следовательно, общее решение запишется в виде $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

Уравнение вида $y^{(k)}+a_1y^{(k-1)}+\ldots+a_ny=0$, где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ - постоянные величины, называется линейным однородным дифференциальным уравнением n - ого порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого уравнения определяется формулой $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$, где

$C_1, C_2, ..., C_n$ - произвольные постоянные, его находят так же, как и в случае уравнения второго порядка:

1. Составляют характеристическое уравнение $k^n + a_1k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0$;

2. Вычисляют корни $k_1, k_2, ..., k_n$ этого характеристического уравнения;

3. Выписывают частные линейно независимые решения $y_1, y_2, ..., y_n$, причем принимают во внимание, что:

а) каждому действительному корню k соответствует частное решение e^{kx};

б) каждой паре комплексно-сопряженных корней $k^{(1)} = \alpha - i\beta$, $k^{(2)} = \alpha + i\beta$ соответствует два частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

в) каждому действительному корню k кратности μ соответствует μ линейно независимых частных решений: e^{kx}, xe^{kx}, $x^2e^{kx}, ..., x^{\mu-1}e^{kx}$;

г) каждой паре комплексно-сопряженных корней $k^{(1)} = \alpha - i\beta$, $k^{(2)} = \alpha + i\beta$ кратности μ соответствует 2μ частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$,

$xe^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x, ..., x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Число частных решений равно степени характеристического уравнения.

4. Составляют общее решение, в котором $y_1, y_2, ..., y_n$ - линейно независимые решения.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y^{IV} + 4y''' + 7y'' - 4y' - 8y = 0$.

Решение: Решаем характеристическое уравнение $k^4 + 4k^3 + 7k^2 - 4k - 8 = 0$, которое приводится к виду $(k^2 - 1)(k^2 + 4k + 8) = 0$. Уравнение имеет корни: $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = -2 + 2i$, $k_4 = -2 - 2i$. Действительным корням соответствуют решения:

$y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x$, а комплексно-сопряженным - решения: $y_3 = e^{-2x}\cos 2x$,

$y_4 = e^{-2x}\sin 2x$. Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{-2x}\cos 2x + C_4e^{-2x}\sin 2x \text{ или}$$

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + e^{-2x}(C_3\cos 2x + C_4\sin 2x).$$

Пример 5. Материальная точка массы m притягивается к неподвижному центру O с силой, пропорциональной удалению x от притягивающего центра (упругая сила). Найти закон движения этой точки (пренебрегая сопротивлением среды).

Решение: Согласно закону Ньютона имеем $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$,

где k - коэффициент пропорциональности и знак минус поставлен потому, что направление действующей силы обратно по знаку смещения x.

Отсюда $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Получено линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни соответствующего характеристического уравнения $k^2 + \omega^2 = 0$ являющегося чисто мнимым: $k_1 = \omega i$, $k_2 = -\omega i$. Решение уравнения имеет вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$. Можно наложить $C_1 = A\sin\varphi$, $C_2 = A\cos\varphi$,

где A и φ - некоторые другие произвольные постоянные. Отсюда $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, т.е. материальная точка в наших условиях совершает периодические гармонические колебания около центра с амплитудой A и начальной фазой φ.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

а) $4y''-11y'+6y=0$; б) $4y''-4y'+y=0$;

в) $y''-2y'+37y=0$; г) $y''+9y=0$;

д) $4y''+y=0$.

Ответы: а) $y=C_1e^{\frac{3x}{4}}+C_2e^{2x}$; б) $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2xe^{\frac{x}{2}}$;

в) $y=e^x(C_1\cos 6x+C_2\sin 6x)$; г) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$;

д) $y=C_1\cos\dfrac{x}{2}+C_2\sin\dfrac{x}{2}$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения.

а) $y'''+2y''-y'-2y=0$; б) $y'''+2y''-9y'-18y=0$; в) $y^{IV}+2y''+y=0$.

Ответы: а) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+C_3e^{x}$; б) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$;

в) $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения.

а) $y^{IV}-y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=-4$;

б) $y'''-y''+4y'-4y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-6$.

Ответы: а) $y=e^{-x}-e^{x}+2\sin x$; б) $y=-2e^{x}+\cos 2x+\sin 2x$.

4. Концы каната цепного моста находятся на высоте $H=5$ м, а его середина – на высоте $h=4$ м от проезжей части моста. Длина моста $2L=20$ м. Найти кривую провисания моста.

Ответ: $y=4+\dfrac{x^2}{100}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Решить дифференциальные уравнения.

I) $4y''+4y'+y=0$; II) $2y''-2y'+3y=0$;

III) $y''+5y'=0$; IV) $y''+y=0$.

2. Проинтегрировать дифференциальные уравнения.

I) $y^{IV}-10y''+9y=0$; II) $y^{V}-y^{IV}-81y'+81y=0$;

III) $y^{V}+y^{IV}-y'-y=0$; IV) $y'''-5y''+17y'-13y=0$.

3. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения.

I) $y'''+3y''+2y'=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$;

II) $y'''+9y'=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=9$, $y''(0)=-18$;

III) $y'''-13y''+12y'=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=133$;

IV) $y'''-y''+y'-y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$.

Ответы: I) $y=(C_1x+C_2)e^{-\frac{x}{2}}$; II) $y=e^{\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x)$;

III) $y=C_1+C_2e^{-5x}$; IV) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

1. I) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{3x}+C_4e^{-3x}$;

II) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+C_3e^{-3x}+C_4\cos 3x+C_5\sin 3x$;

III) $y=C_1e^x+(C_2+C_3x)e^{-x}+C_4\cos x+C_5\sin x$;

IV) $y=C_1e^x+e^{2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)$.

2. I) $y=1-2e^{-x}+e^{-2x}$; II) $y=-2+2\cos 3x+3\sin 3x$;

III) $y=10-11e^x+e^{12x}$; IV) $y=\sin x$.

4.5. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Метод Гаусса. Структура общего решения неоднородного ЛДУ. Неоднородные ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью. Неоднородные ЛДУ высших порядков с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью

Уравнение вида:

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (4.15)$$

где p,q - постоянные, $f(x)\neq 0$ называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение определяется формулой $y=y_0+y_г$, где y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+py'+qy=0$, а $y_ч$ - частное решение уравнения (4.15).

В простейших случаях, когда функция $f(x)$, входящая в уравнение (4.15), является показательной или многочленом, частное решение находится методом неопределенных коэффициентов.

1) Если $f(x)=ae^{\alpha x}$, где a,α - постоянные, то частное решение ищут в виде $y_ч=Ae^{\alpha x}$, когда α не является корнем характеристического уравнения, или в виде $y_ч=Axe^{\alpha x}$, когда α - простой корень характеристического уравнения, или в виде $y_ч=Ax^2e^{\alpha x}$, когда α - кратный корень характеристического уравнения.

2) Если $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$, где a,b,β - постоянные, то частное решение уравнения ищут в виде $y_ч=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, когда $p^2+(q-\beta^2)^2\neq 0$, или в виде $y_ч=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, когда $p=0$, $q=\beta^2$.

3) Если $f(x)=P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, то частное решение уравнения ищут в виде $y_ч=Q_n(x)$ в случае, когда $q\neq 0$ или в виде $y_ч=xQ_n(x)$, когда $q=0$, $p\neq 0$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени n.

Пусть дано неоднородное уравнение:

$$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x), \qquad (4.16)$$

правая часть которого есть сумма двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Если $y_ч^{(1)}$ является частным решением уравнения $y''+py'+qy=f_1(x)$, а $y_ч^{(2)}$ является частным решением уравнения $y''+py'+qy=f_2(x)$, то $y_ч^{(1)}+y_ч^{(2)}$ - частное решение уравнения (4.16).

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y''-4y'+13y=2x+1$.

Решение: Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y''-4y'+13y=0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2-4k+3=0$, его корни $k_{1,2}=2\pm 3i$.

Общее решение однородного уравнения запишется так:

$y_0 = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_ч = Ax + B$.

Отсюда $y'_ч = A$ и $y''_ч = 0$. Подставляя эти выражения в неоднородное уравнение, получим $-4A + 13(Ax + B) = 2x + 1$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего тождества, будем иметь $13A = 2$, $-4A + 13B = 1$. Решая совместно эту систему уравнений, получим $A = \frac{2}{13}$, $B = \frac{21}{169}$.

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид: $y_ч = \frac{2}{13}x + \frac{21}{169}$.

Поэтому общее решение есть $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \frac{2}{13}x + \frac{21}{169}$.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение n- ого порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (4.17)$$

соответствующее ему однородное уравнение:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0. \qquad (4.18)$$

Общее решение уравнения (4.17) определяется формулой $y = y_0 + y_ч$, где y_0 - общее решение уравнения (4.18), y_r - частное решение уравнения (4.17). В простейших случаях частные решения определяются методом неопределенных коэффициентов. Рассмотрим их.

1.Пусть $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n. Тогда $y_ч = Q_n(x)e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени n с неопределенными коэффициентами, если число α не является корнем характеристического уравнения и $y_ч = x^mQ_n(x)e^{\alpha x}$, если число α - корень кратности m этого уравнения.

2.Пусть $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, где a, b, β - постоянные.

