МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

А.И. ТУЗИК

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов технических и экономических специальностей высших учебных заведений

Брест 2000

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11 я 73
Т81

Тузик А.И.
Т81 Высшая математика. Интегрирование функций одной и нескольких переменных: Учебное пособие для студентов ВУЗов. Брест. Издательство БГТУ, 2000. – 129 с.: ил.
ISBN 985-6584-16-7

В учебном пособии кратко изложены следующие разделы высшей математики: неопределенный интеграл; определенный интеграл; функции нескольких переменных; кратные интегралы; криволинейные и поверхностные интегралы; элементы теории векторных полей.

Теоретический материал иллюстрируется решением геометрических, физических и экономических задач, а часть его в виде теоретических упражнений сформулирована для самостоятельного рассмотрения.

Для студентов технических и экономических специальностей ВУЗов.

Рецензенты: кафедра "Высшая математика №3" Белорусской государственной политехнической академии, зав. кафедрой, доцент В.Ф. Бубнов; профессор Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники Р.М. Жевняк.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11 я 73

ISBN 985-6584-17-5

Предисловие

В данном учебном пособии на основе опыта многолетнего преподавания автором курса высшей математики студентам БИСИ, БПИ, БГТУ, излагается один из ее основных разделов – интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных. Рассматриваются неопределенные и определенные интегралы, функции нескольких переменных, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы теории векторных полей. Известная теоретическая и практическая направленность этих вопросов предопределяют их важность и значимость в подготовке инженеров и экономистов.

Материал предназначен для студентов инженерно-технических и экономических специальностей ВУЗов, в связи с чем его изложение иллюстрируется решением задач геометрического, физического и экономического характера. Практика чтения лекций, проведения практических занятий подтверждает, что студенты технических специальностей также с интересом воспринимают и решают экономические задачи.

При рассмотрении разных вопросов принят различный уровень строгости. При этом ясности и доступности изложения часто отдается предпочтение перед вопросами строгости доказательства и общности с тем, чтобы наиболее ясно оттенить принципиальную сторону вопроса.

Отдельные вопросы и теоремы сформулированы в виде теоретических упражнений, которые предлагаются студентам для самостоятельного изучения. Возможность проведения пусть небольших, но самостоятельных исследований повышает интерес части студентов к изучению высшей математики и, на наш взгляд, является одним из элементов активного обучения.

Пособие не заменяет собой более полных учебников и учебных пособий, содержащих интегрирование функций одной и несколких переменных, и может оказаться полезным для текущей работы по указанной теме или краткого знакомства с ней. Рассчитана как на студентов, активно работающих над учебным материалом, так и воспринимающих отдельные его части, сформулированные в виде теоретических упражнений, в качестве справочного материала.

Приношу глубокую благодарность рецензентам: доценту В.Ф. Бубнову, профессору Р.М. Жевняку за ряд конструктивных замечаний, способствовавших улучшению изложения материала.

Автор

ГЛАВА 1.
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства

Изучая дифференцирование функций, мы решали такую задачу: как по известной функции найти ее производную. Рассмотрим теперь обратную задачу: как, зная производную функции, найти саму функцию. К этому приводят многочисленные и разнообразные задачи из различных областей науки и техники: физики, механики, экономики и др., например, задача об отыскании закона прямолинейного движения материальной точки по известной скорости ее движения.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если для всех точек этого интервала выполняется равенство

$$F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in (a, b). \tag{1.1}$$

Замечание. Аналогично можно определить понятие первообразной и на отрезке $[a, b]$, при этом в точках $x=a$ и $x=b$ надо рассматривать односторонние производные.

Пример. Функция $F(x) = x^3/3$ является первообразной для функции $f(x)=x^2$ на интервале $(-\infty, +\infty)$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 = f(x),\ \forall\, x \in R$. Легко видеть, что для $f(x)=x^2$ первообразной будет также любая функция вида $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, C - $\forall$ *const*.

Действительно, $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 + 0 = f(x)$. Из приведенного примера видно, что *функция может иметь бесконечное множество первообразных.*

Справедлива следующая

Теорема. Для любой, *непрерывной* на интервале (a, b) функции $f(x)$, существует бесконечное множество первообразных, причем любые две из них $F_1(x)$ и $F_2(x)$ отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым, т.е.

$$F_2(x) = F_1(x) + C,\ C - \forall\ const. \tag{1.2}$$

Примем пока без доказательства (см. п. 2.3), что для любой *непрерывной* на интервале (a, b) функции существует бесконечное множество первообразных. Покажем, что любые две из них отличаются лишь постоянным слагаемым. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные от функции $f(x)$ на интервале (a, b). Рассмотрим функцию $\varphi(x) = F_2(x) - F_1(x),\ x \in (a, b)$. Тогда

$$\varphi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0,\ \forall\, x \in (a, b).$$

Из теоремы Лагранжа[*] о конечных приращениях следует, что $\varphi(x)\equiv C$, C-$\forall const$. Таким образом, $F_2(x)=F_1(x)+C$, C - $\forall$ $const$, $x\in(a, b)$, что и утверждалось в теореме.

Значит выражение (1.2), в силу условия (1.1), определяет бесконечное множество всех первообразных данной функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Определение 2. Бесконечное множество первообразных $F(x)+C$, C - $\forall$ $const$, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на интервале (a, b) и обозначается символом

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{1.3}$$

где $F'(x)=f(x)$, $x\in(a, b)$ C - $\forall const$.

При этом $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования, $\int$ - знаком неопределенного интеграла.

Отметим, что на плоскости $x0y$ бесконечное множество первообразных $y=F(x)+C$, C - $\forall$ $const$, является бесконечным множеством кривых, которые отличаются друг от друга лишь параллельным переносом (рис. 1.1).

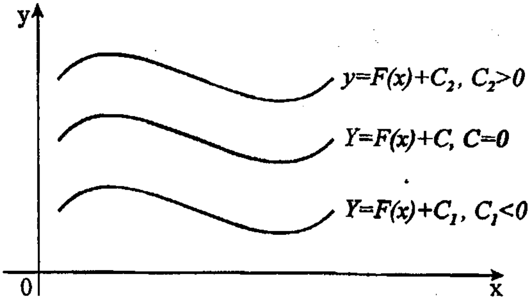

Рис. 1.1

Справедливы следующие соотношения:

1). Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=f(x)+0=f(x). \tag{1.4}$$

2). Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=\left(\int f(x)dx\right)'dx=f(x)dx. \tag{1.5}$$

3). Интеграл от производной:

$$\int f'(x)dx=f(x)+C,\ C\text{ - }\forall\ const. \tag{1.6}$$

---

[*] *Ж.Лагранж (1736-1813) - французский математик и механик.*

4). Интеграл от дифференциала:

$$\int df(x) = f(x) + C, \ C \text{ - } \forall \ const. \qquad (1.7)$$

Нахождение неопределенного интеграла от функции *f(x)* называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование является операцией обратной дифференцированию.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ -1 \neq n \in R.$

2. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \ x \neq 0.$

3. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, \quad x \neq k\pi, \ k \in Z.$

7. $\int e^x dx = e^x + C.$

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ 0 < a \neq 1.$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C_1.$

10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1, \ |x| < |1|.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ |x| < |a|, \ a \neq 0.$

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \ a \neq 0.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \ x^2 \pm a^2 \geq 0, \ a \neq 0.$

15. $\int chxdx = shx + C.$

16. $\int shx dx = chx + C$.

17. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

18. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C,\ x \neq 0$.

Каждая из приведенных выше формул проверяется путем дифференцирования.

Свойства неопределенного интеграла

1). Интеграл от алгебраической суммы непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов слагаемых:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx. \tag{1.8}$$

Для доказательства продифференцируем обе части этого равенства

$$\left(\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx\right)' = \left(\int f_1(x) dx\right)' \pm \left(\int f_2(x) dx\right)'$$

Из формулы (1.4) следует

$$f_1(x) \pm f_2(x) = f_1(x) \pm f_2(x),$$

что говорит о справедливости соотношения (1.8).

2). Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла или вносить под него:

$$\int C \cdot f(x) dx = C \int f(x) dx,\ C - \forall\ const. \tag{1.9}$$

Доказывается аналогично предыдущему свойству.

3). Результат интегрирования формально не изменится, если мы переменную интегрирования заменим любой *дифференцируемой* функцией от нее, т.е. если

$$\int f(x) dx = F(x) + C,\ F'(x) = f(x), \tag{1.10}$$

то

$$\int f(u) du = F(u) + C,\ u = \varphi(x). \tag{1.11}$$

Это свойство основывается на свойстве инвариантности первого дифференциала, учитывая что

$$dF(x) = F'_x(x) dx = f(x) dx,$$
$$dF(u) = F'_u(u) du = f(u) du.$$

Из формулы (1.7) следует

$$\int f(u) du = \int dF(u) = F(u) + C,\ u = \varphi(x),$$

что и утверждалось.

Замечание. Свойство 3) дает нам *основное правило вычисления неопределенных интегралов* путем сведения их к табличным интегралам относительно вновь введенной переменной.

В частности

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C\text{, } a\neq 0. \qquad (1.12)$$

Примеры. Найти интегралы:

1). $\int 3x^2\cos(x^3)dx = \int\cos(x^3)d(x^3) = \int\cos u du = \sin u + C = \sin(x^3)+C.$

$u=x^3,\ du=3x^2dx.$

2). $\int\cos 3x dx = \frac{1}{3}\int\cos(3x)\cdot 3dx = \frac{1}{3}\int\cos(3x)d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$

$u=3x,\ du=d(3x)=3dx.$

3). $\int ctgx dx = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx = \int\frac{du}{u} = \ln|u|+C = \ln|\sin x|+C.$

$u=\sin x,\ du=\cos x dx.$

4). $\int\frac{dx}{x\ln^3 x} = \int\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \int\ln^{-3}xd(\ln x) = \frac{\ln^{-2}x}{-2}+C = -\frac{1}{2\ln^2 x}+C.$

$u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx.$

В приведенных примерах применен метод внесения производной под знак дифференциала, основанный на использовании формулы $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$.

1.2.Основные методы интегрирования

1. Замена переменной в неопределенном интеграле

Пусть нам требуется вычислить неопределенный интеграл $\int f(x)dx$. Часто, ввиду сложности подынтегральной функции, сразу записать первообразную *F(x)* трудно, хотя и известно, что она существует. В таких случаях делается *замена переменной (подстановка)* с тем, чтобы интеграл по новой переменной был *более простым*, чем исходный. Справедлива следующая формула

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,\ x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt. \qquad (1.13)$$

При этом, вычислив интеграл, находящийся в правой части равенства (1.13) по новой переменной *t*, мы должны затем возвратиться к старой переменной *x*. Из соотношения (1.4) следует

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x).$$

Правую часть равенства (1.13) будем дифференцировать по x как сложную функцию, учитывая при этом, что $t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'_t}$, получим

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \cdot t'_x =$$

$$= f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Сравнивая правые части этих равенств, убеждаемся в справедливости формулы (1.13).

Замечание. Часто при вычислении интегралов вместо замены $x = \varphi(t)$ удобно делать замену $t = \psi(x)$.

Примеры. Найти интегралы:

1). $\int\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C$, $t = \psi(x)$, $dt = \psi'(x)dx$.

2). $\int\frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt + C = \frac{1}{2}arctg(x^2) + C$, $t = x^2$,

$dt = 2xdx$.

2. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ *непрерывно дифференцируемые функции.* Найдем дифференциал от их произведения $d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$. Проинтегрируем обе части этого равенства

$$\int d(u\cdot v) = \int udv + \int vdu \Leftrightarrow u\cdot v = \int udv + \int vdu,$$

т.е.

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu. \qquad (1.14)$$

Формула (1.14) и есть *формула интегрирования по частям.*

При этом *может оказаться*, что интеграл, стоящий в правой части равенства (1.14), будет более простым, чем интеграл, находящийся в левой части этого равенства.

Пример 1. Найти интеграл:

$$\int x\cdot\cos 3xdx = \left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos 3xdx & v=\int\cos 3xdx = \frac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x}{3}\sin 3x - \frac{1}{3}\int\sin 3xdx = \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C.$$

Замечание 1. Предположим, что при вычислении данного интеграла мы u и dv выбрали по-другому

$$\int x\cos 3x dx = \left| \begin{matrix} u = \cos 3x & du = -3\sin 3x dx \\ dv = x dx & v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\cos 3x + \frac{3}{2}\int x^2 \sin 3x,$$

т.е., если мы *неудачно выберем* u и dv, то в результате применения формулы интегрирования по частям, *получим интеграл более сложный, чем исходный.*

С помощью интегрирования по частям вычисляются интегралы вида:

$$\int x^n \cos ax dx,\ \int x^n \sin ax dx,\ \int x^n e^{ax} dx, n \in N,\ a \in R,$$

при этом полагают $u = x^n$, т.к. при дифференцировании эта функция будет упрощаться.

Пример 2. Найти интеграл:

$$\int x^2 \cdot e^{5x} dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = e^{5xdx} & v = \int e^{5x} dx = \dfrac{1}{5}e^{5x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{5}e^{5x} - \frac{2}{5}\int x \cdot e^{5x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{5}e^{5x} - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{5}e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C\right).$$

$$\int x \cdot e^{5x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{5x} dx & v = \dfrac{1}{5}e^{5x} \end{matrix} \right| = \frac{x}{5}e^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x} dx = \frac{x}{5}e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C.$$

Из данного примера видно, что при вычислении интеграла формула интегрирования по частям может применяться несколько раз.

Пример 3. Найти интеграл:

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x & du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx + C,$$

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x & du = \cos x dx \\ dv = e^x & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x + C,$$

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x + C,$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C_1,\ C_1 - \forall\ const.$$

С помощью аналогичного приема двукратного интегрирования по частям вычисляются интегралы вида:

$$\int e^{ax} \cos bx dx,\quad \int e^{ax} \sin bx dx,\quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx,\quad a, b \in R.$$

Замечание 2. Если мы применяем формулу интегрирования по частям и в подынтегральной функции имеются *логарифмы или обратные тригонометрические функции,* то их обычно полагают за u, т.к. их дифференциалы du более простые, чем сами функции.

1.3. Интегрирование функций с квадратным трехчленом в знаменателе

Пусть требуется вычислить интеграл

$$I=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$$

1). Сначала нужно выделить полный квадрат у трехчлена

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\pm k^2,\ \ \pm k^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

$$I=\int\frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\pm k^2}dx.$$

2). Сделаем замену переменной

$$x+\frac{p}{2}=t,\quad x=t-\frac{p}{2},\quad dx=dt.$$

С учетом этого интеграл примет вид

$$I=\int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2\pm k^2}dt=A\int\frac{tdt}{t^2\pm k^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_1.$$

Интеграл

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$$

является *табличным* при любом знаке, поэтому

$$I=\frac{A}{2}\int\frac{d\left(t^2\pm k^2\right)}{t^2\pm k^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_1=\frac{A}{2}\ln\left|t^2\pm k^2\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_1=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_1+C.$$

Замечание 1. К рассмотренному интегралу легко сводится более общий интеграл

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{a}\int\frac{Ax+B}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}dx,\ a\neq 0.$$

Замечание 2. Совершенно аналогично, с помощью выделения полного квадрата у трехчлена и соответствующей замены вычисляются интегралы вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Пример. Найти интеграл:

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x+7}dx = \int \frac{x-3}{(x+2)^2+3}dx = \left| \begin{matrix} x^2+4x+7 = x^2+2\cdot 2x+4-4+7 = (x+2)^2+3 \\ x+2=t, \ x=t-2, \ dx=dt. \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t-5}{t^2+3}dt = \int \frac{dt}{t^2+3} - 5\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+3)}{t^2+3} - 5\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+3\right| - \frac{5}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+7\right| - \frac{5}{\sqrt{3}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{3}} + C.$$

1.4. Интегрирование рациональных функций

Всякая рациональная функция $R(x)$ есть отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m}{B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_n} = \frac{P(x)}{Q(x)}. \qquad (1.15)$$

Если степень многочлена, находящегося в числителе, меньше степени многочлена в знаменателе, т.е. $m < n$, то рациональная функция (1.15) называется *правильной*, в противном случае при $m \geq n$ - *неправильной.*

Если рациональная функция *неправильная,* то разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, выделим целую часть, которая будет многочленом, и *правильную* рациональную функцию в виде остатка

$$R(x) = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \qquad (1.16)$$

где $M(x)$ - многочлен, $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ - *правильная* рациональная функция. Поскольку интегрирование многочлена затруднений не представляет, то основная трудность при интегрировании рациональных функций заключается в интегрировании правильных рациональных функций.

Справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема. Любую *правильную* рациональную функцию $R(x) = \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ со знаменателем

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}\ldots(x^2+rx+s)^{\nu},$$

можно единственным образом представить в виде суммы простейших дробей (функций)

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha}...(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}...(x^2+rx+s)^{\mu}}=$$

$$=\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+...+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+...+\frac{B_0}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+...$$

$$...+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\frac{C_0x+D_0}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+...+\frac{C_{\mu-1}x+D_{\mu-1}}{x^2+px+q}+...$$

$$...+\frac{M_0x+N_0}{(x^2+rx+s)^{\nu}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+rx+s)^{\nu-1}}+...+\frac{M_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{x^2+rx+s}, \qquad (1.17)$$

где A_0, A_1, ..., $M_{\nu\text{-}1}$, $N_{\nu\text{-}1}$ - неопределенные пока коэффициенты, подлежащие вычислению.

Для определения коэффициентов в простейших дробях поступают следующим образом: правую часть равенства (1.17) приведем к общему знаменателю, который, как и знаменатель левой части, равен $Q(x)$. Т.к. знаменатели обеих частей равенства совпадают, то должны равняться и их числители. Далее приравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях x у многочленов, находящихся в числителях, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов, решая которую, найдем их конкретные числовые значения.

Этот метод нахождения коэффициентов называется *методом неопределенных коэффициентов.*

Укажем еще один способ нахождения неопределенных коэффициентов (*способ частных значений*).

Так как многочлены, получившиеся в числителях правой и левой частей равенства, после приведения к общему знаменателю должны быть тождественно равны, то *придавая x конкретные числовые значения*, мы получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов.

Таким образом, всякую правильную рациональную функцию можно представить в виде суммы простейших рациональных дробей.

Замечание. Из равенства (1.17) видно, что для вычисления интеграла от *правильной* рациональной функции достаточно уметь интегрировать простейшие дроби (функции) вида:

1. $\int\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$; *2.* $\int\frac{dx}{x-a}$; *3.* $\int\frac{Mx+N}{x^2+rx+s}dx$;

4. $\int\frac{Mx+N}{(x^2+rx+s)^{\nu}}dx, D=r^2-4s<0, \nu\geq 2.$

Ранее мы показали, как вычисляются интегралы от простейших дробей типа 1, 2, 3. Интегралы от простейших дробей типа 4 вычисляются с помощью рекуррентных формул.

