МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.И. ТУЗИК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЯДЫ

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений инженерно-технических специальностей

Брест 2003

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
Т81

Рецензенты: кафедра высшей математики №1 Белорусского национального технического университета (зав. кафедрой, доктор технических наук, профессор Н.А. Микулик); кандидат физико-математических наук, профессор А.А. Гусак.

Тузик А.И.

Т.81 Высшая математика. Ряды. Учебное пособие для студентов ВУЗов. Брест. Издательство БГТУ, 2003.- 123 с.: ил.

ISBN 985-6584-51-5

В учебном пособии кратко изложен один из важных разделов высшей математики – «Ряды». Рассмотрены основы теории числовых и функциональных рядов, указаны их приложения к решению различных задач.

Теоретический материал иллюстрируется решением примеров, а часть его в виде теоретических упражнений сформулирована для самостоятельного рассмотрения.

Предназначается для студентов инженерно-технических специальностей ВУЗов.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 985-6584-51-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном учебном пособии на основе опыта многолетнего преподавания автором курса высшей математики студентам БИСИ, БПИ, БГТУ излагается один из ее важных в теоретическом и прикладном отношениях разделов – «Ряды». Рассмотрены основы числовых и функциональных рядов, указаны их приложения к решению различных задач.

Наряду с традиционными вопросами сходимости рядов, нахождения или оценки их сумм и др., включены: умножение рядов; суммирование рядов методом средних арифметических. Вводятся понятия сходимости и равномерной сходимости функциональных рядов. Основное внимание уделяется степенным рядам и тригонометрическим рядам Фурье. При этом обычно излагаемые здесь вопросы дополнены разложением функций в быстро сходящиеся ряды Фурье, практическим гармоническим анализом. Даны приложения рядов к приближенному вычислению значений функций, вычислению пределов, приближенному вычислению определенных интегралов, интегрированию дифференциальных уравнений, решению задач математической физики.

При изложении материала отдельные вопросы и теоремы сформулированы в виде *теоретических упражнений*, которые предлагаются студентам *для самостоятельного изучения*. Возможность проведения пусть небольших, но самостоятельных исследований повышает интерес части студентов к изучению высшей математики и, на наш взгляд, является одним из элементов *активного обучения*.

Пособие не заменяет собой более полных учебников и учебных пособий по рядам и их приложениям и может оказаться полезным для текущей работы по указанной теме. Рассчитано как на студентов, активно работающих над учебным материалом, так и воспринимающих отдельные его части, сформулированные в виде теоретических упражнений, в качестве справочного материала.

Выражаю глубокую благодарность профессорам А.А. Гусаку и А.В. Метельскому за рецензирование рукописи и сделанные ими замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Автор

ГЛАВА 1.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Определение ряда и его сходимости

Пусть задана *бесконечная* последовательность действительных чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

Рассмотрим их *бесконечную сумму*, т.е. *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1.1)$$

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются членами ряда. Ряд (1.1) считается заданным, если известен его *общий член* $u_n = f(n), n \in N$.

***Определение* 1.** Сумма n первых членов ряда называется его *n–й частичной суммой* и обозначается S_n, т.е.

$S_1 = u_1,$

$S_2 = u_1 + u_2,$

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \; n \in N. \qquad (1.2)$$

Частичные суммы ряда (1.1) образуют *бесконечную* последовательность $\{S_n\}$. Таким образом, с любым числовым рядом (1.1) связана числовая последовательность (1.2) его частичных сумм.

***Определение* 2.** Если при $n \to \infty$ существует *конечный* предел S последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S, \qquad (1.3)$$

то число S называется *суммой ряда* (1.1), а сам ряд в этом случае считается *сходящимся*.

Если предел последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм бесконечен или не существует, то говорят, что ряд (1.1) *расходится* (*является расходящимся*).

***Замечание*.** Приведенное определение суммы ряда является, пожалуй, наиболее естественным [4]. Существуют и другие трактовки *бесконечной суммы* (1.1) (см. п.1.10, а также [4, 18, 22]).

***Пример* 1**. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots,\quad a,\, q\in R,\ a\neq 0,\ q\neq 0. \qquad (1.4)$$

Этот ряд представляет собой *бесконечную геометрическую прогрессию* со знаменателем q. Сумма n первых членов геометрической прогрессии находится по известной формуле

$$S_n = a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q},\quad q\neq 1.$$

1) Пусть $|q|<1$, тогда $q^n\to 0$ при $n\to\infty$. Учитывая это, найдем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{a\,q^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a}{1-q} = S.$$

В данном случае ряд (1.4) *сходится* и его сумма $S=\dfrac{a}{1-q}$.

2) Пусть $|q|>1$, тогда $q^n\to\infty$ при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \infty.$$

Значит, в данном случае ряд (1.4) *расходится*.

3) Пусть $q=1 \Rightarrow S_n = a+a+\ldots+a = na \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = a\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \Rightarrow$ ряд (1.4) *расходится*.

4) Пусть $q=-1 \Rightarrow S_n = a-a+a-a+\ldots(-1)^{n-1}a \Rightarrow S_n=\begin{cases} a,\ n=2k-1,\\ 0,\ n=2k,\ k\in N.\end{cases}$

В данном случае последовательность частичных сумм предела не имеет, значит, ряд (1.4) *расходится*.

Таким образом, *бесконечная геометрическая прогрессия* (1.4) сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$.

***Пример* 2. Найти сумму ряда**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots \qquad (1.5)$$

Представим общий член ряда (1.5) в виде алгебраической суммы *простейших дробей*

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right),\ n\in N.$$

Тогда

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3},$$

то ряд (1.5) сходится и его сумма $S=\frac{1}{3}$.

1.2. Свойства сходящихся рядов

Теорема 1. Пусть ряд (1.1) *сходится*, тогда он останется сходящимся, если мы отбросим или добавим к нему *конечное* число слагаемых.

Доказательство. Перепишем ряд (1.1) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=(u_1+u_2+\ldots+u_k)+u_{k+1}+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1.1')$$

Сумму первых k слагаемых ряда (1.1') обозначим c_k и запишем ряд, который получается из (1.1'), если первые k слагаемых отбросить

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n=u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1.6)$$

Обозначим через S_n и σ_{n-k} частичные суммы рядов (1.1') и (1.6).

$$\sigma_{n-k}=u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_n.$$

Тогда $S_n=c_k+\sigma_{n-k}$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n=c_k+\lim_{n\to\infty}\sigma_{n-k}.$$

Из последнего равенства следует, что пределы частичных сумм в левой и правой частях могут быть *одновременно* либо конечными, либо бесконечными. Значит, ряды (1.1') и (1.6) либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся, что и утверждалось.

Таким образом, отбрасывание или добавление *конечного* числа членов ряда не влияет на его сходимость, хотя сумма ряда после такой операции, естественно, может измениться.

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что имеет место

Теорема 2. Если ряд (1.1) умножить на число λ, то это не повлияет на его сходимость. Если ряд (1.1) сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ также будет сходящимся и его сумма $\widetilde{S} = \lambda S$.

Теорема 3. Если ряды (1.1) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{1.7}$$

сходятся, то и ряды, полученные их почленным сложением или вычитанием

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots \tag{1.8}$$

также будут сходящимися.

Доказательство. Обозначим частичные суммы рядов (1.1) и (1.7) через S_n' и S_n''. Т.к. по предположению эти ряды сходятся, то

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n' = S'$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = S''$.

Пусть частичная сумма ряда (1.8) есть σ_n, тогда $\sigma_n = S_n' \pm S_n''$. Учитывая это, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n' \pm \lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = S' \pm S''$.

Следовательно, ряд (1.8) сходится и его сумма равна $S' \pm S''$. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что обратное утверждение к теореме 3, вообще говоря, неверно. Сформулируйте его и подумайте, почему оно не всегда справедливо.

1.3. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд (1.1) *сходится*, то его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{1.9}$$

Доказательство. Обозначим через S_n частичную сумму ряда (1.1). Из (1.2) следует, что

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}.$$

Тогда $u_n = S_n - S_{n-1}$. Известно, что ряд (1.1) *сходится*, значит

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Найдем

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если равенство (1.9) не выполняется, то ряд (1.1) заведомо расходится.

Пример **1.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{2n-1}{3n+2} + \ldots \tag{1.10}$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \dfrac{2}{3} \neq 0.$

Значит, ряд (1.10) *расходится.*

Замечание **1.** Отметим, что *необходимое условие сходимости ряда не является достаточным*, т.е. из того, что выполняется условие (1.9), еще не следует, что ряд (1.1) будет сходящимся.

Пример **2.** Рассмотрим *обобщенный гармонический ряд* (*ряд Дирихле**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \tag{1.11}$$

При $0 < p \le 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$, однако, как будет показано далее (см. п.1.5), ряд (1.11) при таких p расходится, а при $p > 1$ сходится.

Замечание **2.** Отметим и специально подчеркнем, что на сходимость ряда (1.1) влияет *скорость стремления к нулю общего члена ряда u_n при $n\to\infty$.*

1.4. Сравнение рядов с неотрицательными членами

Рассмотрим ряды (1.1) и (1.7) в предположении, что $0 \le u_n \le v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ или начиная с некоторого номера $m \le n \in \mathbb{N}$.

* *Л. Дирихле (1805–1859) – немецкий математик.*

Теорема 1. (*признак сравнения*). Из сходимости ряда (1.7) следует сходимость ряда (1.1), а из расходимости ряда (1.1) следует расходимость ряда (1.7).

Доказательство. Обозначим частичные суммы рядов (1.1) и (1.7) через S_n' и S_n''. Пусть *ряд* (1.7) *сходится* и S – его сумма. Очевидно, что при сделанных предположениях относительно u_n и v_n будет выполняться неравенство $S_n' \le S_n'' \le S$, $\forall n \in N$, т.е. последовательность частичных сумм $\{S_n'\}$ ряда (1.1) *ограничена сверху* числом S. В силу неотрицательности членов ряда (1.1) последовательность $\{S_n'\}$ неубывающая, поэтому по признаку Вейерштрасса* (*о сходимости ограниченной монотонной последовательности*) она имеет предел, т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = S'$. Это и означает, что *ряд* (1.1) *сходится.*

Пусть теперь *ряд* (1.1) *расходится.* В этом случае *ряд* (1.7) *также должен расходиться*, так как по доказанному в случае сходимости ряда (1.7) сходился бы и ряд (1.1), что противоречит условию. Теорема доказана полностью.

Таким образом, *из сходимости ряда с бо́льшими членами вытекает сходимость ряда с меньшими членами, а из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с бо́льшими членами.*

Теорема 2 (*предельный признак сравнения*). Пусть члены рядов (1.1) и (1.7) *положительны* и существует *конечный* предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0,$$

тогда *ряды (1.1) и (1.7) сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство [3]. В соответствии с условиями теоремы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{A} \neq 0,\ 0 < A < \infty.$$

Поскольку последовательности $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ и $\left\{\frac{v_n}{u_n}\right\}$ сходятся, то они ограничены.

Поэтому найдутся такие *положительные* числа M и L, что

$$0 < \frac{u_n}{v_n} \le M,\ 0 < \frac{v_n}{u_n} \le L,\ \forall n \in N.$$

* *К. Вейерштрасс (1815–1897) – немецкий математик.*

Отсюда получим неравенства

$$u_n \le M v_n, \quad v_n \le L u_n, \quad \forall n \in \mathrm{N},$$

из которых на основании теоремы 1 следует, что ряды (1.1) и (1.7) либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Теорема доказана.

Следствие. Если члены рядов (1.1) и (1.7) являются положительными *эквивалентными* бесконечно малыми, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \iff u_n \sim v_n,\ n\to\infty,$$

то *эти ряды сходятся либо расходятся одновременно.*

При исследовании рядов на сходимость с использованием *предельного признака сравнения* полезно знать основные соотношения *эквивалентности* бесконечно малых функций (последовательностей), т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то при $n\to\infty$ справедливы соотношения (см., например, [3]):

$$\sin u_n \sim u_n, \quad \arcsin u_n \sim u_n, \quad \mathrm{tg}\, u_n \sim u_n, \quad \mathrm{arctg}\, u_n \sim u_n,$$

$$e^{u_n} - 1 \sim u_n, \quad \ln(1+u_n) \sim u_n, \quad (1+u_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha u_n.$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{3^n}$. Т.к. при $n\to\infty$ $\sin\frac{1}{3^n} \sim \frac{1}{3^n}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = 1$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ – сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{3} < 1$, то и исходный ряд также сходится.

Приведем *формулу Стирлинга** [3, 10(т.1), 20, 25] для *эквивалентных* бесконечно больших функций натурального аргумента

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \iff \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e},\ n\to\infty,$$

применяемую при анализе сходимости некоторых рядов.

---

* *Дж. Стирлинг (1692–1770) – шотландский математик.*

1.5. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

1. Признак Д'Аламбера*. Рассмотрим ряд (1.1) при условии, что $u_n \geq 0$, $\forall n \in N$. Пусть при $n \to \infty$ *существует* предел отношения $(n+1)$–го члена ряда к n–му

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{1.12}$$

тогда если:

а) $l < 1 \Rightarrow$ *ряд* (1.1) *сходится*;

б) $l > 1 \Rightarrow$ *ряд* (1.1) *расходится.*

Доказательство. Из существования предела (1.12) следует, что для $\forall \varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что *для всех* $n \geq N$ выполнястся неравенство

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon, \ \forall n \geq N = N(\varepsilon). \tag{1.13}$$

Неравенство (1.13) равносильно следующим неравенствам

$$-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - l < \varepsilon, \Leftrightarrow l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon, \ \forall n \geq N = N(\varepsilon). \tag{1.13'}$$

а) Пусть $l < 1$. Воспользуемся правым из неравенств (1.13') $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$, $\forall n \geq N$. Выберем ε настолько малым, чтобы $l + \varepsilon = q < 1$. Тогда предыдущее неравенство будет равносильно следующему

$$u_{n+1} < q\, u_n, \ \forall n \geq N, \tag{1.14}$$

которое в более подробной записи примет вид

$$\begin{cases} u_{N+1} < q\, u_N, \\ u_{N+2} < q\, u_{N+1} < q^2 u_N, \\ u_{N+3} < q\, u_{N+2} < q^3 u_N, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{1.14'}$$

Далее рассмотрим ряды

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_N + u_{N+1} + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1.15}$$

$$u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1.16}$$

$$q\, u_N + q^2 u_N + q^3 u_N + \ldots + q^n u_n + \ldots \tag{1.17}$$

Ряд (1.17) есть *бесконечная геометрическая прогрессия* со знаменателем $0 < q < 1$ и по доказанному ранее (см. п. 1.1.) является сходящимся. Т.к. в силу

* *Ж.Д'Аламбер (1717–1783) – французский математик и механик.*

неравенств (1.14') члены ряда (1.16) меньше соответствующих членов *сходящегося* ряда (1.17), то по теореме сравнения (см. п. 1.2.) ряд (1.16) будет сходящимся. Поскольку ряд (1.15) отличается лишь на *конечное* число слагаемых от сходящегося ряда (1.16), то он также *сходится.*

б) Пусть $l > 1$. Воспользуемся теперь левым из неравенств (1.13')

$l-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\forall n \geq N$. Выберем ε настолько малым, чтобы $l-\varepsilon > 1$, поэтому из предыдущего неравенства будем иметь

$$u_n < u_{n+1}, \ \forall n \geq N. \tag{1.18}$$

Распишем неравенства (1.18) более подробно

$$\begin{cases} u_N < u_{N+1}, \\ u_{N+1} < u_{N+2}, \\ u_{N+2} < u_{N+3}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{1.18'}$$

Из неравенств (1.18') видно, что в данном случае начиная с номера $N+1$ все члены ряда (1.15) возрастают. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, т.е. не выполняется необходимый признак сходимости ряда (1.15), значит он расходится.

Замечание 1. Пусть в равенстве (1.12) $l = 1$. В этом случае ряд (1.1) может оказаться сходящимся, а может и расходиться. Для выяснения вопроса о сходимости ряда нужно применять другие признаки. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. исследование ряда Дирихле (1.25)).

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}. \tag{1.19}$$

Нетрудно убедиться, что необходимый признак сходимости ряда (1.19) выполняется, поэтому продолжим исследование ряда на сходимость дальше и в качестве достаточного признака применим признак Д'Аламбера. Здесь

$$u_n = \frac{n^2}{5^n}, \ u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}.$$

Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 5^n}{5^{n+1}n^2}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+1/n)^2}{n^2}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^2}{1}=\frac{1}{5}<1.$$

Значит ряд (1.19) *сходится.*

Доказать *самостоятельно* следующее.

Теоретическое упражнение (2. Радикальный признак Коши*). Пусть для ряда (1.1) при условии, что $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathrm{N}$, *существует* предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \tag{1.20}$$

тогда если:

а) $l<1 \Rightarrow$ *ряд* (1.1) *сходится;*

б) $l>1 \Rightarrow$ *ряд* (1.1) *расходится.*

Замечание 2. При $l = 1$ радикальный признак Коши не дает ответа о сходимости ряда (1.1). Требуется дополнительное исследование с помощью других признаков.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^n. \tag{1.21}$$

Здесь *удобно* применить радикальный признак Коши. Т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{3+5/n}=\frac{2}{3}<1,$$

то ряд (1.21) *сходится.*

3. Интегральный признак Коши. Пусть члены ряда (1.1) неотрицательны и имеют вид $u_n = f(n)$, $\forall n \in \mathrm{N}$, где $u = f(x)$ – непрерывная монотонно убывающая функция на полуинтервале $[1, +\infty)$, тогда *ряд (1.1) и несобственный интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Для доказательства данного утверждения нам потребуются следующие *вспомогательные построения.*

---

* *О. Коши (1789–1857) – французский математик.*

На отрезке [1, n+1] построим n–ступенчатую фигуру *на левых ординатах* отрезков единичной длины (рис.1.1.).

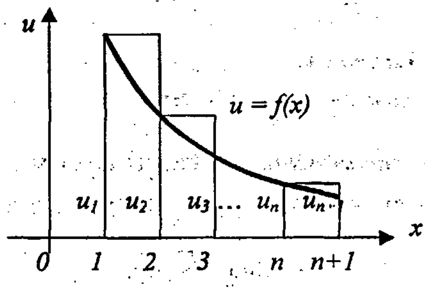

Рис. 1.1

Площадь P n–ступенчатой фигуры, состоящей из n прямоугольников, будет равна $$P = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n.$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями x=1, x=n+1, u=0, u=$f(x)$ равна $\int_1^{n+1} f(x)dx$. Очевидно, что площадь криволинейной трапеции меньше площади n–ступенчатой фигуры, т.е.

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < S_n, \ \forall n \in \mathrm{N}. \qquad (1.22)$$

Далее, на отрезке [1, n+1] построим n–ступенчатую фигуру *на правых ординатах* отрезков единичной длины (рис. 1.2.).

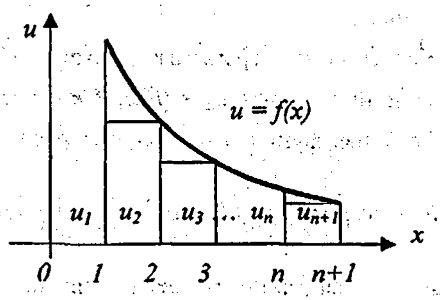

Рис. 1.2

Теперь площадь P n–ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, равна

$$P = u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1} = S_{n+1} - u_1.$$

В данном случае площадь n–ступенчатой фигуры меньше площади соответствующей криволинейной трапеции, т.е.

$$S_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x)dx \Leftrightarrow S_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x)dx + u_1,\ \forall n \in \mathrm{N}. \qquad (1.23)$$

Доказательство. а) Пусть *сходится несобственный интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx = k \in \mathrm{R}$. Очевидно, что в силу неотрицательности подынтегральной функции

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{+\infty} f(x)dx = k,$$

поэтому из (1.23) следует, что

$$S_n < S_{n+1} < \int_1^{+\infty} f(x)dx + u_1 = k + u_1,\ \forall n \in \mathrm{N}. \qquad (1.24)$$

Из неравенств (1.24) видно, что последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (1.1) монотонно возрастает, при этом для всех номеров она остается ограниченной сверху одним и тем же числом $k + u_1$. Следовательно, для нее существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Это и означает, что *ряд* (1.1) *сходится*.

б) Пусть теперь *несобственный интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \infty$ – *расходится*. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \infty$, то, переходя в неравенстве (1.22) к пределу при $n\to\infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Следовательно, *ряд* (1.1) *расходится*, что и требовалось доказать.

Пример. Исследовать на сходимость *обобщенный гармонический ряд* (*ряд Дирихле*)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots,\ p\in\mathrm{R}. \qquad (1.25)$$

Если $p\le 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{-p}\ne 0$, т.е. ***не выполняется необходимый признак сходимости ряда***, значит ряд (1.25) расходится.

При $p>0$ используем интегральный признак Коши. Здесь $u_n=\frac{1}{n^p}=f(n)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^p}$. Исследуем на сходимость несобственный интеграл (см., например, [14, 23, 24])

$$\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int\limits_1^{+\infty}x^{-p}dx=\begin{cases}\left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{+\infty}, & p\ne 1\\ \left.\ln x\right|_1^{+\infty}, & p=1.\end{cases}$$

$$1)\ p<1\Rightarrow\ =\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{+\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}=\infty-\frac{1}{-p+1}=\infty.$$

Несобственный интеграл *расходится*, значит, ряд (1.25) также *расходится*.

$$2)\ p>1\Rightarrow\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left.\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\right|_1^{+\infty}=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{p-1}}-\frac{1}{1-p}=0-\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p-1}.$$

Несобственный интеграл *сходится*, значит, ряд (1.25) также *сходится*.

$$3)\ p=1\Rightarrow\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\left.\ln x\right|_1^{+\infty}=\lim_{x\to\infty}\ln x-\ln 1=\infty.$$

Несобственный интеграл *расходится*, значит, ряд (1.25) также *расходится*.

Таким образом, *обобщенный гармонический ряд* или *ряд Дирихле* (1.25) *сходится* при $p>1$ и *расходится* при $p\le 1$.

***Замечание* 3.** Отметим, что ни признак Д'Аламбера, ни радикальный признак Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда (1.25), т.к. для него

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^p=1^p=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p=1^p=1.$$

Теоретическое упражнение. Применяя интегральный признак Коши, доказать ***самостоятельно***, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln^p n},\ p\in R \qquad (1.26)$$

сходится при $p>1$ и *расходится* при $p\le 1$.

Таким образом, исследуя ряды (1.25), (1.26) мы убеждаемся, что *на сходимость ряда с положительными членами влияет скорость стремления к нулю общего члена ряда u_n при $n\to\infty$.*

***Замечание* 4.** Если указанные выше признаки не дают ответа о сходимости *ряда с положительными членами*, то к нему нужно применять *более тонкие признаки*: Раабе[*]; Бертрана[**]; Гаусса[***] [4, 6, 25].

1.6. Знакочередующиеся ряды

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots,\quad u_n>0,\ n\in N. \qquad (1.27)$$

Для таких рядов имеет место следующий *достаточный* признак сходимости.