Тогда $y_ч = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, где A и B - произвольные постоянные, если число βi не является корнем характеристического уравнение и $y_ч = x^m(A\cos\beta\cdot x + B\sin\beta\cdot x)$, если число βi - корень кратности m характеристического уравнения.

3.Пусть $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлен от x. Тогда $y_ч = U_v(x)e^{\alpha x}\cos\beta\cdot x + V_v(x)e^{\alpha x}\sin\beta\cdot x$, где $v = \max(m,n)$, если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, и $y_ч = x^m(U_v(x)e^{\alpha x}\cos\beta\cdot x + V_v(x)e^{\alpha x}\sin\beta\cdot x)$, если число $\alpha + \beta i$ - корень кратности m этого уравнения.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = 4x\sin x$.

Решение: Рассмотрим соответствующее однородное уравнение. $y'' + y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 + 1 = 0$, его корни $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Общее решение однородного уравнения равно: $y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$. Частное решение ищем в виде:

$y = x[(Ax + B)\cos x + (A_1x + B_1)\sin x]$.

Имеем $y'' = [-Ax^2 + (4A_1 - B)x + (2A + 2B_1)]\cos x +$

$+[-A_1x^2-(4A+B_1)x+(2A_1-2B)]\sin x.$

Подставляя в уравнение, находим

$[2A_1x+(A+B_1)]\cos x+[-2Ax+(A_1-B)]\sin x=2x\sin x.$

Это равенство будет тождественным только при $2A_1=0$, $A+B_1=0$, $-2A=2$, $A_1-B=0$.

Отсюда $A=-1$, $B=0$, $A_1=0$, $B_1=1$. Следовательно, получаем частное решение $y_ч=x(\sin x-x\cos x)$. Общее решение задается формулой:

$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x(\sin x-x\cos x).$

Рассмотрим метод вариации произвольных постоянных, который позволяет отыскать частное решение линейного уравнения с правой частью $y''+py'+qy=f(x)$ (4.15), где $f(x)$ - любая функция. Пусть соответствующее однородное уравнение имеет общее решение $y=C_1y_1+C_2y_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Будем искать решение уравнения (4.15) в виде $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - неизвестные функции, подлежащие определению, а y_1 и y_2 - известные частные решения однородного уравнения. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x) \end{cases}.$$

Из этой системы находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, а затем интегрированием и сами функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Если при интегрировании производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ ввести произвольные постоянные, то мы сразу получим общее решение неоднородного уравнения.

Методом вариации произвольных постоянных решается и уравнение вида (4.17), где неизвестные функции $C_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ определяются из системы:

$$\begin{cases} C'(x)y_1+C'_2(x)y_2+\ldots+C'_n(x)y_n=0 \\ C'_1(x)y'_1+C'_2(x)y'_2+\ldots+C'_n(x)y'_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)}+C'_2(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+C'_n(x)y_n^{(n-1)}=0 \end{cases}$$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $y''+y=\mathrm{tg}x$.

Решение: Однородному уравнению $y''+y=0$ соответствует характеристическое уравнение $k^2+1=0$. Его корни $k_1=i$ и $k_2=-i$. Поэтому $y_1=\cos x$ и $y_2=\sin x$. Запишем решение однородного уравнения в виде $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$ и составим систему уравнений для отыскания $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\mathrm{tg}x \end{cases}.$$

Решив эту систему, найдем $C_1'(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$, $C_2'(x)=\sin x$.

Интегрирование дает: $C_1(x)=-\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\int(\cos x-\frac{1}{\cos x})dx=$

$=\sin x-\ln\mathrm{tg}(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2})+C_1$, $C_2(x)=\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Запишем общее решение данного уравнения:

$$y = [\sin x - \ln \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + C_1]\cos x + [-\cos x + C_2]\sin x =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}).$$

Задания для аудиторных занятий

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

а) $y'' + 5y' = 72e^{2x}$; б) $y'' - 2y' + y = 4e^{x}$;

в) $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$; г) $y'' + y' = 9x^2 + 4x - 6$;

д) $y'' - 4y' + 3y = 20\cos 2x + 27\sin 2x$;

е) $y'' + 5y' + 6y = -50\sin 4x$; ж) $y'' + y = 14\cos x + 6\sin x$.

Ответы:

а) $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + 3e^{2x}$;

б) $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + 2x^2 e^{x}$;

в) $y = e^{-x}(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x) + x^2 - x + 2$;

г) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + 3x^3 - 7x^2 + 8x$;

д) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} + 4\cos 2x - 3\sin 2x$;

е) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \sin 4x + 2\cos 4x$;

ж) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(7\sin x - 3\cos x)$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

а) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;

б) $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

в) $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;

г) $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Ответы:

а) $y = e^{-x}(\cos x + 3\sin x) + x^2 + 2x$; б) $y = 3e^{5x} - 2xe^{5x} + x^2 e^{5x}$;

в) $y = 2e^{6x} - 3e^{3x} - \sin x + \cos x$; г) $y = 3 - e^{-2x} + x^3 - x^2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения.

а) $y'' + y = 2\cos x - (4x + 4)\sin x$;

б) $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}$;

в) $y'' - 2y' + 37y = 36e^{x}\cos 6x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$;

г) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 2x^2 + 4$;

д) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 2\cos x + 8\sin x$.

Ответы:

а) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x^2 + 2x)\cos x$;

б) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+(x-1)e^{3x}$;
в) $y=e^x\sin 6x+3xe^x\sin 6x$;
г) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+C_3e^x-x^2+x-5$;
д) $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x+x(\cos x+2\sin x)$.

4.Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

а) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$; б) $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$.

Ответы:

а) $y=(-x+C_1)e^x+(\ln x+C_2)xe^x$; б) $y=(\ln|\cos x|+C_1)\cos x+(x+C_2)\sin x$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Решить дифференциальные уравнения.

I) $y''-7y'+12y=3e^{4x}$;
II) $y''-6y'+34y=18\cos 5x+60\sin 5x$;
III) $y''-2y'=6+12x-24x^2$;
IV) $4y''-4y'+y=-25\cos x$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

I) $y''+y=x^3-4x^2+7x-10$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$;
II) $y''+y'-12y=(16x+22)e^{4x}$, $y(0)=3$, $y'(0)=5$;
III) $y''+6y=e^x(\cos 4x-8\sin 4x)$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$;
IV) $y''-6y'+25y=(32x-12)\sin x-36x\cos 3x$, $y(0)=4$, $y'(0)=0$.

3. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

I) $y''+9y=\dfrac{1}{\sin 3x}$; II) $y''-y'=e^{2x}\sin e^x$;

III) $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$; IV) $y''+y=-\mathrm{ctg}^2x$.

Ответы:

1. I) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+3xe^{4x}$;
II) $y=e^{3x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)+2\cos 5x$;
III) $y=C_1+C_2e^{2x}+4x^3+3x^2+3x$;
IV) $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2xe^{\frac{x}{2}}+3\cos x+4\sin x$.
2. I) $y=4\cos x+2\sin x+x^3-4x^2+x-2$;
II) $y=e^{3x}+e^{-4x}+(2x+1)e^{4x}$;
III) $y=\sin 4x-\cos 4x+e^x\cos 4x$;
IV) $y=e^{3x}(4\cos 4x-3\sin 4x)+2x\sin 3x$.

3. I) $y=(-\frac{1}{3}x+C_1)\cos 3x+(\frac{1}{9}\ln|\sin 3x|+C_2)\sin 3x$;

II) $y=C_1+C_2e^x-\sin e^x$;

III) $y=(-x+C_1)e^{-x}+(\ln x+C_2)xe^{-x}$;

IV) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+2$.

4.6. Системы линейных дифференциальных уравнений. Метод исключения. Решение с помощью характеристического уравнения

Системой дифференциальных уравнений называется система, связывающая независимую переменную, неизвестные функции этой переменной и производные функций по независимой переменной:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{4.19}$$

где $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$,..., $y_n=y_n(x)$ - неизвестные функции переменной x: a_{ik} $(i,k=1,2,\ldots,k)$ - постоянные величины; $f_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ - заданные функции.

Если $f_k(x)=0$ $(k=1,2,\ldots,n)$, то система называется однородной, в противном случае неоднородной. Если в левой части системы будут находиться производные первого порядка, а правые части не содержат производных, то такая система дифференциальных уравнений называется нормальной.

Решением такой системы (4.19) называется совокупность n функций $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$,..., $y_n=y_n(x)$, обращающих каждое из уравнений этой системы в тождество.

Задача Коши для системы (4.19) имеет следующую формулировку: найти решение системы (4.19), удовлетворяющее начальным условиям

$y_1(x_0)=y_{10}$, $y_2(x_0)=y_{20}$,..., $y_n(x_0)=y_{n0}$.

Система дифференциальных уравнений может быть решена методом исключения, когда путем дифференцирования одного из уравнений системы и использования других уравнений системы данная система сводится к одному уравнению высшего порядка с одним неизвестным. Решая последнее уравнение, находим эту одну неизвестную функцию, которая будет найденной и для системы. А затем, используя уравнения исходной системы и одну найденную неизвестную, находим и остальные неизвестные функции.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y \end{cases}$

Решение: Дифференцируем второе уравнение и принимаем во внимание выражения для x' и y', находим $y''=-x'+4y'=-(4x-y)+4(-x+4y)=-8x+17y$.