Теоретическое упражнение. Получить самостоятельно рекуррентное соотношение

$$I_\nu=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^\nu}=\frac{1}{2(\nu-1)a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^{\nu-1}}+(2\nu-3)I_{\nu-1}\right],\ \nu=2,3,\ldots\ (1.18)$$

Интегрирование дроби типа 4, после выделения в числителе производной квадратного трехчлена, находящегося в знаменателе, выделения полного квадрата в этом трехчлене и замены переменной, аналогичной применяемой в п. 1.3, в существенном, сводится к применению формулы (1.18).

Примеры. Найти интегралы:

1). $I_1=\int\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx.$

В соответствии с (1.17) представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2},$$

где числа A, B, C пока неизвестны. Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители в левой и правой частях, получим

$$2x+3=A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2.\qquad(1.19)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{c|l}x^2&0=B+C,\\x^1&2=A+B-2C,\\x^0&3=2A-2B+C.\end{array}\Bigg\}\qquad(1.20)$$

Решая систему (1.20) найдем конкретные значения коэффициентов A, B, C.

Определим значения A, B, C другим способом, придавая x в равенстве (1.19) конкретные числовые значения.

$$\begin{array}{c|l}x=1&5=3A\Rightarrow A=\frac{5}{3},\\x=-2&-1+=9C\Rightarrow C=-\frac{1}{9},\\x=0&3=2A-2B+C\Rightarrow B=\frac{1}{9}.\end{array}$$

Учитывая это, будем иметь

$$I_1=\int\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{5}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{5}{3}\int(x-1)^{-2}d(x-1)+\frac{1}{9}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{9}\int\frac{d(x+2)}{x+2}=$$

$$=-\frac{5}{3(x-1)}+\frac{1}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{9}\ln|x+2|+C=-\frac{5}{3(x-1)}+\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

2). $I_2=\int\frac{dx}{x^3+1}$.

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Отсюда

$$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1) \qquad (1.21)$$

Применим *смешанный метод* нахождения коэффициентов. Из равенства (1.21) следует

$$\begin{array}{c|l} x=-1 & 1=3A\Rightarrow A=\dfrac{1}{3}, \\ x=0 & 1=A+C\Rightarrow C=\dfrac{2}{3}, \\ x^2 & 0=A+B\Rightarrow B=-\dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Учитывая это, получим

$$I_2=\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\left|x-\frac{1}{2}=t,x=t+\frac{1}{2},dx=dt\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

1.5 Интегрирование простейших иррациональных функций

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})dx,$$

где R - рациональная функция своих аргументов. Чтобы проинтегрировать такую функцию, нужно сначала выполнить замену переменной $x = t^{\nu}$, где ν - общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Другими словами, нужно сделать такую замену переменной, чтобы все корни относительно старой переменной x извлеклись по новой переменной t.

Пример. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$\left| x = t^6 \Leftrightarrow t = x^{\frac{1}{6}}, \quad dx = 6t^5 \right|.$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{3} + t - \ln|t+1|\right) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

Аналогично с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\nu}$ вычисляются интегралы вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx$$

1.6. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{1.22}$$

где R- рациональная функция своих аргументов, рационализируются с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*

$$tg\frac{x}{2} = t, -\pi < x < \pi. \tag{1.23}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Из подстановки (1.23) следует, что

$$\frac{x}{2} = arctgt,\quad x = 2arctgt,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

С учетом приведенных формул, интеграл (1.22) после универсальной подстановки (1.23) примет вид

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt, \qquad (1.24)$$

где R_1 - рациональная функция переменной t.

Пользуясь правилами интегрирования рациональных функций можно утверждать, что интеграл (1.24) относительно *новой* переменной t *всегда* может быть вычислен.

Пример. Найти интеграл

$$I = \int\frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$$

Применим универсальную подстановку $tg\frac{x}{2} = t$.

Учитывая, что

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

получим

$$I = \int\frac{dx}{1+\cos x+\sin x} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{2dt}{2+2t} = \int\frac{d(t+1)}{t+1} =$$

$$= \ln|t+1|+C = \ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right|+C.$$

Замечание. Отметим, что после применения универсальной тригонометрической подстановки (1.23) часто получается *сложная* подынтегральная функция относительно новой переменной t, что требует больших затрат по времени при вычислении интегралов. Поэтому, наряду с универсальной тригонометрической подстановкой полезно знать и применять *другие подстановки*, которые приводят к вычислению интеграла более быстро, чем универсальная.

Пусть интеграл (1.22) имеет вид:

1. $I_1 = \int R(\sin x)\cdot\cos x dx$.

В этом случае более удобной подстановкой, чем универсальная, будет подстановка вида

$$\sin x = t, \quad \cos x dx = dt,$$

после которой

$$I_1 = \int R(\sin x) \cdot \cos x dx = \int R(t) dt.$$

2. $I_2 = \int R(\cos x) \cdot \sin x dx = -\int R(t) dt$, где

$$\cos x = t, \quad -\sin x dx = dt.$$

3. Пусть подынтегральная функция зависит лишь от *четных* степеней $\sin x$, $\cos x$

$$I_3 = \int R\left(\sin^{2p} x, \cos^{2q} x\right) dx, p, \ q \in N.$$

В этом случае более удобной подстановкой, чем универсальная, будет подстановка вида

$$tgx = t, \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Пример. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 1} = \int \frac{dx}{3\cos^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (3 + tg^2 x)} =$$

$$= \int \frac{d(tgx)}{3 + tg^2 x} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{tgx}{\sqrt{3}} + C$$

4. При вычислении интеграла $\int R(tgx) dx$ удобно применять подстановку $tgx=t$.

5. Рассмотрим интеграл вида

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx, m, n \in N.$$

5.1. Пусть *хотя бы одно* из чисел m или n будет *нечетным*: $n = 2p+1$, $p \in N$, тогда

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p d(\sin x).$$

Далее возводя разность $(1 - \sin^2 x)$ в степень p и разбивая интеграл на алгебраическую сумму интегралов, мы получим алгебраическую сумму табличных интегралов, относительно переменной $t = \sin x$.

5.2. Пусть теперь обе степени m и n *четные*, т.е. $m = 2p$, $n = 2q$, $p, q \in N$.

В данном случае у подынтегральной функции применяется *понижение степеней синуса и косинуса переходом к косинусу двойного аргумента.*

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\int \sin^{2p} x \cdot \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q dx:$$

Затем каждое из выражений, находящихся в скобках, возведем в соответствующие степени и разобьем интеграл на алгебраическую сумму интегралов, которые будут содержать как четные, так и нечетные степени функции cos2*x*. Интегралы от *нечетных* степеней функции cos2*x* вычисляются по правилу, указанному в предыдущем пункте. К интегралам от *четных* степеней функции cos2*x* снова применяется правило понижения степени переходом к двойному аргументу.

Примеры. Найти интегралы:

1. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x d(\sin x) =$

$= \int \sin^4 x(1-\sin^2 x) d(\sin x) = \int \sin^4 x d(\sin x) - \int \sin^6 x d(\sin x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$

2. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

6. $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx = \frac{1}{2}\int [\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x] dx.$

Аналогично вычисляются интегралы от произведения синусов и косинусов *различных* аргументов.

1.7. Интегрирование квадратичных иррациональностей с помощью тригонометрических подстановок

Пусть требуется найти интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \qquad (1.25)$$

где *R* - рациональная функция своих аргументов, $a \neq 0$, *b*, *c* - действительные числа.

С помощью выделения полного квадрата под знаком корня и простой замены (см. п. 1.3.) интеграл (1.25) всегда может быть приведен к одному из следующих типов:

1. $\int R\left(t, \sqrt{n^2 - m^2t^2}\right) dt;$
2. $\int R\left(t, \sqrt{m^2t^2 - n^2}\right) dt;$
3. $\int R\left(t, \sqrt{m^2t^2 + n^2}\right) dt.$

Чтобы избавиться от иррациональности, обычно применяют следующую замену переменных:

1) $t = \frac{n}{m}\sin z$; 2) $t = \frac{n}{m}\frac{1}{\cos z}$; 3) $t = \frac{n}{m}tgz$ или

1') $t = \frac{n}{m}\cos z$; 2') $t = \frac{n}{m}\frac{1}{\sin z}$; 3') $t = \frac{n}{m}ctgz$.

Замечание. Отметим, что указанные интегралы могут быть вычислены также с помощью *подстановок Эйлера**.

Пример. Найти интеграл

$$I = \int\sqrt{4-x^2}dx.$$

Применим подстановку

$$x = 2\sin t, \quad dx = 2\cos t dt, \quad t = \arcsin\frac{x}{2}.$$

С учетом этих соотношений будем иметь

$$I = \int\sqrt{4-x^2}dx = \int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 4\int\cos^2 t dt = 4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 2t + \sin 2t + C = 2t + 2\sin t\cdot\cos t + C = 2t + 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

1.8. Некоторые интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

Укажем несколько так называемых *"неберущихся"* в элементарных функциях интегралов:

$\int\frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус, $\int\frac{\cos x}{x}dx$ – интегральный косинус, $\int e^{-x^2}dx$ – интеграл вероятностей, $\int\sin x^2 dx$, $\int\cos x^2 dx$ – интегралы Френеля, $\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx$, $0 < k < 1$ – эллиптический интеграл 2-го рода.

Такого вида интегралы вычисляются обычно одним из приближенных методов (см., например, Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. - М.: Наука, 1967).

---

* *Л. Эйлер (1707 - 1783) - выдающийся математик, механик, физик и астроном швейцарского происхождения, большую часть жизни проработавший в России.*

ГЛАВА 2.
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Пусть нам требуется вычислить *площадь криволинейной трапеции*, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ (рис. 2.1).

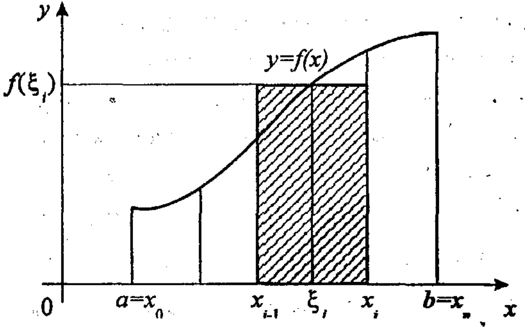

Рис. 2.1

Отрезок $[a, b]$ разобьем на n элементарных отрезков точками
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$.

Длины элементарных отрезков обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$. Пусть $\lambda = max\ \Delta x_i$, $i = \overline{1,n}$. В каждой из точек деления x_i проведем прямую, параллельную оси $0y$, до пересечения с графиком $y= f(x)$. Тем самым, вся криволинейная трапеция разобьется на n элементарных *криволинейных* трапеций. На каждом из элементарных отрезков выберем произвольно по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Через каждую из точек ξ_i проведем прямую, параллельную оси $0y$, до пересечения с графиком $y= f(x)$. Далее каждую из элементарных криволинейных трапеций заменим приближенно прямоугольником с высотой $f(\xi_i)$ и основанием Δx_i, $i = \overline{1,n}$. Тем самым площадь криволинейной трапеции S будет приближенно равна площади S_n n-ступенчатой фигуры, состоящей из n элементарных прямоугольников

$$S \approx S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (2.1)$$

Под *площадью S криволинейной трапеции* будем понимать предел, к которому стремится площадь S_n n-ступенчатой фигуры при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а длина λ наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (2.2)$$

Таким образом, задача вычисления площади криволинейной трапеции приводит к необходимости вычисления предела специального вида (2.2).

К вычислению аналогичных пределов приводят задачи об определении длины пути по заданной скорости, нахождении объема выпуска продукции по известной производительности труда (см. формулу (2.81)) и др.

Отвлечёмся теперь от задачи вычисления площади криволинейной трапеции и других конкретных задач. Пусть $y=f(x)$ - произвольная *непрерывная* функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Отрезок $[a, b]$ разобьем на n элементарных отрезков точками $a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Длины элементарных отрезков обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$. *Пусть* $\lambda = max\ \Delta x_i$, $i=\overline{1,n}$. В *каждом* из элементарных отрезков выберем *произвольно* по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, вычислим значения функции $y=f(x)$ в этих точках, умножим их на длины соответствующих элементарных отрезков и просуммируем по всем разбиениям. В результате получим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (2.3)$$

Составленная по указанному правилу сумма (2.3) называется *интегральной суммой* для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определение. Если существует *конечный предел* интегральной суммы (2.3) при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а длина λ наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора точек ξ_i, то он называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (2.4)$$

При этом числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ - подынтегральной функцией, x - переменной интегрирования.

Обычно предел (2.4) называют *интегралом Римана*[*], а функцию, для которой этот предел существует, *интегрируемой в смысле Римана* на отрезке $[a, b]$.

---

[*] *Б. Риман (1826 - 1866) - немецкий математик.*

Из равенства (2.4) следует, что определённый интеграл зависит от подынтегральной функции, пределов интегрирования и не зависит от переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du. \qquad (2.5)$$

Справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема. *(Достаточное условие существования определенного интеграла).* Если функция $y=f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, то она *интегрируема на этом отрезке*, т.е. предел (2.4) всегда существует, при этом он не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки, ни от выбора точек ξ_i в них.

Замечание. Отметим, что определённый интеграл (2.4), как предел интегральной суммы вычисляется сравнительно редко из-за сложности вычисления таких пределов. Обычно определённый интеграл вычисляется с помощью неопределённого интеграла по формуле Ньютона-Лейбница (2.23). Тем не менее, вычислим один простой интеграл, пользуясь формулой (2.4).

Пусть $y=f(x)\equiv 1, \forall x \in [a,b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n элементарных отрезков, длины которых обозначим Δx_i, $i=\overline{1,n}$. В каждом из элементарных отрезков выберем по точке ξ_i и составим интегральную сумму (2.3). Т.к. функция $f(x)\equiv 1$, $\forall x \in [a,b]$, то она равна 1 и во всех точках $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1,n}$.

Поэтому

$$S_n = 1\cdot\Delta x_1 + 1\cdot\Delta x_2 + \ldots + 1\cdot\Delta x_n = b-a, \forall n \in N, \forall \xi_i.$$

Далее на основании формулы (2.4) получим

$$\int_a^b 1\cdot dx = \int_a^b dx = b-a. \qquad (2.6)$$

2.2. Основные свойства определенного интеграла

Будем предполагать, что рассматриваемые ниже функции интегрируемы на отрезке $[a, b]$. В справедливости приводимых свойств легко убедиться из формулы (2.4), известных свойств пределов и геометрических соображений.

1. Постоянный множитель можно выносить из под знака интеграла, либо вносить под него:

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, C - \forall const. \qquad (2.7)$$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы *конечного* числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов слагаемых:

$$\int\limits_a^b[f_1(x)\pm...\pm f_n(x)]dx=\int\limits_a^b f_1(x)dx\pm...\pm\int\limits_a^b f_n(x)dx. \qquad (2.8)$$

Замечание. Отметим, что для *бесконечной* суммы непрерывных функций указанное свойство, вообще говоря, несправедливо.

3. Если у определенного интеграла поменять местами пределы интегрирования, то знак интеграла изменится на противоположный

$$\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx. \qquad (2.9)$$

Из равенства (2.9) следует, что

$$\int\limits_a^a f(x)dx=0. \qquad (2.10)$$

4. Если $f(x)\geq 0, x\in[a,b], a<b$, то

$$0\leq\int\limits_a^b f(x)dx=S, \qquad (2.11)$$

где S - площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ (рис. 2.2).

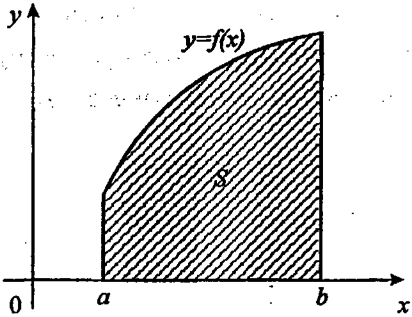

Рис. 2.2

В этом заключается *геометрический смысл определенного интеграла.*

5. Пусть $f(x)\leq\varphi(x), x\in[a,b], a<b$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx\leq\int\limits_a^b\varphi(x)dx, \qquad (2.12)$$

т.е. неравенства можно интегрировать с сохранением их знака.

6. Для любых чисел *a, b, c* имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx. \qquad (2.13)$$

7. Пусть функция $y=f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$. Тогда она ограничена и принимает *на этом отрезке* свое наибольшее и наименьшее значения.

$$M = \max_{\forall x\in[a,b]} f(x),\ m = \min_{\forall x\in[a,b]} f(x),$$

при этом

$$m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]. \tag{2.14}$$

Докажем, что выполняется неравенство

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \tag{2.15}$$

Проинтегрируем неравенство (2.14) на отрезке $[a, b]$. На основании формул (2.6), (2.7) будем иметь

$$\int_a^b mdx = m\int_a^b dx = m(b-a),\quad \int_a^b Mdx = M\int_a^b dx = M(b-a).$$

С учетом полученных равенств и соотношения (2.12) получим требуемое неравенство (2.15).

8. Если функция $y=f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, то для нее имеет место *теорема о среднем*, т.е. существует точка $\xi\in[a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \tag{2.16}$$

или

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{2.17}$$

Число $f(\xi)$, определяемое равенством (2.17), называется средним значением функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 2.3).

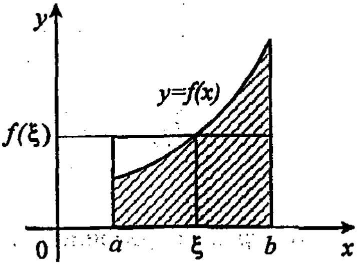

Рис. 2.3

Проведем аналитическое доказательство существования точки ξ. Для этого неравенство (2.15) разделим на $b - a$, получим

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M, a < b.$$

Т.к. в силу неравенств (2.14) *непрерывная на отрезке* $[a, b]$ функция $y = f(x)$, принимающая все свои промежуточные значения *сплошь*, изменяется в тех же пределах, что и число

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

9. Кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Здесь у функции $y = f(x)$ допускается наличие лишь *конечного* числа точек разрыва первого рода (рис. 2.4).

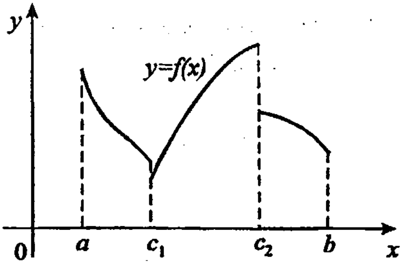

Рис. 2.4

Например, пусть

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x), a \le x \le c_1, \\ f_2(x), c_1 \le x \le c_2, \\ f_3(x), c_2 \le x \le b, \end{cases}$$

тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f_1(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2(x)dx + \int_{c_2}^{b} f_3(x)dx. \qquad (2.18)$$

2.3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна* на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt, x\in[a,b], \tag{2.19}$$

являющийся функцией верхнего предела x.

