УДК 517.531
Стойко В.С.
Научный руководитель: доцент Тузик Т.А.

ОПЕРАТОРНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДУ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ И ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В реальных достаточно сложных системах и объектах управления всегда присутствуют элементы запаздывания. Например, время, необходимое для прохождения топлива в двигателе летательного аппарата от регулирующего клапана до зоны горения; время обработки информации в ЭВМ, включенной в контур управления. Привлечение аппарата ДУ с отклоняющимся аргументом является средством более точного описания систем и объектов автоматического управления.

В теории автоматического управления при расчете переходных процессов в линейных электрических цепях возникают дифференциальные уравнения (ДУ), в которые неизвестная функция входит при различных значениях аргумента, например:

$$x''(t)=\phi(t,x(t),x'(t),x(t-\tau_1(t)),x(t-\tau_2(t))).$$

Такие уравнения называются ДУ с отклоняющимися аргументами. Если $\tau_i(t)=const>0$, а старшая производная зависит только от t, то получаем ДУ с запаздывающим аргументом.

Пусть дано линейное ДУ с запаздывающим аргументом с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cdot x^{(k)}(t-\tau_k)+f(t), \tag{1}$$

где $a_k=const,\ \tau_k=const\geq 0 \quad (0<t<+\infty)$.

Требуется найти решение задачи Коши для ДУ (1) с нулевыми начальными условиями:

$$x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-1)}(0)=0. \tag{2}$$

При этом считаем, что искомая функция $x(t)$ и ее производные $x^{(k)}(t),\ k=\overline{1,n-1}$ являются оригиналами и равны 0 при t<0.

Применив к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа и пользуясь теоремой запаздывания в оригинале, получим операторное уравнение для изображения *X(p)*:

$$p^n X(p)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cdot p^k\cdot X(p)\cdot e^{-\tau_k p}+F(p), \qquad F(p)=Lf(t), \tag{3}$$

отсюда получаем операторное решение уравнения (1)

$$X(p)=\frac{F(p)}{p^n-\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k p^k e^{-\tau_k p}}. \tag{4}$$

Затем в формуле (4) переходим к оригиналам и получаем решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

При решении данной задачи возникают затруднения при переходе от операторного решения (4) к обычному решению $x(t)$ уравнения (1).

Рассмотрим решение конкретной задачи Коши для ДУ

$$x''(t)=2x'(t-1)-x(t-2)+1, \quad x(0)=0,\ x'(0)=0. \tag{5}$$

Решение.

Преобразование Лапласа для функции - оригинала $f(t)$ определяется формулой

$$Lf(t)=F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-pt}dt.$$

Тогда по теоремам запаздывания и дифференцирования оригинала с учетом начальных условий получим

$$Lx(t)=X(p),\ Lx'(t-1)=pX(p)\cdot e^{-p},\ Lx(t-2)=e^{-2p}X(p),$$

$$Lx''(t)=p^2X(p),\qquad L1=\frac{1}{p}.$$

Операторное уравнение для ДУ (5) имеет вид $p^2X(p)=2pX(p)\cdot e^{-p}-X(p)\cdot e^{-2p}+\frac{1}{p}$.

Отсюда получаем операторное решение ДУ (5): $(p^2-2pe^{-p}+e^{-2p})X(p)=\frac{1}{p}$,

$$X(p)=\frac{1}{p\cdot(p-e^{-p})^2},\qquad X(p)=\frac{1}{p^3\cdot(1-\frac{e^{-p}}{p})^2}.$$

Обозначим $\frac{e^{-p}}{p}=y;$ дробь $\frac{1}{(1-y)^2}$ разложим в степенной ряд по степеням y:

$$\frac{1}{(1-y)^2}=1-2\cdot(-y)+\frac{(-2)(-3)}{2!}(-y)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}(-y)^3+\dots+$$

$$+\frac{(-2)(-3)\cdots(-n-1)}{n!}(-y)^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n!}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n.$$

Тогда

$$X(p)=\frac{1}{p^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{e^{-np}}{p^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{e^{-np}}{p^{n+3}}.$$

Переходим к оригиналам в полученном решении. Для $x(t)$ получаем

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}\cdot(t-n)^{n+2}\cdot\eta(t-n),$$

где $\eta(t-n)$ – смещенная единичная функция Хевисайда.