Теорема (*признак Лейбница*[****]). Если для *знакочередующегося* ряда (1.27) выполняются условия:

1) $u_1\ge u_2\ge\ldots\ge u_n\ge u_{n+1}\ge\ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

то ряд (1.27) *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим *четную* частичную сумму ряда (1.27)

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2m-1}-u_{2m}).$$

[*] *И. Раабе (1801–1859) – швейцарский математик.*

[**] *Ж. Бертран (1822–1900) – французский математик.*
[***] *К. Гаусс (1777–1855) – немецкий математик, астроном, физик и геодезист.*
[****] *Г. Лейбниц (1646–1716) – немецкий математик и философ.*

сходящегося знакочередующегося ряда не превосходит первого члена ряда, взятого по абсолютной величине.

Замечание 1. Пусть знакочередующийся ряд (1.27) сходится. Рассмотрим вопрос об оценке погрешности при замене суммы ряда S *его n–й частичной суммой* S_n. Ряд (1.27) может быть записан в виде

$$S = S_n + R_n, \tag{1.30}$$

где R_n – *остаток ряда*, который имеет вид

$$R_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots). \tag{1.31}$$

Если теперь мы вместо точного равенства (1.30) запишем приближенное равенство $S \approx S_n$, т.е. в точном равенстве (1.30) отбросим остаток R_n, то допущенная при этом погрешность

$$\varepsilon = | S - S_n | = | R_n | < | u_{n+1} |, \forall n \in \mathrm{N}, \tag{1.32}$$

поскольку остаток является знакочередующимся рядом, а по доказанному ранее его сумма не превосходит по абсолютной величине первого члена ряда.

Неравенство (1.32) можно прокомментировать следующим образом. *Если сумму S сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, заменить его n–й частичной суммой S_n, то допущенная при этом погрешность не превосходит по абсолютной величине первого из отбрасываемых членов ряда.*

Примеры. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды и с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ найти их суммы:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots \tag{1.33}$$

Проверим, выполняются ли для ряда (1.33) условия теоремы Лейбница:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Оба условия признака Лейбница выполняются, значит, *ряд* (1.33) *сходится*. В данном случае $S \approx S_{100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{100} \approx 0{,}688 \approx 0{,}69.$

Из (1.32) следует, что

$$\varepsilon = | S - S_{100} | < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}.$$

Поскольку в силу условия 1) все числа, находящиеся в скобках, будут неотрицательными, то $S_{2m} \geq 0$, $\forall m \in \mathrm{N}$. Перепишем теперь выражение для S_{2m} по–другому

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Из условия 1) следует, что каждое из чисел, находящееся в скобках, будет неотрицательным. Из числа u_1 вычитаются какие–то неотрицательные числа, следовательно, $S_{2m} \leq u_1$, $\forall m \in \mathrm{N}$. Значит, последовательность $\{S_{2m}\}$ *ограничена сверху* числом u_1.

Объединяя между собой предыдущие неравенства, получим

$$0 \leq S_{2m} \leq u_1, \forall m \in \mathrm{N}. \tag{1.28}$$

Легко убедиться, что при выполнении условия 1) последовательность *четных* частичных сумм *неубывающая*

$$S_{2(m+1)} = S_{2m+2} = S_{2m} + (u_{2m+1} - u_{2m+2}) \geq S_{2m}, \forall m \in \mathrm{N}.$$

По признаку Вейерштрасса *о сходимости монотонной ограниченной последовательности* последовательность $\{S_{2m}\}$ сходится, т.е. существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Покажем теперь, что последовательность *нечетных* частичных сумм $\{S_{2m+1}\}$ также имеет своим пределом число S. Поскольку

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}, \text{ то } \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S + 0 = S.$$

При выполнении условия 1) последовательность *нечетных* частичных сумм *невозрастающая*

$$S_{2m+1} = S_{2m-1} - (u_{2m} - u_{2m+1}) \leq S_{2m-1}, \forall m \in \mathrm{N}.$$

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что для знакочередующегося ряда (1.27), удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеют место неравенства [21]

$$S_{2m} \leq S \leq S_{2m+1}, \forall m \in \mathrm{N}.$$

Из вышеизложенного следует, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд (1.27) сходится и имеет сумму S. Теорема доказана.

Следствие. Если для знакочередующегося ряда (1.27) выполняется признак Лейбница, то его сумма S удовлетворяет следующим неравенствам

$$0 \leq S \leq u_1. \tag{1.29}$$

Чтобы получить неравенства (1.29), нужно в неравенствах (1.28) перейти к пределу при $m\to\infty$, учитывая, что $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Таким образом, *сумма*

Точное значение $S = ln\,2 \approx 0{,}693$ (см. п. 2.6).

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3} + \ldots$ (1.34)

Очевидно, что оба условия теоремы Лейбница здесь выполняются, т.е. *ряд* (1.34) *сходится.*

$$S \approx S_4 = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} \approx 1 - 0{,}125 + 0{,}037 - 0{,}016 = 0{,}896 \approx 0{,}90.$$

На основании оценки (1.32)

$$\varepsilon = |\,S - S_4\,| < \frac{1}{125} < \frac{1}{100}.$$

Замечание* 2.** Отметим, что *признак Лейбница сходимости* ***знакочередующихся рядов является лишь достаточным, но не необходимым. **Знакочередующийся ряд может сходиться и** ***при немонотонном стремлении*** **к нулю по абсолютной величине членов ряда.**

Рассмотрим ряд [15, с.281]

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \ldots \qquad (1.35)$$

Этот ряд *сходится* как разность двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3} \sim \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} \sim \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Очевидно, что при $n\to\infty$ члены ряда (1.35) по абсолютной величине стремятся к нулю (условие 2) теоремы Лейбница выполнено), но *не монотонно* (*условие 1) теоремы Лейбница не выполнено*).

Если при $n\to\infty$ члены знакочередующегося ряда по абсолютной величине стремятся к нулю *не монотонно*, то ряд может и расходиться (см. пример [15, с.280]).

1.7. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Числовой ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные слагаемые, называется *знакопеременным*. Знакопеременные ряды относятся к числовым рядам общего вида. Знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,\ u_n \in \mathrm{R}, \tag{1.36}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{1.37}$$

Имеет место

Теорема 1 (*достаточный признак сходимости знакопеременных рядов*). Если ряд (1.37), составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда (1.36) сходится, то ряд (1.36) также сходится.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n частичные суммы рядов (1.36), (1.37). Известно, что ряд (1.37) сходится, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Поскольку члены ряда (1.37) положительны, то последовательность $\{\sigma_n\}$ его частичных сумм монотонно возрастает при $n\to\infty$, при этом $\sigma_n < \sigma$, $\forall\, n\in\mathrm{N}$.

Обозначим теперь через S_n' и S_n'', соответственно, сумму всех положительных и сумму модулей всех отрицательных слагаемых среди n первых членов ряда (1.36). Тогда $S = S_n' - S_n''$, $\sigma_n = S_n' + S_n''$, $S_n' < \sigma_n < \sigma$, $S_n'' < \sigma_n < \sigma$, $\forall n\in\mathrm{N}$. Т.к. при $n\to\infty$ S_n' и S_n'' возрастают и, вместе с тем, для $\forall n\in\mathrm{N}$ эти последовательности ограничены сверху одним и тем же числом σ, то существуют их пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = S'$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = S''$. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n' - \lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = S' - S''$. Это и означает, что ряд (1.36) сходится. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что *доказанная теорема представляет собой достаточный признак сходимости знакопеременных рядов, который не является необходимым*, т.е. знакопеременный ряд (1.36) может сходиться, а ряд (1.37), составленный из модулей его слагаемых, может расходиться.

Определение. Если вместе со сходящимся знакопеременным рядом (1.36) сходится и ряд (1.37), составленный из модулей его слагаемых, то ряд (1.36) называется в этом случае *абсолютно сходящимся.* Если же знакопеременный ряд (1.36) сходится, а ряд (1.37) расходится, то в этом случае ряд (1.36) называется *неабсолютно* или *условно сходящимся.*

С помощью введенных понятий абсолютной и условной сходимости теорема 1 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1'. Всякий *абсолютно сходящийся* ряд есть ряд *сходящийся.*

Учитывая это, исследование рядов на сходимость целесообразно начинать с их исследования на абсолютную сходимость, т.к. здесь мы имеем возможность использовать достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (см. п. 1.5). Однако, если ряд не окажется абсолютно сходящимся, то это не означает, что он расходится.

Примеры. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots \qquad (1.38)$$

Составим ряд из модулей членов этого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (1.39)$$

Ряд (1.38) сходится по признаку Лейбница. Ряд (1.39), составленный из модулей членов ряда (1.38), есть *гармонический ряд* и по доказанному ранее (см. исследование ряда Дирихле (1.25)) он *расходится*. Значит, *ряд* (1.38) *сходится условно.*

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{5^n}{n!} = 5-\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{5^n}{n!}+\ldots \qquad (1.40)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!} = 5+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\ldots+\frac{5^n}{n!}+\ldots \qquad (1.41)$$

Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. К ряду (1.41) с положительными членами применим признак Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}n!}{(n+1)!\,5^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд (1.41) сходится. Значит, ряд (1.40) *сходится абсолютно.*

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно* абсолютную сходимость знакочередующегося ряда (1.35).

Замечание. Для исследования *знакопеременных рядов* на сходимость можно применять также *достаточные признаки* Абеля* и Дирихле [3, 6, 10(т.1), 21].

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Теорема (*Дирихле*). Если знакопеременный ряд *сходится абсолютно*, то он останется *абсолютно сходящимся* при любой перестановке его слагаемых, при этом сумма ряда останется неизменной.

Это свойство не выполняется для условно сходящихся рядов. Справедлива

Теорема (*Римана***). Если знакопеременный ряд *сходится условно*, то для любого числа $A \in \mathbb{R}$ можно так переставить слагаемые этого ряда, что после перестановки его сумма будет равна числу A. Более того, слагаемые *условно сходящегося* ряда можно переставить так, что он окажется расходящимся.

Доказательства этих теорем приведены в [3, 4, 10(т.1), 21].

Таким образом, привычные нам *свойства конечных сумм* на случай бесконечных сумм *переносятся лишь для абсолютно сходящихся рядов*.

1.8. Умножение рядов

Ранее (см. п.1.2.) были введены арифметические операции сложения (вычитания) рядов и умножения ряда на число. Рассмотрим теперь операцию умножения ряда на ряд.

Определение. Произведением рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (*по Коши*) называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где

$$c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (1.42)$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1) =$$
$$= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots \qquad (1.43)$$

---

* *Н. Абель (1802–1829) – норвежский математик.*

** *Б.Риман (1826–1866) – немецкий математик.*

Это правило называется правилом умножения «*по диагоналям*» (рис. 1.3).

$$\begin{array}{cccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \ldots a_1b_k & \ldots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \ldots a_2b_k & \ldots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \ldots a_3b_k & \ldots \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \ldots a_4b_k & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_mb_1 & a_mb_2 & a_mb_3 & a_mb_4 & \ldots a_mb_k & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Рис. 1.3

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \ldots & a_1b_m & \ldots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \ldots & a_2b_m & \ldots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \ldots & a_3b_m & \ldots \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \ldots & a_4b_m & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_mb_1 & a_mb_2 & a_mb_3 & a_mb_4 & \ldots & a_mb_m & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Рис. 1.4

Теорема 1 *(Коши).* Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся абсолютно* и имеют суммы, соответственно, A и B, то их произведение, т.е. ряд (1.43), *сходится абсолютно* и его сумма равна $S = AB$.

Доказательство. По условию ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *сходятся*. Обозначим их суммы, соответственно, через A' и B', а n–ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ через S_n. Справедливо очевидное неравенство для $\forall n \in \mathrm{N}$

$$S_n = |c_1|+|c_2|+\ldots+|c_n| \le (|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|)(|b_1|+|b_2|+\ldots+|b_n|) \le A'B', \qquad (1.44)$$

из которого следует, что последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ неубывающая и *ограничена сверху* числом $A'B'$. По признаку Вейерштрасса она имеет предел, т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ сходится, а значит, ряд (1.43) *сходится абсолютно*. По теореме Дирихле *абсолютно сходящийся* ряд при любой перестановке его слагаемых останется рядом, абсолютно сходящимся к числу S. Перегруппируем (перенумеруем) члены ряда (1.43) так, чтобы они определялись по методу «*окаймляющих квадратов*» (рис. 1.4.).

В результате такой нумерации элементов матрицы произведений a_mb_k получим следующее *произведение рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) +$$

$$+ (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \ldots \qquad (1.45)$$

Нетрудно убедиться, что n-я частичная сумма ряда (1.45) D_n равна произведению n-х частичных сумм перемножаемых рядов

$$D_n = (a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n). \qquad (1.46)$$

Уберем теперь в ряде (1.45) скобки и рассмотрим ряд из всевозможных попарных произведений членов перемножаемых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 +$$
$$+ a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + \ldots \qquad (1.47)$$

По теореме Дирихле он также как и *абсолютно сходящийся* ряд (1.43), *сходится абсолютно* и его сумма равна S. Последовательность $\{D_n\}$ частичных сумм ряда (1.45) является подпоследовательностью частичных сумм ряда (1.47), сходящегося к числу S. Следовательно, она также сходится к числу S, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = S$. Поскольку перемножаемые ряды имеют суммы, соответственно, A и B, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = A, \ \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = B,$$

то, переходя в равенстве (1.46) к пределу при $n\to\infty$, получим

$$S = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = AB.$$

Теорема доказана.

Для *произведения рядов в форме Коши* (1.43) справедлива следующая более общая

Теорема 2. Если из двух перемножаемых *сходящихся рядов* хотя бы один *сходится абсолютно*, то их произведение (1.43) сходится и его сумма равна произведению сумм этих рядов.

Доказательство этой теоремы имеется в [9, 18].

Понятие произведения по аналогии распространяется на любое *конечное* число рядов. *Квадрат ряда* определяется как произведение ряда самого на себя. При необходимости можно найти третью и более высокие степени ряда. Особенности, возникающие при *делении* ряда на ряд, отражены в [25].

1.9. Комплексные числовые ряды

Рассмотрим последовательность *комплексных* чисел

$$\{z_n\} = \{a_n + ib_n\},\ a_n\in\mathrm{R},\ b_n\in\mathrm{R},\ n\in\mathrm{N},\ i^2 = -1.$$

Определение 1. Комплексное число $z = a + ib$ называется *пределом последовательности комплексных чисел* $\{z_n\} = \{a_n + ib_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = 0. \qquad (1.48)$$

Равенство (1.48) будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \; \lim_{n\to\infty} b_n = b. \qquad (1.49)$$

Рассмотрим *комплексный* числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,. \qquad (1.50)$$

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Re\, z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Im\, z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ называются *действительной и мнимой частью ряда* (1.50) соответственно.

Для ряда (1.50) также введем понятие *n–й частичной суммы*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k\,, \; n \in \mathrm{N}\,. \qquad (1.51)$$

Определение 2. Если при $n \to \infty$ существует *конечный* предел S последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = A + iB, \qquad (1.52)$$

то число S называется *суммой ряда* (1.50), а сам ряд в этом случае считается *сходящимся*. Если предел (1.52) бесконечен или не существует, то говорят, что ряд (1.50) *расходится*.

Из равенств (1.49), (1.51), (1.52) следует, что ряд (1.50) сходится тогда и только тогда, когда сходятся его действительная и мнимая части, т.е. ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Re\, z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Im\, z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. Таким образом, ***сходимость ряда с комплексными членами эквивалентна одновременной сходимости двух рядов с действительными членами.***

Определение 3. Ряд (1.50) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n + ib_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \qquad (1.53)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Если сходится ряд (1.53), то сходится и ряд (1.50).

Доказательство. В справедливости теоремы 1 убеждаемся из неравенств

$$|a_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \le |a_n| + |b_n|,$$

$$|b_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \le |a_n| + |b_n|, \quad n \in \mathbb{N},$$

а также из того, что из абсолютной сходимости ряда с действительными членами следует его сходимость (см. п. 1.7).

Из этих же неравенств следует, что ряд (1.50) *сходится абсолютно* тогда и только тогда, когда *сходятся абсолютно* его действительная и мнимая части.

Доказанная теорема позволяет применять при исследовании на сходимость *комплексных* числовых рядов все *достаточные* признаки сходимости *действительных* рядов с неотрицательными членами.

Отметим также, что основные свойства сходящихся и абсолютно сходящихся рядов с действительными членами сохраняются и для комплексных числовых рядов.

Теорема 1 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1'. Всякий *абсолютно сходящийся* комплексный числовой ряд есть ряд *сходящийся.*

Примеры. Выяснить, сходятся или расходятся *комплексные* числовые ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + i\frac{1}{5^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}. \qquad (1.54)$$

Рассмотрим действительную и мнимую части этого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} Re\, z_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} Im\, z_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n};$$

Оба этих ряда *одновременно сходятся* как геометрические прогрессии со знаменателями меньше единицы (по модулю) и их суммы, соответственно, равны (см. п. 1.1) $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$ и $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{1}{4}$.

Значит, ряд (1.54) *сходится* и его сумма равна

$$S=A+iB=\frac{1}{2}+i\frac{1}{4}.$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+i\frac{n}{5^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}. \tag{1.55}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *расходится* как гармонический ряд (см .п. 1.5), следовательно, вне зависимости от сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Im\, z_n$ *комплексный ряд* (1.55) *расходится*.

1.10. О суммируемости рядов методом средних арифметических

Сумму ряда (1.1) мы определяли как *конечный* предел (1.3) последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда при условии, что этот предел существует. Если предел (1.3) последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм бесконечен или не существует, то ряд (1.1) расходится и его сумма в обычном смысле не существует. В то же время ряд теоретических и прикладных задач приводит к необходимости оперировать с расходящимися рядами, для которых удается определить надлежащим образом понятие «*суммы*». Приемы, позволяющие определить «*сумму*» расходящемуся ряду, называют *методами суммирования рядов*. Метод суммирования ряда называется *регулярным*, если для сходящегося ряда его «*сумма*», определенная по этому методу, совпадает с его обычной суммой (1.3).

Рассмотрим *метод Чезаро** суммирования ряда (1.1) средними арифметическими его частичных сумм (1.2). Обозначим через σ_n среднее арифметическое первых n членов последовательности (1.2)

$$\sigma_n=\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n},\ n\in\mathrm{N} \tag{1.56}$$

---

* *Э. Чезаро (1859–1906) – итальянский математик.*

Определение. Ряд (1.1) называется суммируемым методом средних арифметических (*методом Чезаро*) к числу σ, если последовательность $\{\sigma_n\}$ средних арифметических его частичных сумм, определяемая равенством (1.56), сходится к σ, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma. \tag{1.57}$$

Поскольку из того, что последовательность $\{S_n\}$ имеет своим пределом число S, следует, что последовательность $\{\sigma_n\}$, составленная из средних арифметических (1.56), имеет тот же предел (см., например, [10, т.1, с.52])

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma,$$

то метод Чезаро является *регулярным* методом суммирования. Другое доказательство этого утверждения приведено в [4]. Метод Чезаро обладает также свойством линейности [4, 18].

Примеры. Исследовать на суммируемость по Чезаро *расходящиеся* ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots \tag{1.58}$$

Для этого ряда из (1.2), (1.56) найдем, что

$$S_{2n-1} = 1,\ S_{2n} = 0,\ \sigma_{2n-1} = \frac{n}{2n-1},\ \sigma_{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},\ n\in\mathrm{N}.$$

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \dfrac{1}{2}$, то ряд (1.58) суммируется методом средних арифметических (*суммируется методом Чезаро*) к числу $\sigma = \dfrac{1}{2}$.

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1} n + \ldots \tag{1.59}$$

Здесь

$$S_{2n-1} = n,\ S_{2n} = -\frac{n}{2},\ \sigma_{2n-1} = \frac{n}{2n-1},\ \sigma_{2n} = 0,\ n\in\mathrm{N}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{2n} = 0 \neq \dfrac{1}{2}$, то не существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$. Значит, *ряд* (1.59) *не суммируется по Чезаро*.

Необходимый признак суммируемости ряда по Чезаро определяет следующая

Теорема. Если ряд (1.1) *суммируем по Чезаро*, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n}=0. \tag{1.60}$$

Доказательство теоремы приведено в [4, с.302].

Очевидно, что для ряда (1.58) необходимый признак (1.60) выполняется, а для ряда (1.59) – нет.

1.11. Вопросы и задачи к главе 1

1.1. Напишите *пять* первых членов ряда по известной формуле его общего члена u_n:

а) $u_n=\dfrac{2n+3}{n^2+5}$; б) $u_n=\dfrac{3+(-1)^n}{n^2}$; в) $u_n=\dfrac{n!}{(2n)!!}$,

где $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)$, $n\in N$.

1.2. Напишите *одну из возможных* формул общего члена u_n ряда по указанным первым его членам:

а) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+u_n+\ldots$;

б) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots+u_n+\ldots$;

в) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots+u_n+\ldots$;

г) $1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}-\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\ldots+u_n+\ldots$;

д) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{7}{16}+\frac{9}{32}+\frac{11}{64}+\frac{13}{128}-\frac{15}{256}+\ldots+u_n+\ldots$;

1.3. Найдите *суммы* рядов:

а) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots$;

б) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\ldots$;

в) $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\ldots$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+3)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4n-1)(4n+1)}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2(n+3)^2}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4n^2+4n-3}$.

Указание. При решении задач г) – и) полезно разложить общий член ряда (рациональную функцию относительно n) на алгебраическую сумму *простейших дробей* по методу неопределенных коэффициентов [1, 6, 10(т.1), 21, 23, 24].

1.4. **Докажите следующие равенства:**

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,q^{n-1} = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + n\,q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2}$, $|q|<1$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)n\,q^{n-1} = 2+3\cdot 2q + 4\cdot 3\,q^2 + \ldots + (n+1)n\,q^{n-1} + \ldots = \frac{2}{(1-q)^3}$, $|q|<1$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1} = 1+4q+9q^2+\ldots+n^2 q^{n-1}+\ldots = \frac{1+q}{(1-q)^3}$, $|q|<1$.

Указание. Используйте правило дифференцирования степенных рядов (см. п. 2.5.), начиная с ряда (1.4).

С помощью полученных соотношений *найдите суммы рядов*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^{n-1}}$.

1.5. С помощью следствия из необходимого признака сходимости ряда *докажите расходимость следующих рядов*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{7n^2+4n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{6}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3+3}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{2}{n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+5}\right)^{n^2}$.

1.6. Можно ли подобрать такие два ряда, чтобы их разность сходилась, а сумма расходилась? Если да, то приведите примеры таких рядов.

1.7. Докажите, что если действительный ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ также сходится. Покажите, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Приведите примеры.

1.8. Докажите, что если действительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ сходятся, то сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)^2$.

1.9. Пользуясь *признаками сравнения*, исследуйте на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+5n+4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n-n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-\sqrt[3]{n+1}}{n^3-n+2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n^3}(2^n+1)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^7-1\right]$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{4^n}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty} tg^3 \frac{1}{\sqrt{n}}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; л) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}+n^5+2}{2^{2n+3}+\cos^2 n+1}$; м) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}}$.

Указание. При рассмотрении последнего примера можно применить формулу Стирлинга, приведенную в п. 1.4, или сравнить этот ряд с обобщенным гармоническим рядом (*рядом Дирихле*) (1.25) при определенном значении ρ. Подумайте над каждым из указанных способов решения этого примера.

1.10. Исследуйте знакоположительные ряды с помощью *признака Д'Аламбера*:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{n^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{7^n\cdot n^2}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot\ldots\cdot(4n)}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt{n}}{(n+2)!}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{2^n}$.