Если $f(x)\geq 0,\ x\in[a,b]$, то значение функции $\Phi(x)$ равно площади между осью $0x$ и кривой $y=f(x)$ на отрезке $[a, x]$ (рис. 2.5).

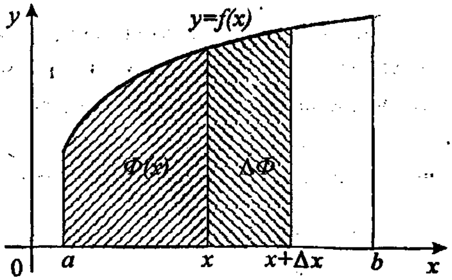

Рис. 2.5

Справедлива следующая

Теорема. Производная от интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена значением верхнего предела, т.е.

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x). \tag{2.20}$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx и найдем

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Тогда с учетом (2.19) получим

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \tag{2.21}$$

К интегралу (2.21) применим теорему о среднем, т.е. формулу (2.16). Будем иметь

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x, \xi\in[x, x+\Delta x],$$

т.е. $\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x, \xi\in[x,\ x+\Delta x]$. С учетом этого

$$\Phi'(x)=\lim_{\forall\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\forall\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$$

или $\Phi'(x)=f(x)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Для любой, *непрерывной на отрезке* $[a, b]$ функции $f(x)$, существует первообразная, определяемая формулой (2.19).

Следствие 2. Из формулы (2.20) следует, что

$$\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)'_x = \left(-\int_b^x f(t)\,dt\right)'_x = -\left(\int_b^x f(t)\,dt\right)'_x = -f(x). \qquad (2.20')$$

Замечание. В п. 1.8 указаны первообразные некоторых элементарных функций, не являющиеся сами элементарными функциями. Так как первообразные отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым, то интеграл с переменным верхним пределом используется для определения *неэлементарных* функций. Укажем некоторые их них, имеющие важное теоретическое и прикладное значение

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt, \quad \int_0^x \cos t^2 dt, \quad \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \int_0^x \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt, \quad 0<k<1.$$

Теоретическое упражнение. Доказать ***самостоятельно***, что

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right)'_x = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x), \qquad (2.22)$$

где $a(x)$, $b(x)$ - *дифференцируемые* в области интегрирования функции.

2.4. Формула Ньютона-Лейбница

Эта *основная формула интегрального исчисления* имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \equiv F(b) - F(a), \qquad (2.23)$$

где $F(x)$ - какая-либо первообразная для непрерывной функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ - какая-либо первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Поскольку интеграл (2.19) также является первообразной для функции $f(x)$, а *любые* две первообразные отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым (см. равенство(1.2)), то будем иметь

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \quad x \in [a,b], \quad C - \forall const. \qquad (2.24)$$

Полагая в равенстве (2.24) $x=a$, получим

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C \Leftrightarrow 0 = F(a) + C \Leftrightarrow C = -F(a).$$

С учетом этого, равенство (2.24) запишется в виде

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \forall x \in [a,b]. \qquad (2.25)$$

Полагая $x = b$, из (2.25) получим

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b. \qquad (2.26)$$

Так как определенный интеграл не зависит от переменной интегрирования (см. равенство 2.5), то (2.26) по существу совпадает с формулой (2.23), что и утверждалось.

Поскольку в качестве *F(x)* может быть взята любая первообразная для *f(x)*, то обычно полагают

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Таким образом, формула Ньютона[*]-Лейбница[**] дает *основное правило вычисления определенного интеграла* через неопределенный интеграл.

Символ $\Big|_a^b$ называется *знаком двойной подстановки.*

Замечание. Если рассматривать разрывные подынтегральные функции, то их первообразные на отрезке интегрирования также могут оказаться разрывными и формальное применение формулы Ньютона-Лейбница может привести к неверному результату (см. замечание 3 в п. 2.8).

Примеры. Вычислить интегралы:

1. $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$

2. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-1}^{1} = arctg1 - arctg(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

2.5. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где *f(x)* - *непрерывная* на отрезке [*a*, *b*] функция.

Сделаем замену переменной *x*=φ(*t*), предполагая при этом, что:

1. φ(α)= *a*, φ(β)= *b*, т.е. отрезки интегрирования по старой и по новой переменной будут соответствовать друг другу следующим образом $a \le x \le b \Leftrightarrow \alpha \le t \le \beta$;

2. Функция *x*=φ(*t*) непрерывно дифференцируема на отрезке [α, β].

Тогда справедлива следующая формула замены переменной в определенном интеграле

---

[*] *И. Ньютон (1643 - 1727) - английский математик и физик.*

[**] *Г. Лейбниц (1646 - 1716) - немецкий математик и философ.*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\varphi(t)=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (2.27)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Применим дважды формулу Ньютона-Лейбница, используя при этом правило дифференцирования сложной функции. В результате получим

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=$$

$$=\int_\alpha^\beta dF[\varphi(t)]=\int_\alpha^\beta F'[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Замечание. *Выполняя замену переменной в определенном интеграле, мы должны одновременно менять пределы интегрирования, после чего вычисляем интеграл по новой переменной в новых пределах, не возвращаясь к старой переменной.*

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c} x=3\sin t, dx=3\cos t dt,\\ \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9(1-\sin^2 t)}=3|\cos t|,\\ x=0\Rightarrow 0=3\sin t\Rightarrow t=0,\\ x=3\Rightarrow 3=3\sin t\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|\cos t|\cdot 3\cos t dt=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=$$

$$=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\left(\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9\pi}{4}+0-0-0=$$

$$=\frac{9\pi}{4}=2{,}25\pi\approx 2{,}25\cdot 3{,}14\approx 7{,}07.$$

2.6. Интегрирование периодических, четных и нечетных функций

Справедливы следующие формулы:

1. Пусть $f(x)$ - *периодическая* функция периода T, т.е. $f(x+T)=f(x)$, $\forall x$, $T\in R$, тогда

$$\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx, \forall a\in R. \qquad (2.28)$$

2. Пусть $f(x)$ - *четная* функция, т.е. $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in[-a, a]$, $a\in R$, тогда

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx. \qquad (2.29)$$

3. Пусть $f(x)$ - *нечетная* функция, т.е. $f(-x)= -f(x)$, $\forall x\in[-a,\ a]$, $a\in R$, тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \tag{2.30}$$

В справедливости свойств (2.28) - (2.30) легко убедиться из геометрического смысла определенного интеграла (рис. 2.6).

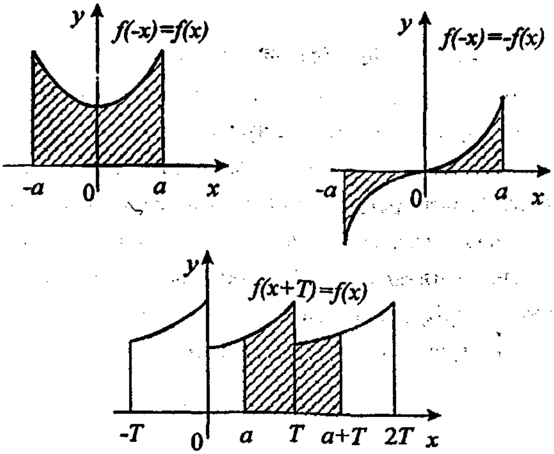

Рис. 2.6

Теоретическое упражнение. Провести строгое доказательство формул (2.28) - (2.30), выполняя в каждой из них соответствующую замену переменной.

2.7. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - непрерывно дифференцируемые не отрезке $[a,\ b]$ функции. Тогда справедлива следующая формула интегрирования по частям

$$\int_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} vdu. \tag{2.31}$$

Доказательство. Интегрируя в пределах от a до b равенство $d(uv)=vdu+udv$ и используя формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_{a}^{b} d(uv) = uv\Big|_{a}^{b},$$

получим

$$uv\Big|_{a}^{b} = \int_{a}^{b} vdu + \int_{a}^{b} udv.$$

Перенося первый интеграл в левую часть, получим требуемое равенство (2.31).

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, du = \dfrac{1}{1+x^2}dx, \\ dv = dx, \; v = x. \end{matrix} \right| = xarctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}44.$$

2.8. Несобственные интегралы

При рассмотрении определенного интеграла (2.4) как предела интегральной суммы предполагалось, что отрезок интегрирования имеет *конечную* длину и подынтегральная функция *ограничена* на этом отрезке. Устраним эти ограничения, распространив понятие интеграла на случай бесконечных пределов интегрирования и неограниченных подынтегральных функций (*несобственные* интегралы).

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна для $a \leq x < +\infty$.

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$J(b) = \int_a^b f(x)dx, a < b. \qquad (2.32)$$

Выясним поведение этого интеграла при $b \to +\infty$ (рис. 2.7).

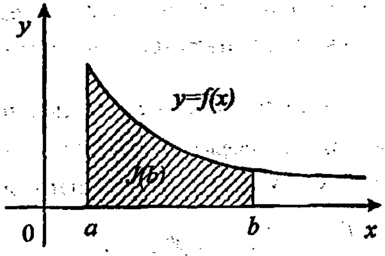

Рис. 2.7

Определение. Предел интеграла (2.32) при $b \to +\infty$ называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, +\infty)$ и обозначается символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2.33)$$

Если этот предел *существует и конечен*, то несобственный интеграл (2.33) называется *сходящимся*, в противном случае - *расходящимся*.

Иногда интеграл (2.33) называют *несобственным интегралом первого рода*.

Аналогично определяется несобственный интеграл на полуинтервале (-∞, *b*]. Несобственный интеграл (2.33) можно вычислять с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} \equiv F(+\infty) - F(a) = \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(a). \qquad (2.34)$$

Геометрически для $f(x) \geq 0$, $x \in [a, +\infty)$ несобственный интеграл (2.33) по аналогии с собственным интегралом (2.11) представляет собой площадь *S* бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $y = 0$, $y = f(x)$ (рис. 2.8).

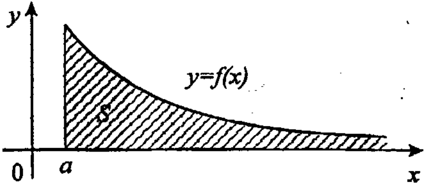

Рис. 2.8

В случае *сходящегося* интеграла площадь *S* будет *конечной*, а в случае *расходящегося - бесконечной.*

Замечание 1. При решении некоторых задач бывает достаточно не вычисляя несобственного интеграла установить лишь сходится он или расходится. Для этой цели обычно используют *теоремы сравнения*, которые мы приведем без строгого доказательства.

Теорема 1. Пусть непрерывные на полуинтервале $[a, +\infty)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенствам $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, тогда:

1). Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится;

2). Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ также расходится.

В справедливости теоремы легко убедится из геометрического смысла несобственного интеграла (рис. 2.9).

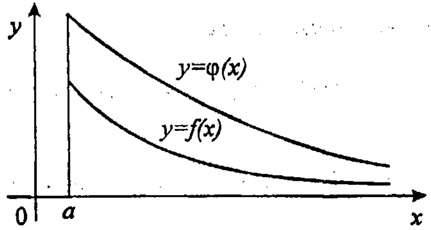

Рис. 2.9

Пусть теперь функция $y=f(x)$ меняет знак при $x\in[a, +\infty)$.

Теорема 2. Если $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ также сходится и называется в этом случае *абсолютно сходящимся*.

Если же $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ расходится, а несобственный интеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ сходится, то он называется *условно сходящимся*.

Примеры. Вычислить несобственные интегралы или установить их сходимость или расходимость:

1. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\int_1^{+\infty}x^{-2}dx=-\frac{1}{x}\bigg|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)-(-1)=0+1=1,$ *т.е. несобственный интеграл* сходится.

2. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln|x|\,\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln|x|-\ln 1=+\infty-0=+\infty,$ *т.е. несобственный интеграл* расходится.

3. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx\le\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^2}dx\le\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=1,$ *т.е. несобственный интеграл сходится, причем* сходится абсолютно.

Теоретическое упражнение. Доказать самостоятельно, что несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$$

сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Таким образом, из приведенных примеров видно, что на сходимость или расходимость несобственного интеграла влияет *скорость стремления к нулю подынтегральной функции при* $x\to+\infty$.

Замечание 2. Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами можно определить следующим равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^{+\infty}f(x)dx,\ \forall x_0\in R. \tag{2.35}$$

При этом несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ будет *сходящимся* тогда и только тогда, когда сходятся *оба* несобственных интеграла, находящиеся в правой части равенства (2.35). Если хотя бы один из этих несобственных интегралов расходится, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx, \forall x_0 \in R.$ также *расходится.*

Несобственные интегралы (2.35) можно вычислять с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \equiv F(+\infty) - F(-\infty) = \tag{2.36}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Примеры. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} arctgx - \lim\limits_{x\to-\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$ *т.е. несобственный интеграл* сходится.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = e^x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty - 0 = +\infty,$ *т.е. несобственный интеграл* расходится.

*Главное значение несобственного интеграла **первого рода*** определяется равенством

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{-N}^{N} f(x)dx. \tag{2.37}$$

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

1. Пусть функция *y=f(x) непрерывна* для $a \le x < c$, а в точке $x= c$ терпит *бесконечный* разрыв (рис. 2.10). Точка *c* в этом случае называется *особой* для функции *y=f(x)*.

Очевидно, что для $\forall\varepsilon > 0$ функция *f(x)* интегрируема на отрезке [*a, c-ε*].

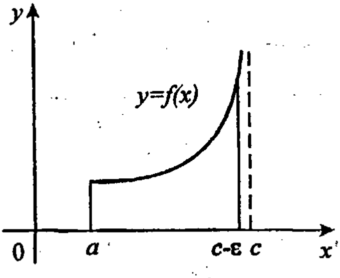

Рис. 2.10

Определение. Величина

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx, \varepsilon > 0, \tag{2.38}$$

если указанный предел существует, называется *несобственным интегралом* от функции *f(x)* на полуинтервале [*a*, *c*).

Если предел (2.38) *конечен*, то несобственный интеграл *сходится*, если *бесконечен или не существует* - то *расходится*.

Иногда интеграл (2.38) называют *несобственным интегралом второго рода.*

2. Пусть функция *y= f(x) непрерывна* для *c< x ≤ b*, а в точке *x= c* терпит *бесконечный* разрыв (рис. 2.11).

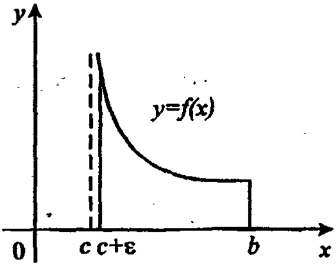

Рис. 2.11

В этом случае несобственный интеграл определяется равенством

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \quad \varepsilon > 0. \tag{2.39}$$

3. Пусть точка *x= c* бесконечного разрыва подынтегральной функции *y= f(x)* находится *внутри* отрезка интегрирования [*a*, *b*] (рис. 2.12).

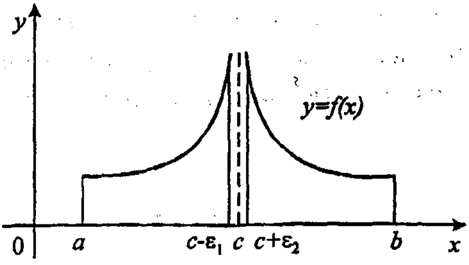

Рис. 2.12

Здесь

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx, \varepsilon_i > 0 \tag{2.40}$$

При этом несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ будет *сходящимся* лишь тогда, когда сходятся *оба* несобственных интеграла, находящиеся в правой части равенства (2.40), и *расходящимся*, если *хотя бы один* из этих интегралов расходится. Вычисления несобственных интегралов (2.38) - (2.40) можно проводить, применяя формулу Ньютона-Лейбница для каждого из них.

Теоретическое упражнение. Доказать самостоятельно, что несобственные интегралы

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}, \qquad \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}, \qquad \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$$

сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geq 1$.

Примеры. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1. $$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{\frac{1}{2}}d(1-x) = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon}-1\right) = -2(0-1) = 2,$$ *т.е. несобственный интеграл* сходится.

2. $$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon_2}^3 \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{1}{x-1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon_1} - \lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{1}{x-1}\Bigg|_{1+\varepsilon_2}^3 = -\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}+1\right) - \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right) = +\infty+\infty = +\infty,$$

т.е. несобственный интеграл *расходится.*

Замечание 3. Если в примере 2 не заметить, что подынтегральная функция на отрезке интегрирования обращается в бесконечность, то формально вычисляя это интеграл можно получить неправильный результат.

Главное значение несобственного интеграла второго рода, где $c \in (a, b)$ - особая точка функции *f(x)*, определяется равенством

$$v.p.\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right), \varepsilon > 0. \qquad (2.41)$$

Замечание 4. Отметим, что если несобственные интегралы первого и второго рода существуют в обычном смысле (2.36), (2.40), то они существуют и в смысле главного значения (2.37), (2.41). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Несобственные интегралы, вычисляемые в смысле главного значения (2.37), (2.41), находят широкое применение при решении различных важных теоретических и прикладных задач (см., например, Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977).

2.9. Приближенное вычисление определенных интегралов

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad (2.42)$$

где $f(x)$ - *непрерывная* на отрезке $[a, b]$ функция.

Не от всякой непрерывной функции можно точно вычислить интеграл, хотя и известно, что он существует (см. п. 1.8, 2.4). В этих случаях, а также когда подынтегральная функция задана таблично или имеет сложный вид и точное вычисление определенного интеграла требует больших затрат по времени, применяют приближенные (численные) методы вычисления определенных интегралов с требуемой точностью, как правило, с их реализацией на ЭВМ. Рассмотрим простейшие из них.

1. Формула средних прямоугольников

Отрезок интегрирования $[a, b]$ разобьем на n *равных* элементарных отрезков длины $h=(b-a)/n$ точками $a= x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $x_i = a + ih$, $i = \overline{0,n}$. В каждой из точек деления x_i проведем прямую, параллельную оси $0y$ до пересечения с графиком $y= f(x)$. Тогда вся криволинейная трапеция разобьется на n элементарных криволинейных трапеций. Далее каждую из элементарных криволинейных трапеций Заменим приближенно прямоугольником (рис. 2.13), высота которого равна значению функции $f(\xi_i)$ в середине отрезка $\xi_i = [x_{i-1} + x_i]/2$, $i = \overline{1,n}$.