Рассмотрим систему $\begin{cases} y' = -x + 4y, \\ y'' = -8x + 17y \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $x = 4y - y'$ и подставим полученное выражение во второе уравнение системы, получим:

$y'' - 8y' + 15y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 8k + 15 = 0$, где $k_1 = 3$, $k_2 = 5$. Уравнение имеет решение $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}$.

Для нахождения второй функции $x(t)$ воспользуемся выражением $x = 4y - y'$ и найдем $y' = 3C_1 e^{3t} + 5C_2 e^{5t}$.

Тогда $x = 4(C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}) - (3C_1 e^{3t} + 5C_2 e^{5t}) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{5t}$.

В результате преобразований получаем ответ:

$x = C_1 e^{3t} - C_2 e^{5t}$, $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}$.

Системы дифференциальных уравнений можно решать и другим методом, который называется методом Эйлера. С этой целью составляют характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k \dots & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0,$$

представляющее уравнение n-ой степени относительно k.

В зависимости от вида корней характеристического уравнения (действительны и различные, действительны и совпадающие, комплексно-сопряженные) решения системы имеют различный вид.

Сущность метода Эйлера покажем на примере.

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y \end{cases} \qquad (4.20)$$

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 4-k & 8 \\ -8 & 4-k \end{vmatrix} = 0$,

$(4-k)^2 - 64 = 0$, где $k_1 = 12$, $k_2 = -4$. Корни действительны и различны. Тогда решение системы имеет вид:

$$x = \alpha e^{kt},\ y = \beta e^{kt}. \qquad (4.21)$$

Подставим решение (4.21) в систему (4.20):

$$\begin{cases} \alpha k e^{kt} = 4\alpha e^{kt} - 8\beta e^{kt}, \\ \beta k e^{kt} = -8\alpha e^{kt} + 4\beta e^{kt} \end{cases}.$$

Сократив на $e^{kt} \neq 0$, получим

$$\begin{cases} (k-4)\alpha + 8\beta = 0 \\ 8\alpha + (k-4)\beta = 0 \end{cases} \qquad (4.22)$$

а) подставим в полученную систему (4.22) $k_1 = 12$, получим $\begin{cases} 8\alpha + 8\beta = 0 \\ 8\alpha + 8\beta = 0 \end{cases}$.

Откуда следует, что $\beta=-\alpha$. Пусть $\alpha=1$, тогда $\beta=-1$. Частное решение (4.21) имеет вид $x_1=e^{12t}$, $y_1=-e^{12t}$.

б) подставим в систему (4.22) значение корня $k_2=-4$, получим $\begin{cases}-8\alpha+8\beta=0\\8\alpha-8\beta=0\end{cases}$.

Следует, что $\alpha=\beta$. Пусть $\beta=1$, тогда $\alpha=1$. Частное решение (4.21) имеет вид $x_2=e^{-4t}$, $y_2=e^{-4t}$.

Общее решение системы: $\begin{cases}x=C_1x_1+C_2x_2=C_1e^{12t}+C_2e^{-4t}\\y=C_1y_1+C_2y_2=-C_1e^{12t}+C_2e^{-4t}\end{cases}$.

Если корни характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y\\y'=a_{21}x+a_{22}y\end{cases},\qquad (4.23)$$

кратности 2, то решение системы ищут в виде:

$x=(A_1t+A_2)e^{kt}$, $y=(B_1t+B_2)e^{kt}$.

Когда корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые числа, то решения системы надо искать в виде $x=\alpha e^{kt}$, $y=\beta e^{kt}$. При дальнейшем решении рассматриваются линейные комбинации $\overline{x}_1=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $\overline{x}_2=\dfrac{x_1-x_2}{2}$, $\overline{y}_1=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $\overline{y}_2=\dfrac{y_1-y_2}{2}$ с применением формулы Эйлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

Задания для аудиторных занятий

1. Методом исключений решить следующие системы дифференциальных уравнений.

а) $\begin{cases}x'=4x-y\\y'=-x+4y\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+5y\\\dfrac{dy}{dt}=-x-3y,\quad x(0)=-2,\ y(0)=1\end{cases}$

Ответы: а) $\begin{cases}x=C_1e^{3t}+C_2e^{5t}\\y=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=(\sin t-2\cos t)e^{-t}\\y=\cos te^{-t}\end{cases}$

2. Решить системы дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения.

а) $\begin{cases}x'=-5y+2y\\y'=x-6y\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-5y\\\dfrac{dy}{dt}=2x-y\end{cases}$.

Ответы:

а) $\begin{cases}x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}\\y=\dfrac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=5C_1\cos 3t+5C_2\sin 3t\\y=C_1(\cos 3t+3\sin 3t)+C_2(\sin 3t-3\cos 3t)\end{cases}$.

3. Решить неоднородную линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - (12t+13)e^{t} \\ y = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t} - (8t+6)e^{t} \end{cases}$

Задания для индивидуального выполнения

1. Методом исключения решить системы дифференциальных уравнений.

I) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$; II) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - t \end{cases}$; III) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, x(0) = 1, y(0) = 4 \end{cases}$

2. Методом Эйлера найти общее решение данных систем дифференциальных уравнений.

I) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$; II) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x \end{cases}$; III) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x, x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$

3. Проинтегрировать неоднородные линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

I) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3 - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2t \end{cases}$; II) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - e^{t} \end{cases}$.

Ответы:

1. I) $\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{-t} \\ y = -2C_1 - 3C_2e^{-t} \end{cases}$; II) $\begin{cases} x = C_1e^{t} - C_2e^{-t} + t - 1 \\ y = C_1e^{t} + C_2e^{-t} - t + 1 \end{cases}$; III) $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t} \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t} \end{cases}$

2. I) $\begin{cases} x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t} \\ y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} \end{cases}$; II) $\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{t} \\ y = C_1 \end{cases}$; III) $\begin{cases} x = -5e^{2t}\sin t \\ y = e^{2t}(\cos t - 2\sin t) \end{cases}$

3. I) $\begin{cases} x = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + t \\ y = C_1\sin 2t - C_2\cos 2t + 1 \end{cases}$; II) $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2 + e^{t} \\ y = C_1e^{2t} - C_2 - e^{t} \end{cases}$

5.1. Двойной интеграл. Вычисление двойного интеграла по правильным областям. Двойной интеграл в полярных координатах

На плоскости Oxy рассмотрим область (S) площадью S, ограниченную замкнутой кривой γ. Пусть в этой области определена функция $Z = f(x,y)$. Разобьем область (S) сеткой линий на конечное число областей $(\Delta S_1), (\Delta S_2), ..., (\Delta S_n)$ площади которых ΔS_1, $\Delta S_2, ...$, ΔS_n соответственно. В каждой i-й элементарной области (ΔS_i) выберем произвольно одну точку $M_i(x_i; y_i)$, значение функции в этой точке $f(x_i; y_i)$ умножим на величину площади ΔS_i соответствующей области и все произведения сложим (рис.5).

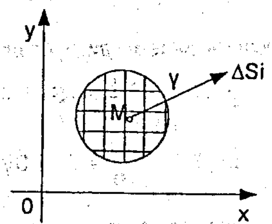

Рис.5

Полученная сумма $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i$ называется интегральной суммой для функции $f(x,y)$ в области (S).

Двойным интегралом от функции $f(x;y)$ в области (S) называется конечный предел I интегральной суммы I_n при $\lambda \to 0$, где λ - наибольший из диаметров элементарных областей (ΔS_i): $I_n = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i$.

Обозначения двойного интеграла: $I = \iint\limits_{(S)} f(x,y)ds$, $I = \iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$.

Геометрический смысл двойного интеграла.

Если $f(x,y) \ge 0$, то двойной интеграл от функции $Z = f(x,y)$ по области (S) равен объёму тела, ограниченного сверху поверхностью $Z = f(x,y)$, снизу плоскостью $Z = 0$, с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси OZ, а направляющей служит контур γ фигуры (S).

Механический смысл двойного интеграла.

Двойной интеграл от функции $Z = f(x,y) \ge 0$ по области (S) представляет собой массу фигуры (S), если подынтегральную функцию $f(x,y)$ считать плотностью этой фигуры в точке $M(x,y)$.

Свойства двойного интеграла.

1. $\iint\limits_{(S)} Cf(x,y)ds = C\iint\limits_{(S)} f(x,y)ds$ $(C = \mathrm{const})$;

2. $\iint\limits_{(S)}(f(x,y)\pm\varphi(x,y))ds=\iint\limits_{(S)}f(x,y)ds\pm\iint\limits_{(S)}\varphi(x,y)ds$;

3. если $f(x,y)\le\varphi(x,y)$, то $\iint\limits_{(S)}f(x,y)ds\le\iint\limits_{(S)}\varphi(x,y)ds$;

4. $\left|\iint\limits_{(S)}f(x,y)ds\right|\le\iint\limits_{(S)}|f(x,y)|ds$;

5. $\iint\limits_{(S)}f(x,y)ds=\iint\limits_{(S_1)}f(x,y)ds+\iint\limits_{(S_2)}f(x,y)ds$, где (S_1), (S_2) - области, на которые разбита область (S);

6. если в области (S) $m\le f(x,y)\le M$, то $mS\le\iint\limits_{(S)}f(x,y)ds\le MS$, откуда $\iint\limits_{(S)}f(x,y)ds=\mu S$ $(m\le\mu\le M)$.