1.11. Используя *радикальный* признак *Коши*, исследуйте на сходимость знакоположительные ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+5}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n\,tg^n\frac{1}{3n}$;

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n^2-n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(2^n+1)}$.

1.12. Исследуйте знакоположительные ряды с помощью *интегрального признака Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4+5^{2n}}$;

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+9}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n^2}}$.

1.13. Используя *различные способы*, исследуйте на сходимость знакоположительные ряды:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+7}{n^3}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln^2 n+1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n\frac{1}{n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(n+1)!}\arcsin\frac{1}{2^n}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

1.14. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость *знакопеременные* ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^{p}},\ p\in R$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{\ln n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)(3n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\dfrac{n}{3^{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\ln n}{n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,tg\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\dfrac{15}{n}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 4n}{n^{2}}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n^{2}3^{n}}{5^{n}+4}$;

к) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln n}$; л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{3n^{2}-1}{7n^{2}+n+2}$; м) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(n\ln n)^{3}}$.

1.15. Установите сходимость *знакочередующихся* рядов и вычислите их суммы с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{5^{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{5}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

1.16. Оцените *погрешность*, возникающую при замене суммы ряда суммой первых его *пяти* членов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{2}\cdot 2^{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3}\cdot n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{4}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{n}}{(2n)!!}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\,3^{n}}{(2n+1)\,7^{n}}$.

1.17. Найдите *произведение* (по Коши) *рядов*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

В последнем примере нужно ряд умножить на себя, т.е. возвести его в квадрат.

Выясните, *сходятся ли эти произведения* ?

1.18. Определите, при каких положительных значениях *действительного параметра* α сходятся ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\, tg\dfrac{n^3-2}{n^5+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3\ln^5 n}{7n^{\alpha}+\cos 3n+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{5\alpha\, n+2}{(\alpha^2+6)n+1}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \alpha n}{\sqrt{n}}$.

1.19. Исследуйте на сходимость *комплексные* числовые ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}+i\,\dfrac{n}{3^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos 3n}{n^3}+i\,\dfrac{\sin 4n}{n^4}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}+i}{\sqrt{n^3}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+i\,\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+2i)^n}{n\,3^n}$.

1.20. Исследуйте на суммируемость *по Чезаро* (методом средних арифметических) *расходящиеся* ряды:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2$.

ГЛАВА 2.
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1. Определение функционального ряда и области его сходимости

Функциональным называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (2.1)$$

где $u_n(x)$, $n \in \mathrm{N}$– функции, определенные на множестве $X \subseteq \mathrm{R}$.

Придавая x конкретные числовые значения, мы из (2.1) получим различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися.

Определение 1. Множество значений $x \in D \subseteq X \subseteq \mathrm{R}$, для которых функциональный ряд (2.1) сходится, называется ***областью сходимости*** этого ряда.

Сходимость функционального ряда (2.1) в каждой точке $x \in D$ называется *поточечной сходимостью*. Сумма ряда (2.1) определяется по аналогии с суммой числового ряда (1.1). Составим его ***n–ю частичную сумму***

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x),\ x \in X,\ n \in \mathrm{N}. \qquad (2.2)$$

Замечание. Каждому функциональному ряду (2.1) можно поставить в соответствие функциональную последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм (2.2). С другой стороны, каждой функциональной последовательности $\{u_n(x)\}$, $n \in \mathrm{N}$ соответствует функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\,u_n(x) - u_{n-1}(x)],\ u_0(x) = 0,$$

для которого частичные суммы будут равны соответствующим членам последовательности $\{u_n(x)\}$, т.е. $S_n(x) = u_n(x)$, $n \in \mathrm{N}$.

Это дает возможность известные теоремы для функциональных последовательностей [1, 3–5, 10(т.1), 14, 21] переформулировать в соответствующие теоремы для функциональных рядов.

Определение 2. Если при $n \to \infty$ существует *конечный* предел $S(x)$ последовательности $\{S_n(x)\}$ частичных сумм (2.2), то он называется ***суммой ряда*** (2.1) и обозначается

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),\ x \in D, \tag{2.3}$$

а сам ряд в этом случае считается *сходящимся*. В противном случае ряд (2.1) *расходится.*

Пусть ряд (2.1) сходится в области $x \in D$, тогда его можно записать в виде

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x),\ x \in D, \tag{2.4}$$

где *остаток ряда*

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots \tag{2.5}$$

Очевидно, что $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$, $x \in D$.

Перейдем в равенстве (2.4) к пределу при $n \to \infty$. Получим

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x) \Leftrightarrow S(x) = S(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x),\ x \in D.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,\ x \in D. \tag{2.6}$$

Таким образом, *необходимое условие сходимости* функционального ряда (2.1) имеет вид (2.6).

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что выполнение условия (2.6) *достаточно* для сходимости функционального ряда (2.1) при $n \to \infty$.

Замечание. Рассуждая аналогично, как и при выводе формулы (1.9), нетрудно убедиться, что необходимое условие сходимости функционального ряда (2.1) может быть записано в виде

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0,\ x \in D. \tag{2.7}$$

однако, оно не является достаточным условием сходимости этого ряда для $x \in D$.

Функциональный ряд называется *абсолютно сходящимся* на множестве D, если для $\forall x \in D$ сходится ряд $\sum_{n-1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Изучение функционального ряда обычно сводится к определению его *области сходимости*. При этом используют свойства числовых рядов и известные признаки их сходимости (см. гл. 1), учитывая, что из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость (см. п. 1.7.). В результате такого исследования, находя область сходимости функционального ряда, в ней затем выделяют области абсолютной и условной сходимости.

Другой, не менее важной и, как правило, более сложной задачей является нахождение *суммы функционального ряда*.

Подчеркнем, что *сумма функционального ряда* есть некоторая функция в области сходимости этого ряда, которая ничем не отличается от функций, полученных каким–либо другим путем. Поэтому в дальнейшем нас будут интересовать естественные вопросы о ее непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости и т.д.

Пример 1. Найти ***область сходимости*** ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots \qquad (2.8)$$

Ряд (2.8) представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = x$ и по доказанному ранее (см .п. 1.1.) ее сумма

$$S(x) = \frac{1}{1-x}, \ |x| < 1.$$

Изучая свойства функций, непрерывных на отрезке, мы ранее убедились, что для *конечных сумм непрерывных функций* справедливы следующие утверждения (см., например, [1, 10(т.1), 21, 24]):

1) Любая *конечная сумма* непрерывных на отрезке функций будет непрерывной на данном отрезке;

2) Если функции $u_n(x)$, $n=\overline{1,m}$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то производная от *конечной суммы* таких функций равна сумме производных слагаемых, т.е.

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{m} u_n(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{d\,u_n(x)}{dx};$$

3) Интеграл от *конечной суммы* непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций равен сумме интегралов слагаемых, т.е.

$$\int_a^x [\sum_{n=1}^{m} u_n(x)]\, dx = \sum_{n=1}^{m} \int_a^x u_n(x)\, dx, \ x \in [a,b].$$

Возникает вопрос: *переносятся ли указанные свойства для конечных сумм непрерывных функций на бесконечные суммы непрерывных функций, т.е. на функциональные ряды* ?

Оказывается, что *для бесконечных сумм непрерывных функций свойства 1) – 3)* для их конечных сумм, *вообще говоря, не выполняются.*

Пример 2 [10(т.1), с.593]. Найти сумму ряда из *непрерывных* функций

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} + \ldots \qquad (2.9)$$

Этот ряд сходится для любых $x \in \mathrm{R}$. Действительно, если $x \neq 0$, то ряд (2.9) представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем

$$0 < q = \frac{1}{1+x^2} < 1$$

и его сумма (см. п. 1.1.)

$$S(x) = \frac{a}{1-q} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 .$$

Если же $x = 0$, то все члены ряда (2.9) равны нулю, и он, очевидно, сходится к $S(0) = 0$.

Таким образом,

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \qquad (2.10)$$

График функции $S(x)$ изображен на рис. 2.1.

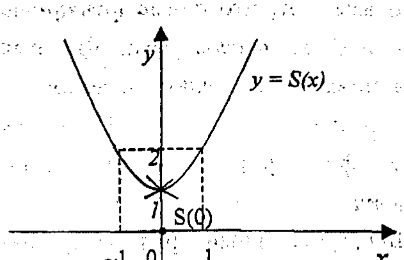

Рис. 2.1

Из равенства (2.10) видно, что *сумма функционального ряда (2.9), составленного из непрерывных функций, есть функция, разрывная в точке* $x = 0$, т.к.

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = 1 \neq 0 = S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0).$$

Пример 3 [9, с.121]. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 9x}{9} + \ldots, \tag{2.11}$$

состоящий из функций, *непрерывно дифференцируемых* на всей числовой оси. Поскольку $\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\right|$, $\forall x \in R$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится как ряд Дирихле (1.25) при $p = 2 > 1$, то функциональный ряд (2.11) *сходится абсолютно* для $x \in R$. Однако, ряд из производных членов функционального ряда (2.11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n^2 x = \cos x + \cos 4x + \cos 9x + \ldots \tag{2.12}$$

расходится, т.к. $\lim_{n\to\infty} u'_n(x) = \lim_{n\to\infty} \cos n^2 x \neq 0$, т.е. не выполняется необходимый признак сходимости (2.7). Здесь $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))' \neq \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

2.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Примеры 2, 3 показывают, что *сумма функционального ряда в общем случае не сохраняет свойств членов ряда*. Для выяснения условий, при которых для функциональных рядов (*бесконечных сумм функций*) сохраняются привычные нам свойства 1) – 3) их *конечных сумм*, наряду с обычной сходимостью функционального ряда (2.1) введем понятие его *равномерной сходимости*.

Определение. Функциональный ряд (2.1) называется *равномерно сходящимся* в области D к сумме $S(x)$, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, *не зависящий от* $x \in D$, такой, что

$$| S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in D, \forall n \geq N. \tag{2.13}$$

Условие (2.13) *равномерной сходимости* функционального ряда (2.1) равносильно

$$|R_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in D,\ \forall n \geq N, \tag{2.13'}$$

где остаток ряда задается равенством (2.5).

Равномерную сходимость ряда (2.1) проиллюстрируем геометрически (рис. 2.2).

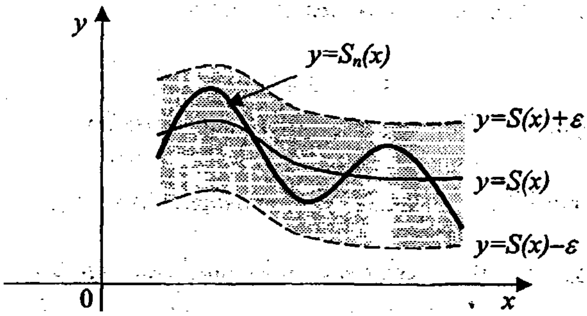

Рис. 2.2

Выполнение неравенства (2.13) означает, что, начиная с некоторого номера $N=N(\varepsilon)$, графики *всех* частичных сумм ряда (2.1) $y=S_n(x)$ будут расположены в *«ε–полосе»* относительно графика суммы этого функционального ряда $y = S(x)$ *для всех* $x \in D$.

Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^{n-1}} = x^2 - \frac{x^2}{1+x^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} + \ldots \tag{2.14}$$

Этот ряд знакочередующийся, поэтому справедлива оценка (1.32) модуля его остатка

$$|R_n(x)| < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\ldots+x^{2n}} < \frac{x^2}{nx^2} < \frac{1}{n},\ 0 \neq x \in \mathrm{R},\ n \in N.$$

Очевидно, что $R_n(0) = 0$. Полагаем $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \mathrm{N} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, что неравенство (2.13') выполняется для $\forall x \in \mathrm{R}$, $\forall n \geq N$. Значит, ряд (2.14) *сходится равномерно* на всей числовой оси R.

Достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда, удобный для практического применения, дает следующая теорема, доказательство которой приведено в [1, 3–5, 10 (т. 1), 14, 18, 21].

Теорема (*мажорантный признак Вейерштрасса*). Если члены функционального ряда (2.1) по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов *сходящегося* числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$, т.е.

$$|u_n(x)| \leq a_n, \ \forall x \in D, \ \forall n \in N, \tag{2.15}$$

то этот функциональный ряд сходится на множестве D *равномерно и абсолютно.*

При выполнении неравенств (2.15) говорят, что сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ является *мажорантой* (*мажорантным*) для функционального ряда (2.1) на множестве D.

Более сложные (*тонкие*) признаки: Коши; Абеля; Дирихле – *равномерной сходимости* функциональных рядов см., например, в [1, 9, 10(т.1), 14, 18, 21, 25]. Эти признаки в отличие от признака Вейерштрасса позволяют исследовать на равномерную сходимость не только абсолютно сходящиеся ряды.

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots \tag{2.16}$$

Очевидно, что

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \ \forall x \in \mathrm{R}, \ \forall n \in \mathrm{N}.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то ряд (2.16) по мажорантному признаку Вейерштрасса *сходится равномерно* для $x \in \mathrm{R}$.

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

1) Сумма $S(x)$ функционального ряда (2.1) из непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций в случае *равномерной сходимости* этого ряда на отрезке $[a, b]$ также непрерывна на этом отрезке.

Замечание 1. Если функциональный ряд (2.1) из непрерывных функций *сходится равномерно* на $[a, b]$, то возможен почленный переход к пределу

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x),\ x_0\in[a, b].$$

Замечание 2. *Условие равномерной сходимости* функционального ряда *является лишь достаточным* для непрерывности суммы ряда из непрерывных функций, *но не является необходимым*, т.е. сходящийся к непрерывной функции функциональный ряд не обязательно должен быть равномерно сходящимся. Примеры, подтверждающие справедливость этого утверждения, приведены в [3, 9].

2) Если ряд (2.1) из непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций *сходится равномерно на этом отрезке*, то интеграл от бесконечной суммы непрерывных функций равен бесконечной сумме интегралов слагаемых, т.е.

$$\int_a^x S(x)\,dx = \int_a^x \Big[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big]\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(x)\,dx,\quad x\in[a,b]. \tag{2.17}$$

Другими словами, *равномерно сходящийся функциональный ряд можно почленно интегрировать в области его равномерной сходимости.*

3) Пусть ряд (2.1) из непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций *сходится* к $S(x)$ на этом отрезке, а ряд из производных *сходится равномерно* на $[a,b]$. Тогда исходный ряд (2.1) *сходится равномерно* на отрезке $[a,b]$ и производная от бесконечной суммы непрерывно дифференцируемых функций равна бесконечной сумме производных слагаемых, т.е.

$$S'(x) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),\quad x\in[a,b]. \tag{2.18}$$

Замечание 3. **Отметим, что *требование равномерной сходимости* ряда**

из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ *является существенным*. Если оно не выполняется, т.е. вместо равномерной сходимости этого ряда имеет место обычная сходимость, то равенство (2.18) может и не выполняться.

Замечание **4**. В свойствах 2), 3) сформулированы *достаточные условия* почленной интегрируемости и дифференцируемости функциональных рядов.

Доказательства приведенных свойств *равномерно сходящихся* функциональных рядов имеются в [1, 3–5, 9, 10(т.1), 14, 18, 21].

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что функциональный ряд (2.9) *сходится неравномерно* для $x \in \mathrm{R}$ ($x \in [-a, a]$, $a \in \mathrm{R}$). Выяснить соотношения между равномерной и абсолютной сходимостью функционального ряда. Сравнить ряды (2.9) и (2.14).

Указание. В случае затруднений, нюансы этого не совсем простого вопроса см., например, в [25].

Таким образом, если функциональные ряды не просто сходятся, а *сходятся равномерно*, то для них имеют место свойства, аналогичные свойствам конечных сумм непрерывных функций.

2.3. Степенные ряды

Степенным называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{2.19}$$

где a_n – действительные числа, называемые *коэффициентами ряда*.

Областью сходимости степенного ряда (2.19) всегда является некоторый интервал, конечный или бесконечный, с центром в точке $x = 0$, который, в частности, может вырождаться в точку $x = 0$.

Для степенных рядов справедлива

Теорема (*Абеля*). Если степенной ряд (2.19) сходится в точке $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится при любом x, для которого $|x| < |x_1|$. Если же ряд (2.19) расходится в точке x_2, то он расходится во всех точках x, таких, что $|x| > |x_2|$.

Доказательство. 1) По предположению, числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n = a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n+\ldots \qquad (2.20)$$

сходится. Тогда из необходимого признака сходимости ряда (см. п. 1.3.) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Это значит, что последовательность $\{a_n x_1^n\}$ ограничена, т.е. существует такое число $M > 0$, что

$$|a_n x_1^n| \le M, \quad n=0,\ 1,\ 2\ \ldots \qquad (2.21)$$

Запишем ряд (2.19) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1}\right)^n = a_0 + a_1x_1\left(\frac{x}{x_1}\right)+a_2x_1^2\left(\frac{x}{x_1}\right)^2+\ldots+a_nx_1^n\left(\frac{x}{x_1}\right)^n+\ldots \qquad (2.22)$$

Рассмотрим ряд из абсолютных величин членов этого ряда

$$|a_0| + |a_1x_1|\left|\frac{x}{x_1}\right| + |a_2x_1^2|\left|\frac{x}{x_1}\right|^2+\ldots+|a_nx_1^n|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n+\ldots \qquad (2.23)$$

В силу неравенств (2.21) члены ряда (2.23) не превосходят соответствующих членов ряда

$$M+ M\left|\frac{x}{x_1}\right|+M\left|\frac{x}{x_1}\right|^2+\ldots+M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n+\ldots \qquad (2.24)$$

При $|x| < |x_1|$ ряд (2.24) сходится как бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $|q|=\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$ (см. п. 1.1). Тогда по признаку сравнения рядов с неотрицательными членами (см. п. 1.4.) ряд (2.23) также сходится. Значит, ряд (2.22) или (2.19) *сходится абсолютно* для $|x| < |x_1|$.

2) Теперь нетрудно доказать и вторую часть теоремы. Пусть в некоторой точке x_2 ряд (2.19) расходится. Тогда он будет расходиться в любой точке x, удовлетворяющей неравенству $|x| > |x_2|$. Действительно, если бы в какой–либо точке x, для которой $|x| > |x_2|$, ряд (2.19) сходился, то по только что доказанной первой части теоремы он должен был бы сходиться и в точке x_2, т.к. $|x_2| < |x|$. Поскольку это противоречит условию, что ряд (2.19) расходится в точке x_2, то, следовательно, он расходится и в точке x. Теорема доказана.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда.

Определение. Радиусом сходимости степенного ряда (2.19) называется такое неотрицательное число R, что для $|x|<R$ этот ряд сходится, а для $|x|>R$ – расходится.

При этом интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (2.19).

Замечание. В концевых точках интервала сходимости $x = -R$ и $x = R$ исследование степенного ряда (2.19) на сходимость нужно проводить раздельно. В любой из них возможна сходимость или расходимость степенного ряда.

Найдем выражение радиуса сходимости степенного ряда (2.19) через его коэффициенты. Рассмотрим ряд из абсолютных величин ряда (2.19).

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \tag{2.25}$$

Так как ряд (2.25) есть ряд с неотрицательными членами, то применим к нему признак Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \, \mathrm{L},$$

предполагая, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \mathrm{L}$.

Следовательно (см. п. 1.5.), ряд (2.19) *абсолютно сходится* при $|x|\,\mathrm{L} < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/\mathrm{L} = R$ и расходится при $|x|\,\mathrm{L} > 1 \Leftrightarrow |x| > 1/\mathrm{L} = R$.

Из предыдущего следует, что радиус сходимости степенного ряда (2.19) находится по формуле

$$R = \frac{1}{\mathrm{L}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{2.26}$$

Если провести аналогичные рассуждения и к ряду (2.25) применить радикальный признак Коши, то для определения радиуса сходимости ряда (2.19) получим формулу Коши–Адамара*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2.27}$$

---

* *Ж. Адамар (1865 –1963) – французский математик.*

Отметим, что формулы (2.26), (2.27) можно применять, если, начиная с некоторого номера $n \geq m$ *все* $a_n \neq 0$. При этом, если L = 0, то $R = \infty$, т.е. степенной ряд (2.19) сходится $\forall x \in \mathrm{R}$. Если же $\mathrm{L} = \infty$, то $R = 0$, и в этом случае ряд (2.19) сходится только при $x = 0$.

***Пример* 1.** Найти *область сходимости* степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\, 3^n}. \tag{2.28}$$

Для нахождения *области сходимости* степенного ряда нужно определить его интервал сходимости и исследовать сходимость ряда на концах этого интервала.

Найдем интервал абсолютной сходимости ряда (2.28). Для этого к ряду из модулей применим признак Д' Аламбера. Здесь

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n\, 3^n}, \quad |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\, 3^{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\, n\, 3^n}{(n+1)\, 3^{n+1}\, x^n}\right| = \frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n} = \frac{|x|}{3}.$$

Для сходимости ряда по признаку Д'Аламбера нужно, чтобы полученный предел был меньше единицы: $\frac{|x|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Это и есть *интервал сходимости* степенного ряда (2.28). Исследуем *поведение ряда* (2.28) *на концах интервала сходимости*, т. е. при $x = -3$ и $x = 3$.

1) При $x = -3$ из (2.28) получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\, 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n\, 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Этот ряд *сходится условно* по признаку Лейбница (см. п. 1.6.).

2) При $x = 3$ из (2.28) получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\, 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Это гармонический ряд, который, как известно, (см. п. 1.5.), *расходится*.

Таким образом, *областью сходимости* степенного ряда (2.28) является полуинтервал $-3 \le x < 3 \Leftrightarrow x \in [-3, 3)$.

Рассмотрим ряд *по степеням* $(x - x_0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \; x_0, a_n \in \mathrm{R}. \qquad (2.29)$$

Ряд (2.19) получается как частный случай ряда (2.29) при $x_0 = 0$. С помощью замены $x - x_0 = t$ мы из ряда (2.29) получим ряд вида (2.19) относительно t. Однако, на практике такую замену обычно не выполняют, а при исследовании ряда (2.29) *на абсолютную сходимость* к нему сразу применяют признак Д'Аламбера или другие признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Пример 2. Найти *область сходимости* степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}. \qquad (2.30)$$

Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x+3|^n}{n^2}$ и применим признак Д'Аламбера.

Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^{n+1}\, n^2}{(n+1)^2\,(x+3)^n}\right| = |x+3| \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} =$$

$$= |x+3| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^2} = |x+3|.$$

Если $|x+3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+3 < 1 \Leftrightarrow -4 < x < -2$, то ряд (2.30) *сходится абсолютно.*

Если $|x+3| > 1$, т.е. $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$ то ряд (2.30) *расходится.*

На концах интервала сходимости $(-4, -2)$, т.е. при $x = -4$ и $x = -2$ проведем дополнительное исследование.

1) При $x = -4$ из (2.30) получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

2) При $x = -2$ из (2.30) получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который *сходится* как ряд Дирихле (1.25) при $p = 2 > 1$.

Так как из абсолютной сходимости следует обычная сходимость (см. п. 1.7), то сходится и предыдущий числовой ряд. Следовательно, *областью сходимости* степенного ряда (2.30) является отрезок $x \in [-4, -2]$.

***Пример* 3.** Найти *область сходимости* степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n, \quad (0! = 1). \tag{2.31}$$

Определим *радиус сходимости* этого ряда по формуле (2.26)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Следовательно, ряд (2.31) сходится только в одной точке $x = 0$.