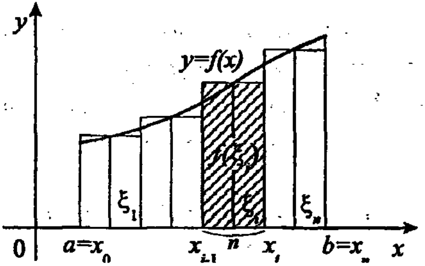

Рис. 2.13

Геометрически площадь S криволинейной трапеции приближенно заменится суммой площадей S_i средних прямоугольников, т.е.

$$S \approx S_1 + S_2 + ... + S_n = h f(\xi_1) + h f(\xi_2) + ... + h f(\xi_n)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3}{2}h\right)+...+f\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)\right]=$$

$$= h\sum_{i=1}^{n} f\left[a+(2i-1)\frac{h}{2}\right] \qquad (2.43)$$

В предположении, что функция *f(x)* дважды непрерывно дифференцируема на отрезке [*a*, *b*] доказано, что погрешность R_n, допускаемая при вычислении интеграла (2.42) по формуле (2.43), оценивается следующим образом

$$|R_n| = \left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^{n} f\left[a+(2i-1)\frac{h}{2}\right]\right| \le \frac{b-a}{24}h^2 M_2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2}M_2, \qquad (2.43')$$

где $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

Из оценки (2.43′) видно, что чем больше число разбиений *n* (чем меньше шаг *h*), тем точнее формула (2.43) дает приближенное значение интеграла. *Погрешность*, допускаемая при вычислении определенного интеграла *по формуле средних прямоугольников, пропорциональна квадрату шага.*

Замечание. Формулу (2.43) можно применять также при вычислении несобственных интегралов от разрывных функций, обращающихся в бесконечность на концах отрезка интегрирования. Эта формула просто программируется.

2. Формула трапеций

Проводим те же разбиения отрезка [*a*, *b*] на *равные* элементарные отрезки длины *h*=(*b*-*a*)/*n*, что и в предыдущем случае. Далее каждую из элементарных *криволинейных* трапеций заменим *обычной* трапецией (рис. 2.14).

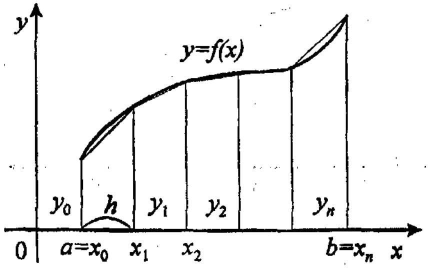

Рис. 2.14

Учитывая, что площадь трапеции равна полусумме оснований на высоту, будем иметь

$$S \approx \frac{y_0+y_1}{2}h+\frac{y_1+y_2}{2}h+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}h = h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right].$$

Поэтому формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right]=$$

$$=h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right]. \qquad (2.44)$$

Погрешность R_n, допускаемая при вычислении интеграла (2.42) по формуле (2.44), оценивается следующим образом

$$|R_n| \leq \frac{b-a}{12}h^2M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2, \qquad (2.44')$$

где $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$, т.е. как и в формуле средних прямоугольников, *погрешность в формуле трапеций* также *пропорциональна квадрату шага*.

3. Формула парабол (формула Симпсона*)

Здесь отрезок интегрирования $[a, b]$ разобьем на *четное* число элементарных отрезков длины $h=(b-a)/n=(b-a)/2m$ точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{2m}=b$. Далее на каждой паре элементарных отрезков $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$ функцию $y=f(x)$ приближенно заменим параболой с осью симметрии параллельной оси 0y и проходящей через точки M_0, M_1, M_2 (рис. 2.15).

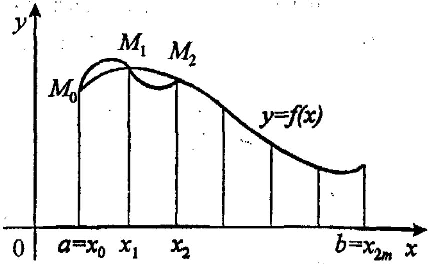

Рис. 2.15

Уравнение параболы с осью симметрии параллельной оси 0y имеет вид

$$y=Ax^2+Bx+C, \qquad (2.45)$$

---

[*] *Т. Симпсон (1710 - 1761) - английский математик.*

где числа A, B, C находятся из условия, что парабола проходит через заданные точки M_i, i=0, 1, 2.

Покажем, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой (2.45), осью 0x и двумя ординатами, расстояние между которыми равно $2h$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \tag{2.46}$$

где y_0, y_1, y_2 - равностоящие на шаг h ординаты, т.е. y_0, y_2 - крайние, а y_1 - средняя ордината.

Для доказательства выберем систему координат следующим образом (рис. 2.16).

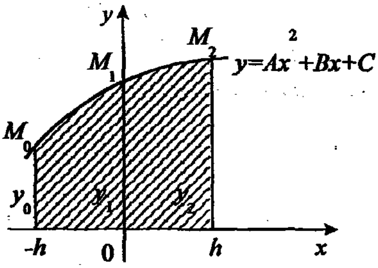

Рис. 2.16

Коэффициенты параболы (2.45) вычислим из условия, что эта парабола проходит через три заданные точки M_0, M_1, M_2.

$$\left.\begin{aligned} x = -h \Rightarrow y_0 &= Ah^2 - Bh + C, \\ x = 0 \Rightarrow y_1 &= C, \\ x = h \Rightarrow y_2 &= Ah^2 + Bh + C. \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

Из равенств (2.47) следует, что

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C. \tag{2.48}$$

Найдем площадь рассматриваемой параболической трапеции

$$S = \int_{-h}^{h}(Ax^2 + Bx + C)dx = \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)$$

Учитывая равенство (2.48), получим требуемое соотношение (2.46).

Применим теперь формулу (2.46) к каждой *паре* элементарных отрезков и просуммируем площади параболических трапеций для всех таких пар. В результате получим

$$S=\frac{h}{3}\left[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+...+(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m})\right]=$$

$$=\frac{h}{3}\left[(y_0+y_{2m})+4(y_1+y_3+...+y_{2m-1})+2(y_2+y_4+...+y_{2m-2})\right].$$

Учитывая это, формула парабол для приближенного вычисления интеграла запишется в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0+y_{2m})+4(y_1+y_3+...+y_{2m-1})+2(y_2+y_4+...+y_{2m-2})\right], \qquad (2.49)$$

где $h=\dfrac{b-a}{2m}, x_i=a+ih, y_i=f(x_i), i=\overline{0,2m}.$

Погрешность R_n, допускаемая при вычислении интеграла (2.42) по формуле Симпсона (2.49), оценивается следующим образом

$$|R_n|\le\frac{b-a}{180}h^4M_4=\frac{(b-a)^5}{2880m^4}M_4, \qquad (2.49')$$

где $M_4=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{IV}(x)\right|$, т.е. *погрешность в формуле Симпсона пропорциональна четвертой степени шага.* Эта формула является наиболее точной из рассмотренных нами.

2.10. Геометрические, физические и экономические приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры в прямоугольной системе координат

Напомним, что площадь S фигуры, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=0$, $f(x)\ge 0$, $x\in[a, b]$ (рис. 2.17).

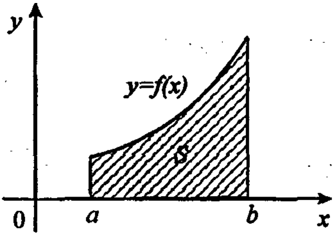

Рис. 2.17

вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.50)$$

Пусть $y=f(x)\leq 0$, $x\in[a, b]$ (рис. 2.18).

В этом случае

$$-S=\int_a^b f(x)dx. \tag{2.51}$$

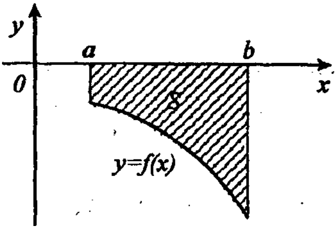

Рис. 2.18

Если функция $y=f(x)$ на отрезке интегрирования меняет знак в *конечном* числе точек (рис. 2.19).

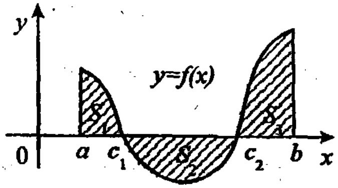

Рис. 2.19

тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c1} f(x)\,dx+\int_{c1}^{c2} f(x)\,dx+\int_{c2}^{b} f(x)\,dx=S_1-S_2+S_3. \tag{2.52}$$

Пусть теперь криволинейная трапеция ограничена линиями $x=a$, $x=b$, $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, где $f_1(x)\leq f_2(x)$ $x\in[a, b]$ (рис. 2.20).

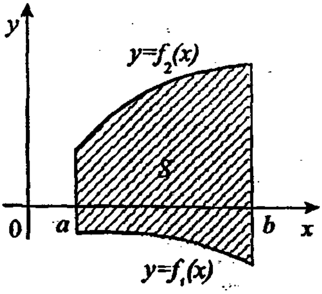

Рис. 2.20

В данном случае очевидно, что в силу равенств (2.50), (2.51)

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad (2.53)$$

2. Вычисление площади криволинейной трапеции при параметрическом задании ее границы

Пусть граница криволинейной трапеции задана параметрически уравнениями

$$\left.\begin{matrix} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{matrix}\right\}, \alpha \le t \le \beta, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b. \qquad (2.54)$$

Предполагается, что функция $\psi(t)$ - непрерывна, а $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Чтобы получить формулу для вычисления площади, воспользуемся равенством (2.50)

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx.$$

Выполняя в этом интеграле замену переменной в соответствии с уравнениями линии (2.54), получим

$$S = \int_a^b ydx = \int_\alpha^\beta \psi(t)d\varphi(t) = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

т.е.

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (2.55)$$

Пример. Найти площадь, ограниченную эллипсом (рис. 2.21)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2.56)$$

Запишем уравнение эллипса (2.56) в параметрическом виде

$$\left.\begin{matrix} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{matrix}\right\}, 0 \le t \le 2\pi. \qquad (2.57)$$

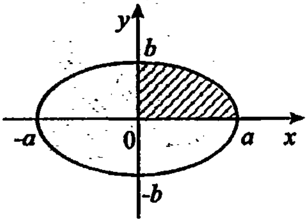

Рис. 2.21

Воспользуемся формулой (2.55). В силу симметрии эллипса (рис. 2.21)

$$S = 4\int_0^a y\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\cos t, dx = -a\sin t\,dt, \\ x = 0 \Rightarrow 0 = a\cos t \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}, \\ x = a \Rightarrow a = a\cos t \Rightarrow t = 0. \end{array} \right| = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)\,dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab. \qquad (2.58)$$

Формула (2.58) находит многочисленные приложения при решении задач.

3. Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат

Найдем площадь S криволинейного сектора OAB, ограниченного непрерывной кривой AB, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рис. 2.22).

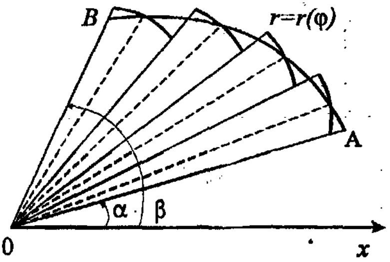

Рис. 2.22

Для этого весь криволинейный спектр разобьем на n элементарных секторов лучами $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n = \beta$. Обозначим $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$. В каждом из элементарных секторов выберем произвольно по углу $\varphi_{i-1} \le \overline{\varphi_i} \le \varphi_i$, $i = \overline{1,n}$. Вычислим значения радиуса при угле $\overline{\varphi_i}$ и каждый элементарный криволинейный сектор заменим элементарным *круговым* сектором с радиусом $r = r(\overline{\varphi_i})$ и центральным углом $\Delta\varphi_i$ (рис.2.22), площадь которого $\Delta S_i = \frac{1}{2}r^2\left(\overline{\varphi_i}\right)\Delta\varphi_i$, $i = \overline{1,n}$.

В результате получим n-ступенчатую фигуру, состоящую из n элементарных *круговых* секторов, площадь которой равна

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2\left(\overline{\varphi_i}\right)\Delta\varphi_i. \qquad (2.59)$$

Сумма (2.59) является интегральной суммой для непрерывной функции $r^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha,\ \beta]$, поэтому переходя в равенстве (2.59) к пределу при $n\to\infty$ и $\max\Delta\varphi_i\to 0$ получим искомую площадь

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{2.60}$$

4. Вычисление длины дуги плоской кривой

Найдем длину l дуги кривой $\overline{AB}$, *заданной в прямоугольной системе координат* уравнением $y=f(x)$, где функция $f(x)$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,\ b]$ (рис. 2.23).

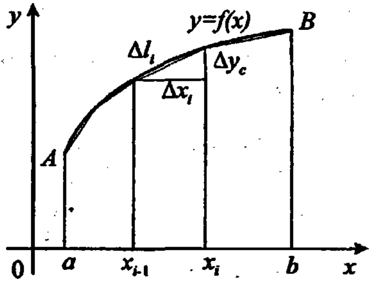

Рис. 2.23

Дугу AB разделим на n элементарных дуг точками $A=M_0$, M_1, M_2, ... , $M_n=B$, $M_i=M_i(x_i,\ y_i)$, $i=\overline{0,n}$.

Каждую из элементарных дуг заменим соответствующей элементарной хордой.

Под *длиной дуги AB* будем понимать предел l, длины вписанной в нее ломаной линии при неограниченном увеличении ее звеньев и при условии, что длина наибольшего из них стремится к нулю.

Длину элементарной хорды будем обозначать Δl_i, а ее проекции на координатные оси Δx_i, и Δy_i, $i=\overline{1,n}$.

По теореме Пифагора $\Delta l_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}$. Тогда длина всей ломаной линии будет равна

$$l_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i. \tag{2.61}$$

Далее на каждом из элементарных отрезков к отношению $\Delta y_i/\Delta x_i$ применим теорему Лагранжа о конечных приращениях

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),\quad x_{i-1}\le\xi_i\le x_i, i=\overline{1,n}.$$

Учитывая это, равенство (2.61) запишется в виде

$$l_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left[f'(\xi_i)\right]^2}\Delta x_i. \qquad (2.62)$$

Сумма (2.62) является интегральной суммой для непрерывной функции $\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому, переходя в равенстве (2.62) к пределу при $n\to\infty$ и $max\Delta x_i\to 0$ получим, что длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx. \qquad (2.63)$$

Пусть кривая AB задана *параметрически* уравнениями

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t).\end{aligned}\right\},\alpha\le t\le\beta,\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b. \qquad (2.64)$$

где функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi'(t)\ne 0$, $\forall t\in[\alpha, \beta]$.

Учитывая, что производная параметрически заданной функции вычисляется по формуле $y_x'=y_t'/x_t'$, $dx=x_t'dt$ и выполняя в интеграле (2.63) замену переменной с учетом (2.64), получим

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt. \qquad (2.65)$$

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что *длина дуги кривой в полярных координатах*, заданной уравнением $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, где функция $r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, вычисляется по формуле

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (2.66)$$

Указание. Для доказательства формулы (2.66) нужно от полярных координат дуги перейти к параметрическим $x=r(\varphi)\cos\varphi$, $y=r(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha\le\varphi\le\beta$ и воспользоваться формулой (2.65), где $t=\varphi$.

Пример. Найти длину дуги кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$ (рис. 2.24).

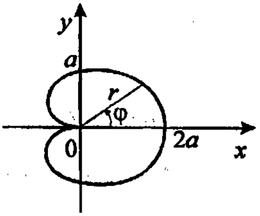

Рис. 2.24

Учитывая симметрию кардиоиды и применяя формулу (2.66), получим

$$l = 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{2a^2+2a^2\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

5. Вычисление объемов тел

Первоначально найдем *объем V тела по известным площадям его параллельных сечений*, перпендикулярных некоторому направлению $0x$. Пусть $S=S(x)$ - площадь конечного сечения тела плоскостью, неперпендикулярной оси $0x$ в точке с абсциссой x, где $S(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ (рис. 2.25).

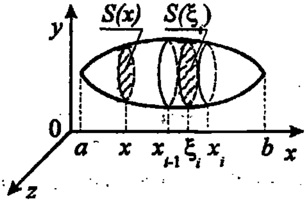

Рис. 2.25

Отрезок $[a, b]$ разобьем на n элементарных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Через каждую из точек x_i, $i=\overline{0,n}$ проведем плоскости, перпендикулярные оси $0x$, которые рассекут все тело на элементарные слои. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$. В каждом из элементарных отрезков выберем произвольно по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ с соответствующей площадью сечения тела $S(\xi_i)$. Далее каждый из элементарных слоев заменим приближенно элементарным цилиндрам, образующая которого параллельна оси $0x$, а направляющей служит граница сечения тела плоскостью $x=\xi_i$. В результате все тело, состоящие из n элементарных слоев, приближенно заменится n-ступенчатым телом, состоящим из n элементарных цилиндров, объем V_n которого вычисляется по формуле

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (2.67)$$

Сумма (2.67) является интегральной суммой для непрерывной функции $S(x)$ на отрезке $[a,\ b]$. Поэтому переходя в равенстве (2.67) к пределу при $n\to\infty$ и $max\Delta x_i\to 0$ получим, что искомый объем

$$V=\int_a^b S(x)dx. \qquad (2.68)$$

Объем тела вращения. Вычислим объем V_x тела, образованного при вращении вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$ осью $0x$ и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 2.26).

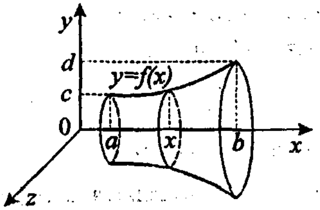

Рис. 2.26

В этом случае в сечении тела плоскостью, перпендикулярной оси $0x$, будет получаться круг радиуса y, площадь которого

$$S(x)=\pi y^2=\pi[f(x)]^2, \forall x\in[a,b]. \qquad (2.69)$$

Применяя формулы (2.68), (2.69) получим

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx \qquad (2.70)$$

С помощью аналогичных рассуждений легко показать, что объем V_y тела, образованного при вращении криволинейной трапеции вокруг оси $0y$ (рис. 2.26) вычисляется по формуле

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy. \qquad (2.71)$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ одной полуволны синусоиды (рис. 2.27).

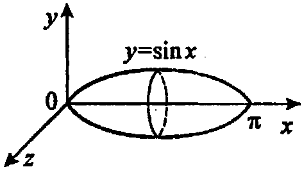

Рис. 2.27

Применим формулу (2.70)

$$V_x = \pi\int_0^{\pi} y^2dx = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 xdx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}93ед^3.$$

6. Статические моменты и координаты центра тяжести плоских дуг и фигур

Пусть на плоскости $x0y$ задана система материальных точек $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$ в которых сосредоточены массы m_1, m_2, ..., m_n. Статическим моментом M_x (M_y) этой системы относительно оси $0x$ $(0y)$ называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты (абсциссы), т.е.

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \tag{2.72}$$

Из механики известно, что *координаты центра тяжести* $C(x_c, y_c)$ системы материальных точек $P_i(x_i, y_i)$, $i=\overline{1,n}$ находятся по формулам:

$$x_c = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M_y}{M}, \tag{2.73}$$

$$y_c = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + \ldots + y_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M_x}{M}. \tag{2.74}$$

Найдем координаты центра тяжести *однородной* (ρ = *const*) материальной кривой AB, заданной в прямоугольной системе координат уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ (рис. 2.28).