Область интегрирования (S) называется правильной в направлении оси Ox (оси Oy), если любая прямая, параллельная оси Ox, (оси Oy), пересекает границу γ области (S) не более двух раз.

Для вычисления двойного интеграла нужно проинтегрировать подынтегральную функцию $Z=f(x,y)$, по одной из переменных (в пределах ее изменения в правильной области (S)) при любом постоянном значении другой переменной. Полученный результат проинтегрировать по второй переменной в максимальном диапазоне её изменения в (S).

Пусть требуется вычислить двойной интеграл по некоторой области. Различают области интегрирования двух основных видов:

1. Область первого вида (S_1), т.е. область $A_1A_2B_2B_1$, ограниченную слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ соответственно, снизу кривой $y=\varphi_1(x)$, сверху кривой $y=\varphi_2(x)$ (рис.6).

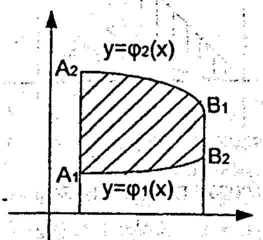

Рис.6

$$\iint\limits_{(S)}f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy.$$

Правая часть равенства называется повторным интегралом.

Двойной интеграл вычисляется по правилу: внутреннее интегрирование ведется по переменной y, а внешнее – по переменной x.

2. область второго вида (S_2), т.е. $C_1D_1D_2C_2$, ограничена снизу и сверху прямыми $y=c$, $y=d$ соответственно, слева кривой $x=\varphi_1(y)$, справа кривой $x=\varphi_2(y)$.

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$$ (рис.7).

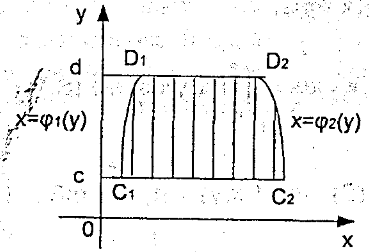

Рис. 7

Внутреннее интегрирование ведется по переменной x, а внешнее – по переменной y.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(S)}(x+y)dxdy$ по области (S), ограниченной линиями $y=x$ и $y=x^2$.

Решение: Изобразим область (S) в прямоугольной системе координат. Рис.8.

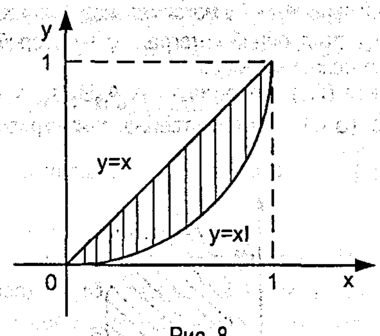

Рис. 8

Интегрируя сначала по y, а потом по x, получаем:

$$\iint\limits_{(S)}(x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x}(x+y)dy = \int\limits_0^1 [(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_{x^2}^{x}]dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^2+\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2})dx = (\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10})\Big|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Правильность результата можно проверить, изменив порядок интегрирования:

$$\iint\limits_{(S)}(x+y)dxdy=\int\limits_{2}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y}}(x+y)dx=\int\limits_{0}^{1}(\frac{y}{2}+y\sqrt{y}-\frac{y^2}{2}-y^2)dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(\frac{y}{2}+y\sqrt{y}-\frac{y^2}{2}-y^2)dy=(\frac{y^2}{4}+\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{y^3}{2})\Big|_0^1=\frac{3}{20}.$$

Для того чтобы преобразовать двойной интеграл в декартовых координатах в двойной интеграл в полярных координатах, нужно x и y в подынтегральной функции заменить соответственно через $\rho\cos\varphi$, $\rho\sin\varphi$, а произведение $dxdy$ заменить произведением $\rho d\rho d\varphi$.

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат сводится к последовательному интегрированию по переменным ρ и φ. Укажем правила расстановки пределов.

1) Пусть полюс не содержится внутри области интегрирования (S) (рис. 9).

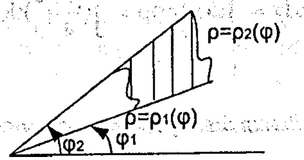

Рис. 9

тогда повторный интеграл имеет вид: $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

2) Пусть полюс содержится внутри области интегрирования и любой полярный радиус пересекает границу в одной точке. Интегрируя сначала по ρ, а затем по φ, получим $\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\rho(\varphi)}f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho$, где $\rho=\rho(\varphi)$ есть полярное уравнение границы области.

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)dxdy$, где (S) - область, ограниченная линиями: $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$.

Решение: Изобразим в прямоугольной системе координат область (S) (рис.10).

Область (S) представляет собой часть кругового кольца. Перейдем к полярным координатам по формулам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Запишем подынтегральную функцию и уравнения границ области (S) - криволинейного четырехугольника $A_1B_1B_2A_2$:

$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2$, $\rho_1^2=9$, $\rho_2^2=25$,

$\rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi$, $tg\varphi=1$, $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$;

$\rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi$, $tg\varphi=\sqrt{3}$, $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$.

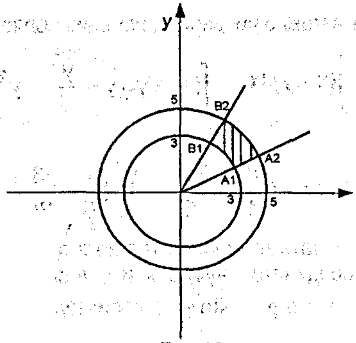

Рис.10

Получаем, $\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{3}^{5}\rho d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\rho^4}{4}\Big|_3^5\right)d\varphi=136\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{34\pi}{3}$.

Задания для аудиторных занятий

1. Изменить порядок интегрирования.

а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x}f(x,y)dy$; б) $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0}f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0}f(x;y)dx$.

2. Вычислить повторный интеграл.

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^2\rho^2\sin^2\varphi d\rho$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^3\rho^2\cos\varphi d\rho$.

3. Вычислить двойной интеграл по указанной области (S).

а) $\iint\limits_{(S)}(x+y)dxdy$, если (S) ограничена прямыми $2x+y=1$, $2x+y=3$, $x-y=-1$, $x-y=2$;

б) $\iint\limits_{(S)}(x-2y)dxdy$, если (S) ограничена линиями $x=0$, $y=7-x$, $y=\frac{1}{2}x+1$.

4. Вычислить двойной интеграл, введя полярные координаты.

а) $\iint\limits_{(S)}\cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy$; (S) определена неравенствами $\frac{\pi^2}{4}\le x^2+y^2\le 4\pi^2$;

б) $\iint\limits_{(S)}\frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$; (S) - круг $x^2+y^2\le 16$.

Ответы:

1. а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2-2}^{-x^2} f(x,y)dy$.

2. а) $\dfrac{\pi-2}{3}$; б) 4,5. 3. а) 2,5; б) −72. 4. а) $2\pi-\pi^2$; б) 4π.

Задания для индивидуального выполнения

1. Изменить порядок интегрирования.

I) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$; II) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{3x^2}{8}}^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

III) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$; IV) $\int\limits_1^6 dx \int\limits_{\frac{6}{x}}^{7-x} f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл на указанной области.

I) $\iint\limits_{(S)} xdxdy$; (S) ограничена линиями: $xy=6$, $x+y-7=0$;

II) $\iint\limits_{(S)} x^4ydxdy$; (S) ограничена линиями: $xy=1$, $y-x=0$, $x=2$;

III) $\iint\limits_{(S)} (xy^2+1)dxdy$; (S) определена неравенствами: $0\le x\le 2$, $\dfrac{x}{2}\le y\le \sqrt{\dfrac{x}{2}}$;

IV) $\iint\limits_{(S)} (x+2y)dxdy$; (S) - треугольник с вершинами $A(3;4)$, $B(6;2)$; $C(3;\frac{1}{2})$.

3. Вычислить двойной интеграл, введя полярные координаты.

I) $\iint\limits_{(S)} (x^4+2x^2y^2+y^4)dxdy$; (S) определена неравенствами: $x^2+y^2\ge 1$, $x^2+y^2\le 4$;

II) $\iint\limits_{(S)} (x^2-y^2)dxdy$; (S) ограничена лемнискатой $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

III) $\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)dxdy$, (S) ограничена окружностью $x^2+y^2=4x$;

IV) $\iint\limits_{(S)} (4x-x-y)dxdy$; (S) ограничена окружностью $x^2+y^2=2x$.

Ответы:

1. I) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$; II) $\int\limits_0^6 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{\sqrt{\frac{8y}{3}}} f(x,y)dx$;

III) $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$; IV) $\int\limits_1^6 dy \int\limits_{\frac{6}{y}}^{7-y} f(x,y)dx$.