***Пример* 4.** Найти *область сходимости* степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n^3\, 4^n}. \tag{2.32}$$

Данный ряд содержит только четные степени $(x-2)$. Коэффициенты при нечетных степенях $(x-2)$ равны нулю. Это *ряд с пропусками*, и непосредственное применение формул (2.26) или (2.27) невозможно или возможно со специальными оговорками [20]. Поэтому, к ряду из абсолютных величин членов ряда (2.32) применим признак Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)^{2n+2}\, n^3\, 4^n}{(n+1)^3\, 4^{n+1}\, (x-2)^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-2)^2\, n^3}{4(n+1)^3} =$$

$$= \frac{(x-2)^2}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = \frac{(x-2)^2}{4}.$$

Если $(x-2)^2/4 < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4$, то ряд (2.32) *сходится абсолютно*.

Если $|x-2| > 2$, т.е. $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, то ряд (2.32) *расходится*.

Рассмотрим *поведение ряда на концах интервала сходимости* $(0,4)$, т.е. при $x = 0$ и $x = 4$.

При $x = 0$ из (2.32) получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^3\, 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

который сходится, как ряд Дирихле (1.25) при $p = 3 > 1$.

При $x = 4$ получим тот же сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^3\, 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Следовательно, *областью сходимости* степенного ряда (2.32) является отрезок $x \in [0,\ 4]$.

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что *областью сходимости* степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ (0! = 1) \tag{2.33}$$

является вся числовая прямая $x \in \mathbb{R}$. Применяя необходимый признак сходимости ряда (см. п. 1.3) убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.34}$$

2.4. Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть функция $y = f(x)$ $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, включая саму точку x_0. Тогда имеет место *формула Тейлора**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \tag{2.35}$$

где остаточный член $R_n(x)$ может быть взят:

а) *в форме Лагранжа***

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi \in (x_0,\ x);$$

б) *в форме Пеано****

$$R_n(x) = o(|x-x_0|^n);$$

в) *в интегральной форме*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Если функция $f(x)$ *бесконечно дифференцируема* в некоторой окрестности точки x_0, включая саму точку x_0, то, переходя в равенстве (2.35) к пределу при $n \to \infty$, получим *ряд Тейлора*

* *Б. Тейлор (1685–1731) – английский математик.*

** *Ж.Лагранж (1736–1813) – французский математик и механик.*

*** *Дж. Пеано (1858–1932) – итальянский математик*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots, \qquad (2.36)$$

При этом предполагается, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, x \in D. \qquad (2.37)$$

Частный случай ряда Тейлора при $x_0 = 0$ называется *рядом Маклорена**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (2.38)$$

Для того, чтобы в некоторой области $x \in D$ формально построенные для функции $f(x)$ ряд Тейлора (2.36) или ряд Маклорена (2.38) сходились к этой же функции $f(x)$, *необходимо и достаточно*, чтобы для $\forall\ x \in D$ выполнялось равенство (2.37).

Выделим *два существенных момента*, которые возникают в данном вопросе:

1) Для функции $f(x)$ формально строится ряд Тейлора (2.36) или ряд Маклорена (2.38);

2) Далее требуется найти область $x \in D$, чтобы формально построенный для $f(x)$ ряд Тейлора или Маклорена в окрестности точки x_0 сходился к этой же функции $f(x)$.

Отметим, что ряд Тейлора для $f(x)$ может и не сходиться к функции $f(x)$ или совпадать с ней только в точке x_0.

Пример (*Коши*). Для функции (см. [3, с. 179], [10 (т.1), с.636])

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad (2.39)$$

бесконечно дифференцируемой в начале координат, все производные $f^{(n)}(0) = 0,\ n = 0,1,2,\ldots$, поэтому ряд Маклорена для нее имеет вид

$$S(x) = 0 + \frac{0}{1}x + \frac{0}{2!}x^2 + \ldots + \frac{0}{n!}x^n + \ldots = 0 \neq f(x),\ x \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ \ \varepsilon > 0.$$

Для практических приложений удобен следующий *достаточный* признак представления функции $f(x)$ ее рядом Тейлора. Справедлива

Теорема. Если при любых x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<R$, производные всех порядков от функции $f(x)$ ограничены одним и тем же числом M, т.е.

$$|f^{(n)}(x)| \leq M,\ n = 0,1,2,\ \ldots;\ x \in (x_0-R,\ x_0+R), \qquad (2.40)$$

**К. Маклорен (1698–1746) – шотландский математик.*

то ряд Тейлора (2.36) для функции $f(x)$ сходится в интервале $(x_0 - R,\ x_0+R)$ и его сумма $S(x) = f(x),\ \forall\ x \in (x_0 - R,\ x_0+R)$.

Доказательство. Оценим остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора в форме Лагранжа, учитывая неравенство (2.40)

$$0 < |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le M\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|,\ x \in (x_0 - R,\ x_0+R). \qquad (2.41)$$

В соответствии с равенством (2.34)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,\ \ |x-x_0|<R.$$

Поэтому из (2.41) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0,\ |x-x_0|<R$, а значит и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0,\ |x-x_0|<R$. Это означает, что выполняется *необходимое и достаточное* условие сходимости к функции $f(x)$ ее ряда Тейлора. Теорема доказана.

Легко доказывается следующее утверждение: *разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора – единственно.*

2.5. Свойства степенных рядов

Теорема 1. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится равномерно и абсолютно* на любом отрезке $[-b,\ b]$, целиком принадлежащем его интервалу сходимости $(-R,\ R)$.

Доказательство. Возьмем $b < x_0 < R$, тогда числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ *сходится абсолютно*. Поскольку $|a_n x^n| \le |\ a_n x_0^n\ |,\ \forall x \in [-b,\ b];\ n=0,1,2,\dots$, то по мажорантному признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится равномерно и абсолютно* на отрезке $[-b,\ b]$. Это и утверждалось.

Следствие 1. Сумма степенного ряда $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ есть функция *непрерывная* на любом отрезке, целиком принадлежащем его интервалу сходимости $(-R,\ R)$.

Следствие 2. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно *почленно интегрировать* по любому отрезку $[a,\ b]$, целиком принадлежащему его интервалу сходимости $(-R,\ R)$, т.е.

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n\, dx, \qquad (2.42)$$

где $S(x)$ – сумма ряда (2.19), при этом, если

$$S(x) = a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots+a_n x^n+\ldots,\ -R < x < R, \qquad (2.19)$$

то

$$\int_0^x S(x)dx= a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\ldots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,\quad -R < x < R, \qquad (2.43)$$

Справедливость указанных следствий вытекает из теоремы 1 и свойств 1), 2) *равномерно сходящихся* функциональных рядов (см. п. 2.2.).

Теорема 2. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно *почленно дифференцировать* в интервале его сходимости $(-R, R)$, при этом интервал сходимости степенного ряда из производных останется неизменным, т.е. если

$$S(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,\quad -R < x < R, \qquad (2.19)$$

то

$$S'(x) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,\quad -R < x < R, \qquad (2.44)$$

Доказательство. Проведем его, предполагая, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}| a_n / a_{n+1}| = R$. Найдем радиус сходимости R_1 степенного ряда (2.44) по формуле (2.26)

$$R_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\,a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1\cdot R = R,$$

где R – *радиус сходимости* ряда (2.19).

По теореме 1 степенной ряд (2.44) *сходится равномерно и абсолютно* на любом отрезке $[-b, b]$, целиком лежащем в его интервале сходимости $(-R, R)$. Тогда по свойству 3) *равномерно сходящихся* функциональных рядов (см. п. 2.2.), ряд (2.19) можно почленно дифференцировать для $\forall\ x\in[-b, b]$ и равенство (2.44) будет справедливо для $\forall x\in[-b, b]$. Поскольку любую точку интервала $(-R, R)$ можно заключить в некоторый отрезок $[-b, b]\subset(-R, R)$, то отсюда следует, что ряд (2.44) *сходится равномерно и абсолютно* на каждом отрезке $[-b, b]$ из $(-R, R)$, при этом равенство (2.44) выполняется для $\forall x\in(-R, R)$.

Замечание. Так как после дифференцирования степенного ряда мы опять получаем степенной ряд с тем же интервалом сходимости, который, в свою очередь, можно дифференцировать, то отсюда следует, что *сумма степенного ряда есть бесконечно дифференцируемая функция в интервале сходимости этого ряда.*

Операции интегрирования и дифференцирования степенных рядов часто применяют для нахождения сумм этих рядов.

Пример. Найти сумму степенного ряда

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots=S(x). \qquad (2.45)$$

Найдем радиус сходимости этого ряда, применяя формулу (2.26)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{(2n-1)(-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=1.$$

Значит, ряд (2.45) абсолютно сходится в интервале $|x|<1$ и расходится для $|x|>1$. Продифференцируем обе части равенства (2.45) и в соответствии с (2.44) получим

$$S'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n-2}+\ldots,\ |x|<1. \qquad (2.46)$$

Члены ряда (2.46) образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q=-x^2$ и для $|q|<1 \Leftrightarrow |x|<1$ этот ряд сходится и его сумма (см. п. 1.1.)

$$S'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2},\ |x|<1.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства на отрезке $[0, x]$, $|x|<1$. Учитывая, что $S(0)=0$, будем иметь

$$S(x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^x=\operatorname{arctg}x,\ |x|<1.$$

Рассмотрим поведение ряда (2.45) на концах интервала сходимости, т.е. при $x=-1$ и $x=1$.

При $x=-1$ из (2.45) получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)}{2n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

который сходится по признаку Лейбница (см. п. 1.6.).

При $x = 1$ из (2.45) получим сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

т.к. он отличается от предыдущего сходящегося ряда умножением на (–1).

Таким образом, ряд (2.45) имеет сумму

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots = arctg\, x, \quad |x| \le 1. \qquad (2.45')$$

При $|x| > 1$ этот ряд расходится. См. также исследования ряда (2.45), проведенные в [3, 9].

Отметим, что примеры *умножения и деления степенных рядов* приведены в [25].

2.6. Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

К этому вопросу можно подходить двояко:

а) формально составить ряд Маклорена (2.38) и исследовать его на абсолютную сходимость по признаку Д'Аламбера, который позволит найти область сходимости этого ряда;

б) для каждой конкретной функции использовать формулу Маклорена (формулу (2.35) при $x_0=0$) и найти область значений $x \in D$, для которой выполняется необходимое и достаточное условие (2.37) сходимости к этой функции формально составленного для нее ряда Маклорена (Тейлора).

1) $f(x) = sin\ x$. Найдем производные этой функции и вычислим их значения при $x = 0$.

$$f'(x) = cos\,x, \qquad f'(0) = 1,$$
$$f''(x) = -sin\,x, \qquad f''(0) = 0,$$
$$f'''(x) = -cos\,x, \qquad f'''(0) = -1,$$
$$f^{(4)}(x) = sin\,x, \qquad f^{(4)}(0) = 0.$$

Далее значения производных будут периодически повторяться. С учетом очевидного равенства $f(0) = sin\ 0 = 0$, ряд Маклорена (2.38) запишется в виде

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (2.47)$$

Исследуем ряд (2.47) на абсолютную сходимость по признаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}\,(2n+1)!}{(2n+3)!\,(-1)^n x^{2n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)\,(2n+3)} = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)\,(2n+3)} = x^2\cdot 0 = 0 < 1,\ \forall x\in\mathrm{R}.$$

Следовательно, *областью сходимости ряда* (2.47) *является вся числовая ось* R.

Теоретическое упражнение. Получить *самостоятельно* предыдущий результат о сходимости ряда (2.47), применяя формулу (2.35) при $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа и соотношения (2.34), (2.37).

2) $f(x) = \cos x$. Так как степенной ряд можно почленно дифференцировать с сохранением его интервала сходимости (см. п. 2.5.), то, дифференцируя обе части равенства (2.47), получим ряд Маклорена для функции $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\quad -\infty < x < \infty. \tag{2.48}$$

3) $f(x) = e^x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n\in\mathrm{N} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n\in\mathrm{N}$. Учитывая, что $f(0) = e^0 = 1$, из (2.38) получим ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. \tag{2.49}$$

С помощью признака Д'Аламбера легко показать, что *ряд* (2.49) *абсолютно сходится при* $\forall x\in(-\infty, \infty)$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x|\cdot 0 = 0,\ \forall x\in\mathrm{R}.$$

Заменяя в равенстве (2.49) x на $(-x)$, получим ряд с той же областью сходимости

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \ldots,\quad -\infty < x < \infty. \tag{2.50}$$

Ряды (2.49) и (2.50) сходятся в R, поэтому, складывая и вычитая их друг с другом (см. п. 1.2.), мы получим *ряды Маклорена для гиперболических функций* с областью сходимости R

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ -\infty < x < \infty. \tag{2.51}$$

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\ -\infty < x < \infty. \tag{2.52}$$

4) $f(x) = (1+x)^m$, $m \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $f(0)=1$. Поскольку

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \qquad f'(0) = m,$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \qquad f''(0) = m(m-1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \qquad f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1),$$

то ряд Маклорена (2.38) для этой функции примет вид

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}x^n + \dots \qquad (2.53)$$

Если m – целое положительное число, то ряд (2.53) содержит *конечное* число $(m+1)$ отличных от нуля слагаемых и превращается в известную формулу *бинома Ньютона**. Поэтому он и называется *биномиальным*. Найдем интервал сходимости ряда (2.53). По признаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)x^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,m(m-1)\dots(m-n+1)\,x^n}\right| =$$
$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right| = |x|.$$

Значит, ряд (2.53) *сходится абсолютно* при $|x| < 1$ и расходится для $|x| > 1$. Покажем, что суммой $S(x)$ этого ряда является функция $f(x)=(1+x)^m$, $|x| < 1$. В данном случае оценка остаточного члена $R_n(x)$ в формуле (2.35), т.е. проверка условия (2.37), оказывается достаточно трудной [3, 21]. Поэтому, следуя [9, 12, 14], мы заметим, что *функция $S(x)$, определенная рядом* (2.53), является решением задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка: $(1+x)S'(x)=mS(x)$, $S(0)=1$. С другой стороны, решением этой же задачи является функция $f(x)=(1+x)^m$. Отсюда, *в силу единственности решения задачи Коши*, получим, что $S(x)=f(x)=(1+x)^m$, $|x| < 1$, т.е. формально составленный ряд Маклорена (2.53) для $f(x)=(1+x)^m$ сходится к этой же функции при $|x| < 1$.

* *И.Ньютон (1643–1727) – английский математик и физик.*

Отметим важные частные случаи формулы (2.53):

1) при $m=-1$ получим

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad -1<x<1. \tag{2.54}$$

2) при $m=-1/2$ будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}x^n+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}x^n,\quad -1<x<1. \tag{2.55}$$

Проинтегрируем обе части равенства (2.54) в пределах от 0 до x, $|x|<1$. Получим

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad -1<x<1. \tag{2.56}$$

Формула (2.56) справедлива и при $x=1$ (см. п. 1.6.), поэтому

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Заменяя в равенстве (2.56) x на $(-x)$, будем иметь

$$\ln|1-x|=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\ldots,\quad -1<x<1. \tag{2.57}$$

Почленное вычитание ряда (2.57) из (2.56) приведет нас к соотношению

$$\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right),\quad -1<x<1. \tag{2.58}$$

При вычислении логарифмов конкретных чисел обычно пользуются рядом (2.58), так как он сходится более быстро, чем ряд (2.56) или (2.57).

Заменим в формуле (2.55) x на $(-x^2)$. Получим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}x^{2n}+\ldots,\quad -1<x<1. \tag{2.59}$$

сходящийся для $|x| < 1$. Интегрируя обе части этого равенства в пределах от 0 до x, будем иметь ряд

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad (2.60)$$

сходящийся при $|x| < 1$.

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что ряд (2.60) сходится и в конечных точках интервала сходимости $(-1, 1)$, т.е. при $x = -1$ и $x = 1$.

***Замечание* 1.** Отметим, что при разложении функций в ряд Маклорена *обычно используют*: формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии; стандартные разложения (2.47)–(2.56); представление функций в виде линейной комбинации функций, ряды Маклорена которых известны; замену переменного; дифференцирование и интегрирование рядов. *Реже применяют* операции умножения и деления рядов (см . [25]).

***Замечание* 2.** Аналогично производится разложение функций в ряд Тейлора.

***Пример*.** Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+4)$.

Предварительно представим $f(x)$ в виде суммы простейших дробей.

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}. \quad (2.61)$$

Преобразуем простейшие дроби к виду, удобному для применения формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (1.4).

Напомним, что $1/(1-q) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ при $|q|<1$ (см. п. 1.1.).

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{(x+4)-3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n. \quad (2.62)$$

Ряд (2.62) сходится, если $|q| = \dfrac{|x+4|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x+4| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+4 < 3 \Leftrightarrow$ $-7 < x < -1 \Leftrightarrow x \in (-7, -1)$.

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{(x+4)-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n. \qquad (2.63)$$

Условие $\frac{|x+4|}{2}<1 \Leftrightarrow |x+4|<2 \Leftrightarrow -2<x+4<2 \Leftrightarrow x\in(-6,-2)$.

Это и есть область сходимости ряда (2.63).

Подставляя разложения (2.62) и (2.63) в (2.61), получим требуемое разложение в ряд Тейлора

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n, \qquad (2.64)$$

область сходимости которого $x\in(-7,-1)\cap(-6,-2)=(-6,-2)$.

Замечание. Если после преобразований потребуется представить в виде ряда дробь $1/(1+q)$, то нужно воспользоваться разложением (2.54) при $|q|<1$.

2.7. Степенные ряды в комплексной области

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots, \qquad (2.65)$$

где $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, $c_n=a_n+ib_n$ – комплексные числа ($x, y, x_0, y_0, a_n, b_n\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$), называется *комплексным степенным рядом* или *рядом по степеням* $z-z_0$. При этом комплексные числа $c_n=a_n+ib_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$ называют *коэффициентами степенного ряда* (2.65), а точку $z_0=x_0+iy_0\in C$ – его *центром*. Члены ряда зависят от комплексной переменной $z=x+iy\in C$.

Степенной ряд (2.65) определен на всей комплексной плоскости C и сходится, по крайней мере, в точке $z=z_0\in C$. Таким образом, *область сходимости любого степенного ряда* всегда содержит центр этого ряда и *является непустым множеством.*

Если $z_0=0$, то ряд (2.65) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots \qquad (2.66)$$

Отметим, что если в степенном ряде (2.65) с центром в точке z_0 сделать замену переменной $Z=z-z_0$, то получим ряд вида (2.66) относительно Z с центром в нуле. Поэтому все утверждения, доказанные для степенных рядов

(2.66) в центром в нуле, легко переносятся на степенные ряды (2.65) с центром в произвольной точке $z_0 \in C$. Справедлива

Теорема (*Абеля*). Если степенной ряд (2.66) сходится в точке $z = z_1 \neq 0$, то он *абсолютно сходится* в каждой точке открытого круга $|z| < |z_1|$ комплексной плоскости C и *сходится равномерно* в любом замкнутом круге $|z| \le r < |z_1|$. Если же ряд (2.66) расходится в некоторой точке $z_2 \in C$, то он расходится во всех точках $z \in C$, для которых $|z| > |z_2|$.

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы для рядов с действительными членами (см. п. 2.3.) и приведено в [1, 3, 10(т.1), 21].

Неотрицательное число R, такое, что ряд (2.66) сходится в круге $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$, называется *радиусом сходимости* степенного ряда (2.66), а круг $|z| < R$ – *кругом сходимости* этого ряда (рис. 2.3.).

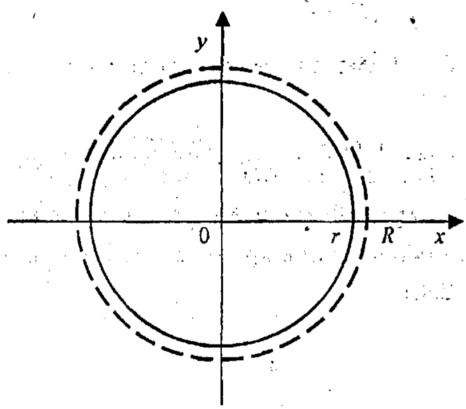

Рис. 2.3

На границе круга сходимости, т.е. в точках соответствующей окружности радиуса R, ряд (2.66) может сходиться или расходиться. Если ряд (2.66) сходится в единственной точке $z = 0$, то считают $R = 0$, если этот ряд сходится для $\forall z \in C$, то полагают $R = \infty$.

Радиус сходимости R комплексного степенного ряда (2.66) находится по формулам, аналогичным (2.26) и (2.27), которые здесь, соответственно, примут вид

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \qquad (2.67)$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}. \qquad (2.68)$$

Предполагается, что указанные выше пределы существуют (см. [1, 3, 10(т.1), 21]).

Пример [3, с.168]. Исследовать на сходимость степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1+i)^n}{n\,2^n} \qquad (2.69)$$

с центром в точке $z_0 = 1-i$.

Выполняя замену переменной $Z = z - z_0 = z - 1 + i$, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^n}{n\,2^n} \qquad (2.70)$$

с центром в точке $Z = 0$. Найдем радиус сходимости ряда (2.70) по формуле (2.67)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)2^{n+1}}{n\,2^n}\right| = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 2.$$

Следовательно, ряд (2.70) *сходится абсолютно* в круге $|Z| < 2$, а значит ряд (2.69) *сходится абсолютно* в круге $|z-1+i| < 2$ радиуса 2 с центром в точке $z_0 = 1-i$ (рис. 2.4.).

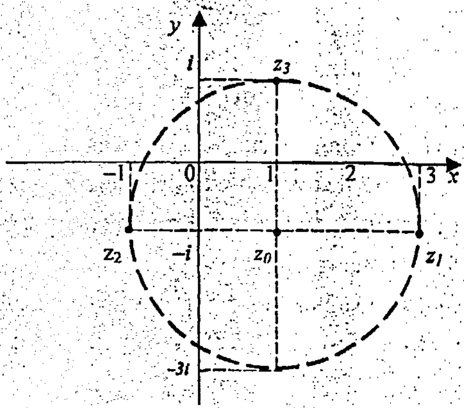

Рис. 2.4

Выясним, сходится ли ряд (2.69) абсолютно на всей границе круга сходимости, т.е. в точках комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z-1+i|=2$. Для всех таких точек ряд, составленный из модулей членов ряда (2.69) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Это – *гармонический ряд*, который, как известно, (см. п. 1.5.) *расходится*. Поэтому *на границе круга сходимости исследуемый степенной ряд (2.69) не является абсолютно сходящимся.*

Выясним сходимость ряда (2.69) в конкретных точках $z_1=3-i$, $z_2=-1-i$, $z_3=1+i$, лежащих на границе круга сходимости.

При $z=z_1=3-i$ получим *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-i-1+i)^n}{n\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Следовательно, в точке $z_1=3-i$ исходный ряд (2.69) *расходится*.

Пусть $z=z_2=-1-i$. Тогда из (2.69) будем иметь ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1-i-1+i)^n}{n\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{n\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

который *сходится условно* по признаку Лейбница (см. п. 1.6.). Значит, $z_2=-1-i$ есть *точка условной сходимости* ряда (2.69).