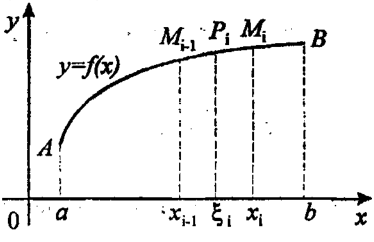

Рис. 2.28

Всю дугу AB разделим на n элементарных дуг точками $A= M_0$, M_1, M_2, ..., M_n $= B$. Длины элементарных дуг обозначим через $\Delta\, l_i$, а их проекции на ось Ox через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$. На каждом из элементарных отрезков выберем по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. На кривой AB этим абсциссам будут соответствовать точки $P_i(\xi_i, f(\xi_i))$ $i=\overline{1,n}$. Будем считать, что масса каждой из элементарных дуг $m_i=\rho\Delta\, l_i$ сосредоточена в соответствующей точке $P_i(\xi_i, f(\xi_i))$ $i=\overline{1,n}$. Учитывая это, координаты центра тяжести системы из n материальных точек P_i определим по формулам (2.73), (2.74)

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\rho\Delta l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho\Delta l_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\Delta l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta l_i}, \tag{2.75}$$

$$y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\rho\Delta l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho\Delta l_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta l_i}. \tag{2.76}$$

Суммы (2.75), (2.76) являются интегральными для соответствующих функций на отрезке $[a,\ b]$. Поэтому, переходя в этих равенствах к пределу при $n\to\infty$ и $max\Delta x_i\to 0$ получим координаты центра тяжести плоской кривой $y=f(x)$, $a\le x\le b$

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x dl}{l=\int\limits_a^b dl} = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}, \tag{2.75'}$$

$$y_c = \frac{\int\limits_a^b f(x) dl}{l=\int\limits_a^b dl} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}. \tag{2.76'}$$

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что координаты центра тяжести однородной материальной пластинки (рис. 2.29) находятся по формулам

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]dx}{S=\int\limits_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx}, \tag{2.77}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b [f_1(x)+f_2(x)][f_2(x)-f_1(x)]dx}{S=\int\limits_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx}. \tag{2.78}$$

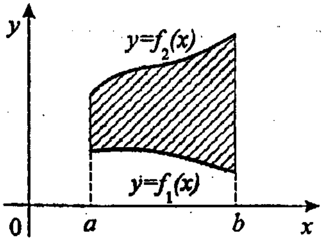

Рис. 2.29

7. Работа переменной силы

Пусть под действием непрерывной переменной силы $F=F(x)$ материальная точка M движется вдоль оси $0x$. Требуется найти работу A, произведенную силой $F=F(x)$ при перемещении точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$, если направление силы совпадает с направлением ее движения.

Отрезок $[a, b]$ разобьем на n элементарных отрезков точками $a= x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$. В каждом из элементарных отрезков выберем произвольно по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Будем считать, что *на каждом элементарном отрезке сила $F(x)$ постоянна* и равна $F(\xi_i)$. Тогда элементарная работа силы $F(\xi_i)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ равна $\Delta A_i = F(\xi_i)\Delta x_i$, $i=\overline{1,n}$. Работа силы $F=F(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ *приближенно* выразится суммой

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2.79}$$

Сумма (2.79) и является интегральной суммой для непрерывной функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому, переходя в равенстве (2.79) к пределу при $n \to \infty$ и $max\Delta x_i \to 0$ найдем *точное* значение работы A силы $F=F(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$A = \int\limits_a^b F(x)dx. \tag{2.80}$$

Пример. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на *5 см*, если известно, что от нагрузки в *10 Н* она растягивается на *1 см*?

Согласно закону Гука, сила F, действующая на пружину, возрастает пропорционально растяжению пружины, т.е. $F=kx$, где перемещение x выражается в метрах, а сила *F* - в ньютонах. Коэффициент пропорциональности *k* найдем из условия задачи, полагая $F=10\ H$ при $x=0{,}01$ *м.*, т.е. $10=k\cdot 0{,}01$, откуда $k=1000$ и, следовательно, $F=1000x$. Тогда на основании формулы (2.80)

$$A=\int\limits_0^{0,05}1000x dx=500x^2\Big|_0^{0,05}=1{,}25\ Дж.$$

8. Нахождение объема выпуска продукции по известной производительности труда

Будем считать, что известна непрерывная функция $f(t)$, которая характеризует изменение производительности труда от времени t. Определим объем Q продукции, произведенной рабочим за время $t_0 \le t \le T$.

Как обычно, отрезок $[t_0, T]$ разобьем на n элементарных отрезков точками $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$.

Обозначим $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$, В каждом из элементарных отрезков выберем произвольно по точке $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Предположим , что на каждом элементарном отрезке времени производительность $f(t)$ постоянна и равна $f(\xi_i)$. Тогда объем выпускаемой продукции *приближенно* выразится суммой $Q_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$, которая является интегральной суммой для непрерывной функции $f(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ и в пределе при $n\to\infty$, $max\,\Delta t_i \to 0$ дает *точный* [10 - 14] искомый объем продукции

$$Q=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta t_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i=\int\limits_{t_0}^{T} f(t)dt. \qquad (2.81)$$

Пример. Определить объем продукции, произведенный рабочим за третий час смены, если производительность труда задана функцией $f(t)=[3+1/(2t+1)]$. По формуле (2.81) найдем

$$Q=\int\limits_2^3\left(3+\frac{1}{2t+1}\right)dt=3t\Big|_2^3+\frac{1}{2}\int\limits_2^3\frac{d(2t+1)}{2t+1}=9-6+\frac{1}{2}\ln|2t+1|\Big|_2^3=$$

$$=3+\frac{1}{2}(\ln 7-\ln 5)=3+\frac{1}{2}\ln 1{,}4=3{,}168\,(усл.ед.пр.).$$

9. Определение дисконтированного дохода

При обосновании и выборе инвестиционных решений, определении эффективности капитальных вложений используются так называемые *задачи дисконтирования:* определение начальной суммы (*современной величины*) S_0 через время t

(годы) по ее конечной величине (*наращенной сумме*) S_t при годовой процентной ставке $p\%$. Для *сложных* процентов наращенная сумма $S_t = S_0\ (1+i)^t$ откуда в результате дисконтирования современная величина $S_0 = S_t\ (1+i)^{-t}$, где $i = 0{,}01p$. При *непрерывном* начислении сложных процентов на протяжении t лет конечная сумма S_t вычисляется [11-13] по формуле $S_t = S_0\ e^{\,it}$. Чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной обычно переобозначают i=δ и называют δ - *силой роста*. Так что окончательно $S_t = S_0\ e^{\,\delta t}$. Если сумма S_t также является функцией времени $f(t)$, то дисконтированная сумма S_0 к моменту времени t составит $S_0 = f(t)\ e^{-\delta t}$. Применяя рассуждения, аналогичные проведенным в предыдущем пункте, можно показать, что полная дисконтированная сумма или *дисконтированный доход* S_d за время T вычисляется [11-13] по формуле

$$S_d=\int_0^T f(t)e^{-\delta t}dt. \qquad (2.82)$$

Пример. Определить дисконтированный доход за три года при непрерывной годовой процентной ставке **8%, если первоначальный (базовый) взнос составит 10** млн. руб. и намечается ежегодно **увеличивать капиталовложения на 1млн. руб.**

Нетрудно заметить, что капиталовложения задаются функцией $f(t)$=10+1·t=10+t. Тогда по формуле (2.82) полная дисконтированная сумма капиталовложений

$$S_d=\int_0^3 (10+t)e^{-0{,}08t}dt \quad .$$

Применяя к вычислению этого интеграла формулу интегрирования по частям (2.31) *убедиться самостоятельно*, что S_d = *30,512 млн. руб.* Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года, *ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млн. руб. равносильны одновременному первоначальному взносу в 30,512 млн. руб. при той же, начисляемой непрерывно годовой процентной ставке.*

10. Нахождение издержек производства

Пусть зависимость издержек производства K=$K(x)$ от объема выпускаемой продукции x, который изменяется от 0 до b единиц, выражена в денежных единицах. Тогда *полные издержки производства P* определяются формулой

$$P=\int_0^b K(x)dx \qquad (2.83)$$

Пример. Зависимость *издержек* $K(x)$ от объема продукции x имеет вид $K(x)=x^3+9x^2-6x$. Найти полные издержки производства, если объем продукции равен 72 единицы.

$$P=\int_0^{72}\left(x^3+9x^2-6x\right)dx=\left(x^4/4+3x^3-3x^2\right)\Big|_0^{72}=$$

$$=72^4/4+3\cdot 72^3-3\cdot 72^2=7822656\,(\text{ден.ед.}).$$

Если объем продукции x меняется от a до b единиц, то *средние издержки производства* $K_{ср}$ находятся по формуле (2.17)

$$K_{cp}=\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)dx. \qquad (2.84)$$

Решая затем уравнение $K(x)=K_{ср}$ точно или приближенно, можно найти объем продукции $x>0$, при котором издержки принимают это среднее значение.

ГЛАВА 3.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Основные понятия

Ранее мы изучали функции одной переменной. Однако многим явлениям присуща многофакторная зависимость, которая приводит к необходимости введения понятия функции нескольких переменных.

Например, объем цилиндра $V=\pi R^2 H$ есть функция двух переменных R (радиуса основания) и H (высоты). *Производственная функция Кобба*[*]*-Дугласа*[**] $Q=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $A>0$, $0<\alpha<1$, показывает объем выпуска продукции Q в зависимости от затрат капитала K и трудовых ресурсов L и является функцией двух переменных. Введем

Определение 1. Если каждой *двумерной точке* $M(x,y)$ некоторой области D плоскости $x0y$ ставится в соответствие *одно* определенное число z, то говорят, что на множестве D задана *функция двух независимых переменных* и пишут $z=f(x,y)=f(M)$.

Также как и функции одной переменной, функции двух и более переменных определены, вообще говоря, не при любых значениях своих аргументов.

Определение 2. Множество точек $M(x,y)\in D\subset x0y$ называется *областью определения* функции $z=f(x,y)$, если это выражение имеет смысл при отсутствии других ограничений.

Примеры. Найти область определения функции:

1. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\Rightarrow 1-x^2-y^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+y^2\leq 1$, (D).

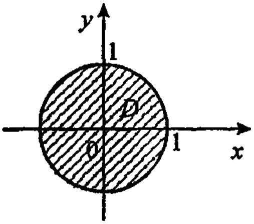

Рис. 3.1

В данном случае областью определения функции является круг единичного радиуса с центром в начале координат, включая все точки его границы (рис.3.1), (пример *замкнутой* области).

---

[*] *Ч. Кобб – американский математик.*

[**] *П. Дуглас – американский экономист*

2. $z=\ln(x-y) \Rightarrow x-y>0 \Leftrightarrow y<x, (D)$.

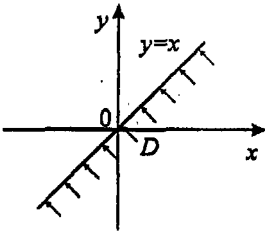

Рис. 3.2

Здесь областью определения функции являются все точки полуплоскости, лежащие ниже граничной прямой $y=x$, не включая точек самой границы (рис. 3.2), (пример *открытой* области). Такого вида логарифмические слагаемые при $y=c_i \geq 0$, c_i – *const*, входят в *функцию полезности*, широко применяемую в экономической теории.

Понятие функции двух переменных по аналогии распространяется на случай трех и более переменных.

Определение 3. Если каждой *n-мерной* точке $M(x_1,x_2,...,x_n)$ в области D n-мерного пространства R^n ставится в соответствие *одно* определенное число u, то говорят, что на множестве D задана *функция n независимых переменных* и пишут $u=f(x_1,x_2,...,x_n)=f(M)$.

График функции двух переменных. Пусть в области $D \subset x0y$ задана функция $z=f(x,y)$. Через точку $M(x,y) \in D$ проведем перпендикуляр к плоскости $x0y$ и отложим на нем ***величину*** отрезка $z=f(x,y)=f(M)$ (рис. 3.3).

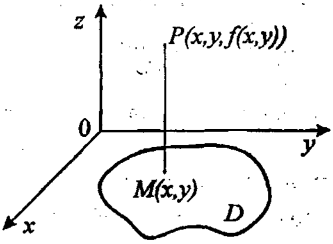

Рис. 3.3

Определение 4. Множество точек $P(x,y,f(x,y)) \in R^3$, соответствующее всем точкам $M(x,y) \in D$, называется *графиком функции* $z=f(x,y)$.

Отметим, что график функции $z=f(x,y)$ в трехмерном пространстве R^3 определяет, вообще говоря, некоторую поверхность.

Например, графиком функции $z=x^2+y^2$ в R^3 будет параболоид вращения (рис. 3.4). Здесь $D=R^2$.

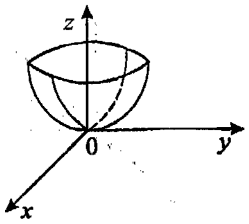

Рис. 3.4

Определение 5. Будем называть *ε-окрестностью точки* $M_0(x_0,y_0)$ множество точек плоскости, лежащих внутри круга радиуса ε с центром в точке M_0. При этом граница данного круга не входит в *ε-окрестность* точки M_0, т. е. *ε-окрестность точки* M_0 *есть открытая область* (рис. 3.5).

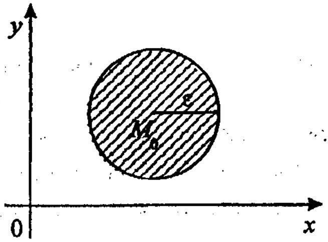

Рис. 3.5

Определение 6. Число A называется пределом функции $f(x,y)$ при $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что как только расстояние $\left|\overline{MM_0}\right|<\delta$, то выполняется неравенство $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$. При этом пишут

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \equiv \lim_{M\to M_0} f(x,y) = A. \qquad (3.1)$$

Другими словами, число A есть предел функции $f(x,y)$ при $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$, если для любых $M(x,y)$, достаточно близких к точке $M_0(x_0,y_0)$, соответствующие значения $f(x,y)$ сколь угодно мало отличаются от числа A.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в области D. Дадим аргументу x приращение Δx, а аргументу y приращение Δy так, чтобы точка $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\in D$. Тогда функция z получит некоторое приращение $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)$, которое называется *полным приращением* функции двух переменных.

Определение 7. Функция $z=f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0,y_0)\in D$, если бесконечно малым приращениям аргументов Δx и Δy соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{M\to M_0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) \equiv f(M_0). \qquad (3.2)$$

Из равенства (3.2) следует, что *предел непрерывной функции равен значению функции в предельной точке* или, другими словами, для непрерывной функции операции вычисления функции и предела можно менять местами.

Определение 8. Функция $z=f(x,y)$, непрерывная в каждой точке $M(x,y)\in D$, называется *непрерывной в области D*.

Замечание. Отметим, что функция двух переменных $z=f(x,y)$ может иметь как изолированные точки разрыва, так и целые линии точек разрыва.

Так функция $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ имеет бесконечный разрыв лишь в одной точке $O(0,0)$, в то время как для функции $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ точками бесконечного разрыва являются линии $y=x$ и $y=-x$.

3.2. Частные производные функции нескольких переменных

В области $D\in R^2$ рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)$. Переменную y *временно зафиксируем* и будем считать ее постоянной, а переменной x дадим приращение Δx, тогда функция $z=f(x,y)$ получит *частное приращение от z по переменной x*, которое обозначим

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y), \; y=y_0=const.$$

Определение 1. Если существует предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению аргумента Δx, когда Δx *произвольно* стремится к нулю, то он называется *частной производной по переменной x* от функции $z=f(x,y)$ и обозначается

$$z'_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv f'_x(x,y) = \lim_{\forall \Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\forall \Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}, \; y=y_0=const. \qquad (3.3)$$

Совершенно аналогично определяется частная производная от функции $z=f(x,y)$ по переменной y

$$z'_y \equiv \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \equiv f'_y(x,y) = \lim_{\forall \Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} =$$
$$= \lim_{\forall \Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}, \; x=x_0=const. \qquad (3.4)$$

Пример. Найти частные производные по обеим переменным от функции

$$z = 2 + x^3y^5 + 7\sin x + \ln y.$$

Из (3.3), (3.4) фиксируя поочередно соответствующие переменные, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 + y^5 3x^2 + 7\cos x + 0 = 3x^2y^5 + 7\cos x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + x^3 5y^4 + 0 + \frac{1}{y} = 5x^3y^4 + \frac{1}{y}.$$

Теоретическое упражнение. **Выяснить *самостоятельно* геометрический смысл частных производных для функции двух переменных в R^3. Показать, что частная производная $f'_x(x_0, y_0)(f'_y(x_0, y_0))$ - есть угловой коэффициент касательной к линии пересечения поверхности $z=f(x,y)$ и плоскости $y=y_0$ $(x=x_0)$ в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Изобразить чертеж.**

Определение 2. **Частной производной функции нескольких переменных $u=f(x_1,x_2,...x_n)$ по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при произвольном стремлении последнего к нулю, если этот предел существует.**

Таким образом, *частная производная* **является обыкновенной производной функции одной переменной при фиксированных значениях остальных переменных. Она характеризует** ***скорость изменения функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ по данной координате при фиксированных значениях остальных координат.*** **При нахождении частных производных пользуются обычными правилами дифференцирования функции одной переменной.**

Частные производные находят многочисленные и разнообразные *приложения в экономике* (см. [10-14]). Укажем одно из них, вводя следующее важное понятие.

Частной эластичностью функции нескольких переменных $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ **называется величина**

$$E_{x_i}(u) = \lim_{\Delta x_i \to 0}\left(\frac{\Delta_{x_i} u}{u} : \frac{\Delta x_i}{x_i}\right) = \frac{x_i}{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i},\ i = \overline{1,n}.$$

Нетрудно убедиться, что для производственной функции Кобба-Дугласа $u=Ax^{\alpha}y^{\beta}$ частные эластичности $E_x(u)=\alpha$, $E_y(u)=\beta$, где числа α и β приближенно показывают, *на сколько процентов изменится выпуск продукции и при изменении только затрат труда x или только объема производственных фондов (капитала) y на 1%.*

3.3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции нескольких переменных

Определение 1. Функция *z=f(x,y)* называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_0,y_0)$, если ее *полное приращение* в этой точке можно представить в виде

$$\begin{aligned}&\Delta z(M_0) \equiv f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \\ &= A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y,\end{aligned} \tag{3.5}$$

где A и B не зависят от Δx и Δy, а $\alpha_i(\Delta x,\Delta y)$, i=1,2, - бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Замечание 1. Представление (3.5) иногда записывают в другой равносильной форме

$$\Delta z(M_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \varepsilon(\Delta\rho), \tag{3.5$'$}$$

где $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ и $\varepsilon(\Delta\rho)=o(\Delta\rho)$, т. е. $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\varepsilon(\Delta\rho)/\Delta\rho = 0$.

Теорема 1. Если функция *z=f(x,y) дифференцируема* в точке $M_0(x_0,y_0)$, то она *непрерывна* в этой точке.