2. I) $\frac{125}{6}$; II) $7\frac{19}{21}$; III) $\frac{47}{105}$; IV) $43\frac{3}{4}$.

3. I) 21π; II) $\frac{a^4}{3}$; III) 24π; IV) 3π.

5.2. Приложение двойного интеграла. Площадь плоской фигуры. Вычисление объёмов. Масса пластинки. Центр масс и моменты инерции тонкой пластинки

Площадь S плоской области (S) вычисляется по формуле $S = \iint\limits_{(S)} dS$ или

$$S = \iint\limits_{(S)} dxdy \qquad (5.1).$$

Пример 1. Найти площадь, ограниченную гиперболами $y = \frac{a^2}{x}$, $y = \frac{2a^2}{x}$ $(a > 0)$ и прямыми $x = 1$, $x = 2$.

Решение: Изобразим эту область. Она ограничена снизу гиперболой $y = \frac{a^2}{x}$, сверху гиперболой $y = \frac{2a^2}{x}$, слева прямой $x = 1$ и справа прямой $x = 2$ (рис. 11)

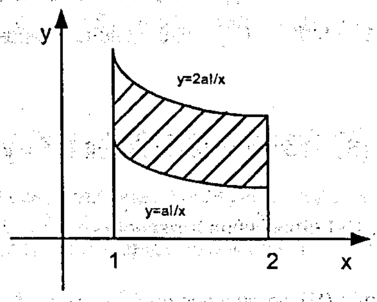

Рис.11

На основании формулы (5.1) получим, что площадь S равна:

$$S=\int_1^2 dx\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}}dy=\int_1^2\left(\frac{2a^2}{x}-\frac{a^2}{x}\right)dx=a^2\int_1^2\frac{dx}{x}=a^2\ln|x|\Big|_1^2=a^2\ln 2\approx 0{,}7a^2 \text{ (кв.ед).}$$

Объём тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x,y)$ снизу плоскостью $z=0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью вычисляется по формуле:

$$V=\iint_{(S)} f(x,y)dxdy \qquad (5.2.)$$

Пример 2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z=x^2$, $z=0$, $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

Решение: Изобразим тело в прямоугольной системе координат в пространстве (рис.12).

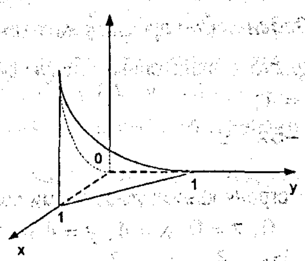

Рис.12

Искомое тело имеет своим основанием треугольник S на плоскости Oxy, образованный линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, и ограничено сверху параболическим цилиндром $z=x^2$. Отсюда на основании формулы (5.2.) получим:

$$V=\iint_{(S)}x^2dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x^2dy=\int_0^1\left(x^2y\Big|_0^{1-x}\right)dx=\int_0^1 x^2(1-x)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\text{ (куб.ед).}$$

Если (S) область плоскости Oxy, на которой распределена масса с поверхностной плотностью $\gamma=\gamma(x,y)$, то масса m этой области (пластинки) определяется формулой:

$$m=\iint_{(S)}\gamma(x,y)dxdy \qquad (5.3)$$

Если пластинка однородна, то $\gamma(x,y)=\text{const}$. Статистические моменты M_x и M_y относительно осей Ox и Oy определяются формулами:

$$M_x=\iint_{(S)}y\gamma(x,y)dxdy \qquad M_y=\iint_{(S)}x\gamma(x,y)dxdy \qquad (5.4)$$

Если $C(x_0;y_0)$ - центр масс пластинки, то:

$$x_0 = \frac{M_y}{m}, \; y_0 = \frac{M_x}{m}, \qquad (5.5)$$

где m - масса пластинки, M_x, M_y - статистические моменты относительно осей координат. Моменты инерции пластинки (S) относительно осей Ox и Oy выражаются соответственно формулами: $I_x = \iint\limits_{(S)} y^2\gamma(x,y)dxdy$,

$$I_y = \iint\limits_{(S)} x^2\gamma(x,y)dxdy, \qquad (5.6)$$

а ее момент инерции относительно начала координат - формулой

$$I_0 = \iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\gamma(x,y)dxdy = I_x + I_y \qquad (5.7)$$

Задания для аудиторных занятий

1. Вычислить площадь фигур, ограниченных следующим линиями:

а) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$;

б) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$;

в) $\rho = a\sin 2\varphi$, $a > 0$.

2. Вычислить объем тел, ограниченных указанными поверхностями:

а) плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом $z = 1 + x^2 + y^2$;

б) цилиндрами $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + z^2 = R^2$;

в) параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$;

г) цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $z = 0$, $z = x + y + 10$.

3. а) Вычислить координаты центра масс однородной плоской фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$;

б) найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

4. Вычислить моменты инерции относительно начала координат и осей координат пластины плотностью $\gamma(x,y) = x^2 y$, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 1$.

Ответы:

1. а) $\frac{16}{3}$; б) $\frac{16\sqrt{15}}{3}$; в) $\frac{1}{2}\pi a^2$.

2. а) $186\frac{2}{3}$; б) $\frac{16R^3}{3}$; в) $78\frac{15}{32}$; г) 40π.

3. а) $x_0 = \frac{2}{5}$, $y_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{5}{6}$, $y_0 = 0$.

4. $I_0 = \frac{104}{495}$, $I_x = \frac{4}{33}$; $I_x = \frac{4}{45}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Вычислить площадь плоской области (S), ограниченной заданными линиями.

I) $y^2 = x+2,\ x=2$;   II) $x=\cos y,\ x \le y+1,\ x \ge 0$;

III) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1,\ y \le \frac{1}{2}x,\ y \ge 0$;   IV) $\rho = a\cos 2\varphi$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

I) $z=x^2,\ x-2y+2=0,\ x+y-7=0,\ z \ge 0$;

II) $y=1-x^2,\ x+y+z=3,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;

III) $x^2+y^2=1,\ z=2-x^2-y^2,\ z \ge 0$;

IV) $z=y^2,\ x+y=1,\ x \ge 0,\ z \ge 0$.

3. I) Вычислить координаты центра масс пластинки, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=x, y=2x,\ x=2$, если ее плотность $\gamma(x,y)=xy$.

II) Вычислить массу неоднородной пластинки, ограниченной линиями $x=0,\ y=1,\ y=x$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=x^2+2y^2$.

III) Найти статистические моменты относительно осей координат пластинки, ограниченной линиями $xy=8,\ x+y=9$ (пластина однородная).

IV) Найти массу пластинки, ограниченную линиями $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16$ $(x \ge 0,\ y \ge 0)$, если ее поверхностная плотность $\gamma(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ответы:

1. I) $\frac{32}{3}$; II) $\frac{1}{2}$; III) $\frac{\pi}{4}$; IV) $\frac{\pi a^2}{2}$.
2. I) 32; II) $\frac{104}{30}$; III) $\frac{3\pi}{2}$; IV) $\frac{1}{12}$.
3. I) $x_0=\frac{8}{5}, y_0=\frac{112}{45}$; II) $\frac{7}{12}$; III) $M_x=M_y=57\frac{1}{6}$; IV) 6.

5.3. Тройной интеграл. Вычисление тройного интеграла. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

Рассмотрим замкнутую пространственную область (V) и функцию $f(x,y,z)$, определенную в этой области. Область (V) разобьем произвольным способом на n элементарных областей $(\Delta V_1), (\Delta V_2), ..., (\Delta V_n)$ с диаметрами $d_1, d_2, ..., d_n$ и объёмами $\Delta V_1,\ \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Наибольший из диаметров обозначим буквой d.

В *каждой элементарной области* ΔV_k выберем произвольно одну точку $M_k(x_k;y_k;z_k)$ и составим произведение $f(x_k;y_k;z_k)\Delta V_k$.

Интегральная сумма для функции f(x, y, z) по области (V) имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$.

Тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области (V) называется конечный предел интегральной суммы при $d \to 0$:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \lim_{d\to 0} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k.$$

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов. В прямоугольных декартовых координатах тройной интеграл обычно записывается в виде:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz.$$

Если область интегрирования (V) определяется неравенствами:

$x_1 \le x \le x_2$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, где $y_1(x), y_2(x)$, $z_1(x,y), z_2(x,y)$ - непрерывные функции своих аргументов, то тройной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (5.8)$$

Область (V) ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x,y)$, снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$, а с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, вырезающей на плоскости Oxy область Sxy, определенную неравенствами $x_1 \le x \le x_2$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ (рис. 13)

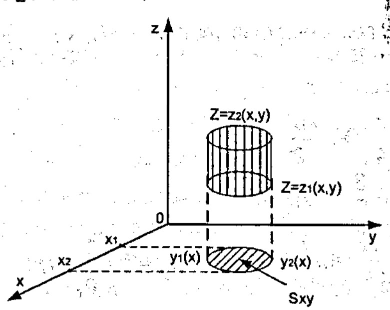

Рис. 13

В частном случае, если функции $y_1(x), y_2(x)$, $z_1(x,y), z_2(x,y)$ являются постоянными y_1, y_2, z_1, z_2, то область интегрирования представляет собой прямоугольный параллелепипед и формула (5.8.) принимает вид:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dz.$$

Отметим, что порядок интегрирования в тройном интеграле может быть изменен. Его можно вычислить шестью различными способами.