При $z=z_3=1+i$ из (2.69) получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i-1+i)^n}{n\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n\,2^n}{n\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}.$$

Поскольку $i^{2k}=(-1)^k$, $i^{2k-1}=i(-1)^{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$ и действительные ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ *сходятся условно* по признаку Лейбница, то комплексный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i^{2k-1}}{2k-1}+\frac{i^{2k}}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}+i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

также *сходится условно* (см. п. 1.9). Следовательно, в точке $z_3=1+i$ ряд (2.69) *сходится условно.*

Приведем примеры функций комплексной переменной $z \in C$, определенных комплексными степенными рядами:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots; \qquad (2.71)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots; \qquad (2.72)$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \qquad (2.73)$$

Применяя признак Д'Аламбера к рядам (2.71)–(2.73), нетрудно убедиться, что радиус сходимости каждого из них $R = \infty$. Из теоремы Абеля следует, что эти ряды *равномерно сходятся* к соответствующим функциям в круге $|z| \le r$ для любого сколь угодно большого положительного числа r. При $z = x$ формулы (2.71)–(2.73) обращаются в формулы (2.47)–(2.49) для $\sin x$, $\cos x$, e^x. Полагая в равенстве (2.73) $z = ix$, получим

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots + \frac{(ix)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)$$

С учетом соотношений (2.47), (2.48) будем иметь

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \qquad (2.74)$$

Заменяя в (2.74) x на $-x$, получим

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \qquad (2.75)$$

Формулы (2.74), (2.75) называются *формулами Эйлера**.

Из этих формул найдем

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \qquad (2.76)$$

Теоретическое упражнение. Используя свойство произведения абсолютно сходящихся рядов (см. п. 1.8.), *доказать самостоятельно*, что для $z = x + iy \in C$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \qquad (2.77)$$

Дальнейшие свойства комплексных функциональных рядов излагаются обычно в теории функций комплексной переменной.

---

* *Л. Эйлер (1707–1783) – выдающийся математик, механик, физик и астроном швейцарского происхождения, большую часть жизни проработавший в России.*

2.8. Тригонометрические ряды Фурье*

1. Определение ряда Фурье. Постановка задачи

Тригонометрическим называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2.78}$$

где a_0, a_n, $b_n \in$ R ($n \in$N)– *коэффициенты* ряда.

Если ряд (2.78) сходится, то его сумма $S(x)$ будет периодической функцией с периодом 2π, т.е. $S(x+2\pi) = S(x),\ \forall x \in R$.

Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть нам задана периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π. При каких условиях на эту функцию ее можно представить в виде тригонометрического ряда Фурье, сходящегося к данной функции ? Пусть периодическая с периодом 2π функция $f(x)$ является суммой тригонометрического ряда на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{2.79}$$

Для решения поставленной задачи предварительно установим несколько вспомогательных формул.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ \forall\ k \in \mathrm{N}. \tag{2.80}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ \forall\ k \in \mathrm{N}. \tag{2.81}$$

Пусть теперь $k, p \in N$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin px\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+p)x - \sin(k-p)x]\, dx = 0,\ \forall\ k, p. \tag{2.82}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-p)x + \cos(k+p)x]\, dx = \begin{cases} 0, & \mathrm{k} \neq \mathrm{p}, \\ \pi, & \mathrm{k} = \mathrm{p}. \end{cases} \tag{2.83}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin px\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-p)x - \cos(k+p)x]\, dx = \begin{cases} 0, & \mathrm{k} \neq \mathrm{p}, \\ \pi, & \mathrm{k} = \mathrm{p}. \end{cases} \tag{2.84}$$

---

* *Ж. Фурье (1768–1830) – французский математик и физик.*

Будем считать, что ряд (2.79) можно почленно интегрировать на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для этого *достаточно* (см. п. 2.2.), чтобы он *сходился равномерно* на данном отрезке. По мажорантному признаку Вейерштрасса выполнение этих условий гарантирует сходимость числового ряда

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \qquad (2.85)$$

Проинтегрируем обе части равенства (2.79) на отрезке $[-\pi, \pi]$. Получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right).$$

На основании формул (2.80), (2.81) все интегралы, находящиеся под знаком суммы, равны нулю. Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}2\pi = \pi a_0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \qquad (2.86)$$

Далее, умножим обе части равенства (2.79) на $\cos kx$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π. Будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx +$$

$$+ \sum_{n-1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\,dx\right).$$

С учетом формул (2.80), (2.82), (2.83) все интегралы, стоящие в правой части этого равенства, равны нулю, кроме интеграла при a_k $(n=k)$.

Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \pi a_k,$$

откуда

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,,\ k=1,2,3,\ldots \qquad (2.87)$$

Для нахождения коэффициентов b_k, умножим обе части равенства (2.79) на $\sin kx$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$. В результате получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx\right).$$

На основании формул (2.81), (2.82), (2.84) все интегралы, находящиеся в правой части полученного равенства, равны нулю, кроме интеграла при b_k ($n=k$). Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=\pi\, b_k,$$

откуда

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,,\ k=1,2,3,\ldots \qquad (2.88)$$

Ряд (2.79), коэффициенты которого определяются по формулам (2.86)–(2.88), называется *тригонометрическим рядом Фурье*, а числа a_0, a_n, b_n ($n\in$N) – *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Замечание. **В дальнейшем будет показано (см. п. 2.9.), что коэффициенты Фурье a_n, b_n для кусочно – непрерывной функции при $n\to\infty$ стремятся к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. Это позволяет с заданной точностью заменить сумму ряда Фурье $S(x)$ ее n–й частичной суммой $S_n(x)$.**

Пока мы неявно предполагали, что функция $f(x)$ *интегрируема* на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для нее можно формально составить ряд Фурье, коэффициенты которого находятся по формулам (2.86)–(2.88). При этом обычно пишут

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (2.89)$$

Здесь знак *соответствия* «~» можно заменить знаком *равенства* «=» только тогда, когда нам удастся доказать сходимость ряда (2.89) и равенство его суммы $S(x)$ функции $f(x)$.

Выясним, какими свойствами должна обладать функция, чтобы построенный для нее ряд Фурье (2.89) сходился, и чтобы его сумма равнялась значениям данной функции в соответствующих точках.

Достаточный признак сходимости ряда Фурье

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *кусочно–монотонной* на отрезке $[a, b]$, если данный отрезок может быть разбит на *конечное* число интервалов, в каждом из которых эта функция *строго монотонна.*

Если кусочно–монотонная функция *ограничена* на отрезке $[a, b]$, то она может иметь на этом отрезке лишь разрывы первого рода (рис. 2.5.).

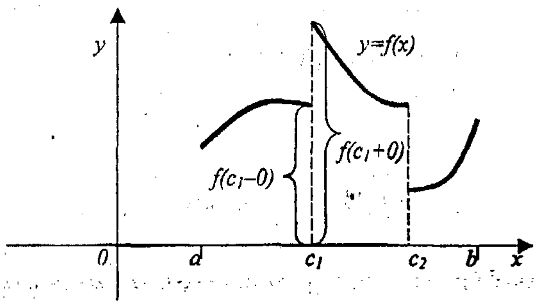

Рис. 2.5

Справедлива [3, 4, 22] следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема (*Дирихле*). Если *кусочно–непрерывная, кусочно–монотонная* 2π–периодическая функция $f(x)$ *ограничена* на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in (-\pi, \pi)$ и имеет сумму

$$S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \qquad (2.90)$$

при этом

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, \qquad (2.91)$$

более того, сходимость ряда Фурье и выполнение равенства (2.90) имеет место для $\forall\, x \in \mathrm{R}$.

Условия этой теоремы часто называют *условиями Дирихле.*

Следствие. Если *x – точка непрерывности* $f(x)$, то $S(x) = f(x)$.

Это утверждение вытекает из соотношения (2.90) и свойства непрерывности $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$.

***Замечание* 1.** Подчеркнем, что условия *кусочной непрерывности* и *кусочной монотонности* в теореме Дирихле существенны и ни от одного из них отказываться нельзя. Известны примеры непрерывных функций, которые не описываются своим рядом Фурье [4]. Более того, ряд Фурье для непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции может расходиться [22]. Однако, если кусочно–монотонная, ограниченная 2π– периодическая функция *непрерывна на всей действительной оси*, то ее ряд Фурье *равномерно сходится* к этой функции [2–4, 9, 22].

***Замечание* 2.** Отметим, что для любой 2π–*периодической* функции при вычислении ее коэффициентов Фурье интегрирование в (2.86)–(2.88) *иногда удобно* вести на отрезке $[a, a+2\pi]$, являющимся сдвигом отрезка $[-\pi, \pi]$. При этом результаты вычислений в силу *периодичности* подынтегральных функций не изменятся.

Из теоремы Дирихле видно, что класс функций, представимых рядами Фурье, довольно широкий. Потому ряды Фурье нашли большое применение при решении различных важных теоретических и прикладных задач (см., например, [4, 8, 12, 22]).

2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Напомним *свойства определённого интеграла, вычисляемого по симметричному промежутку.* Если $\varphi(x)$– *четная* функция, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $x \in [-a, a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} \varphi(x)\,dx$. Если $\psi(x)$– *нечетная* функция, т.е.

$$\psi(-x)=-\psi(x),\ x\in[-a,a],\ \text{то}\ \int_{-a}^{a}\psi(x)\,dx=0.$$

Пусть теперь в ряд Фурье раскладывается *четная* функция $f(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$. Тогда, учитывая, что для $\forall n\in N$ $f(x)\cos nx$ является *четной* функцией, а $f(x)\sin nx$ – *нечетной*, получим следующие выражения для ее коэффициентов Фурье:

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\ n=0,1,2,\ldots, \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=0,\ n=1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{2.92}$$

Таким образом, ряд Фурье для *четной* функции содержит *только косинусы* и имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx. \tag{2.93}$$

В случае *нечетной* функции $f(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$ будем иметь

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0,\ n=0,1,2,\ldots, \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx dx,\ n=1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{2.94}$$

т.е. ряд Фурье для *нечетной* функции содержит *только синусы* и имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx. \tag{2.95}$$

Иногда ряды (2.93), (2.95) называют *неполными* рядами Фурье.

***Пример* 1.** Найти разложение в ряд Фурье 2π–периодической функции $f(x)=x^2$, $-\pi\le x\le\pi$.

Очевидно, что $f(x)=x^2$ – *четная* функция. Определим ее коэффициенты Фурье по формулам (2.92)

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

Для вычисления a_n, $n \geq 1$, применим дважды интегрирование по частям

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2 \sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left(\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx\right) = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2},\ n \in \mathrm{N}.$$

Соотношения $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$, $n \in \mathrm{N}$, будут нами неоднократно использоваться и в дальнейшем.

Значит, ряд Фурье (2.93) для данной функции имеет вид

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right), \qquad (2.96)$$

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

Применяя мажорантный признак Вейерштрасса, нетрудно убедиться, что этот ряд Фурье *сходится равномерно* и его сумма $S(x) = f(x) = x^2$ (рис. 2.6.)

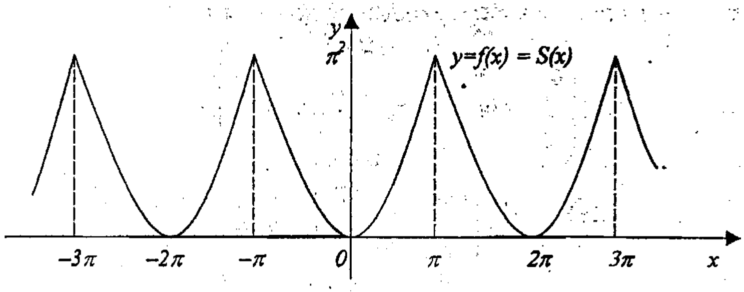

Рис. 2.6

Полагая в равенстве (2.96) $x = \pi$, получим

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \qquad (2.97)$$

Пример **2.** Разложить в ряд Фурье функцию, заданную *графически* (рис. 2.7.)

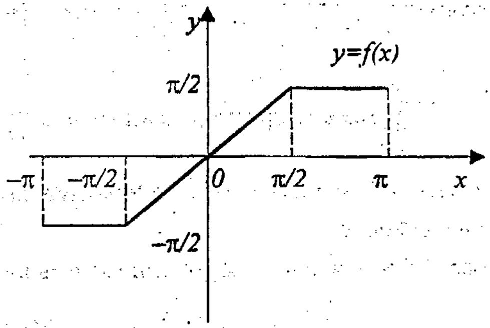

Рис. 2.7

Здесь

$$f(x)=\begin{cases}-\pi/2, & -\pi\le x<-\pi/2,\\ x, & -\pi/2\le x\le\pi/2,\\ \pi/2, & \pi/2<x\le\pi.\end{cases}$$

Функция $f(x)$ – *нечетная*. Вычислим ее коэффициенты Фурье по формулам (2.94), применяя интегрирование по частям

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2}x\sin nx\,dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{-2x\cos nx}{n\pi}\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos nx\,dx-\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2\pi}\sin nx\Bigg|_0^{\pi/2}-\frac{1}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{(-1)^n}{n},\ n\in\mathrm{N}.$$

Функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и является *непрерывной*, поэтому для $\forall x\in(-\pi,\pi)$ будем иметь

$$f(x)=S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{(-1)^n}{n}\right)\sin nx. \qquad (2.95')$$

Так как в силу (2.91) $S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,$

а $f(-\pi) = -\pi/2$, $f(\pi) = \pi/2$, то в точках $x = -\pi$, $x = \pi$ сумма $S(x)$ ряда Фурье не совпадает со значениями $f(x)$. Изобразим график суммы $S(x)$ ряда Фурье (2.95') для $f(x)$ (рис. 2.8.)

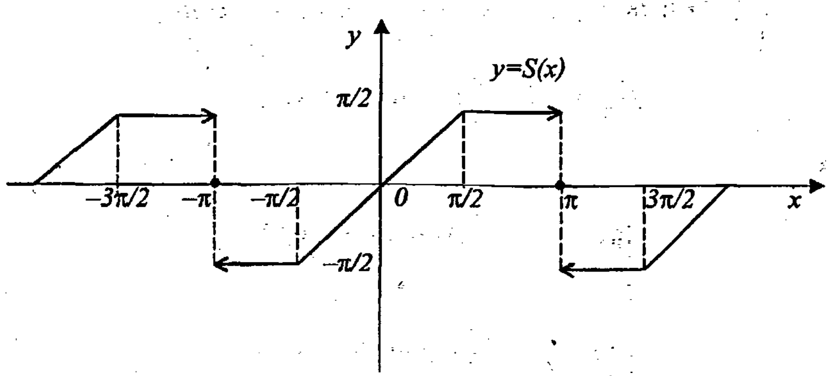

Рис. 2.8

Замечание 1. Если в ряд Фурье нужно разложить функцию, заданную *графически*, то предварительно требуется записать аналитическое выражение данной функции и затем вычислять ее коэффициенты Фурье [17]. Если же точный подбор формулы функциональной зависимости затруднителен, то коэффициенты Фурье вычисляют приближенно (см. п.2.10.).

Замечание 2. Если в ряд Фурье разлагается функция *общего вида*, не обладающая свойством четности или нечетности, то ее коэффициенты Фурье находятся по формулам (2.86) – (2.88).

3. Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке $[-l, l]$

Пусть на отрезке $-l \le x \le l$ задана *кусочно–монотонная ограниченная* функция $f(x)$. Требуется представить эту функцию в виде ряда Фурье.

Сделаем замену переменной, при которой отрезок $x \in [-l, l]$ перейдет в отрезок $t \in [-\pi, \pi]$:

$$x = \frac{l}{\pi} t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{l} x. \qquad (*)$$

Тогда функцию $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ можно будет разложить в ряд Фурье

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \qquad (2.98)$$

где

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos nt dt, \ n = 0,1,2,\ldots, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin nt dt, \ n = 1,2,3,\ldots \end{cases} \qquad (2.99)$$

Возвращаясь в (2.98), (2.99) к старой переменной x и, учитывая, что $t = \frac{\pi}{l} x$, $dt = \frac{\pi}{l} dx$, $t = \pm\pi \Leftrightarrow x = \pm l$, получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right), \qquad (2.100)$$

где

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \ n = 0,1,2,\ldots, \\ b_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \ n = 1,2,3,\ldots \end{cases} \qquad (2.101)$$

Ряд (2.100), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2.101), называется рядом Фурье для $2l$–периодической функции, заданной на отрезке $[-l, l]$.

Поскольку между 2π –периодическими функциями, определенными на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $2l$–периодическими функциями, определенными на отрезке

$[-l,\ l]$, существует взаимно–однозначное соответствие, задаваемое строго монотонной линейно заменой переменных (*), то все изложенные выше факты для тригонометрических рядов Фурье вида (2.89) по аналогии переносятся и на тригонометрические ряды Фурье вида (2.100). В частности, сохранит свою силу достаточный признак разложимости функции в ряд Фурье (*теорема Дирихле*). При вычислении коэффициентов Фурье $2l$–периодической функции интегрирование в (2.101) можно вести по любому отрезку $[a,\ a+2l]$, сдвинутому относительно отрезка $[-l,\ l]$.

Если $f(x)$– *четная* функция, то $b_n = 0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\,,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2.102}$$

Если $f(x)$– *нечетная* функция, то $a_n = 0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\,,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{2.103}$$

4. Разложение в ряд Фурье непериодической функции, заданной на отрезке $[a,\ b]$

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана *кусочно–монотонная, ограниченная* функция $f(x)$. Требуется представить ее в виде ряда Фурье для $x\in[a,b]$. Рассмотрим два подхода к решению этой задачи.

1) Можно сделать *замену переменной* $x = t+(a+b)/2$, при которой отрезок $x\in[a,\ b]$ перейдет в отрезок $t\in[-l,\ l]$, где $l = (b-a)/2$ и воспользоваться разложением функции в ряд Фурье (2.100), полученным в предыдущем пункте.

2) Доопределим заданную функцию на полуинтервал $[-b,\ a)$ *произвольной кусочно–монотонной ограниченной* функцией $g(x)$ так, чтобы новая функция $f_1(x)$ была задана на симметричном отрезке $[-b,\ b]$

$$f_1(x) = \begin{cases} g(x), x\in[-b,a), \\ f(x), x\in[a,b]. \end{cases}$$

Далее функцию $f_1(x)$ разложим в ряд Фурье (2.100), полагая $l = b$. Поскольку сумма ряда Фурье во всех точках непрерывности функции $f_1(x)$ в точности совпадает со значениями этой функции, то тем самым мы получим разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пусть теперь кусочно–монотонная, ограниченная функция $y = f(x)$ *задана на полуинтервале* $(0, l]$.

Если эту функцию ***доопределить*** **на полуинтервал** $[-l, 0)$ **по принципу** ***четности*** $f(-x) = f(x), -l \le x < 0$ **(рис. 2.9.),**

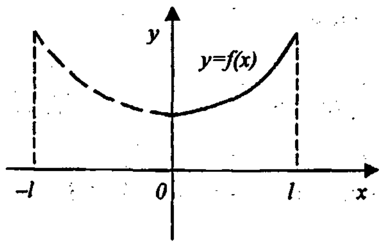

Рис. 2.9

то ряд Фурье будет содержать ***только косинусы*** **и запишется в виде**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad (2.104)$$

где коэффициенты определяются равенством (2.102).

Если мы *доопределим* на недостающий полуинтервал функцию *нечетным образом* $f(-x) = -f(x), -l \le x < 0$, (рис. 2.10.),

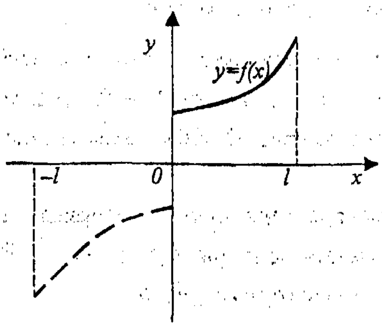

Рис. 2.10

то ряд Фурье будет содержать *только синусы*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (2.105)$$

с коэффициентами, определяемыми из (2.103).

Возникает естественный вопрос: какое из продолжений функции на недостающий полуинтервал $[-l,\ 0)$ *будет лучшим*, т.е. после какого продолжения полученный ряд Фурье на всем симметричном отрезке $[-l,\ l]$ *будет сходиться быстрее* ?

В общем случае нет однозначного ответа на этот вопрос. Возникающие здесь нюансы подробно изложены в [3]. Справедливо следующее утверждение.

Ряд Фурье для периодической кусочно–монотонной ограниченной функции будет сходиться тем более быстро для $x\in[\ -l,\ l\ ]$, ***чем меньше у этой функции и ее производных точек разрыва для*** $-\infty < x < +\infty$.

Пример. Разложить на отрезке $[0,\ l]$ функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье:
1) по синусам; 2) по косинусам.

1) *Доопределим* функцию $f(x)$ на полуинтервал $[-l,\ 0)$ *нечетным образом* с последующим $2l$–периодическим продолжением на всю числовую ось (рис. 2.11.).

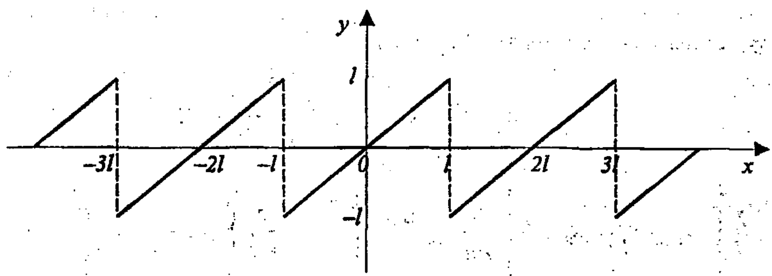

Рис. 2.11

Найдем коэффициенты Фурье по формуле (2.103)

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\left[-\frac{lx}{n\pi}cos\frac{n\pi}{l}x\,\Bigg|_0^l+\frac{l}{n\pi}\int_0^l cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{l}\left[-\frac{l^2}{n\pi}\cos n\pi+\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{l}x\,\Bigg|_0^l\right]=-\frac{2l}{n\pi}\cos n\pi=\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1},\ n\in\mathrm{N}.$$

Так как полученная после доопределения и продолжения функция непрерывна в точке $x = 0$ и разрывна при $x = l$, то на основании теоремы Дирихле из (2.105) следует равенство

$$x=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x,\ 0\le x<l. \tag{2.106}$$

В точках $x = \pm l$ сумма ряда Фурье (2.106) $S(\pm l) = 0 \ne f(\pm l)$.

2) *Доопределим* функцию $f(x)$ на полуинтервал $[-l,\ 0)$ ***по свойству четности*** и осуществим $2l$–периодическое продолжение на всю числовую ось (рис. 2.12.).