Доказательство. Так как функция *z=f(x,y)* дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то из формулы (3.5) следует, что выполняется условие (3.2)

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z(M_0) = 0,$$

а это означает, что функция *z=f(x,y)* непрерывна в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Теорема 2. (*необходимое условие дифференцируемости*). Если функция *z=f(x,y)* дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то в этой точке существуют частные производные по обеим переменным, причем $f'_x(M_0)=A$, $f'_y(M_0)=B$.

Доказательство. Положим в равенстве (3.5) Δy=0, разделим его обе части на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$, учитывая при этом, что $\alpha_1(\Delta x,0)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x\to 0$. Получим

$$\begin{aligned}&f'_x(M_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[A+\alpha_1(\Delta x,0)\right] = A+0 = A.\end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $f'_y(M_0)=B$.

Замечание 2. Отметим, что *необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных не является достаточным,* т. е. из непрерывности функции нескольких переменных в точке $M_0(x_0,y_0)$, а также из существования ее частных производных в этой точке еще не следует дифференцируемости функции в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Нетрудно убедиться [9, с.46], что функция $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $O(0,0)$, имеет частные производные в этой точке и тем не менее не является дифференцируемой в ней.

Теорема 3. (*достаточное условие дифференцируемости*). Если функция $z=f(x,y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, включая саму точку M_0, имеет *непрерывные* частные производные, то она *дифференцируема* в этой точке.

Доказательство. Дадим переменным x и y такие приращения Δx и Δy, чтобы точка $M_0(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$, не выходила за пределы указанной окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Запишем полное приращение функции $\Delta z(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ в виде

$$\Delta z(M_0)=\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\right]+\left[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]. \quad (3.6)$$

Каждое из выражений в квадратных скобках представляет приращение функции по одной из переменных. Поэтому, применяя к ним теорему Лагранжа о конечных приращениях, получим

$$\begin{gathered}\Delta z(M_0)=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y,\\ 0<\theta_i<1,\ \ i=1,2.\end{gathered} \quad (3.7)$$

Так как по предположению частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ *непрерывны* в точке $M_0(x_0,y_0)$, то:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f'_y(x_0,y_0).$$

Отсюда из свойств пределов *непрерывных* функций будем иметь:

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0)+\alpha_1(\Delta x,\Delta y),$$

$$f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f'_y(x_0,y_0)+\alpha_2(\Delta x,\Delta y),$$

где $\alpha_1(\Delta x,\Delta y)$ и $\alpha_2(\Delta x,\Delta y)$ - бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Тогда равенство (3.7) примет вид

$$\Delta z(M_0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\alpha_2(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y, \quad (3.8)$$

а это в силу (3.5) означает, что функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Теорема доказана.

Аналогично определяется дифференцируемость функции трех и более переменных.

Определение 2. Главная *линейная часть* полного приращения дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x, y)$ называется ее ***полным дифференциалом*** в этой точке и обозначается

$$dz \equiv df(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y. \quad (3.9)$$

Равенство (3.9) есть следствие представления (3.8). Также как и для функции одной переменной легко доказать, что дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями. Пусть $z=x$, тогда из (3.9) следует, что $dx=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x$, т. е. $dx=\Delta x$. Аналогично показывается, что $dy=\Delta y$. Учитывая это, формула (3.9) запишется в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \quad (3.10)$$

Отметим, что для функции большего числа переменных ее дифференциал определяется и вычисляется аналогично, т. е. если $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \quad (3.11)$$

Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях. Так как первый дифференциал функции $z=f(x,y)$ есть *главная линейная часть* ее полного приращения, то отбрасывая в выражении (3.8) два последних слагаемых (бесконечно малую функцию при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$), мы вместо точного получим *приближенное* равенство

$$\Delta z(M_0) \approx dz(M_0). \quad (3.12)$$

Заменим $\Delta z(M_0)$ и $dz(M_0)$ их развернутыми выражениями, тогда соотношение (3.12) примет вид

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

или

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) широко применяется в приближенных вычислениях и при малых Δx и Δy дает удовлетворительную точность. Оценку погрешности, допускаемую при этом, приводить не будем.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{(4{,}02)^2+(2{,}97)^2}$. Рассмотрим функцию $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Найдем ее частные производные:

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Учитывая, что $f(x+\Delta x, y+\Delta y)=\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}$ формула (3.13) примет вид

$$\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2}\approx\sqrt{x_0^2+y_0^2}+\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\Delta x+\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\Delta y. \qquad (3.13')$$

В нашем случае $x_0=4$, $\Delta x=0{,}02$, $y_0=3$, $\Delta y=-0{,}03$. По формуле (3.13′) получим

$$\sqrt{(4{,}02)^2+(2{,}97)^2}\approx 5+\frac{4}{5}\cdot 0{,}02-\frac{3}{5}\cdot 0{,}03=5+0{,}016-0{,}018=4{,}998.$$

Более точное значение этого корня равно 4,99813.

3.4. Частные производные и полный дифференциал сложной функции нескольких переменных

Пусть

$$z=F(u,v), \qquad (3.14)$$

где

$$u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y). \qquad (3.15)$$

Здесь x и y - независимые переменные, а u и v - промежуточные аргументы. Требуется найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Относительно функций F, φ и ψ будем предполагать, что они *непрерывны вместе со своими частными производными* в соответствующих областях определения.

Если выражения u и v из (3.15) подставить в (3.14), то после преобразований мы получим некоторую функцию переменных x и y, от которой можно найти частные производные. Однако, такой путь часто приводит к громоздким вычислениям, поэтому мы будем находить частные производные пользуясь лишь равенствами (3.14) и (3.15). Для этого аргументу x дадим приращение Δx, тогда функции u и v получат частные приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, а функция z – полное приращение Δz, которое в соответствии с равенством (3.8) запишется в виде

$$\Delta z=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v\right)+(\alpha_1\Delta_x u+\alpha_2\Delta_x v), \qquad (3.16)$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции относительно приращений $\Delta_x u\to 0$ и $\Delta_x v\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Из (3.16) следует, что

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\alpha_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\alpha_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (3.17)$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (3.18)$$

Для случая большего числа переменных формулы (3.17), (3.18) обобщаются естественным образом.

Рассмотрим один частный случай. Пусть $u=x$, $v=\psi(x)$, т.е. z является функцией *одной* переменной x и можно находить ее обычную производную $\frac{dz}{dx}$. Эта производная находится по формуле (3.17), которая с учетом того, что $\frac{\partial x}{\partial x}=1$ примет вид

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}. \qquad (3.19)$$

Эта формула называется формулой для вычисления ***полной производной*** $\frac{dz}{dx}$ в отличие от *частной производной* $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Рассмотрим *дифференцируемую* функцию $z=f(x,y)$. Ранее мы показали (см. формулу (3.10)), что ***полный дифференциал*** такой функции вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dz+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (3.20)$$

Теоретическое упражнение. Пусть равенствами (3.14), (3.15) задана *сложная* функция. Убедиться *самостоятельно*, что подставляя значения ее частных производных (3.17), (3.18) в равенство (3.20) после преобразований получим

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv. \qquad (3.21)$$

Сравнивая между собой формулы (3.20) и (3.21), мы видим, что полный дифференциал функции нескольких переменных обладает *свойством инвариантности*, т. е. ***свойством сохранения формы*** независимо от того являются аргументы независимыми переменными или некоторыми функциями от них.

Дифференцирование неявных функций. Пусть y как функция от x определяется неявно уравнением

$$F(x,y)=0, \tag{3.22}$$

где $F(x,y)$ - *непрерывно дифференцируемая* функция, такая, что $F'_y(x,y)\neq 0$.

Найдем полный дифференциал от обеих частей равенства (3.22):

$$dF(x,y)\equiv F'_x(x,y)dx+F'_y(x,y)dy=0.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}\equiv y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)},\ F'_y(x,y)\neq 0. \tag{3.23}$$

Если z как функция двух переменных x,y определяется неявно уравнением

$$F(x,y,z)=0, \tag{3.24}$$

где $F(x,y,z)$ - *непрерывно дифференцируемая* функция, причем $F'_z(x,y,z)\neq 0$, то применяя правило (3.23) к уравнению (3.24) получим

$$z'_x=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ z'_y=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ F'_z(x,y,z)\neq 0 \tag{3.25}$$

3.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть в области $D\in R^2$ задана достаточно гладкая, т. е. нужное число раз дифференцируемая функция $z=f(x,y)$. Найдем ее частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y).$$

Так как по предположению производные первого порядка являются некоторыми дифференцируемыми функциями двух переменных, то от них в свою очередь можно вычислять частные производные.

Определение 1. Частные производные от частных производных первого порядка называются *частными производными второго порядка* и обозначаются

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\equiv z''_{xx}\equiv f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv z''_{xy}\equiv f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\equiv z''_{yx}\equiv f''_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\equiv z''_{yy}\equiv f''_{yy}(x,y).$$

Из приведенных соотношений видно, что каждой частной производной первого порядка могут быть поставлены в соответствие две частных производных второго порядка, т. е. для исходной функции $z=f(x,y)$ их будет четыре. Частные производные z''_{xy} и z''_{yx}, отличающиеся порядком дифференцирования, называются *смешанными.*

Пример. **Найти все частные производные второго порядка от функции**

$$z = x^3y^5 + \ln x + e^{3y}.$$

Учитывая особенности частного дифференцирования, получим

$$z''_x = 3x^2y^5 + \frac{1}{x},\ \ z'_y = 5x^3y^4 + 3e^{3y},$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = 6xy^5 - \frac{1}{x^2},\ \ z''_{xy} = (z'_x)'_y = 15x^2y^4,$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = 15x^2y^4,\ \ z''_{yy} = (z'_y)'_y = 20x^3y^3 + 9e^{3y}.$$

Частные производные третьего и более высоких порядков определяются аналогично.

Сравнивая между собой значения производных второго порядка, мы видим, что *смешанные* производные равны между собой. Это совпадение не случайно. Справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема. Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема нужное количество раз и ее смешанные производные *непрерывны*, то они равны между собой, т.е. результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Например: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$.

Убедимся в выполнении последнего равенства на рассматриваемом примере:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} \equiv (z''_{xx})'_y = 30xy^4,\ \ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial z} \equiv (z''_{xy})'_x = 30xy^4.$$

Перейдем теперь к понятию *дифференциалов высших порядков.* Пусть в области $D \in R^2$ задана нужное число раз дифференцируемая функция $z=f(x,y)$. Тогда ее полный дифференциал вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,\ \ dx = \Delta x,\ \ dy = \Delta y. \tag{3.26}$$

Из равенства (3.26) видно, что дифференциал функции двух переменных снова является некоторой функцией двух переменных, от которой в свою очередь можно вычислять дифференциал.

Определение 2. Дифференциал от дифференциала первого порядка называется *дифференциалом второго порядка* или вторым дифференциалом и обозначается

$$d^2z = d(dz). \tag{3.27}$$

Запишем равенство (3.27) более подробно

$$d^2z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{3.28}$$

Будем считать, что смешанные производные *непрерывны*, а значит и равны между собой, поэтому выражение (3.28) примет вид

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{3.29}$$

Равенство (3.29) может быть записано *в операторной форме*

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z. \tag{3.29$'$}$$

В общем случае *дифференциал* n-*го порядка* определяется как дифференциал от дифференциала (n-1) порядка:

$$d^n z = d\left(d^{n-1}z\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z, \quad \forall n \in N. \tag{3.30}$$

3.6. Формула Тейлора для функции двух переменных

Пусть функция $z=f(x,y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ имеет *непрерывные* частные производные до m-го порядка включительно. Выберем в этой окрестности точку $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ и соединим точки M_0 и M отрезком прямой, параметрические уравнения которого имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t\cdot\Delta x, \\ y &= y_0 + t\cdot\Delta y. \end{aligned}\right\}, \quad 0 \le t \le 1. \tag{3.31}$$

В точках этого отрезка функция $z=f(x,y)$ является функцией одной переменной t

$$z = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = F(t). \tag{3.32}$$

Так как функция $z=f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ непрерывно дифференцируема m раз, то функция $F(t)$ имеет m непрерывных производных на отрезке $[0,1]$ и ее можно разложить по формуле Маклорена* с остаточным членом в форме Лагранжа

---

* *К. Маклорен (1698-1746) – шотландский математик.*

$$\begin{aligned} F(t)-F(0)=F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\frac{F'''(0)}{3!}t^3+\ldots+ \\ +\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1}+\frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m, \quad 0<\theta<1. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Отсюда при $t=1$ получим

$$F(1)-F(0)=F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\frac{F'''(0)}{3!}+\ldots+\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}+\frac{F^{(m)}(\theta)}{m!}, \quad 0<\theta<1. \tag{3.34}$$

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что производные $F^{(k)}(0)$ выражаются через частные производные функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ следующим образом

$$F^{(k)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(M_0)\equiv d^k f(M_0), \quad k=\overline{1,m}. \tag{3.35}$$

Тогда с учетом (3.35) равенство (3.34) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Delta f(M_0)=df(M_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(M_0)+\frac{1}{3!}d^3 f(M_0)+\ldots+ \\ +\frac{1}{(m-1)!}d^{m-1}f(M_0)+\frac{1}{m!}d^m f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), \quad 0<\theta<1. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Формула (3.36) называется *формулой Тейлора*[*] для функции $z=f(x,y)$ *в дифференциальной форме.*

3.7. Скалярное поле. Поверхности уровня

Пусть в некоторой области $D\in R^3$ задана функция

$$u=u(x,y,z). \tag{3.37}$$

Тем самым с помощью равенства (3.37) в области D задано *скалярное поле.* Рассмотрим множество точек области D, в которых функция (3.37) принимает одинаковые значения

$$u(x,y,z)=C, \quad C-\text{const}. \tag{3.38}$$

При конкретных значениях постоянной C уравнение (3.38) в трехмерном пространстве определяет, вообще говоря, некоторую поверхность, которая называется *поверхностью уровня* скалярного поля (3.37).

Рассмотрим более подробно случай функции двух переменных, для которого соответствующие равенства (3.37), (3.38) запишутся в виде

$$z=u(x,y), \tag{3.37'}$$

$$u(x,y)=C, \quad C-const. \tag{3.38'}$$

---

[*] *Б. Тейлор (1685-1731) – английский математик.*

Уравнение (3.37′) в трехмерном пространстве определяет, вообще говоря, некоторую поверхность, а уравнение (3.38′) на плоскости $x0y$ - некоторую линию, которая называется *линией уровня* функции (3.37′). Линия уровня может быть получена при пересечении поверхности $z=u(x,y)$ плоскостью $z=C$. Меняя значения C, мы будем получать новые секущие плоскости, которые будут, вообще говоря, рассекать эту поверхность по новым линиям уровня. Обычно берут арифметическую прогрессию чисел C_h, где $h=C_{k+1}-C_k$. Тогда по взаимному расположению линий уровня можно представить форму поверхности, соответствующей функции $z=u(x,y)$. Причем, там, где функция изменяется быстро (*крутая поверхность*), линии уровня сгущаются, а там, где функция изменяется медленно (*пологая поверхность*), линии уровня располагаются реже (рис. 3.6).

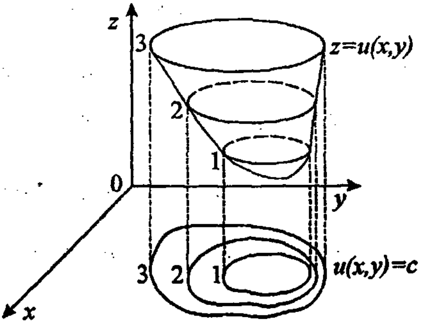

Рис. 3.6

Линии уровня широко используются при составлении топографических и метеорологических карт.

3.8. Производная по направлению

Пусть в некоторой области $D\in R^3$ задана *дифференцируемая* функция $u=u(x,y,z)$. Известен также вектор направления $\vec{S}$, т. е. даны направляющие косинусы этого вектора

$$\vec{S}_0=\frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma), \tag{3.39}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

На векторе $\vec{S}$ на расстоянии Δs от его начала $M(x,y,z)$ рассмотрим точку $M_1(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$, тогда $\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$.

Определение. Если существует предел отношения $\Delta u/\Delta s$ при $\Delta s \to 0$, то он называется *производной функции $u=u(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ по направлению вектора* $\vec{S}$ и обозначается

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что производная функции $u=u(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{S}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{3.40}$$

Из формулы (3.40) видно, что, зная частные производные функции $u=u(x,y,z)$ легко найти производную этой функции по любому направлению $\vec{S}$. Сами частные производные являются частным случаем производной по направлению любой из координатных осей. Например, если в качестве направления $\vec{S}$ взять положительное направление оси $0x$, то $\alpha=0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, а формула (3.40) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Отметим, что производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ показывает *скорость изменения функции* $u=u(x,y,z)$ в направлении вектора $\vec{S}$. Так, например, если $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0) < 0$, то в направлении вектора $\vec{S}$, при прохождении через точку M_0 функция $u=u(x,y,z)$ убывает.

3.9. Градиент и его свойства

Пусть в некоторой области $D \in R^3$ задана *дифференцируемая* функция $u=u(x,y,z)$.

Определение. Вектор, координатами которого являются частные производные по соответствующим переменным, называется *градиентом* функции $u=u(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ и обозначается

$$gradu = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial x}\vec{k}. \tag{3.41}$$

Связь между производной по направлению и градиентом функции устанавливает

Теорема. Производная функции $u=u(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$по направлению вектора $\vec{S}$ равна проекции вектора $gradu$ на направление дифференцирования $\vec{S}$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = np_{\vec{S}}\, gradu \tag{3.42}$$

Доказательство. Выберем в направлении вектора $\vec{S}$ *единичный вектор* $\vec{S}_0$ (рис. 3.7).

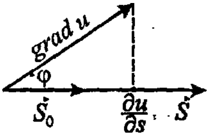

Рис. 3.7

Учитывая, что координаты вектора $\vec{S}_0$ известны и заданы равенством (3.39), рассмотрим скалярное произведение

$$\left(gradu\cdot\vec{S}_0\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{\partial u}{\partial s}.$$

Учитывая, что $\left|\vec{S}_0\right|=1$, это равносильно

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\left(gradu\cdot\vec{S}_0\right)=|gradu|\cdot\left|\vec{S}_0\right|\cos\varphi=|gradu|\cdot\cos\varphi=np_{\vec{S}}gradu, \qquad (3.43)$$

что и требовалось доказать.

Свойства градиента:

1. Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ принимает наибольшее значение, если направление вектора $\vec{S}$ совпадает с направлением вектора *gradu*, при этом

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{\max}=|gradu|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Очевидно, что в противоположном направлении вектора $\vec{S}=-gradu$ производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ принимает минимальное значение, равное $\left(-|gradu|\right)$. Поэтому направление, задаваемое вектором *gradu*, называется *направлением наискорейшего подъема*, а направление (*–gradu*) - *направлением наискорейшего спуска* функции *u=u(x,y,z)*.

2. Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ в направлении вектора $\vec{S}$, перпендикулярного вектору *gradu*, равна нулю.

В справедливости этих свойств легко убедиться из формулы (3.43) при $\varphi=0$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

3. Вектор *gradu(M*$_0$*)* направлен перпендикулярно поверхности уровня, проходящей через точку M_0.

Доказательство этого утверждения проведем для двумерного случая (рис.3.8).

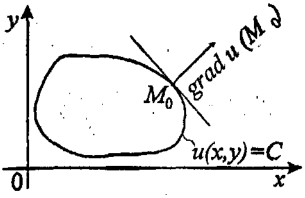

Рис. 3.8

Пусть функция *u=u(x,y)* и *u(x,y)=C=const* ее линия уровня. Тогда из равенства *u(x,y)=C* следует, что

$$du(x,y)=0 \Leftrightarrow u'_x(x,y)dx+u'_y(x,y)dy=0.$$

Откуда

$$\frac{dy}{dx}=y'_x=-\frac{u'_x(x,y)}{u'_y(x,y)} \Rightarrow k_{кас}=y'(M_0)=-\frac{u'_x(M_0)}{u'_y(M_0)}.$$

Далее

$$gradu(M_0)=u'_x(M_0)\vec{i}+u'_y(M_0)\vec{j} \Rightarrow k_{grad}=\frac{u'_y(M_0)}{u'_x(M_0)}.$$

Очевидно, что $k_{grad}\cdot k_{кас.}=-1$, следовательно, вектор *gradu(M*$_0$*)* перпендикулярен касательной к линии уровня в точке M_0.

3.10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть σ – поверхность, определяемая *дифференцируемой функцией z=f(x,y)*.

Определение 1. *Касательной плоскостью* к поверхности σ в точке $M_0 \in \sigma$ называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на этой поверхности через точку M_0.

Поверхность *z=f(x,y)* является поверхностью уровня *u*=0 для функции *u=z–f(x,y)*. Так как вектор *gradu(M*$_0$*)* перпендикулярен к поверхности уровня *u*=0, то он будет перпендикулярен и к искомой касательной плоскости (рис. 3.9).

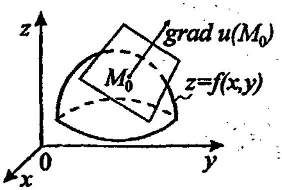

Рис. 3.9

Известно, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A,B,C)$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.44)$$

В нашем случае $z_0=f(x_0,y_0)$ и в соответствии с (3.41)

$$\vec{n}=gradu(M_0)=\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x},\frac{\partial u(M_0)}{\partial y},\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right)=$$

$$=\left(-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},1\right).$$

Поэтому в соответствии с (3.44) уравнение касательной плоскости к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$ имеет вид

$$-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+1\cdot(z-z_0)=0. \qquad (3.45)$$

Определение 2. *Нормалью к поверхности* σ в точке M_0 **называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку** $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

В качестве направляющего вектора нормали может быть взят вектор $\vec{n}=gradu(M_0)$, поэтому *канонические уравнения* искомой нормали запишутся в виде

$$\frac{x-x_0}{-f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{-f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{1}. \qquad (3.46)$$

3.11. Локальные экстремумы функции нескольких переменных

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой области $\vec{n}=gradu(M_0)$.

Определение. Точка $M_0(x_0,y_0.)\in D$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $z=f(x,y)$ в области D, если неравенство $f(M_0)\equiv f(x_0,y_0)>f(x,y)\equiv f(M)$ $(f(M_0)\equiv f(x_0,y_0)<f(x,y)\equiv f(M))$ выполняется для всех точек $M(x,y)$ принадлежащих некоторой окрестности точки M_0 (рис. 3.10).

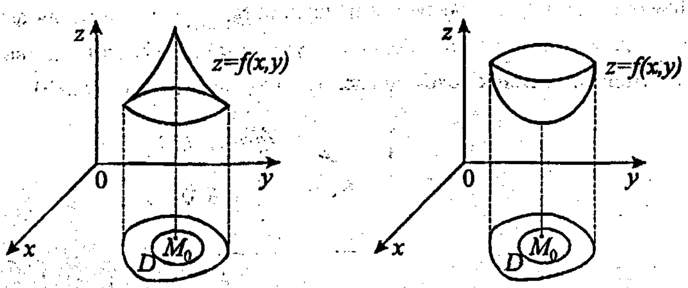

Рис. 3.10

Точки *локального максимума (минимума)* называются точками *локального экстремума* функции $z=f(x,y)$.

Теорема 1. *(Необходимые условия существования локального экстремума)* Если функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,,y_0.)\in D$ локальный экстремум, то ее *частные производные первого порядка в этой точке либо равны нулю, либо не существуют.*

Доказательство проведем, предполагая *дифференцируемость* функции $z=f(x,y)$ в области D.

Пусть известно, что $M_0(x_0,y_0)$ – точка локального экстремума для $z=f(x,y)$. Положим $y=y_0$ и рассмотрим функции $z=f(x,y_0)$. Так как эта функция при $x=x_0$ имеет экстремум, то из необходимого условия существования экстремума для дифференцируемой функции одной переменной следует, что

$$\frac{dz}{dx}=\left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}=0 \Leftrightarrow \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\equiv\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{M_0}=0. \qquad (3.47)$$

Совершенно аналогично доказывается, что если зафиксировать $x=x_0$ и рассмотреть функцию $z=f(x_0,y)$, то

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\equiv\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{M_0}=0. \qquad (3.48)$$

Теорема доказана.

Необходимые условия существования локального экстремума *дифференцируемой* функции (3.47), (3.48) равносильны следующим:

$$gradf(M_0)=\vec{0} \Leftrightarrow df(M_0)=0. \qquad (3.49)$$

Теорема 1 естественным образом обобщается на случай функции любого конечного числа переменных. Справедлива

Теорема 2. Если *дифференцируемая* функция $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ имеет в n-мерной точке $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ локальный экстремум, то *все* ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т. е.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{M_0}=0,\ i=1,2,..n. \qquad (3.50)$$

Условия (3.50) также могут быть записаны в более компактном виде (3.49).

Замечание. Отметим, что также как и для функции одной переменной, *необходимые условия существования локального экстремума* функции двух и более переменных *не являются достаточными.*

Точки, в которых *все* частные производные первого порядка обращаются в нуль, называются *критическими или стационарными* точками дифференцируемой функции нескольких переменных. В общем случае система (3.50) состоит из n уравнений с n переменными. Решая ее, найдем координаты *критических точек, т. е. точек, подозрительных на локальный экстремум.*

Теорема 3. (*Достаточные условия существования локального экстремума функции двух переменных*). Пусть *дважды непрерывно дифференцируемая* функция $z=f(x,y)$ области $D \in R^2$ содержит *критическую точку* $M_0(x_0, y_0)$, т.е.

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{M_0} = 0. \tag{1}$$

Вычислим вторые частные производные в критической точке:

$$A_{11} = \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \quad A_{12} = \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}, \quad A_{22} = \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{M_0}.$$

Тогда, если:

1). $\Delta \equiv A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$, то существует локальный экстремум функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$, при этом:

а). Если $A_{11} > 0 \Leftrightarrow d^2 f(M_0) > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – *точка локального минимума* для функции $z=f(x,y)$.

б). Если $A_{11} < 0 \Leftrightarrow d^2 f(M_0) < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – *точка локального максимума* для функции $z=f(x,y)$.

2). $\Delta \equiv A_{11}A_{22} - A_{12}^2 < 0$, то *в точке $M_0(x_0, y_0)$ локального экстремума у функции $z=f(x,y)$ нет.*

3). $A_{11} < 0 \Leftrightarrow d^2 f(M_0) < 0$. В данном случае *локальный экстремум у функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ может быть, а может и не быть.* Для выяснения этого нужно проводить дополнительные исследования.

Доказательство. При $m=2$ формула Тейлора (3.36), с учетом условия (1), ($df(M_0)=0$), примет вид

$$\begin{gathered} f(x,y) - f(M_0) \equiv \Delta f(M_0) = \frac{1}{2!} d^2 f(M_1) = \\ = \frac{1}{2!}\left[A'_{11}(\Delta x)^2 + A'_{12}\Delta x \Delta y + A'_{22}(\Delta y)^2\right] \end{gathered}, \tag{2}$$

где $M_1(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)$, $0<\theta<1$,

$$A_{11}^{\prime}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_1},\quad A_{12}^{\prime}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{M_1},\quad A_{22}^{\prime}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_1}.$$

В силу непрерывности вторых частных производных в точке $M_0(x_0, y_0)$ следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} A_{11}^{\prime}=A_{11},\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} A_{12}^{\prime}=A_{12},\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} A_{22}^{\prime}=A_{22},$$

откуда

$$A_{11}^{\prime}=A_{11}+\alpha_1,\quad A_{12}^{\prime}=A_{12}+\alpha_2,\quad A_{22}^{\prime}=A_{22}+\alpha_3,$$

где α_i, i=1,2,3 – бесконечно малые функции относительно $\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Учитывая это равенство (2) может быть записано в виде [4, т.2]

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{(\Delta y)^2}{2}\left[A_{11}t^2+2A_{12}t+A_{22}\right]+\alpha(\Delta\rho)^2, \qquad (3)$$

где $t=\Delta x/\Delta y$, α - бесконечно малая функция относительно $\Delta\rho$.

При достаточно малых $\Delta\rho$ знак правой части формулы (3) определяется знаком квадратного трехчлена, находящегося в квадратной скобке. Известно, что при $A_{11}>0$ и $\Delta\equiv A_{11}A_{22}-A_{12}^2>0$ этот трехчлен будет положительным, при $A_{11}<0$ и $\Delta\equiv A_{11}A_{22}-A_{12}^2>0$ – отрицательным, а при $\Delta\equiv A_{11}A_{22}-A_{12}^2<0$ – он меняет знак. Следовательно, в случае 1а) $f(x,y)-f(x_0,y_0)>0\Leftrightarrow f(x_0,y_0)<f(x,y)$. Значит, $M_0(x_0, y_0)$ – точка локального минимума для функции $z=f(x,y)$. Аналогично, в случае 1б) $M_0(x_0, y_0)$ – точка локального максимума для функции $z=f(x,y)$. Так как при $\Delta<0$ разносить $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ меняет знак, то в случае 2 в точке $M_0(x_0, y_0)$ локального экстремума у функции $z=f(x,y)$ нет. Теорема доказана.

Другие способы доказательства этой теоремы приведены [2, 9, 16 (т. 1), 19].

Пример. Исследовать на локальный экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy$.

Составим систему (3.50) для нахождения критических точек данной функции

$$\begin{cases} z'_x\equiv 3x^2-3y=0,\\ z'_y\equiv 3y^2-3x=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, найдем, что такие точки $M_1(1,1)$ и $M_2(0,0)$. Далее вычислим вторые частные производные:

$$z''_{xx}=6x,\quad z''_{xy}=-3,\quad z''_{xx}=6x.$$

Затем найдем

$$\Delta \equiv (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\Big|_{M_1} = 36 - 9 = 27 > 0, \quad A_{11}\Big|_{M_1} = 6 > 0,$$

значит $M_1(1,1)$ - точка локального минимума рассматриваемой функции. $z_{min}=z(M_1)=-1$. Проверим теперь точку $M_2\,(0,0)$.

$\Delta \equiv (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\Big|_{M_2} = 30 - 9 = -9 < 0$, значит в точке M_2 (0,0) локального экстремума у функции нет.

3.12. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области (глобальные экстремумы)

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и *непрерывна в замкнутой ограниченной области* $\overline{D} = D \cup L$, где L граница области D, и *дифференцируема* во всех ее внутренних точках. Тогда, в силу теоремы Вейерштрасса, существуют точки $M_1 \in \overline{D}$, $M_2 \in \overline{D}$, в которых функция $z=f(x,y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения *(глобальные экстремумы)*:

$$M = f(M_1) = \max_{\forall(x,y)\in\overline{D}} f(x,y) \quad m = f(M_2) = \min_{\forall(x,y)\in\overline{D}} f(x,y).$$

Точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ нужно искать среди критических точек функции $z=f(x,y)$ внутри области D или среди точек, принадлежащих ее границе L. Затем, сравнивая значения функции $z=f(x,y)$ в этих точках выберем среди них наибольшее и наименьшее.

3.13. Локальный условный экстремум функции нескольких переменных

Находя локальные экстремумы функции $z=f(x,y)$, мы не налагали никаких условий на независимые переменные. Такие экстремумы называются *безусловными.*

Пусть теперь функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой области D плоскости $x0y$, содержащей линию L, заданную уравнением

$$\varphi(x,y)=0, \tag{3.51}$$

которое называется *уравнением связи.* Будем рассматривать значения функции $z=f(x,y)$, которая часто называется *целевой функцией,* не во всей области D, а лишь для точек, расположенных на линии L.

Определение. Точка $P_0(x_0,y_0)$ называется *точкой локального условного максимума (минимума),* если неравенство $f(P_0)\equiv f(x_0,y_0)>f(x,y)$ $(f(P_0)\equiv f(x_0,y_0)<f(x,y))$ выполняется, вообще говоря, не для всех точек некоторой окрестности точки P_0, а лишь для точек, принадлежащих линии L (рис.3.11).

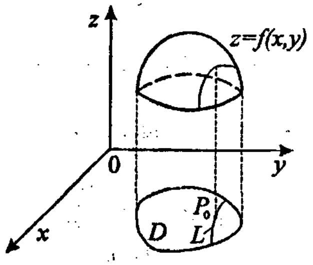

Рис. 3.11

Выясним теперь, как находить координаты точек, подозрительных на условный экстремум.

1). Пусть уравнение связи (3.51) разрешимо относительно одной из переменных x или y, например, $\varphi(x,y)=0 \Leftrightarrow y=g(x)$. С учетом этого выражение $z=f(x,g(x))=f_1(x)$, т. е. мы придем к известной задаче отыскания экстремума функции одной переменной.

2). Если уравнение связи (3.51) неразрешимо относительно x или y, то будем считать, что оно неявно определяет y как функцию от x. Предположим, что функции $\varphi(x,y)=0$ и $z=f(x,y)$ *дифференцируемы* в рассматриваемых областях.

Найдем производную от функции $z=f(x,y)$, учитывая, что в силу (3.51) y есть функция от x. Применяя формулу (3.19) для вычисления *полной производной*, получим

$$\frac{dz}{dx}=z'_x+z'_y\cdot y'_x. \tag{3.52}$$

Производную y'_x определим из равенства (3.51) по формуле (3.23) как производную неявно заданной функции y'_x. Учитывая это, равенство (3.52) примет вид

$$\frac{dz}{dx}=f'_x+f'_y\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right). \tag{3.53}$$

Для *дифференцируемой* функции в точке экстремума производная равна нулю

$$\frac{dz}{dx}=0 \Leftrightarrow f'_x+f'_y\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)=0. \tag{3.54}$$

Присоединяя сюда уравнение связи (3.51), получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f'_x-f'_y\left(\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{3.55}$$

Запишем первое из уравнений системы (3.55) в виде пропорции

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x}=\frac{f'_y}{\varphi'_y}=-\lambda,\quad \lambda=const.$$

Учитывая это, система (3.55) запишется в виде

$$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{3.56}$$

Решая эту систему, найдем число λ и координаты точек (x,y), подозрительных на условный экстремум. Система (3.56) представляет собой *необходимые условия существования условного экстремума.*

Введем вспомогательную функцию

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y), \tag{3.57}$$

которая называется *функцией Лагранжа* для $z=f(x,y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x,y)=0$, где λ - неопределенный пока числовой *множитель Лагранжа.*

Нетрудно заметить, что левые части уравнений системы (3.56) есть частные производные по x,y,λ от функции Лагранжа $F(x,y,\lambda)$, определяемой равенством (3.57), и она может быть записана в виде

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda)=0, \\ F'_y(x,y,\lambda)=0, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda)=0. \end{cases} \tag{3.56$'$}$$

Таким образом, задача нахождения *условного* экстремума функции $z=f(x,y)$ при ограничении $\varphi(x,y)=0$, сводится к отысканию *безусловного* локального экстремума для соответствующей функции Лагранжа $F(x,y,\lambda)$.

Условный экстремум функции трех и более переменных при наличии уравнений связи, число которых меньше числа аргументов, определяется аналогично. Так, например, если требуется найти экстремум функции $u=f(x,y,z)$ при условиях

$$\varphi_1(x,y,z)=0,\quad \varphi_2(x,y,z)=0, \tag{3.58}$$

то составляют функцию Лагранжа

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z). \tag{3.59}$$

Присоединяя к уравнениям (3.58) еще три уравнения

$$F'_x(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0,\quad F'_y(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0,\quad F'_z(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0,$$

получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными (аналог системы (3.56$'$)), решая которую найдем числа λ_1, λ_2 и координаты точек (x,y,z) возможного условного экстремума. Указанный метод отыскания точек, подозрительных на условный экстремум, называется *методом множителей Лагранжа*.

Достаточные условия существования условного экстремума. Пусть функции $\varphi(x,y)=0$ и $z=f(x,y)$ *дважды непрерывно дифференцируемы* в окрестности критической точки $M_0(x_0,y_0,\lambda_0)$ функции Лагранжа $F(x,y,\lambda)$. Применяя формулу Тейлора для функции двух переменных (3.36) при $m=2$ можно доказать, что:

1). Если $d^2F_0(x_0,y_0)>0$, то $P_0(x_0,y_0)\in L$ – точка локального условного минимума функции $z=f(x,y)$.

2). Если $d^2F_0(x_0,y_0)<0$, то $P_0(x_0,y_0)\in L$ – точка локального условного максимума функции $z=f(x,y)$.

Замечание. Второй дифференциал от функции Лагранжа $F(x,y,\lambda)$ должен вычисляться для значений x_0,y_0,λ_0, найденных как решение системы (3.56′) с обязательным учетом соотношений, вытекающих из уравнений связи $\varphi'_x(x,y)dx+\varphi'_y(x,y)dy=0$.

Из (3.29), (3.29′) следует

$$d^2F(x,y,\lambda)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2F(x,y,\lambda)=$$

$$=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dy^2,\quad \lambda=\lambda_0. \qquad (3.60)$$

Пример. Найти локальные экстремумы функции $z=x+2y+3$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $x^2+y^2=5$.

Это задача на локальный условный экстремум. Введем функцию Лагранжа (3.57)

$$F(x,y,\lambda)=x+2y+3+\lambda(x^2+y^2-5).$$

Система (3.56) в данном случае примет вид

$$\begin{cases}F'_x\equiv 1+2\lambda x=0,\\ F'_y\equiv 2+2\lambda y=0,\\ F'_\lambda\equiv x^2+y^2-5=0.\end{cases}$$

Она имеет два решения, т. е. две трехмерные точки $M_1(1,2,-1/2)$ $M_2(-1,-2,1/2)$. Значит функция $z=x+2y+3$ имеет две критические точки $P_1(1,2)$ при $\lambda_1=-1/2$ и $P_2(-1,-2)$ при $\lambda_2=1/2$.