При переходе от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z (рис.14) связанным с x, y, z формулами: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = z$ $(0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$, якобиан преобразования $I = \rho$, формула

(5.8.) имеет вид: $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V_1)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz$.

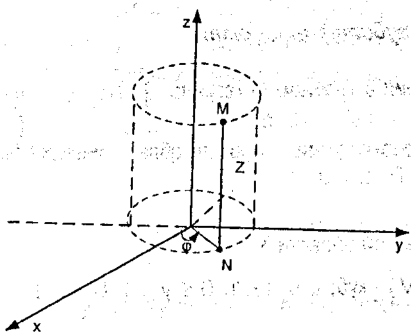

Рис. 14

При переходе от декартовых координат x, y, z к сферическим координатам ρ, φ, θ (рис.15), связанными с x, y, z соотношениями: $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$ $(0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi)$, якобиан преобразования $I = \rho^2\sin\theta$, формула (5.8.) примет вид:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V_1)} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

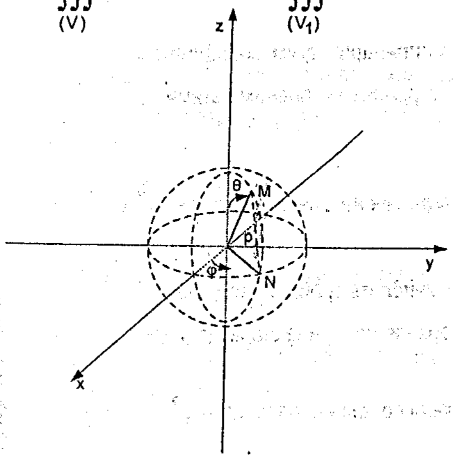

Рис. 15

Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}dxdydz$,

где (V) - шар $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

Решение: Чтобы вычислить этот интеграл, перейдем к сферическим координатам:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \; y = \rho\sin\theta\cdot\sin\varphi, \; z = \rho\cos\theta \qquad (5.9)$$

Преобразование (5.9) переводит область (V) в область (V_1) для которой $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \rho \le R$. Поскольку подынтегральная функция $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5} = \sqrt{(\rho^2)^5} = \rho^5$ и якобиан преобразования (5.9) $I = \rho^2\sin\theta$, то получаем

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}dxdydz = \iiint\limits_{(V_1)} \rho^5\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{R} \rho^7\sin\theta d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(\sin\theta\cdot\frac{\rho^8}{8}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R}\right)d\theta =$$

$$=\frac{R^8}{8}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta=\frac{R^8}{8}\int_0^{2\pi}(-\cos\theta\Big|_0^{\pi})d\varphi=\frac{R^8}{8}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi R^8}{2}.$$

Задания для аудиторных занятий

1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$, если область (V) ограничена указанными поверхностями. Начертить область интегрирования.

а) $(V): x+y+z-1=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

б) $(V): z=x^2+y^2,\ z=c\ (c>0)$.

2. Вычислить тройной интеграл по данной области V.

а) $\iiint\limits_{(V)}(6x+8y+4z+5)dxdydz$; (V) - куб: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$;

б) $\iiint\limits_{(V)}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$; (V) - ограничена плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

3. Вычислить тройной интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам.

а) $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)^3dxdydz$; (V) - ограничена поверхностями $x^2+z^2=1,\ y=0,\ y=1$.

б) $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$; (V) - ограничена поверхностями $y^2+z^2=b^2,\ x=0,\ x=a$.

4. Перейдя к сферическим координатам, вычислить тройной интеграл.

а) $\iiint\limits_{(V)}\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}dxdydz$; (V) - верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2\le R^2$;

б) $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)^3dxdydz$; (V) - нижняя половина шара $x^2+y^2+z^2\le 1$.

Ответы: а) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}f(x,y,z)dz$; б) $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{c}dz\int_0^{\sqrt{z}}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho$;

2. а) 14; б) $\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$; 3. а) $\frac{431\pi}{420}$; б) $\pi ab^2(\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{2})$; 4. а) $\frac{\pi R^6}{3}$; б) $\frac{928\pi}{315}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$, если область (V) ограничена указанными поверхностями.

I) $(V): y = x, y = 0, x = 1, z = 1, z = 1 + x^2 + y^2$;

II) $(V): x^2 + y^2 = 4,\ z = 1, z = 2 + x^2 + y^2$;

III) $(V): x^2 + y^2 + z^2 = 4, y = 0\ \ (y \ge 0)$;

IV) (V): определяется неравенствами $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy$.

2. Вычислить тройной интеграл по области (V).

I) $\iiint\limits_{(V)}(7x - 5y + 3z + 1)dxdydz$; (V) - параллелепипед: $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 4$;

II) $\iiint\limits_{(V)}xyzdxdydz$; (V) - пирамида: $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$;

III) $\iiint\limits_{(V)}x^2y^2zdxdydz$; (V) - определяется неравенствами $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le xy$;

IV) $\iiint\limits_{(V)}(2x + y)dxdydz$; (V) - ограничена поверхностями: $y = x,\ y = 0,\ z = 1,\ x = 1,\ z = 1 + x^2 + y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

I) $\iiint\limits_{(V)}z^2dxdydz$; $(V): 1 \le x^2 + y^2 \le 36,\ y \ge x,\ x \ge 0,\ z \ge 0$;

II) $\iiint\limits_{(V)}\frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $(V): x^2 + y^2 = 2x,\ x + z = 2,\ y \ge 0, z \ge 0$;

III) $\iiint\limits_{(V)}(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$; $(V): x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;

IV) $\iiint\limits_{(V)}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $(V): x^2 + y^2 = 4y,\ y + z = 4,\ z \ge 0$.

Ответы:

1. I) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_1^{1+x^2+y^2} f(x,y,z)dz$; II) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^2 d\rho\int\limits_1^{2+\rho^2} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho dz$;

III) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi} d\theta\int\limits_1^2 f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho$;

IV) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy} f(x,y,z)dz$;

2. I) 156; II) $\frac{1}{720}$; III) $\frac{1}{110}$; IV) $\frac{41}{60}$. 3. I) $\frac{1555\pi}{12}$; II) $\frac{4}{5}$; III) $\frac{16\pi}{5}$; IV) $\frac{64}{3}$.

5.4. Приложение тройного интеграла. Вычисление объемов, массы неоднородного тела. Центр масс и моменты инерции тела

Объем V области (V) выражается формулой:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz, \qquad (5.10)$$

В цилиндрических координатах этот интеграл имеет вид:

$$V = \iiint\limits_{(V_1)} \rho d\rho d\varphi dz \qquad (5.11)$$

В сферических координатах этот интеграл имеет вид:

$$V = \iiint\limits_{(V_2)} \rho \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi \qquad (5.12)$$

Если тело занимает объём V и $\gamma = \gamma(x,y,z)$ - его объемная плотность в точке $M(x,y,z)$, то масса тела

$$m = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z) dxdydz \qquad (5.13)$$

Координаты центра масс (центра тяжести) тела вычисляется по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} \gamma x \, dxdydz, \; y_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} \gamma y \, dxdydz, \; z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} \gamma z \, dxdydz \qquad (5.14)$$

где m - масса тела. Если тело однородно, то в формулах (5.13) и (5.14) можно положить $\gamma(x,y,z) = 1$; тогда $m = V$, где V - объем тела.

Момент инерции тела относительно начала координат определяется по формуле:

$$I_0 = \iint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x,y,z) dxdydz \qquad (5.15)$$

Моменты инерции тела относительно координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно равны:

$$\begin{cases} I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\gamma(x,y,z) dxdydz, \\ I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2)\gamma(x,y,z) dxdydz, \\ I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\gamma(x,y,z) dxdydz \end{cases} \qquad (5.16)$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Oxz соответственно:

$$\begin{cases} I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z^2\gamma(x,y,z) dxdydz, \\ I_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x^2\gamma(x,y,z) dxdydz, \\ I_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y^2\gamma(x,y,z) dxdydz. \end{cases} \qquad (5.17)$$

Статистические моменты тела относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Oxz соответственно:

$$\begin{cases} M_x = \iiint\limits_{(V)} x\gamma(x,y,z)dxdydz, \\ M_y = \iiint\limits_{(V)} y\gamma(x,y,z)dxdydz, \\ M_z = \iiint\limits_{(V)} z\gamma(x,y,z)dxdydz. \end{cases} \tag{5.18}$$

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $z = y^2 - x^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 0$, $y = b$.

Решение: Данное тело ограничено сверху гиперболическим параболоидом $z = y^2 - x^2$, плоскость Oxy пересекает его по двум прямым $y = \pm x$ (рис.16). Тело проектируется в область S плоскости Oxy, ограниченную прямыми $y = \pm x$, $y = b$.

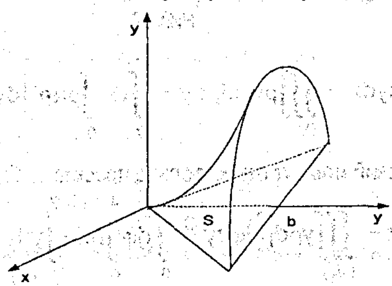

Рис.16.