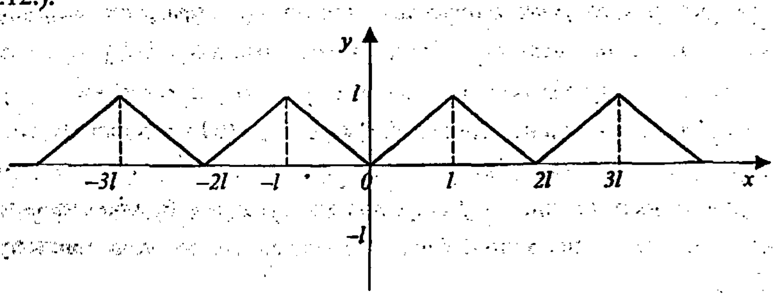

Рис. 2.12

Определим коэффициенты Фурье из (2.102)

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x\,dx=\frac{1}{l}x^2\,\Bigg|_0^l=l,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\left[\frac{lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\,\Bigg|_0^l-\frac{l}{n\pi}\int_0^l\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]=$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{l}x\,\Bigg|_0^l=\frac{2l}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2l}{n^2\pi^2}\frac{(-1)^n-1}{n^2}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4l}{\pi^2}\dfrac{1}{(2k-1)^2}, & n=2k-1,\ k\in N,\\ 0, & n=2k,\ k\in N.\end{cases}$$

В силу *непрерывности* на всей числовой оси $2l$–периодической функции ряд Фурье (2.104) примет вид

$$x=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{l}x,\ 0\le x\le l. \qquad (2.107)$$

Полагая в равенстве (2.107) $x=0$, найдем, что

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots. \qquad (2.108)$$

Отметим, что коэффициенты ряда Фурье (2.106) убывают на бесконечности как $\frac{1}{n}$, а ряда Фурье (2.107) как $\frac{1}{n^2}$, т.е. ряд (2.107) *сходится более быстро*, чем ряд (2.106). В общем случае *порядок убывания коэффициентов Фурье* характеризует [3, 4, 8, 22] следующая

Теорема. Если *периодическая* функция $f(x)$ для $x\in R$ непрерывна вместе со своими производными до $(m-1)$–го порядка, а ее *производная m–го порядка удовлетворяет условиям Дирихле*, то для ее коэффициентов Фурье a_n и b_n справедливы неравенства $|a_n|\le\frac{M}{n^{m+1}}$, $|b_n|\le\frac{M}{n^{m+1}}$, $0\le M=const$.

Подчеркнем важность *скорости сходимости* рядов Фурье. В приложениях наиболее удобны ряды Фурье с *быстро убывающими* коэффициентами, так как в этом случае сумма нескольких первых членов ряда достаточно точно определяет сумму ряда. При этом, *чем быстрее* убывают коэффициенты, *тем меньше* членов ряда нужно взять для приближенного вычисления его суммы с заданной степенью точности.

При решении конкретных теоретических и прикладных задач часто возникает необходимость в дифференцировании и интегрировании рядов Фурье [3, 4, 8, 22].

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно,* что дифференцирование (*интегрирование*) ряда Фурье понижает (*повышает*) порядок убывания коэффициентов Фурье на бесконечности на одну единицу.

Таким образом, *дифференцирование ухудшает*, а *интегрирование улучшает* сходимость ряда Фурье. Из сформулированной выше теоремы следует, что для того, чтобы иметь *быстро сходящийся* ряд Фурье для функции $f(x)$, нужно добиться непрерывности *на всей числовой оси* как самой функции, так и ее первых производных, если такая возможность имеется.

5. Разложение функции в быстро сходящийся ряд Фурье

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ вместе со своими производными до $(m-1)$–го порядка включительно, а m–я производная удовлетворяет *условиям Дирихле* (см. п. 2.1.). Для того, чтобы разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0, \pi]$, нужно *доопределить* ее на полуинтервал $[-\pi, 0)$ (см. п. 2.4.) *произвольной кусочно – монотонной ограниченной функцией* так, чтобы новая функция $f_1(x)$ была задана на *симметричном* отрезке $[-\pi, \pi]$

$$f_1(x) = \begin{cases} g(x), x \in [-\pi, 0), \\ f(x), x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Если мы не заинтересованы в каком–либо специальном виде ряда Фурье, например, ряда только по косинусам или только по синусам, что достигается соответственно четным или нечетным продолжением $g(x)$ функции $f(x)$, то для функции $g(x)$ существует достаточно большой выбор из бесконечного множества таких функций.

Поэтому, если требуется разложить функцию $f(x)$, $x \in [0, \pi]$ в *быстро сходящийся* ряд Фурье с полным использованием ее дифференциальных свойств, то эту функцию можно продолжить на полуинтервал $[-\pi, 0)$ многочленом $(2m-1)$ степени

$$g(x) = A_0 x^{2m-1} + A_1 x^{2m-2} + \ldots + A_{2m-2} x + A_{2m-1}, \qquad (2.109)$$

коэффициенты которого определяются из условий совпадения значений $g(x)$ и $f(x)$ и их производных до $(m-1)$ порядка в точках $x = 0$, $x = -\pi$ и $x = \pi$, т.е. из $2m$ условий

$$\begin{cases} g(0) = f(0), & g(-\pi) = f(\pi), \\ g'(0) = f'(0), & g'(-\pi) = f'(\pi), \\ \text{-------------} & \text{-------------} \\ g^{(m-1)}(0) = f^{(m-1)}(0), & g^{(m-1)}(-\pi) = f^{(m-1)}(\pi). \end{cases} \qquad (2.110)$$

При выполнении этих условий периодическая функция $f_1(x)$ *на всей числовой оси* будет иметь непрерывные производные до $(m-1)$ порядка и m–ую производную, удовлетворяющую условиям Дирихле. Коэффициенты Фурье функции $f_1(x)$ на основании приведенной выше теоремы будут убывать на бесконечности не ниже, чем как $\frac{1}{n^{m+1}}$, а так как ряд Фурье для $f_1(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ сходится к функции $f(x)$, то для нее получим ряд Фурье *усиленной сходимости*.

Теоретическое упражнение. Разложить функцию $f(x) = x^2$, $0 \le x \le \pi$ в ряд Фурье, коэффициенты которого убывают не ниже, чем как $\frac{1}{n^4}$.

Указание. Здесь $m = 3$, так что «улучшающий» многочлен (2.109) нужно взять степени $2m-1 = 5$.

Убедитесь, что [8]

$$x^2 = \frac{8}{15}\pi^2 + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\cos(2n-1)x - \frac{2880}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}\cos(2n-1)x -$$

$$-\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cos 2nx + \frac{96}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\sin(2n-1)x +$$

$$+\frac{45}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin 2nx, \quad 0 \le x \le \pi. \qquad (2.111)$$

Сравните ряд (2.111) с разложением этой функции в ряд (2.96), коэффициенты которого убывают как $\frac{1}{n^2}$.

Изложенный здесь метод указан А.С. Малиевым*.

Отметим, что составление несложной программы для вычисления на ЭВМ коэффициентов «улучшающего» многочлена (2.109) из системы (2.110) существенно упростит и ускорит процесс разложения функции в *быстро сходящийся* ряд Фурье.

Различные приемы *улучшения сходимости рядов Фурье* изложены в [4, 8, 22].

2.9. Приближение в среднем заданной функции с помощью тригонометрического многочлена

Представление функции сходящимся рядом Тейлора, Фурье или любым другим на практике имеет тот смысл, что n-я частичная сумма этого ряда $S_n(x)$ является приближенным выражением разлагаемой функции. Это

---

* *А.С. Малиев (1895–1966) – русский математик.*

приближение можно довести до какой угодно степени точности, выбирая достаточно большие значения n. Однако характер приближенного представления функции может быть различным.

Выясним особенности приближенного представления периодической функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами вида

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_0, a_k, b_k, $k=1,\dots,n$ – коэффициенты Фурье для функции $f(x)$, т.е. $f(x) \approx S_n(x)$.

Замечание. Допустим, что мы рассматриваем функцию $y=f(x)$, $x \in [a, b]$ и хотим оценить погрешность при замене этой функции другой функцией $y=\varphi(x)$, $x \in [a, b]$. Тогда за меру погрешности можно взять

$$\varepsilon = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)|, \tag{2.112}$$

т.е. так называемое *наибольшее отклонение* функции $\varphi(x)$ от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Иногда более естественно за меру погрешности брать так называемое *среднее квадратическое отклонение* δ, которое определяется равенством

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \tag{2.112'}$$

Поясним на графиках (рис. 2.13.) *различие* между наибольшим отклонением и средним квадратическим отклонением.

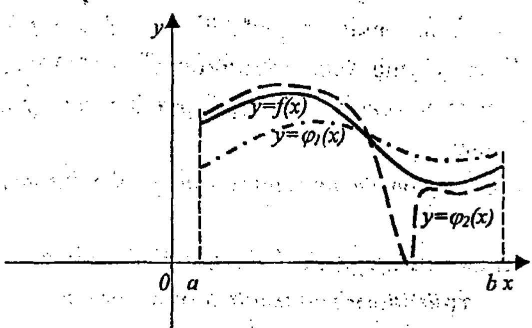

Рис. 2.13

Пусть сплошная линия изображает функцию $y=f(x)$, а пунктирные линии – ее приближения $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x\in[a, b]$. Наибольшее отклонение от $y=f(x)$ кривой $y=\varphi_1(x)$ меньше, чем кривой $y=\varphi_2(x)$, но среднее квадратическое отклонение первой кривой больше, чем второй, так как кривая $y=\varphi_2(x)$ значительно отличается от кривой только на узком участке и поэтому *в целом* на отрезке $[a, b]$ лучше характеризует кривую $y=f(x)$, чем первая $y=\varphi_1(x)$.

Вернемся теперь к нашей задаче.

Пусть дана 2π–периодическая функция . Среди всех тригонометрических многочленов n–го порядка с произвольными коэффициентами

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx), \tag{2.113}$$

требуется найти такой многочлен, для которого *среднее квадратичное отклонение* δ_n, определяемое равенством

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)]^2dx, \tag{2.114}$$

имеет наименьшее значение.

Задача сводится к нахождению *минимума* функции (2.114), зависящей от $(2n+1)$ переменных α_0, α_k, β_k, $k=1,\ldots,n$.

Раскрывая квадрат, находящийся под знаком интеграла (2.114), интегрируя почленно и используя формулы для коэффициентов Фурье a_0, a_k, b_k,–(2.86) – (2.88) будем иметь

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{\alpha_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+$$
$$+\frac{1}{4}(a_0-\alpha_0)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(a_k-\alpha_k)^2+[(b_k-\beta_k)^2]. \tag{2.115}$$

Первые три слагаемые этой суммы не зависят от выбора коэффициентов α_0, α_k, β_k, $k=1,\ldots,n$. Остальные слагаемые

$$\frac{1}{4}(a_0-\alpha_0)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(a_k-\alpha_k)^2+[(b_k-\beta_k)^2]$$

неотрицательны. Их сумма достигает наименьшего значения, равного нулю, если положить $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$, $k = 1,\ldots, n$. При таком выборе коэффициентов тригонометрический многочлен

$$T_n(x) \equiv S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

т.е. n–я частичная сумма ряда Фурье для $f(x)$, будет меньше всего отличаться от функции $f(x)$ в том смысле, что *квадратическое отклонение* δ_n^2 будет наименьшим.

Таким образом, нами доказана

Теорема. Среди всех тригонометрических многочленов n–го порядка наименьшее среднее квадратическое отклонение от функции $f(x)$ имеет многочлен с коэффициентами Фурье для функции $f(x)$.

Величина наименьшего квадратического отклонения равна

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{\alpha_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \tag{2.116}$$

Так как $\delta_n^2 \geq 0$ для $\forall\, n \in N$, то

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k-1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{2.117}$$

Из неравенств (2.117) следует, что при $n \to \infty$ ряд, стоящий слева, сходится, при этом

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{2.118}$$

Соотношение (2.118) называется *неравенством Бесселя*[*]. Можно доказать [3, 4, 10(т.2), 22], что для любой кусочно–непрерывной, ограниченной функции $f(x)$ квадратическое отклонение $\delta_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Учитывая это и переходя в (2.116) к пределу при $n \to \infty$, получим *равенство Парсеваля*[**]

---

[*] *Ф. Бессель (1784–1846) – немецкий математик и астроном.*

[**] *М. Парсеваль (1755–1836) – французский математик.*

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \qquad (2.119)$$

Отметим, что равенство (2.119) доказано (см., например, [3, 10(т.2), 22]) при более общих предположениях относительно $f(x)$.

Справедлива

Теорема (*Римана*). Если функция $f(x)$–кусочно–непрерывная, ограниченная на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \qquad (2.120)$$

Доказательство. Если $f(x)$–кусочно–непрерывная, ограниченная функция на отрезке $[-\pi, \pi]$, то функция $f^2(x)$ также является кусочно-непрерывной и ограниченной для $x \in [-\pi, \pi]$. Тогда существует

$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = M \in \mathrm{R}$. В этом случае из неравенства Бесселя (2.118) следует, что

ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ сходится. По необходимому признаку сходимости ряда

(см. п. 1.3.)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (a_k^2 + b_k^2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, что теорема Римана справедлива для любой функции с интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Замечание. То обстоятельство, что частичные суммы ряда Фурье наилучшим образом описывают поведение функции $f(x)$ ***в целом***, еще не значит, что они хорошо описывают ее ***в отдельных точках***, даже если те являются точками непрерывности $f(x)$. Однако ***средние арифметические частичных сумм*** ряда Фурье для $f(x)$, при ***непрерывности*** этой функции, являются для нее ***равномерными*** приближениями, т.е. ***более лучшими приближениями***, чем сами частичные суммы ряда Фурье, ***во всех точках*** непрерывности этой функции. Особенности суммирования тригонометрических рядов Фурье методом средних арифметических и полученные при этом важные и интересные результаты см., например, в [4, 10(т.2), 22].

2.10. Практический гармонический анализ

Теорию разложения функций в ряды Фурье принято называть *гармоническим анализом*. На практике функция $f(x)$, которую нужно разложить в ряд Фурье, часто оказывается заданной не аналитически, а *графиком* или *таблицей*. Задачу разложения в ряд Фурье такой функции называют *практическим гармоническим анализом*. Будем считать, что функция $f(x)$, разлагаемая в ряд Фурье, задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ или на любом другом отрезке длины 2π. Это не ограничивает общности, так как если функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, то заменой аргумента по формуле

$$x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2\pi}t$$

получим функцию $\varphi(t)$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$. Итак, пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ *графиком* или *таблицей*. Коэффициенты Фурье для этой функции вычислим по известным формулам (2.86) – (2.88), которые имеют вид

$$\begin{cases} a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx,\ k=0,1,2,\dots, \\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx=0,\ k=1,2,3,\dots \end{cases} \tag{2.121}$$

Поскольку функция $f(x)$ задана не аналитически, то интегралы (2.121) не могут быть вычислены точно. Поэтому вычислим их *приближенно* с помощью одной из формул численного интегрирования, например, с помощью формулы *левых прямоугольников* [6, 8]

$$\int_a^b g(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{m-1} g(x_k)=h\,[\,g(x_0)+g(x_1)+\ldots+g(x_{m-1})\,], \tag{2.122}$$

где точки $x_k=a+kh$ $(k=0,1,\dots,m)$ делят отрезок интегрирования $[a, b]$ на m *равных* частей длины $h=(b-a)/m$.

Для того, чтобы применить эту формулу, разделим отрезок $[-\pi, \pi]$ на m *равных* частей точками

$$-\pi=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_m=\pi,$$

где $x_k = -\pi + k2\pi/m$, $k=0,1,2,...,m$. Обозначим $y_k = f(x_k)$. Числа y_k снимаются прямо с чертежа (прибора), если функция $f(x)$ задана *графически*, или берутся из таблицы (соответствующего массива, сформированного в ЭВМ), если $f(x)$ задана *таблично*.

Вычисляя интегралы (2.121) по формуле (2.122), получим *приближенные значения* для коэффициентов Фурье функции $f(x)$

$$\begin{cases} a_k \approx \dfrac{2}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1} y_i \cos kx_i, \mathrm{k} = 0,1,2,..., \\ \mathrm{b_k} \approx \dfrac{2}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1} y_i \sin kx_i, \mathrm{k} = 1,2,3,... \end{cases} \tag{2.123}$$

По этим формулам вычисляют $(2n+1)$ *первых* коэффициентов Фурье, после чего пишут *приближенное выражение* функции $f(x)$ в виде тригонометрического многочлена n–го порядка

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), -\pi \le x \le \pi. \tag{2.124}$$

***Замечание* 1.** Принимая во внимание особенности множителей $\cos kx_i$, $\sin kx_i$ функцию $f(x)$ ранее обычно рассматривали [8, 22] на отрезке $[0, 2\pi]$, который делили на: 12; 24; 48 – частей. Причем число точек деления m отрезка длины 2π на элементарные отрезки нужно выбирать тем больше, чем точнее должны быть вычислены коэффициенты Фурье a_0, a_k, b_k, $k = 1, ..., n$ и чем выше должен быть порядок n тригонометрического многочлена (2.124). В настоящее время *именно такое* деление отрезка длины 2π на части потеряло актуальность, так как наличие *инженерных* микрокалькуляторов и, тем более, ЭВМ позволяет *быстро вычислять* значения тригонометрических функций $\cos x$, $\sin x$ при любых значениях аргумента.

***Замечание* 2.** Определенные интегралы (2.121) при *приближенном* вычислении коэффициентов Фурье функции $f(x)$ могут быть найдены по любой другой формуле численного интегрирования, например: правых прямоугольников; трапеций; парабол (Симпсона*). Среди этих формул последняя – самая точная [6, 23, 24].

2.11. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

Рассмотрим ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,. \qquad (2.125)$$

По формулам Эйлера (2.76), учитывая, что $i^2 = -1$, будем иметь

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{inx}}{2}\,,\ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i\,\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\,.$$

Подставив эти значения в (2.125), получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - i\,b_n}{2}\, e^{inx} + \frac{a_n + i\,b_n}{2}\, e^{-inx}\right).$$

Введем обозначения

$$\frac{a_0}{2} = c_0\,,\quad \frac{a_n - i\,b_n}{2} = c_n\,,\quad \frac{a_n + i\,b_n}{2} = c_{-n}\,. \qquad (2.126)$$

Тогда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{inx}$$

или, в более компактной форме,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\,. \qquad (2.127)$$

Это и есть *комплексная форма тригонометрического ряда Фурье*. Далее, используя формулы (2.86) – (2.88) для нахождения a_0, a_n, b_n, из (2.126) получим явное выражение для коэффициентов c_n и c_{-n} через интегралы

---

* *Т. Симпсон (1710–1761) – английский математик.*

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx.$$

Следовательно,

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{\ inx}\,dx,\ n\in\mathrm{N}. \tag{2.128}$$

Аналогично

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}\,dx,\ n\in\mathrm{N}. \tag{2.129}$$

Формулы (2.128), (2.129) и выражение для c_0 из (2.126) можно заменить одним равенством

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{2.130}$$

Таким образом, 2π–периодическую функцию можно разложить на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ *в комплексный ряд Фурье* (2.127) с *комплексными коэффициентами Фурье* (2.130).

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно,* что для $2l$–периодической функции ее *комплексный ряд Фурье* имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{in\pi x/l}, \tag{2.131}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-in\pi x/l}\,dx,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{2.132}$$

В электротехнике и радиотехнике принята следующая терминология [9, 12]. Выражения $e^{in\pi x/l}$ называют *комплексными гармониками,* а числа

$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$ *($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) – волновыми числами* функции

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha_n x}. \qquad (2.131')$$

Множество волновых чисел называется *спектром*. Очевидно, что спектр функции (2.131) – *дискретный*. Коэффициенты c_n, определяемые формулами (2.132), называют *комплексной амплитудой*.

2.12. Ряды Фурье по ортогональным системам функций

Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$ называется *функцией с интегрируемым квадратом*, если существует интеграл

$$\int_a^b f^2(x)\,dx < \infty.$$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$– функции *с интегрируемым квадратом*. Тогда из неравенства

$$0 \le (f(x) - g(x))^2 \Leftrightarrow |f(x)g(x)| \le (f^2(x) + g^2(x))/2$$

следует интегрируемость функций $f(x)g(x)$, $f(x)$ и $g(x)$, на отрезке $[a, b]$.

Скалярным произведением двух действительных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, называется *число*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx. \qquad (2.133)$$

Нормой действительной функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, называется *число*

$$\|f(x)\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \qquad (2.134)$$

Функция $f(x)$ называется *нормированной* на отрезке $[a, b]$, если ее *норма равна единице*.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *ортогональными* на отрезке $[a, b]$, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0. \qquad (2.135)$$

Система функций с интегрируемым квадратом

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{2.136}$$

называется *ортогональной* на отрезке $[a, b]$, если

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ k_n \neq 0, & n = m. \end{cases} \tag{2.137}$$

Рассмотрим новую, *нормированную* по отношению к (2.136) систему функций

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{k_1}},\ \psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{k_2}}, \ldots,\ \psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{k_n}}, \ldots \tag{2.138}$$

которая с учетом соотношений (2.137) удовлетворяет условиям

$$(\psi_n, \psi_m) = \int_a^b \psi_n(x)\, \psi_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \tag{2.139}$$

и называется *ортонормированной*.

Замечание. Отметим, что *на любом отрезке* $[a, b]$ *можно выбрать бесконечное множество ортонормированных систем функций*. Их выбор зависит от конкретного класса решаемых задач.

Пусть на отрезке $[a, b]$ нам задана интегрируемая с квадратом функция $f(x)$, представленная рядом по *ортонормированной* системе функций (2.138)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) + \ldots + c_n \psi_n(x) + \ldots \tag{2.140}$$

Предположим, что ряд (2.140), после умножения на любую функцию $\psi_k(x)$ *можно почленно интегрировать на отрезке* $[a, b]$. Тогда, умножая обе части равенства (2.140) на $\psi_k(x)$ и интегрируя на отрезке $[a, b]$ с учетом (2.139), получим

$$\int_a^b f(x)\, \psi_k(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \psi_n(x)\, \psi_k(x)\, dx = c_k,\ k \in \mathrm{N}.$$

Отсюда

$$c_k = \int_a^b f(x)\, \psi_k(x)\, dx,\ k \in \mathrm{N}. \tag{2.141}$$

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что если система функций (2.136) *ортогональна* на отрезке $[a, b]$, *но не ортонормирована* на этом отрезке, то коэффициенты ряда Фурье по данной системе

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{2.142}$$

определяются по формулам

$$c_k = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx}{\int\limits_a^b \varphi_k^2(x)\,dx},\ k \in \mathrm{N}. \tag{2.143}$$

Определение. Ряд (2.140), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2.141), называется *рядом Фурье по ортонормированной системе функций* (2.138).

Пример. Рассмотрим систему функций

$$\varphi_1(x) = \cos x,\ \varphi_2(x) = \cos 2x, \ldots, \varphi_n(x) = \cos nx, \ldots,\quad x \in [-\pi, \pi] \tag{2.136'}$$

Из соотношений (2.80)–(2.83) следует, что

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m. \end{cases} \tag{2.137'}$$

т.е. система функций (2.136') является *ортогональной*, но *не нормированной*. После ее *нормировки* в соответствии с (2.138), запишем новую систему

$$\psi_1(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \psi_2(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots,\ \psi_n(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{2.138'}$$

которая будет *ортонормированной* на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Таким образом, переход от ортогональной системы (2.136) к ортонормированной системе функций (2.138) больших затруднений не вызывает.

Отметим, что кроме многочисленных *ортогональных* или *ортонормированных* систем тригонометрических функций, в приложениях широко используются следующие *ортогональные* системы: функций Бесселя, многочленов Лежандра*, Чебышева** и др. (см., например, [3, 9, 22]).

2.13. Вопросы и задачи к главе 2

2.1. Найдите *области сходимости* функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{x}{5^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x-4)^n}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{1-3x}\right)^n$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos^n x}{n^2}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^{2n}+4}$.

2.2. Исследуйте на *равномерную сходимость* функциональные ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4+2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+7^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+n^2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n-1}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^3x^2}$.