Для ДУ с запаздывающим аргументом, описывающих процесс с последействием ставится задача: найти решение уравнения $x(t)$ для $t\ge t_0$, причем для всех $t\le t_0$, для которых значения $x(t)$ влияют на последующие значения при $t\ge 0$, функция $x(t)$ задается. Общая постановка задачи: найти непрерывное решение $x(t)$ при $t\ge t_0$ уравнения

$$x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)),\qquad \tau=const>0,$$

если дано, что $x(t)=\phi(t)$ *для* $t_0-\tau\le t\le t_0$. Здесь $\phi(t)-$ заданная непрерывная функция, называемая начальной функцией. Отрезок $[t_0-\tau;t_0]$, на котором задается начальная функция, называется начальным множеством. Решение линейных ДУ такого типа с постоянными коэффициентами и с постоянным запаздыванием можно искать с помощью преобразования Лапласа.

Рассмотрим два примера решения ДУ с последействием.

Пример 1. Найти решение уравнения с заданной начальной функцией

$$x'(t)+x(t-\frac{\pi}{2})=0,\qquad \phi(t)=\cos t,\quad -\frac{\pi}{2}\le t\le 0.$$

Решение. $Lx(t)=X(p),\quad Lx'(t)=pX(p)-x(0)=pX(p)-1.$

В данном случае $x(t)\ne 0$ на начальном множестве отрицательных значений t.

$$Lx(t-\frac{\pi}{2})=\int_0^{\infty}x(t-\frac{\pi}{2})\cdot e^{-pt}dt=\left|\begin{array}{ll} t-\frac{\pi}{2}=y, & t=\frac{\pi}{2}+y \\ dt=dy, & t=0,y=-\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\infty}x(y)e^{-p(y+\frac{\pi}{2})}dy=$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}p} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos y \cdot e^{-py} dy + \int_{0}^{\infty} x(y) \cdot e^{-py} dy \right) = e^{-\frac{\pi}{2}p} \cdot \left(\frac{-p\cos y + \sin y}{p^2+1} e^{-py} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + X(p) \right) =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}p} \cdot \left(-\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} e^{\frac{\pi}{2}p} + X(p) \right).$$

Получаем операторное уравнение относительно изображения $X(p)$:

$$pX(p) - 1 - \frac{p}{p^2+1} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}p} + \frac{1}{p^2+1} + X(p) \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,$$

отсюда операторное решение получим в виде

$$\left(p + e^{-\frac{\pi}{2}p} \right) \cdot X(p) = \frac{p^2 + p \cdot e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}, \qquad X(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Значит, искомое решение $x(t) = \cos t, \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le +\infty.$

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения

$$x'(t) = x(t-1) + t, \quad \phi(t) = 1, \quad -1 \le t \le 0.$$

Решение.

После преобразования по Лапласу получаем уравнение

$$pX(p) - 1 = \int_0^\infty x(t-1) \cdot e^{-pt} dt + \frac{1}{p^2}, \qquad \left(p - e^{-p} \right) X(p) = \frac{1 - p - e^{-p}}{p^2}.$$

$$X(p) = \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} \right) \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p^n} \right) - \frac{e^{-p}}{p^3} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p^n} \right),$$

$$X(p) = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p^{n+3}} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p^{n+2}}.$$

Берем обратное преобразование Лапласа и получаем решение данного ДУ:

$$x(t) = \left(-t + \frac{t^2}{2} \right) \cdot \eta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(t-n)^{n+2}}{(n+2)!} - 2 \cdot \frac{(t-n)^{n+1}}{(n+1)!} \right) \cdot \eta(t-n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М.А. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. – 304 с.

УДК 551.492

Лахмицкий А.А., Согоян А.Л.

Научный руководитель: к.ф.-мат.н, доцент Махнист Л.П.

О СВОЙСТВАХ И СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение для описания колебаний речного стока, используемое в стохастической гидрологии [1]:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \frac{d\theta_1}{d\xi}(\infty) = 0, \quad \theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) при решении различных прикладных задач, например в [2], интегрировалось численными методами. Приведем решение этого уравнения [3].

Введем обозначение $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f(\xi)$. Тогда, учитывая, что $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = \frac{df}{d\xi}$, приходим к ли-