По формуле (5.10) получаем $V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \int\limits_0^b dy \int\limits_{-y}^{y} dx \int\limits_0^{y^2-x^2} dz =$

$$= \int\limits_0^b dy \int\limits_{-y}^{y} (z\Big|_0^{y^2-x^2})dx = \int\limits_0^b dy \int\limits_{-y}^{y} (y^2 - x^2)dx = \int\limits_0^b \left[(y^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_{x=-y}^{x=y} \right] dy =$$

$$= \int\limits_0^b (2y^3 - \frac{2}{3}y^3)dy = \frac{4}{3}\int\limits_0^b y^3 dy = \frac{b^4}{3}.$$

Пример 2. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 2$.

Решение: Данное тело симметрично относительно оси Oy, поэтому $x_0 = z_0 = 0$.

Тело ограничено конусом второго порядка, симметричным относительно оси Oy, и плоскостью $y = 2$ (рис.17). Тело проектируется в область (S) плоскости Oxz, ограниченную окружностью $x^2 + z^2 = 4$. Т.к. тело однородное, то его объемная плотность

$\gamma(x,y,z)=1$. По формуле (5.13) найдем массу тела, предварительно переходим к цилиндрическим координатам:

$x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$, $y=y$.

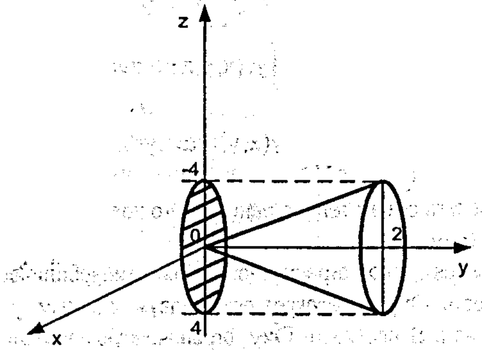

Рис.17

$$\text{Тогда } m=\iiint\limits_{(V)}dxdydz=\iiint\limits_{(V_1)}\rho d\varphi d\rho dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{4}\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho}{2}}^{2}dy=\frac{32\pi}{3}.$$

Найдем статистический момент относительно плоскости Oxz:

$$M_y=\iiint\limits_{(V)}ydxdydz=\iiint\limits_{(V_1)}y\rho d\rho d\varphi dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{4}\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho}{2}}^{2}ydy=16\pi.$$

Следовательно, $y_0=\dfrac{M_y}{m}=\dfrac{16\pi\cdot 3}{32\pi}=\dfrac{3}{2}$ и центр масс $C(0;\frac{3}{2};0)$.

Задания для аудиторных занятий

1. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

а) $6x+4y+3z-12=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

б) $z=2-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

ответы: а) 4; б) $\dfrac{5\pi}{6}$.

2. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область (V), ограниченную указанными поверхностями ($\gamma(x,y,z)=1$).

а) $3z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=4$, $z=0$;

б) $x=y^2+z^2$, $y^2+z^2=9$, $x=0$.

Ответы: а) $C(0;0;\frac{1}{4})$; б) $C(3;0;0)$.

3. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координаты однородного тела, занимающего область (V), ограниченную данным поверхностями $(\gamma(x,y,z)=1)$.

а) $x^2=y^2+z^2$, $y^2+z^2=1$, $x=0$, Ox;

б) $x=2\sqrt{y^2+z^2}$, $x=2$, Ox;

в) $z=3-x^2-y^2$, $z=0$, Oz.

Ответы: а) $\dfrac{2\pi}{5}$; б) $\dfrac{\pi}{5}$; в) $\dfrac{9\pi}{2}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

I) $x+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0, y=3$; II) $y=1-x^2$, $y=-\sqrt{1-x^2}$, $z=0$, $z=6$;

III) $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x=4$, $y=2x$, $z=x^2$; IV) $z\ge 0$, $x^2+y^2=9$, $z=5-x-y$.

2. Вычислить массу тела, ограниченного указанными поверхностями, при заданной плотности $\gamma(x,y,z)$.

I) $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=2$, $\gamma(x,y,z)=(x^2+y^2+z)^2$;

II) $x^2+y^2=z$, $z=4$, $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2+z$;

III) $x^2+y^2+z^2=9$, $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

IV) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$; $\gamma(x,y,z)=\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2$.

3. Найти координаты центра масс тела, ограниченного указанными поверхностями, при заданной плотности $\gamma(x,y,z)$.

I) $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $z=c$ $(c>0)$, $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$;

II) $2x=y^2+z^2$, $y^2+z^2=4$, $x=0$, $\gamma(x,y,z)=1$;

III) $x^2+z^2=4y$, $y=9$, $\gamma(x,y,z)=1$;

IV) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=3$, $\gamma(x,y,z)=1$.

4. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, ограниченного данными поверхностями. Плотность тела $\gamma(x,y,z)=1$.

I) $2x+3y=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$; $z=4$, Oy;

II) $x+y+z=a$ $(a>0)$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, Oz;

III) $x^2=y^2+z^2$, $x=2$, Ox; IV) $2z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$, Oz.

Ответы:

1. I) 6; II) $3\pi+8$; III) 128; IV) 45π. 2. I) $\dfrac{16\pi}{3}$; II) 32π; III) 81π; IV) $\dfrac{4}{7}\pi abc$.

3. I) $C(0;0;\dfrac{c}{2})$; II) $C(\dfrac{2}{3};0;0)$; III) $C(0;6;0)$; IV) $C(\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4})$.

4. I) $I_y=82$; II) $I_z=\dfrac{a^5}{30}$; III) $\dfrac{16\pi}{5}$; IV) $\dfrac{32\pi}{3}$.

6.1. Криволинейные интегралы первого рода. Вычисление криволинейного интеграла первого рода. Приложения: масса и центр масс дуги

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в точках дуги AB гладкой кривой, имеющей уравнение $y=\varphi(x)$ $(a \le x \le b)$. Разобьем дугу AB произвольным образом на n элементарных дуг точками $A=A_0, A_1, A_2 \ldots, A_n = B$ и пусть ΔS_k - длина дуги $A_{k-1}A_k$. На каждой элементарной дуге выберем произвольную точку $M_k(x_k;y_k)$ и составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k;y_k)\Delta S$. Предел этой суммы при $n \to \infty$ и $\max \Delta S_k \to 0$ называется криволинейным интегралом первого рода.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta S_n \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S = \int\limits_{AB} f(x,y)dS$$

(dS - дифференциал дуги), который вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dS = \int\limits_{a}^{b} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}dx.$$

Если кривая C задана параметрическими уравнениями:
$x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$, то

$$\int\limits_{C} f(x,y)dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

Для пространственной кривой C, заданной уравнениями
$x=x(t)$, $y=y(t)$ $z=z(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$,

$$\int\limits_{C} f(x,y,z)dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt.$$

Если $f(x,y)>0$, то криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{C} f(x,y)dS$ представляет собой массу кривой C, имеющей переменную линейную плотность $\rho = f(x,y)$.

Координаты центра масс $(\bar{x};\bar{y})$ дуги кривой C вычисляются по формулам:

$\bar{x}=\frac{1}{m}\int\limits_{C} x\rho(x,y)dS$; $\bar{y}=\frac{1}{m}\int\limits_{C} y\rho(x,y)dS$, где m - масса дуги, $\rho(x,y)$ - линейная плотность.

Задания для аудиторных занятий

1. Вычислить криволинейные интегралы

а) $\int\limits_{C} \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где C - отрезок прямой $y=2x, 0 \le x \le 1$;

б) $\int\limits_C \frac{ydS}{\sqrt{x}}$, где C - дуга полукубической параболы $y^2 = \frac{4}{9}x^3$, $3 \le x \le 8$;

в) $\int\limits_C \sqrt{2y}\,dS$, где $C: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$

г) $\int\limits_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2})dS$, где $C: \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$

д) $\int\limits_C (x + y)dS$, где C - правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Ответы: а) $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$; б) $\frac{2152}{45}$; в) $4\pi a\sqrt{a}$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{3}((1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1)$; д) $a^2\sqrt{2}$.

2. Найти массу дуги кривой C, имеющей линейную плотность $\rho(x,y)$.

а) $C: y = \ln x$, $1 \le x \le 2$; $\rho(x,y) = x^2$;

б) $C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad 0 \le t \le \pi; \ \rho(x,y) = y \end{cases}$;

в) $C: r = a(1 + \cos\varphi)$; $\rho(x,y) = k\sqrt[4]{x^2 + y^2}$.

Ответы: а) $\frac{1}{3}(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})$; б) 2; в) $2k\pi a\sqrt{2a}$.

3. Найти координаты центра масс однородной дуги кривой $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ $(-\infty \le t \le 0)$. Ответ: $\overline{x} = \frac{2}{5}$; $\overline{y} = -\frac{1}{5}$; $\overline{z} = \frac{1}{2}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Вычислить криволинейные интегралы, где C- отрезок прямой $y = kx + b$.

I	$\int\limits_C \frac{dS}{x+y}$, $y = 3x$, $1 \le x \le 2$;
II	$\int\limits_C (x-y)dS$, $y = \frac{3}{4}x$, $0 \le x \le 4$;
III	$\int\limits_C \frac{dS}{x+2y}$, $y = \frac{1}{2}x - 1$, $2 \le x \le 3$;
IV	$\int\limits_C \frac{dS}{x-y}$, $y = \frac{1}{2}x - 2$, $0 \le x \le 4$.