2.3. Покажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n-1}}$ сходится *неравномерно* в интервале $(-3, 3)$.

2.4. Найдите *области сходимости* действительных степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\cdot 5^n\cdot \ln n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n(2n+1)}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-4)^n}{n}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x+5)^n}{n+1}$;

---

* *А. Лежандр (1752–1833) – французский математик.*

** *П.Л. Чебышев (1821–1894) – русский математик и механик.*

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{(2n-1)!!}$, где $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)$.

2.5. Разложите в *ряд Маклорена* следующие функции и укажите области сходимости полученных рядов:

а) $\frac{5x-4}{x^2-x-6}$; б) $(1+x)\ln(1+x^2)$; в) $\cos 2x$;

г) $\cos^2 x$; д) $\frac{x}{4+x^2}$; е) $\sin 5x + x\cos 5x$;

ж) $\sqrt{9+x^2}$; з) $sh^2 x$; и) $\frac{1}{x}\arcsin 3x$.

Указание. Воспользуйтесь рекомендациями, приведенными в п. 2.6 (замечание 1).

2.6. Разложите заданные функции в *ряд Тейлора* в окрестности точки $x = x_0$ и укажите области сходимости полученных рядов:

а) $\frac{2x-3}{x^2-6x+8}$, $x_0=3$; б) $\ln(2x+3)$, $x_0=-1$;

в) e^{2x}, $x_0=1$; г) $\cos^2 x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

д) x^5-10x^2+3, $x_0=1$; е) $\frac{1}{(3-x)^2}$, $x_0=2$.

2.7. Найдите *четыре* первых *отличных от нуля* члена разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_0$ для функций:

а) $tg\,x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; б) $th\,x$, $x_0=0$; в) $\frac{1}{\cos x}$, $x_0=\pi$;

г) $\ln|\sin 2x|$, $x_0=1$; д) $\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$, $x_0=0$; е) $\frac{1}{(1+x^2)^3}$, $x_0=2$.

2.8. Применяя *различные* приемы (см. п. 2.5., 2.6.), найдите *суммы степенных рядов*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{5^n(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+3}}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{a^n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,a^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)\,x^{n-1}}{a^{n+1}}$.

В примерах г) – е) $0 < a \in \mathbb{R}$.

2.9. Найдите *круги сходимости* степенных рядов в комплексной области и изобразите их на плоскости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt{n} + i\sqrt[3]{n}}{n} z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n} (z-2+i)^n$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)!\,(4+3i)^n}{(2n+1)!} z^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} (z-3i)^n$.

2.10. Докажите, что если комплексный степенной ряд *абсолютно сходится* в одной из точек на окружности своего круга сходимости, то он *абсолютно сходится* во всех точках этой окружности.

2.11. Разложите в ряды Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ заданные функции $f(x)$. Постройте графики этих функций и графики сумм $S(x)$ их рядов Фурье:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$;

в) $f(x) = \sin^2 x$; г) $f(x) = e^x$;

д) $f(x) = 3x+5$; е) $f(x) = |\sin x|$;

ж) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}(\pi + x), & -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{1}{\pi}(\pi - x), & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$; з) $f(x) = x\cos x$.

2.12. Разложите в ряды Фурье на отрезке $[-l, l]$ заданные функции $f(x)$. Постройте графики этих функций и графики сумм $S(x)$ их рядов Фурье:

а) $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$, $l=2$; б) $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x^2, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$, $l=1$;

в) $f(x) = 2^x$, $-3 \le x \le 3$, $l=3$; г) $f(x) = 5-2x$, $-5 \le x \le 5$, $l=5$;

д) $f(x) = \begin{cases} 0, & -4 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 2, \\ 2, & 2 < x \le 4, \end{cases}$, $l=4$; е) $f(x) = \begin{cases} 6, & -6 \le x < 0, \\ 6-x, & 0 \le x \le 6. \end{cases}$; $l=6$;

2.13. Разложите в ряды Фурье на отрезке $[a, b]$ заданные функции $f(x)$. Постройте графики этих функций и графики сумм $S(x)$ их рядов Фурье:

а) $f(x) = |x-3|, a=2, b=4;$ б) $f(x) = (x-1)^3, a=-1, b=3;$

в) $f(x) = \begin{cases} 2, & 1 \le x < 2, \\ 3, & 2 \le x \le 3. \end{cases}$ $a=1, b=3;$ г) $f(x) = x-|x|, a=-2, b=3;$

2.14. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)$, периодически продолженную на всю числовую ось с периодом $T=3$. Будут ли отличаться графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье ?

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3-x, & 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

2.15. Разложите в *неполные* ряды Фурье: 1) по синусам; 2) по косинусам заданные функции $f(x)$. Постройте графики этих функций и графики сумм $S(x)$ их рядов Фурье в обоих случаях:

а) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$; б) $f(x) = x^2, 0 \le x \le 2\pi;$

в) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2. \end{cases}$; г) $f(x) = e^{2x}, 0 \le x \le 5;$

д) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(\pi - x), & \frac{\pi}{2} < x \le \pi, \end{cases}$; е) $f(x) = \cos 2x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$

2.16. *Докажите*, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \quad 0 \le x \le \pi.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь разложением функций x и x^2 на отрезке $[0, \pi]$ в ряды Фурье по косинусам (см. ряды (2.96), (2.107) в п. 2.8.).

2.17. Используя разложение в ряд Фурье функции $f(x) = |\sin x|, x \in [-\pi, \pi]$, докажите равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

2.18. Разложите функцию $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$ в *быстро сходящийся* ряд Фурье, коэффициенты которого убывают не ниже, чем $\frac{1}{n^3}$. Сравните полученный ряд с разложением этой функции в ряды Фурье по синусам (ряд (2.106)) и по косинусам (ряд (2.107)).

2.19. Найдите *комплексную форму* ряда *Фурье* для $2l$–периодических функций $f(x)$:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ e^{-2x}, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$, $l=\pi$; б) $f(x) = x^2, -l \le x \le l$;

в) $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le 2. \end{cases}$, $l=2$; г) $f(x) = \begin{cases} -3x, & -\pi \le x < 0, \\ 4x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$, $l=\pi$.

ГЛАВА 3. ПРИЛОЖЕНИЯ РЯДОВ

3.1. Приближенное вычисление значений функций

В приближенных вычислениях широко используют *стандартные разложения* в ряд Маклорена (2.47) – (2.58), которые мы будем приводить здесь по мере надобности.

1. Вычислить *cos 20°* с точностью до 0,0001.

Первоначально нужно *привести аргумент функции к радианной мере*, учитывая, что $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$

$$20^\circ = 20 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9} \approx \frac{3{,}14159}{9} = 0{,}34907.$$

Вычисления будем вести с одним запасным знаком после запятой. Запишем разложение (2.48)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty.$$

Полагая в этом равенстве $x = \pi/9$, получим

$$\cos 20^\circ = \cos\frac{\pi}{9} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^6 + \ldots \qquad (3.1)$$

Этот ряд *знакочередующийся*. Очевидно, что члены ряда (3.1) убывают по абсолютной величине, и его общий член стремится к нулю, т.е. *выполняются оба условия теоремы (признака) Лейбница*. Поэтому (см. п. 1.6.), погрешность при замене суммы ряда (3.1) суммой его нескольких первых слагаемых не превосходит модуля первого из отбрасываемых членов ряда.

Так как

$$\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \approx \frac{1}{24}(0{,}34907)^4 = 0{,}00062 > 0{,}0001,$$

$$\left| -\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^6 \right| \approx \frac{1}{720}(0{,}34907)^6 = 0{,}000003 < 0{,}0001,$$

то *с заданной степенью точности* достаточно взять сумму первых трех членов ряда (3.1), т.е.

$$\cos\frac{\pi}{9} \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 = 1 - 0{,}06092 + 0{,}00062 = 0{,}9397.$$

Более точное значение $\cos\dfrac{\pi}{9} = 0{,}939693$.

2. Вычислить $\sqrt[3]{127}$ с точностью до 0,0001.

Так как ближайшим к 127 кубом целого числа является $125 = 5^3$, то число 127 представим в виде суммы 127=125+2. Запишем

$$\sqrt[3]{127} = \sqrt[3]{125+2} = \sqrt[3]{125(1+2/125)} = 5(1+2/125)^{1/3}.$$

Воспользуемся биномиальным рядом (2.53)

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n + \ldots,\ -1 < x < 1.$$

Тогда, учитывая, что $x = 2/125$, $m = 1/3$, будем иметь

$$5\left(1+\frac{2}{125}\right)^{1/3} = 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{125} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{2}{125}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{2}{125}\right)^3 + \ldots\right] =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{25} - \frac{5}{9}\left(\frac{2}{125}\right)^2 + \frac{25}{81}\left(\frac{2}{125}\right)^3 - \ldots \qquad (3.2)$$

Полученный ряд, начиная со второго члена, является *знакочередующимся*. Нетрудно убедиться, что для него выполняются оба условия теоремы (признака) Лейбница. Следовательно, погрешность при замене ряда (3.2) суммой его первых слагаемых не превосходит модуля первого из отбрасываемых членов ряда.

Поскольку

$$\left|-\frac{5}{9}\left(\frac{2}{125}\right)^2\right| = 0{,}00014 > 0{,}0001,$$

$$\frac{25}{81}\left(\frac{2}{125}\right)^3 = 0{,}000001 < 0{,}0001,$$

то *с заданной степенью точности*

$$\sqrt[3]{127} = 5(1+2/125)^{1/3} \approx 5 + \frac{1}{3}\frac{2}{25} - \frac{5}{9}\left(\frac{2}{125}\right)^2 = 5 + 0{,}02667 - 0{,}00014 =$$

$$= 5{,}02653 \approx 5{,}0265.$$

Более точное значение этого корня *5,026526*.

3. Вычислить e^2 с точностью до 0,0001.

Здесь нам понадобится разложение (2.49)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ -\infty < x < \infty.$$

Полагая $x = 2$, получим

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + R_n, \qquad (3.3)$$

где ряд (3.3) и его остаточный член R_n представляют собой *знакопостоянные* ряды. Оценим сумму остатка ряда.

$$R_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{2^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} + \frac{2^{n+4}}{(n+4)!} + \ldots =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{2}{n+2} + \frac{2^2}{(n+2)(n+3)} + \frac{2^3}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{2}{n+2} + \left(\frac{2}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{2}{n+2}\right)^3 + \ldots\right) = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1 - \frac{2}{n+2}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n+2}{n}.$$

т.е. $R_n < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n+2}{n}, \ \forall n \in N.$

Здесь была применена формула суммы *бесконечно убывающей* геометрической прогрессии (1.4)

Путем подбора определим, при каком n будет выполняться неравенство

$$R_n < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n+2}{n} < 0{,}0001.$$

При $n = 9$ будем иметь

$$R_9 < \frac{2^{10}}{10!}\frac{11}{9} = \frac{1024}{3628800}\cdot\frac{11}{9} = 0{,}00034 > 0{,}0001.$$

Так как

$$R_{10} < \frac{2^{11}}{11!}\frac{12}{10} = \frac{2048}{39916800}\cdot\frac{12}{10} = 0{,}00006 < 0{,}0001,$$

то *с заданной степенью точности* достаточно взять сумму первых одиннадцати членов ряда (3.3), т.е.

$$e^2 \approx 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!} + \frac{2^9}{9!} + \frac{2^{10}}{10!} =$$

$$= 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720} + \frac{128}{5040} + \frac{256}{40320} + \frac{512}{362880} + \frac{1024}{3628800} \approx$$

$$\approx 7 + 0{,}26667 + 0{,}08889 + 0{,}02540 + 0{,}00635 + 0{,}00141 + 0{,}00028 = 7{,}3890.$$

Более точное значение $e^2 = 7{,}389056.$

3.2. Применение рядов к вычислению пределов

Вычисляя пределы дробей, числители и знаменатели которых при $x \to x_0$ стремятся к нулю, обычно применяют: преобразования исходных выражений;

замечательные пределы; эквивалентные бесконечно малые функции; правило Лопиталя*. Существует, однако, достаточно эффективный способ вычисления таких пределов, основанный на применении степенных рядов. При этом числитель и знаменатель дроби раскладываются в ряды по степеням $(x-x_0)$. После этого проводятся необходимые сокращения, которые дают возможность избавиться от неопределенности. Можно одновременно применять несколько из указанных здесь приемов.

Примеры. Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{-x}-2+2x-x^2}{x-\sin x}$.

Заменяя $\sin x$ и e^x их разложениями в степенные ряды (2.47) и (2.50), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x}-2+2x-x^2}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)-2+2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}-\ldots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3!}+\frac{2x}{4!}-\ldots}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots}=-2.$$

2. [25, с.97]. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\dfrac{3}{x^4}\right]$.

Преобразовывая неопределенность $(\infty-\infty)$ в неопределенность вида $(0/0)$ и заменяя $\sin x$ и $\cos x$ их разложениями в степенные ряды (2.47), (2.48), будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right]=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x\cos x-3\sin x}{x^4\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)-3\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)}{x^4\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}\right)x^5+\left(-\frac{1}{6!}+\frac{3}{7!}\right)x^7+\ldots}{x^5\cdot\left(1-\frac{x^2}{3!}+\ldots\right)}=\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}=\frac{1}{24}-\frac{1}{40}=\frac{1}{60}\approx 0{,}0167.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1+5x^2}{x+\arcsin 4x}$.

* *Г. Лопиталь (1661–1704) – французский математик.*

Так как при $x \to 0 \Rightarrow 2x \to 0;\ 4x \to 0$, то, заменяя в разложении (2.49) x на $2x$, а в (2.60) x на $4x$, получим степенные ряды для e^{2x} и $arcsin\ 4x$, с учетом которых

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+5x^2}{x+\arcsin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots)-1+5x^2}{x+(4x+\frac{1}{2}\frac{(4x)^3}{3}+\ldots)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+7x^2+\ldots}{5x+\frac{32}{3}x^3+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{2+7x+\ldots}{5+\frac{32}{3}x^2+\ldots}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

4. В теории ламповых генераторов доказывается, что КПД генератора η выражается через величину угла θ отсечки тока формулой

$$\eta=\frac{\xi(2\theta-\sin 2\theta)}{4(\sin\theta-\theta\cos\theta)},$$

где ξ – коэффициент использования напряжения. Требуется найти

$$\lim_{\theta\to 0}\eta=\lim_{\theta\to 0}\frac{\xi(2\theta-\sin 2\theta)}{4(\sin\theta-\theta\cos\theta)}.$$

Заменяя все тригонометрические функции соответствующими рядами, полученными из (2.47) и (2.48) будем иметь

$$\lim_{\theta\to 0}\eta=\frac{\xi}{4}\lim_{\theta\to 0}\frac{2\theta-\sin 2\theta}{\sin\theta-\theta\cos\theta}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\frac{\xi}{4}\lim_{\theta\to 0}\frac{2\theta-(2\theta-\frac{(2\theta)^3}{3!}+\frac{(2\theta)^5}{5!}-\ldots)}{(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\ldots)-\theta(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\ldots)}=$$

$$=\frac{\xi}{4}\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{4}{3}\theta^3-\frac{4}{15}\theta^5+\ldots}{\frac{1}{3}\theta^3-\frac{1}{30}\theta^5+\ldots}=\frac{\xi}{4}\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{4}{3}-\frac{4}{15}\theta^2+\ldots}{\frac{1}{3}-\frac{1}{30}\theta^2+\ldots}=\frac{\xi}{4}\cdot 4=\xi.$$

3.3. Приближенное вычисление определенных интегралов

Приближенно вычисляются определенные интегралы, которые либо относятся к числу «*неберущихся*», т.е. первообразные их подынтегральных функций не выражаются через *конечное* число элементарных функций, либо для вычисления которых требуются большие затраты по времени из–за громоздкости окончательных формул.

Примеры. Вычислить определенные интегралы с заданной степенью точности ε :

$$1.\ \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,. \tag{3.4}$$

Функция $\Phi(x)$ называется интегралом Лапласа* (*интеграл вероятностей*), который относится к числу «*неберущихся*» в элементарных функциях. Для приближенного вычисления этого интеграла нам понадобится разложение в степенной ряд функции $e^{-x^2/2}$. Так как при $x\to 0 \Rightarrow -x^2/2\to 0$, то, заменяя в разложении (2.49) x на $-x^2/2=-t^2/2$, получим разложение в ряд подынтегральной функции

$$e^{-\frac{t^2}{2}}=1-\frac{t^2}{1!\cdot 2}+\frac{t^4}{2!\cdot 2^2}-\frac{t^6}{3!\cdot 2^3}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!\cdot 2^n}+\ldots,\quad -\infty<t<\infty. \tag{3.5}$$

Поскольку *степенной ряд* (3.5) *сходится равномерно в своей области сходимости* (см. п. 2.5.), то его можно почленно интегрировать. Поэтому

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{1!\cdot 2}+\frac{t^4}{2!\cdot 2^2}-\frac{t^6}{3!\cdot 2^3}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!\cdot 2^n}+\ldots\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(t-\frac{t^3}{1!\cdot 2\cdot 3}+\frac{t^5}{2!\cdot 2^2\cdot 5}-\frac{t^7}{3!\cdot 2^3\cdot 7}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{n!\cdot 2^n\cdot(2n+1)}+\ldots\right)\Bigg|_0^x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 2^2\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 2^3\cdot 7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!\cdot 2^n\cdot(2n+1)}+\ldots\right), \tag{3.6}$$

$$-\infty<x<\infty.$$

Таким образом, функция $\Phi(x)$ или интеграл Лапласа (3.4) представляется *знакочередующимся* рядом (3.6), который сходится для $\forall\ x\in\mathbb{R}$. Поскольку функция Лапласа широко применяется при решении как теоретических, так и прикладных задач, то, с учетом нечетности и других свойств $\Phi(x)$, для нее при $x\in[0,\ 5]$ составлены подробные таблицы с шагом $h=0{,}01$, которые чаще всего приводятся в учебниках и сборниках задач по теории вероятностей и математической статистике.

Теоретическое упражнение. Убедиться *самостоятельно*, что $\Phi(1)=0{,}3413$, предварительно выяснив, сколько первых членов знакочередующегося ряда (3.6) нужно сложить, чтобы найти его сумму с точностью $\varepsilon=0{,}0001$.

---

* *П. Лаплас (1749–1827) – французский математик, физик и астроном.*

$$\textbf{2.}\quad \int\limits_0^{1/3} \frac{arctg\,x}{x}\,dx\ ,\quad \varepsilon = 0{,}0001. \qquad (3.7)$$

Этот интеграл также принадлежит к числу *«неберущихся»* в элементарных функциях. Для его приближенного вычисления нам понадобится разложение с степенной ряд (2.45') функции $arctg\,x$

$$arctg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,\ |x| \le 1. \qquad (3.8)$$

Тогда подынтегральная функция запишется в виде ряда

$$\frac{arctg\,x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{2n-1} + \ldots \qquad (3.9)$$

С помощью признака Д'Аламбера нетрудно убедиться, что областью *абсолютной сходимости* ряда (3.9) будет $-1 < x < 1$. Так как в этой области степенной ряд (3.9) *сходится равномерно*, то его можно почленно интегрировать

$$\int\limits_0^{1/3} \frac{arctg\,x}{x}\,dx = \int\limits_0^{1/3}\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{2n-1} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left.\left(x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2} + \ldots\right)\right|_0^{1/3} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2 3^3} + \frac{1}{5^2 3^5} - \frac{1}{7^2 3^7} + \ \ldots \qquad (3.10)$$

Легко убедиться, что для знакочередующегося ряда (3.10) выполняются оба условия теоремы (признака) Лейбница. Следовательно, погрешность при замене ряда (3.10) суммой его первых слагаемых не превосходит по модулю первого из отбрасываемых членов ряда.

Поскольку

$$\frac{1}{5^2 3^5} = 0{,}00016 > 0{,}0001 = \varepsilon,$$

$$\left| -\frac{1}{7^2 3^7}\right| = 0{,}000009 < 0{,}0001 = \varepsilon,$$

то *с заданной степенью точности*

$$\int_0^{1/3}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx \approx \frac{1}{3}-\frac{1}{3^2 3^3}+\frac{1}{5^2 3^5}\approx 0,33333-0,00412+0,00016=$$

$$=0,32937\approx 0,3294.$$

3. $$\int_0^{2/3}\frac{dx}{1+x^4},\quad \varepsilon=0,001. \qquad (3.11)$$

Этот интеграл вычисляется точно, поскольку первообразная от подынтегральной функции известна (см., например, [15]), т.е. по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_0^{2/3}\frac{dx}{1+x^4}=\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)\Bigg|_0^{2/3}$$

Из этого равенства видно, что *точное вычисление интеграла* (3.11) *требует больших затрат по времени*, поэтому удобнее вычислить его приближенно, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд.

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (1.4) со знаменателем $q=-x^4$ будем иметь

$$\frac{1}{1+x^4}=1-x^4+x^8-x^{12}+\ldots+(-1)^n x^{4n}+\ldots,\ |x|<1. \qquad (3.12)$$

Так как степенной ряд (3.12) сходится равномерно для $|x|<1$, то его можно почленно интегрировать на отрезке $[0, 2/3]\subset(-1, 1)$.

$$\int_0^{2/3}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{2/3}(1-x^4+x^8-x^{12}+\ldots+(-1)^n x^{4n}+\ldots)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{13}}{13}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\ldots\right)\Bigg|_0^{2/3}=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^9-\frac{1}{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{13}+\ldots \qquad (3.13)$$

Для *знакочередующегося* ряда (3.13) выполняются оба условия теоремы (признака) Лейбница. Рассуждая аналогично, как и в предыдущих случаях, и, учитывая неравенство

$$\left|-\frac{1}{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{13}\right|=0,0004<0,001=\varepsilon,$$

получим, что *с заданной степенью точности*

$$\int_0^{2/3}\frac{dx}{1+x^4}\approx\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^9=0.6667-0,0263+0,0029=0,6433\approx 0,643.$$

Другие методы приближенного вычисления *определенных* интегралов см., например, в [6, 23, 24]. Указанным приемом с помощью разложения подынтегральной функции в ряд и последующего интегрирования этого ряда можно вычислять и *неопределенные* интегралы.

3.4. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Пусть нам требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$y''=f(x,y,y'), \tag{3.14}$$

удовлетворяющее *начальным условиям*

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y'_0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Если дифференциальное уравнение (3.14) невозможно проинтегрировать в квадратурах или его точное решение слишком трудоемко, то решение этого уравнения в некоторых случаях можно искать ***в виде степенного ряда***

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ a_n\in R. \tag{3.16}$$

Как правило, этот метод применяют при решении *линейного* дифференциального уравнения вида

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x), \tag{3.17}$$

где все коэффициенты и правая часть $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $(x-x_0)$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0-R;\ x_0+R)$.

1) Пусть $p_0(x_0)\neq 0$.

Продифференцируем два раза функцию (3.16) и подставим ряды для $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, $p_k(x)$ $(k=0,\ 1,\ 2)$, $f(x)$ в уравнение (3.17). Получим в обеих частях равенства степенные ряды. Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях $(x-x_0)$, придем к бесконечному множеству рекуррентных соотношений, из которых определим коэффициенты a_n. Подставляя найденные значения коэффициентов a_n в равенство (3.16), получим общее решение дифференциального уравнения (3.17). Если к дифференциальному уравнению присоединяются начальные условия (3.15), то они позволяют сразу найти два первых коэффициента ряда (3.16) $a_0 = y_0$, $a_1 = y'_0$. Вычисляя последующие коэффициенты a_n; $n \geq 2$, получим соответствующее частное решение. Такой метод интегрирования дифференциальных уравнений называется *методом неопределенных коэффициентов.*

2) Предположим, что $p_0(x) = (x-x_0)^s q(x)$, где $q(x_0) \neq 0$, т.е. точка x_0 является нулем кратности $s \in N$ функции $p_0(x)$ (x_0 – *особая точка дифференциального уравнения* (3.17)). Пусть, кроме того, точка x_0 является нулем кратности не менее $s-1$ (при $s>1$) функции $p_1(x)$ и нулем кратности не менее $s-2$ (при $s>2$) функции $p_2(x)$. Тогда существует по крайней мере одно нетривиальное решение дифференциального уравнения (3.17), которое можно представить [3, 9] *в виде обобщенного степенного ряда*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+\rho} = (x-x_0)^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad (3.18)$$

где $a_0 \neq 0$, а ρ – некоторое действительное число, *не обязательно целое или положительное.*

При этом, если решение уравнения ищется *в виде обобщенного степенного ряда* (3.18), то сначала, приравнивая коэффициенты при наименьшей степени $(x-x_0)$, получают так называемое *определяющее уравнение*, из которого находят одно или несколько значений параметра ρ. Далее коэффициенты a_n определяют *для каждого значения* ρ и тем самым получают столько различных решений дифференциального уравнения (3.17), сколько различных значений имеет параметр ρ.

Полученное решение в виде ряда (3.16) или (3.18) исследуется на сходимость по известным признакам (см. п. 2.3.) и его сумма является решением дифференциального уравнения (3.17) в области сходимости этого ряда.

Указанный способ интегрирования дифференциальных уравнений применим к *линейным* уравнениям любого порядка с коэффициентами и правой частью, представимыми в виде рядов по степеням $(x-x_0)$.

***Пример* 1.** Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' + xy = 0, \qquad (3.19)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \qquad (3.20)$$

Так как в уравнении (3.19) $p_0(x) \equiv 1 \neq 0$ при $x_0 = 0$, то его решение ищем в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \qquad (3.16')$$

Дважды продифференцируем этот ряд

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3\cdot 2\, a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots,$$

Из начальных условий (3.20) находим, что $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Подставим ряды для $y(x)$ и $y''(x)$ в уравнение (3.19), получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

или

$$(2a_2 + 3\cdot 2\, a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots) +$$
$$+\, x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots) = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях этого равенства, будем иметь

$2a_2 = 0;\ 3\cdot 2\, a_3 + 1 = 0;\ 4\cdot 3\, a_4 = 0;\ 5\cdot 4\, a_5 + a_2 = 0;\ 6\cdot 5\, a_6 + a_3 = 0;$

……………………………………

$$n(n-1)a_n + a_{n-3} = 0 \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-3}}{(n-1)n},\ 3 \le n \in N.$$

Отсюда

$$a_2 = 0;\ a_3 = -\frac{1}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3!};\ a_4 = 0;\ a_5 = 0;\ a_6 = -\frac{1}{5\cdot 6}a_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} = \frac{1\cdot 4}{6!};$$

$$a_7 = \frac{1}{6\cdot 7}a_4 = 0;\ a_8 = \frac{1}{7\cdot 8}a_5 = 0;\ a_9 = -\frac{1}{8\cdot 9}a_6 = -\frac{1\cdot 4}{6!\cdot 8\cdot 9} = -\frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!};$$

Вообще

$$a_{3k-1} = 0,\ (n = 3k-1),\ k = 1,2,3,\ldots;$$

$$a_{3k-2} = 0,\ (n = 3k-2),\ k = 1,2,3,\ldots;$$

$$a_{3k-3} = (-1)^{k-1}\frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3k-5)}{(3k-3)!},\quad (n = 3k-3),\ k = 2,3,4\ldots.$$

Подставляя значения найденных коэффициентов в ряд (3.16'), получим

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9 + \ldots$$

С помощью признака Д'Аламбера легко убедиться (*такая возможность предоставляется читателю*), что этот ряд сходится для $-\infty < x < \infty$ и, следовательно, является искомым решением задачи Коши (3.19), (3.20) на всей числовой прямой.

Общее решение дифференциального уравнения (3.19) приведено в [11], а его частное решение при начальных условиях, отличных от (3.20), в [3].

Если дифференциальное уравнение (3.14) *нелинейное*, то его решение, удовлетворяющее начальным условиям (3.15), обычно ищут *в виде ряда Тейлора*

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots \qquad (3.21)$$

Значения $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ берутся из начальных условий (3.15). Полагая в уравнении (3.14) $x = x_0$ и подставляя значения в правую часть данного уравнения, определим $y''(x_0)$. Далее, дифференцируя по переменной x обе части уравнения (3.14) нужное количество раз, полагая $x = x_0$ и используя найденные значения предыдущих производных в точке $x = x_0$, определим $y'''(x_0)$, $y^{(4)}(x_0)$, ..., $y^{(n)}(x_0)$.

Если удается получить функциональную или рекуррентную зависимость $y^{(n)}(x_0)$ от своего номера n, то затем находится интервал сходимости $(x_0 - R; x_0 + R)$ ряда Тейлора (3.21) и выясняется, при каких значениях x из этого интервала сумма полученного ряда (3.21) является решением задачи Коши (3.14), (3.15).

Реально установить такую зависимость удается не всегда. В этом случае ряд (3.21) заменяется его n–й частичной суммой и мы вместо точного решения задачи Коши (3.14), (3.15) получим ее *приближенное решение*. Указанный метод решения дифференциальных уравнений называется *методом последовательных дифференцирований*. Он является достаточно эффективным при решении конкретных инженерных задач.

Этот способ можно применять, решая задачу Коши для дифференциальных уравнений любого порядка, разрешенных относительно старшей производной, ***в том числе и для линейных дифференциальных уравнений.***

***Пример* 2.** Найти пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y'' - xy' + y^2 = 0, \qquad (3.22)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \qquad (3.23)$$

Запишем уравнение (3.22) в виде

$$y'' = xy' - y^2. \qquad (3.22')$$

Отсюда, с учетом (3.23), $y''(0)=0$.

Дифференцируя последовательно уравнение (3.22'), получим

$$y''' = y'+xy'' - 2yy' \Rightarrow y'''(0) = 1,$$

$$y^{(4)} = 2y''+xy''' - 2y'^2 - 2yy'' \Rightarrow y^{(4)}(0) = -2,$$

$$y^{(5)} = 3y'''+ xy^{(4)} - 6y'y'' - 2yy''' \Rightarrow y^{(5)}(0) = 3,$$

$$y^{(6)} = 4y^{(4)}+ xy^{(5)} - 6y''^2 - 8y'y''' - 2yy^{(4)} \Rightarrow y^{(6)}(0) = -16.$$

Аналогично получим, что $y^{(7)}(0) = 35$.

Подставляя найденные значения производных в ряд Маклорена (ряд (3.21) при $x_0 = 0$),

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

будем иметь

$$y(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{2}{4!}x^4 + \frac{3}{5!}x^5 - \frac{16}{6!}x^6 + \ldots \approx x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^6}{45}.$$

Замечание. В прикладных задачах количество членов ряда (3.21) определяется в зависимости от заданной степени точности.

Другие методы приближенного решения дифференциальных уравнений см., например, в [6, 11, 12].

3.5. Решение уравнения колебаний конечной струны методом Фурье

Метод Фурье или *метод разделения переменных* широко применяется при решении различных задач математической физики. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях *конечной* струны, закрепленной на обоих концах (рис. 3.1.)

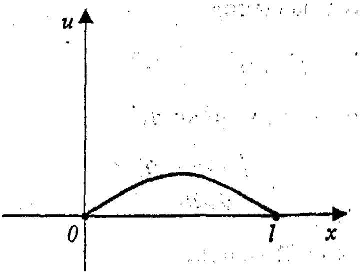

Рис. 3.1

При изучении данной задачи требуется найти [2, 11, 12, 22] решение *волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; u = u(x, t), \tag{3.24}$$

удовлетворяющее *краевым условиям* (условия жесткого закрепления концов струны)

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0, \end{cases} \; t \geq 0. \tag{3.25}$$

и *начальным условиям* (условия отклонения и скорости точек в начальный момент времени)

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = F(x), \end{cases} \; 0 \leq x \leq l. \tag{3.26}$$

Здесь $a^2 = T/\rho$, где T – сила натяжения струны, а ρ – ее линейная плотность.

Решение уравнения (3.24) будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t), \tag{3.27}$$

где первая функция зависит только от переменной x, а вторая – только от переменной t.

Находя частные производные второго порядка от функции (3.27) и подставляя их в уравнение (3.24), получим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Преобразуем данное уравнение, т.е. *разделим в нем переменные*

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

В левой части этого равенства находится функция, зависящая только от переменной t, а в правой части функция, зависящая только от переменной x, причем обе переменные t и x изменяются независимо друг от друга. Поэтому, такое равенство может выполняться лишь для постоянной функции, когда она не зависит ни от t, ни от x, т.е.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c = const. \tag{3.28}$$

Соотношения (3.28) равносильны двум уравнениям

$$X''(x) - c\,X(x) = 0, \tag{3.29}$$

$$T''(t) - c\,a^2\,T(t) = 0. \tag{3.30}$$

Будем искать решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.29), удовлетворяющее краевым условиям (3.24). Из этих условий получим

$$u(0, t)=0 \Leftrightarrow X(0)T(t)=0 \Rightarrow X(0)=0,$$

$$u(l, t)=0 \Leftrightarrow X(l)T(t)=0 \Rightarrow X(l)=0.$$

Таким образом, для того, чтобы решение дифференциального уравнения (3.29) удовлетворяло краевым условиям (3.24), необходимо и достаточно, чтобы оно было решением краевой задачи

$$\begin{cases} X''(x)-cX(x)=0, & 0\le x\le l, \\ X(0)=0, X(l)=0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что при $c \ge 0$ единственным решением краевой задачи (3.31) является функция $X(x) \equiv 0$.

Из (3.27) следует, что $u(x, t) \equiv 0$. Такой случай, исходя из физического смысла задачи, интереса не представляет, так как струна находится в состоянии покоя. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать $c = -\lambda^2 < 0$, $0 < \lambda \in R$.

Известно (см., например, [2, 9, 11, 12, 24]), что *общее решение* дифференциального уравнения

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x, \tag{3.32}$$

где C_1, C_2 – $\forall const$. Подберем постоянные C_1 и C_2 так, чтобы выполнялись краевые условия в задаче (3.31).

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,\ X(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin\lambda l = 0, \Rightarrow \sin\lambda l = 0, \Rightarrow \lambda l = \pi n,$$

$$(n=1,2,3,\dots) \Rightarrow \lambda = \lambda_n = \frac{\pi n}{l},\ n \in N,\ C_2 - \forall const.$$

Подставляя в равенство (3.32) значения C_1, C_2 и $\lambda = \lambda_n$, получим бесконечное множество функций

$$X_n(x) = A_n \sin\frac{\pi n}{l}x,\ n=1, 2, 3,\dots,\ A_n - \forall const. \tag{3.33}$$

Все эти функции *линейно независимы* между собой и являются решениями краевой задачи (3.31). Отметим, что числа $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, $n \in N$ называются *собственными значениями*, а соответствующие им функции $\sin\frac{\pi n}{l}x$, $n \in N$, – *собственными функциями* краевой задачи (3.31).

Далее, значение $c = -\lambda^2 = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n \in N$ подставим в уравнение (3.30), которое запишем

$$T''(t) - a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T(t) = 0. \qquad (3.34)$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.34) имеет вид

$$T(t) = B_n \cos\frac{\pi n a}{l} t + D_n \sin\frac{\pi n a}{l} t, \;\; n=1, 2, 3, \ldots, B_n, D_n - \forall const. \qquad (3.35)$$

Найдем функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \sin\frac{\pi n}{l} x \,[\, B_n \cos\frac{\pi n a}{l} t + D_n \sin\frac{\pi n a}{l} t \,] =$$

$$= [\, a_n \cos\frac{\pi n a}{l} t + b_n \sin\frac{\pi n a}{l} t \,] \sin\frac{\pi n}{l} x, \; n=1,2,3,\ldots \qquad (3.36)$$

$$a_n = A_n B_n, \; b_n = A_n D_n - \forall const.$$

Таким образом, мы получили бесконечное множество *линейно независимых решений* уравнения (3.24), удовлетворяющих краевым условиям (3.25).

Образуем их бесконечную сумму, т.е. ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\, a_n \cos\frac{\pi n a}{l} t + b_n \sin\frac{\pi n a}{l} t \,] \sin\frac{\pi n}{l} x. \qquad (3.37)$$

Поскольку каждое из решений $u_n(x,t)$ уравнения (3.24) удовлетворяет *однородным* краевым условиям (3.25), то и их сумма (3.37), т.е. функция $u(x,t)$, будет решением *линейного* уравнения (3.24), удовлетворяющим *однородным* краевым условиям (3.25). Это решение зависит от бесконечного множества произвольных постоянных a_n и b_n, $n \in N$.

Для определения этих постоянных воспользуемся начальными условиями (3.26). Предположим, что *ряд* (3.37) *можно дважды почленно дифференцировать по каждой из переменных* и найдем частную производную

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} [\, -a_n \sin\frac{\pi n a}{l} t + b_n \cos\frac{\pi n a}{l} t \,] \sin\frac{\pi n}{l} x. \qquad (3.38)$$

Положим в (3.37), (3.38) $t = 0$ и воспользуемся начальными условиями (3.26)

$$u(x, 0) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \qquad (3.39)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = F(x) \Leftrightarrow F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} b_n \sin\frac{\pi n}{l} x. \qquad (3.40)$$

Из равенств (3.39), (3.40) видно, что функции $f(x)$ и $F(x)$ представимы на отрезке $[0, l]$ рядами Фурье, которые содержат только синусы, поэтому коэффициенты этих рядов определяются однозначно по формулам (2.103)

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1,2,3,..., \\ b_n = \dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1,2,3,... \end{cases} \qquad (3.41)$$

Функция $u(x,t)$, представленная рядом (3.37), коэффициенты которого находятся по формулам (3.41), является решением волнового уравнения (3.24), удовлетворяющим краевым условиям (3.25) и начальным условиям (3.26).

Пример. Найти колебания струны с жестко закрепленными концами $x = 0$ и $x = l$, если в точке $x = c$ струна оттягивается на небольшое расстояние h от положения равновесия и в момент времени $t = 0$ отпускается без начальной скорости (рис. 3.2.).

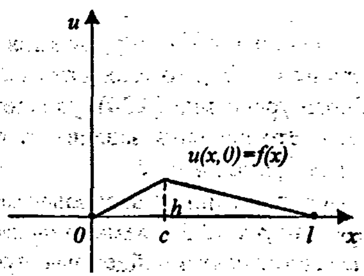

Рис. 3.2

Зная уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (см., например, [6, 11, 24]), нетрудно составить функцию $f(x)$, характеризующую отклонение струны в начальный момент времени

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, & 0\le x\le c,\\ \dfrac{h}{l-c}(l-x), & c\le x\le l.\end{cases} \qquad (3.42)$$

По условию $F(x)\equiv 0,\ 0\le x\le l,$ следовательно, по второй из формул (3.41) все $b_n=0,\ n\in N$.

Коэффициенты a_n найдем по первой из формул (3.41), учитывая, что $f(x)$ определяется равенствами (3.42)

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\left[\frac{h}{c}\int_0^c x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\frac{h}{l-c}\int_c^l (l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right], \qquad (3.43)$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

Каждый из интегралов вычислим с помощью интегрирования по частям

$$\int_0^c x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_0^c+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_0^c=$$

$$=-\frac{lc}{n\pi}\cos\frac{n\pi c}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi c}{l};$$

$$\int_c^l (l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{l(l-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_c^l-\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_c^l=$$

$$=\frac{l(l-c)}{n\pi}\cos\frac{n\pi c}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi c}{l}.$$

Тогда из (3.43) будем иметь

$$a_n=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\cdot\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi c}{l},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (3.43')$$

Подставляя выражение для a_n в формулу (3.37) и учитывая, что $b_n=0$, $n\in N$, получим

$$u(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi a}{l}t. \qquad (3.44)$$

Замечание. Совершенно аналогично могут быть исследованы: вынужденные колебания струны; свободные и вынужденные продольные колебания стержня; распределение тепла в конечном и бесконечном стержнях [12, 22].

Изучение колебательных процессов прямоугольной и круглой мембран, распространения тепла в цилиндре требует использования двойных рядов Фурье и рядов Фурье–Бесселя [22].

Применение рядов Фурье в теории изгиба балок подробно изложено в [4].

Некоторые экономические приложения степенных матричных рядов [11] приведены в [19]. В частности, установлен критерий продуктивности матрицы Леонтьева* межотраслевого баланса в зависимости от ее максимального по модулю собственного значения (числа Фробениуса**).

3.6. Вопросы и задачи к главе 3

3.1. Используя стандартные разложения в ряд Маклорена (см. п.2.6.), найдите *приближенные значения функций* с заданной степенью точности ε:

а) $\sin 10^\circ,\ \varepsilon = 0{,}0001$; б) $\sqrt[5]{36},\ \varepsilon = 0{,}001$;

в) $arctg(\frac{1}{3}),\ \varepsilon = 0{,}001$; г) $ch\frac{1}{2},\ \varepsilon = 0{,}0001$;

д) $\ln 10,\ \varepsilon = 0{,}0001$; е) $\frac{1}{\sqrt[4]{84}},\ \varepsilon = 0{,}001.$

3.2. Применяя разложения соответствующих функций в степенные ряды, *вычислите пределы*:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}{\sin x - arctg\, x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+3\,arctg\,x-5\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1+3x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\,arctg\sqrt{x}-x\cos x}{\sqrt[3]{8+x^2}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x - arctg\,5x}{(1+2x)e^{-2x}-(1-2x)e^{2x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(\arcsin x-\sin x)-x^3}{x^5\cos 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[4x-x^2\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)\right]$.

---

* *В.В. Леонтьев (1906–1999) – американский экономист, лауреат Нобелевской премии.*

** *Ф. Фробениус (1849–1917) – немецкий математик.*

3.3. Вычислите *определенные интегралы* с заданной степенью точности ε:

а) $\int\limits_{0,2}^{1} \frac{e^x}{x}dx$, $\varepsilon = 0,001$; б) $\int\limits_{0}^{0,5} \cos x^2\, dx$, $\varepsilon = 0,0001$;

в) $\int\limits_{0}^{0,3} \frac{\sin 2x}{x}dx$, $\varepsilon = 0,0001$; г) $\int\limits_{0}^{0,4} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^3}}$, $\varepsilon = 0,001$;

д) $\int\limits_{0}^{1} x^7 \cos x\, dx$, $\varepsilon = 0,001$; е) $\int\limits_{0}^{0,75} \sqrt{1+x^6}\, dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

3.4. Применяя *метод неопределенных коэффициентов*, найдите общее (частное) решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов :

а) $(1+x^2)y''+7xy'+5y = 0$;

б) $y''+x^2y+1 =(1+x)e^x$;

в) $(1-x^2)y''-4xy'+3y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

г) $y''+xy'+y = 1+x^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

3.5. Найдите частные решения дифференциальных уравнений в окрестности их особых точек с помощью *обобщенных* степенных рядов :

а) $x^2y''+2xy'+ x^2y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

б) $xy''+3y'+xy = 0$, $y(0)=2$, $y'(0)= 1$;

в) $x^2y''+xy'+(x^2-1)y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

г) $(x-1)y''+y'+(x-1)y = 1+x^2$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

3.6. С помощью метода *последовательных дифференцирований* найдите четыре – пять членов разложения в степенной ряд решений дифференциальных уравнений :

а) $y'+xy-2\ln(x+y) = x^2$, $y(1)=0$;

б) $y''-y\sin y' =\cos 3x$, $y(0)=1$, $y'(0)= 0$;

в) $y''+x^2y'-(x^3+1)y = 4$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

г) $y''' - x(y')^2 + e^{2x}y = 1 - \frac{x^2}{2}$, $y(0)=1, y'(0)=2, y''(0)=3$.

3.7. Определите форму струны в момент времени t, если ее концы $x=0$ и $x=l$ жестко закреплены. В момент времени $t=0$ струна имела форму параболы $u = \frac{4h}{l^2}x\,(l-x)$ (*изобразите рисунок*) при отсутствии начальных скоростей ее точек.

3.8. Найдите решение *волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям [12]:

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = A\sin\omega t, \qquad A, \omega - const;$$

$$u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Дайте *механическое истолкование* задачи.

В заключение приведем список литературы, которая частично использовалась при написании данного учебного пособия и может служить для более углубленной *самостоятельной* проработки рассмотренного здесь материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. –М.: Наука, 1988. – 432 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. –М.: Наука, 1989. – 464 с.
3. Власова Е.А. Ряды. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 612 с.
4. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1979. – 408 с.
5. Гусак А.А. Высшая математика. Т.2. – Мн.: ТетраСистемс, 2000. – 448 с.
6. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричкова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 1999. – 640 с.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. – М.: Высш.шк., 1997. – 416 с.
8. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. –М.: Высш.шк., 1970. – 416 с.
9. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Ч.3. – Мн.: Выш.шк., 1985. – 208 с.
10. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высш.шк, 1981. Т.1. – 688 с, Т.2. – 584 с.
11. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969. – 640 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. – М.: Наука, 1985. –576 с.
13. Руководство к решению задач по высшей математике / Под ред. Е.И. Гурского. Ч.2. – Мн.: Выш.шк.,1990. – 400 с.
14. Русак В.М., Шлома Л.І. і інш. Курс вышэйшай матэматыкі: Функцыі некалькіх зменных. Інтэгральнае злічэнне. Шэрагі. – Мн.: Выш.шк., 1997. – 507 с.
15. Бараненков Г.С., Демидович Б.П. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. М.: Наука, 1972. – 472 с.
16. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
17. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко Ч.3. – Мн.: Выш.шк., 1991. – 288 с.

18. Семенчук Н.П., Сендер Н.Н., Шило Т.И. Математический анализ. Ряды. – Брест: БрГУ, 2001. – 173 с.
19. Солодовников А.С., Бабайцев В.А. и др. Математика в экономике Ч.2. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 376 с.
20. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике. Ч.2. – Мн.: Выш.шк., 1993. – 304 с.
21. Тер–Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: МФТИ, 2000. – 720 с.
22. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – М.: Наука, 1980. – 382 с.
23. Тузик А.И. Высшая математика. Интегрирование функций одной и нескольких переменных. – Брест: БГТУ, 2000. – 129 с.
24. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высш.шк., 1990. – 480 с.
25. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. М.: Высш.шк., 1983. – 176 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Тузик Альфред Иванович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЯДЫ

Учебное пособие для студентов ВУЗов

Редактор Строкач Т.В.
Технический редактор Тузик А.И.
Корректор Никитчик Е.В.
Компьютерный набор Тузик С.А.

Издательство Брестского государственного технического университета (Лицензия ЛВ №382 от 1.09.2000 г.) Брест, ул. Московская, 267.
Подписано в печать 23.05.2002 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага "Чайка". Усл. п.л. 7,2. Уч. изд.л. 7,75. Тираж 300 экз. Заказ № 8.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет»
224017, Брест, ул. Московская, 267.