Ответы:

I	$\frac{\sqrt{10}}{4}\ln 2$
II	$\frac{5}{2}$
III	$\frac{\sqrt{5}}{4}\ln 2$
IV	$\sqrt{5}\ln 2$

2. Вычислить криволинейные интегралы, где С - дуга кривой.

I	$\int\limits_C (x^2+y^2)^3 dS,\ C: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$
II	$\int\limits_C \frac{z^2 dS}{x^2+y^2},\ C: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = at, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$
III	$\int\limits_C y^2 dS,\ C: \begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$
IV	$\int\limits_C \frac{dS}{x^2+y^2+z^2},\ C: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$

Ответы:

I	$2\pi a^7$
II	$\frac{8}{3} a\pi^3 \sqrt{2}$
III	$\frac{256}{15} a^3$
IV	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \operatorname{arctg} \frac{2\pi b}{a}$

3. Найти массу дуги кривой С, если плотность ее $\rho(x, y)$.

I	$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases},\ \rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$
II	$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \ 0 \le t \le 2\pi \end{cases},\ \rho(x,y) = y;$
III	$C: r^2 = a^2 \cos 2\varphi,\ \rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2};$
IV	$C: x^2+y^2 = R^2,\ y \ge 0,\ \rho(x,y) = ky^3$

Ответы:

I	$\sqrt{2}\left(\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right);$
II	$2;$
III	$k\pi a^2;$
IV	$\frac{4}{3} kR^4.$

6.2. Криволинейный интеграл второго рода. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Формула Грина

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в точках дуги AB гладкой кривой C, имеющей уравнение $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$. Криволинейным интегралом второго рода по направлению дуги AB называется предел интегральной суммы, при условии, что $\max \Delta x_i \to 0$ и $\max \Delta y_i \to 0$:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right),$$

где Δx_i, Δy_i - проекции элементарной дуги на оси Ox и Oy.

Криволинейный интеграл второго рода есть работа, совершаемая переменной силой $\bar{F} = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$ вдоль кривой интегрирования C.

Интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)Q(x,\varphi(x))dx.$$

Если кривая C задана параметрическим уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, то имеем

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t)y'(t))dt.$$

Криволинейный интеграл второго рода меняет свой знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = -\int_{BA} P\,dx + Q\,dy.$$

Если в некоторой односвязной области D $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y)$, то интеграл

$$\int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(x_2;y_2) - U(x_1;y_1)$$ и не зависит от пути интегрирования AB, взятого в этой области.

В частности, если контур интегрирования C замкнут, то

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Пусть контур C содержится внутри области D и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ вместе со своими частными производными первого порядка непрерывны в этой области, то необходимым и достаточным условием для существования функции $U(x,y)$ является выполнение в области D равенства $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Формула Грина $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$ преобразует криволинейный интеграл, взятый по замкнутому контуру C (против часовой стрелки), в двойной интеграл по области D, ограниченной этим контуром.

Площадь области D, ограниченной замкнутым контуром C, равна:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx.$$

Работа силы, имеющей проекции $X = X(x,y,z)$, $Y = Y(x,y,z)$, $Z = Z(x,y,z)$, вдоль пути C выражается интегралом $A = \int_C Xdy + Ydy + Zdz$.

Задания для аудиторных занятий

1. Вычислить криволинейные интегралы.

а) $\int\limits_C y\,dx-(y+x^2)dy$, где C - дуга параболы $y=2x-x^2$, расположенная над осью Ox и пробегаемая по ходу часовой стрелки;

б) $\int\limits_{OA} 2xy\,dx-x^2\,dy$, взятый вдоль различных путей, выходящих из начала координат O(0;0) и заканчивающихся в точке A(2;1):

1) прямой $y=\dfrac{x}{2}$,

2) параболы $y^2=\dfrac{x}{2}$,

3) ломаной линии OBA, B(2;0);

в) $\int\limits_C \dfrac{y^2dx-x^2dy}{x^2+y^2}$, где C - полуокружность $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ от $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

Ответы: а) 4; б) $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{12}{5}$, -4; в) $-\dfrac{4}{3}a$.

2. Вычислить криволинейные интегралы от выражений, являющихся полными дифференциалами.

а) $\int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} \dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$ (по пути, не пересекающему ось Ox);

б) $2\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$.

Ответы: а) $\dfrac{3}{2}$; б) 62.

3. Применяя формулу Грина, вычислить интегралы.

а) $\oint\limits_C y^2dx+(x+y)^2dy$, где C - пробегаемый в положительном направлении контур треугольника с вершинами в точках A(a;0), B(a;a), C(0;a);

б) $\oint\limits_C -x^2y\,dx+xy^2dy$, где C - окружность $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Ответ: а) $\dfrac{2a^3}{3}$; б) $\dfrac{\pi R^4}{2}$.

4. Вычислить площадь, ограниченную астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

Ответ: $\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

5. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ из точки $A(a;0)$ в точку $B(-a;0)$.

Ответ: πab.

6. Проекции силы на оси координат задаются формулами $x = 2xy$ и $y = x^2$. Показать, что работа силы при перемещении точки зависит только от начального и конечного ее положения и не зависит от формы пути. Вычислить величину работы при перемещении из точки $(1;0)$ в точку $(0;3)$.

Ответ: 0.

Задания для индивидуального выполнения

1. Вычислить криволинейные интегралы, взятые вдоль различных путей, выходящих из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающихся в точке $A(x;y)$.

I	$\int\limits_{OA}(x+y)dx - xdy$, $A(4;2)$ а) прямая $OA: y = \frac{x}{2}$, б) парабола $OA: y = \frac{x^2}{8}$, в) ломаная OBA, $B(2;2)$;
II	$\int\limits_{OA}y^2dx + x^2dy$, $A(1;1)$. а) прямая $OA: y = x$, б) парабола $OA: y^2 = x$, в) ломаная OBA, $B(1;0)$.
III	$\int\limits_{OA}(x+y)dx$, $A(2;2)$. а) прямая $OA: y = x$, б) парабола $OA: y = \frac{x^2}{2}$, в) ломаная OBA, $B(2;0)$.
IV	$\int\limits_{OA}xydx + (y-x)dy$, $A(1;1)$. а) прямая $OA: y = x$, б) парабола $OA: y^2 = x$, в) ломаная OBA, $B(1;0)$.

Ответы:

I	а) 8, б) $\frac{16}{3}$, в) 4
II	а) $\frac{2}{3}$, б) $0{,}7$, в) 1
III	а) 4, б) $\frac{10}{3}$, в) 2
IV	а) $\frac{1}{3}$, б) $\frac{17}{30}$, в) $\frac{1}{2}$.

2. Вычислить криволинейные интегралы от полных дифференциалов:

I	$\int\limits_{(0;1)}^{(3;4)} x\,dx + y\,dy;$
II	$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y)dx + (x+y)dy;$
III	$\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xy\,dx + x^2dy;$
IV	$\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} x\,dy + y\,dx$

Ответы:

I	12
II	2
III	4
IV	8

3. Применяя формулу Грина, вычислить интегралы по контуру треугольника, пробегаемого против хода часовой стрелки, с вершинами в точках $A(x;y)$, $B(x;y)$, $C(x;y)$.

I	$\oint\limits_C 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$, $A(1;1), B(2;2), C(1;3)$
II	$\oint\limits_C (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$, $A(1;0)$, $B(1;1), C(0;1)$
III	$\oint\limits_C (x+y)dx - (x-y)dy$, $A(0;0), B(1;0)$, $C(0;1)$
IV	$\oint\limits_C (x+y)^2dx + (x^2+y^2)dy$, $A(0;0), B(1;0)$, $C(0;1)$

Ответы:

I	$-\frac{4}{3}$
II	$-\frac{4}{3}$
III	-1
IV	$-\frac{1}{3}$

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1998.
2. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика. Части 2 и 3. – Мн.: Выш. шк., 1985. – 1992.
3. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2 и 3 / Под редакцией А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1991. – 2000.
4. Данко П.Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: Выш. шк., 1997.
5. Гурский Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике. Части 1и 2. – Мн.: Выш. шк., 1989, 2000.
6. Тузик А.И. Интегрирование функций одной и нескольких переменных. – Брест: БрГТУ, 2000.
7. Гусак А. А. Задачи и упражнения по высшей математике. Части 1 и 2. Мн., Выш. шк., 1988.
8. Гусак А.А., Гусак Г. М., Бричикова Е. А. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 1999.

Содержание

Учебное издание

Составители: Лизунова Ирина Владимировна
Денисович Ольга Константиновна
Остапчук Евгений Матвеевич

Интегралы. Дифференциальные уравнения

Практикум по дисциплине «Высшая математика»
для студентов технических специальностей

Ответственный за выпуск: **Лизунова И.В.**
Редактор: **Строкач Т.В.**
Компьютерная верстка: **Кармаш Е.Л.**
Корректор: **Никитчик Е.В.**

Подписано к печати 26.02.2009 г. Формат 60х84 1/16. Бумага «Снегурочка». Усл.п.л. 4,9. Уч.изд.л. 5,25. Тираж 150 экз. Заказ №231. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267