Найдем теперь знак d^2F в каждой критической точке при соответствующем ей значении λ. Так как $F''_{xx}=2\lambda$, $F''_{xy}=0$, $F''_{yy}=2\lambda$, то из равенства (3.60) получим $d^2F(x,y,\lambda)=2\lambda(dx^2+dy^2)$. Очевидно, что $d^2F(P_1)=d^2F(1,2,-1/2)<0$, $d^2F(P_2)=$

$d^2F(-1,-2,1/2)>0$, т. е. функция z в точке $P_1(1,2)$ имеет локальный условный максимум, а в точке $P_2(-1,-2)$ имеет локальный условный минимум, при этом $z_{max}=z(P_1)=8$, $z_{min}=z(P_2)=-2$.

Этот результат ясен и из геометрических соображений, как наибольшее и наименьшее значения аппликат z точек пересечения наклонной плоскости $z=x+2y+3$ с цилиндром $x^2+y^2=5$, параллельным оси $0z$.

3.14. Метод наименьших квадратов

В прикладных естественнонаучных, технических и экономических задачах часто зависимость между двумя переменными x и y дана в виде таблицы, полученной экспериментальным путем или в результате статистической обработки данных за соответствующие периоды (табл. 1).

Таблица 1

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	x_2	…	y_i	…	y_n

Требуется *получить*, хотя бы приближенно, *непрерывную зависимость* изучаемого процесса аналитически, т. е. в виде некоторой формулы. Данная задача решается с помощью теории экстремумов функции нескольких переменных. Для этого «экспериментальные точки» (x_1,y_1), (x_2, x_2),…, (x_n, y_n) наносят на координатную плоскость (рис.3.12).

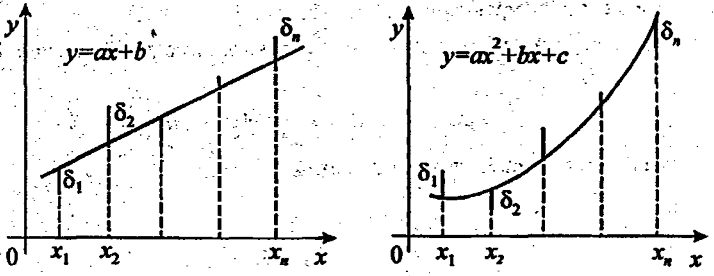

Рис.3.12

Будем считать, что либо из геометрических, физических или экономических соображений зависимость для исследуемого процесса нами выбрана, т.е.

$$y=\varphi(x,a,b,...,r). \qquad (3.61)$$

Формулу (3.61), приближенно выражающую эту зависимость, называют *эмпирической*. Наша задача подобрать неизвестные пока параметры $a,b,...,r$ так, чтобы функция

$$S(a,b,...,r)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\varphi(x_i,a,b,...,r)\right]^2 \quad (3.62)$$

принимала наименьшее значение.

Если сумма квадратов отклонений окажется малой, то и сами отклонения δ_i также будут малыми по абсолютной величине. В этом заключается суть метода наименьших квадратов.

Замечание. Отметим, что если в качестве величины отклонения $\bar{S}$ взять сумму всех отклонений $\bar{S}=\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\varphi(x_i,a,b,...,r)\right]$, то она может быть малой или даже равняться нулю при значительном разбросе экспериментальных точек от искомой кривой (3.61), так как положительные отклонения компенсируются отрицательными.

Если в качестве отклонения $\tilde{S}$ взять сумму абсолютных величин всех отклонений $\tilde{S}=\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|=\sum_{i=1}^{n}|y_i-\varphi(x_i,a,b,...,r)|$, то эта функция окажется *недифференцируемой*, что существенно затруднит решение задачи.

Отклонение S, определяемое равенством (3.62), свободно от указанных недостатков.

Для того, чтобы *дифференцируемая* функция (3.62) в какой-то точке имела минимум, необходимо (3.50), чтобы *все* ее частные производные в этой точке были равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a}\equiv-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\left[y_i-\varphi(x_i,a,b,...,r)\right]\cdot\dfrac{\partial\varphi(x_i,a,b,...,r)}{\partial a}\right\}=0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b}\equiv-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\left[y_i-\varphi(x_i,a,b,...,r)\right]\cdot\dfrac{\partial\varphi(x_i,a,b,...,r)}{\partial b}\right\}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial S}{\partial r}\equiv-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\left[y_i-\varphi(x_i,a,b,...,r)\right]\cdot\dfrac{\partial\varphi(x_i,a,b,...,r)}{\partial r}\right\}=0. \end{cases} \quad (3.63)$$

В системе (3.63) уравнений столько, сколько параметров у функции (3.61). Решая эту систему, найдем конкретные значения чисел $a,b,...,r$ при которых функция $y=\varphi(x,a,b,...,r)$ наилучшим образом *непрерывно* отображает изучаемый процесс. Отметим, однако, что в общем случае система (3.63) может оказаться неразрешимой или можно найти значения параметров, не дающих минимум функции (3.62). Эти опасения не подтверждаются для основных достаточно простых зависимостей: $y=ax+b$, $y=ax2+bx+c$, $y=a+b/x+c/x2$, $y=(ax+b)/(x+c)$, $y=ax^b$, $y=a\cdot b^x$, $y=a\cdot e^{bx}$,

$y=a+b\ln x$, широко применяемых при обработке различных экспериментальных данных.

1. Рассмотрим *линейную зависимость*

$$y=\varphi(x,a,b)=ax+b. \tag{3.64}$$

В этом случае функция (3.62) и система (3.63) запишутся в виде

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2, \tag{3.65}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\left[y_i-(ax_i+b)\right]x_i\right\}=0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\left[y_i-(ax_i+b)\right]\cdot 1\right\}=0. \end{cases} \tag{3.66}$$

Окончательно система (3.66) примет вид

$$\begin{cases} a\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)+b\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)+b\cdot n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \tag{3.66$'$}$$

Она называется *нормальной системой* метода наименьших квадратов.

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что система (3.66$'$) всегда имеет единственное решение и при найденных коэффициентах a и b функция (3.65) имеет глобальный минимум.

2. В случае *квадратичной зависимости*

$$y=\varphi(x,a,b,c)=ax^2+bx+c \tag{3.67}$$

функция (3.62) примет вид

$$S(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)\right]^2, \tag{3.68}$$

а система (3.63) приводит к следующей *нормальной системе* уравнений

$$\begin{cases} a\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4\right)+b\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3\right)+c\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i, \\ a\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3\right)+b\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)+c\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)+b\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)+c\cdot n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i, \end{cases} \tag{3.69}$$

из которой находятся значения параметров a,b,c эмпирической формулы (3.67), при которых функция (3.68) имеет минимум.

Пример. В таблице 2 приводятся данные о цене на нефть *x* (ден. ед.) и индексы акций нефтяных компаний *y* (усл. ед.).

Таблица 2

x	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
y	537	534	550	555	560	552

Предполагается, что между переменными *x* и *y* существует *линейная* зависимость. Требуется найти эмпирическую формулу $y=ax+b$, отображающую *непрерывную* зависимость процесса, используя метод наименьших квадратов.

Промежуточные вычисления оформим в виде таблицы 3, значения последней строки которой являются коэффициентами системы (3.66′).

Таблица 3

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	17,28	537	9279,36	298,60
2	17,05	534	9104,70	290,70
3	18,30	550	10065,00	334,89
4	18,80	555	10434,00	353,44
5	19,20	560	10752,00	368,64
6	18,50	552	10212,00	342,25
Σ	109,13	3288	59847,06	1988,52

Система (3.66′) имеет вид

$$\begin{cases} 1988{,}52a + 109{,}13b = 59847{,}06, \\ 109{,}13a + 6b = 3288\,. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем, что a =12,08, b =328,29, т.е. y =12,08x+328,29. Таким образом, с увеличением цены на нефть на 1 ден. ед. индекс акций нефтяных компаний в среднем возрастет на 12,08 усл. ед.

ГЛАВА 4.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Двойные интегралы

Пусть функция $z=f(x,y)$ задана в ограниченной *замкнутой* области $\overline{D}=D+L\equiv D\cup L$ плоскости $x0y$. Разобьем область D *произвольными* линиями на n элементарных областей D_i, площади которых обозначим ΔS_i (рис. 4.1).

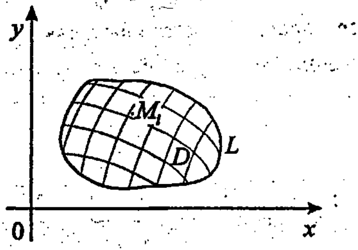

Рис. 4.1

В каждой из элементарных областей D_i выберем *произвольно* по-точке $M_i(x_i,y_i)$, вычислим значения функции $f(x,y)$ в этих точках, умножим их на площади соответствующих элементарных областей и просуммируем по всем разбиениям. Получим

$$V_n = f(x_1,y_1)\Delta S_1 + f(x_2,y_2)\Delta S_2 + \ldots + f(x_n,y_n)\Delta S_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i . \qquad (4.1)$$

Составленная по указанному правилу сумма (4.1) называется *интегральной суммой* для функции $z=f(x,y)$ в области D.

Напомним, что *диаметром* области называется наибольшее расстояние между точками ее границы. Обозначим через d_i диаметр элементарной области D_i. Пусть λ - наибольший из всех диаметров d_i $i=\overline{1,n}$.

Определение. Если существует *конечный предел* интегральной суммы (4.1) при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а диаметр λ наибольшей из элементарных областей стремится к нулю, не зависящий от способа разбиения области D на частичные области D_i и от выбора точек $M_i(x_i,y_i)$ в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x,y)$ по области D и обозначается символом

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i . \qquad (4.2)$$

При этом D называется областью интегрирования, $f(x,y)$ - подынтегральной функцией, dS – элементом площади.

Справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема. (Достаточное условие существования двойного интеграла). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то она интегрируема в этой области, т.е. предел (4.2) существует, при этом он не зависит ни от способа разбиения области D на элементарные области D_i, ни от выбора точек $M_i(x_i,y_i)$ в этих областях.

Выясним *геометрический смысл двойного интеграла*, когда подынтегральная функция неотрицательна в области интегрирования. Пусть $z=f(x,y)\geq 0,\ \forall(x,y)\in\overline{D}$.

Напомним, что в трехмерном пространстве R^3 уравнение $z=f(x,y)$ определяет, вообще говоря, некоторую поверхность (рис. 4.2.).

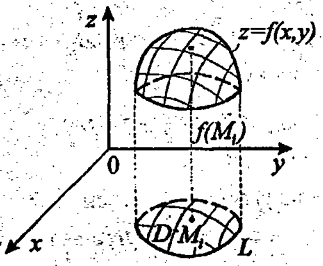

Рис. 4.2

Произведение $f(M_i)\Delta S_i$ равно объему цилиндра с основанием D_i и высотой $f(M_i)$. Учитывая это, интегральная сумма (4.1) будет представлять собой объем n-ступенчатого тела, состоящего из n элементарных цилиндров. Нетрудно убедиться, что *двойной интеграл (4.2) равен объему V тела, ограниченного плоскостью $x0y$, поверхностью $z=f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси $0z$, а направляющей служит граница L области D*, т.е.

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dS,\ \ f(x,y)\geq 0,\ \ \forall(x,y)\in\overline{D}. \qquad (4.3)$$

Так как определение двойного интеграла совершенно аналогично определению одномерного интеграла, то все основные свойства одномерных интегралов по аналогии переносятся и на двойные интегралы. Предполагая, что все рассматриваемые ниже двойные интегралы по соответствующим областям существуют, будем иметь:

1. $\iint\limits_D [f_1(x,y)\pm f_2(x,y)]dS=\iint\limits_D f_1(x,y)dS\pm\iint\limits_D f_2(x,y)dS$.

2. $\iint\limits_D C\cdot f(x,y)dS=C\iint\limits_D f(x,y)dS$, $C-\forall const$.

3. Пусть область D состоит из двух непересекающихся областей D_1 и D_2, тогда $\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS$.

4. $\iint\limits_D dS = S$, где S – площадь области D.

5. Если $\varphi(x,y) \le f(x,y)$, то $\iint\limits_D \varphi(x,y)dS \le \iint\limits_D f(x,y)dS$, т.е. неравенства можно интегрировать с сохранением их знака.

6. Пусть функция $z=f(x,y)$ *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$. Тогда она достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значений

$$M = f(M_1) = \max_{\forall (x,y)\in\overline{D}} f(x,y), \quad m = f(M_2) = \min_{\forall (x,y)\in\overline{D}} f(x,y).$$

Очевидно, что $m \le f(x,y) \le M$, $\overline{D}$. Интегрируя эти неравенства по области D и учитывая свойства 2, 4, 5 получим

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)dS \le MS. \tag{4.4}$$

Неравенства (4.4) можно рассматривать как грубую оценку двойного интеграла.

7. *Теорема о среднем.* Если подынтегральная функция $f(x,y)$ *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = f(x_0;y_0)S, \quad M_0(x_0;y_0) \in D, \tag{4.5}$$

т.е. двойной интеграл по области D равен значению подынтегральной функции в некоторой точке $M_0(x_0,y_0) \in D$, умноженной на площадь S области интегрирования D. При этом число

$$f(M_0) \equiv f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)dS \tag{4.6}$$

называется средним значением функции $z=f(x,y)$ в области D.

Справедливость указанных свойств следует из определения двойного интеграла (4.2).

4.2. Вычисление двойного интеграла

Предположим, что подынтегральная функция $f(x,y)$ *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$. Так как в этом случае предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения области на элементарные области D_{ij}, то такие разбиения проведем прямыми, параллельными координатным осям (рис. 4.3).

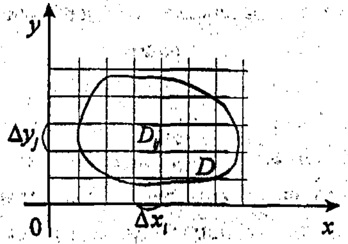

Рис. 4.3

Так как площадь элементарной области $\Delta S_{ij}=\Delta x_i \Delta y_j$, то элемент площади $dS=dxdy$, поэтому

$$\iint_D f(x,y)dS=\iint_D f(x,y)dxdy. \tag{4.7}$$

Будем считать, что область интегрирования D является ***правильной***, т.е. любая прямая, параллельная координатным осям, пересекает границу этой области не более чем в двух точках (рис. 4.4).

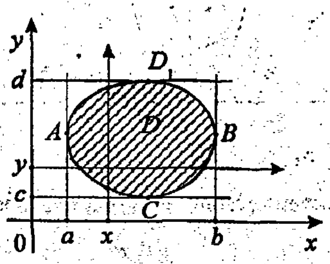

Рис. 4.4

Пусть уравнения границы области D нам известны:

$\overline{ACB}: y=y_1(x),\ \ a\le x\le b;\ \ \overline{AD_1B}: y=y_2(x),\ \ a\le x\le b;$

$\overline{CAD_1}: x=x_1(y),\ \ c\le y\le d;\ \ \overline{CBD_1}: x=x_2(y),\ \ c\le y\le d.$

Теоретическое упражнение. Доказать справедливость следующих равенств (см., например, [1, 4 (т.2), 9, 15, 16 (т.2), 19]):

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy, \tag{4.8}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y)dx. \tag{4.9}$$

Из формул (4.8), (4.9) видно, что двойной интеграл сводится к последовательному вычислению двух одномерных определенных интегралов.

Отметим при этом, что в равенстве (4.8) первым считается внутренний интеграл по переменной y, *в это время x временно фиксируется*, затем вычисляется внешний интеграл по переменной x. В равенстве (4.9) наоборот.

Замечание 1. Если область интегрирования D является *неправильной* или же *ее нижняя либо верхняя граница задается различными уравнениями*, то всю область интегрирования нужно разбить на ее части, являющиеся правильными областями, в которых как верхняя, так и нижняя граница будут задаваться только одним уравнением.

Пример. Расставить пределы интегрирования в двойном интервале в том и другом порядке по области D, ограниченной линиями $y=x^2$, $x+y=2$, $y=0$.

Замечание 2. Прежде чем рассматривать пределы интегрирования в двойном интеграле, нужно обязательно изобразить область интегрирования (рис. 4.5).

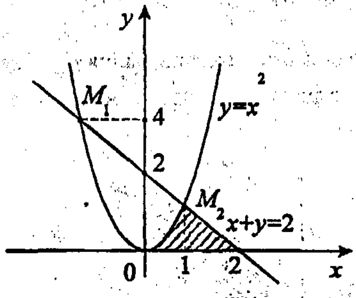

Рис. 4.5

Найдем точки пересечения линий $y=x^2$ и $x+y=2$ решая систему

$$\begin{cases} y=x^2, \\ x+y=2. \end{cases}$$

В результате получим $M_1(-2{,}4)$, $M_2(1{,}1)$. Тогда с учетом замечания 1, двойной интеграл на основании (4.8), (4.9) представится в виде следующих повторных интегралов

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx. \qquad (4.10)$$

4.3. Геометрические приложения двойных интегралов

Как уже говорилось в п. 4.1 (формула (4.3)), *двойной интеграл от неотрицательной подынтегральной функции равен объему цилиндроида*, ограниченного снизу плоскостью xOy, сверху поверхностью $z=f(x,y)$, а также боковой цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей служит граница L области интегрирования D.

Пусть теперь требуется вычислить объем V пространственного тела, ограниченного двумя поверхностями (рис. 4.6).

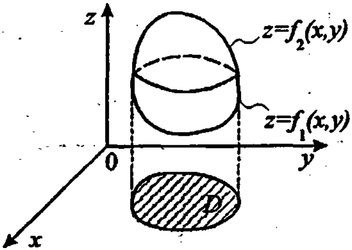

Рис. 4.6

Очевидно, что в этом случае

$$V=\iint\limits_D f_2(x,y)dxdy-\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy=\iint\limits_D\left[f_2(x,y)-f_1(x,y)\right]dxdy. \qquad (4.11)$$

Напомним, что площадь S области D вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_D dS=\iint\limits_D dxdy. \qquad (4.12)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $y=x^2$, $x+y=2$ (рис. 4.5). По формуле (4.12) с учетом (4.10) будем иметь

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y}dx=\int\limits_0^1 dy\cdot x\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y}=\int\limits_0^1(2-y-\sqrt{y})dy=$$

$$=\left(2y-y^2/2-\frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}}\right)\Bigg|_0^1=2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\approx 0{,}83ед^2.$$

Проверить результат можно изменив порядок интегрирования в соответствии с (4.10).

4.4. Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть требуется вычислить $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где подынтегральная функция $f(x,y)$ *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$. На плоскости $x0y$ одновременно с прямоугольной системой координат рассмотрим полярную систему координат, когда полюс помещен в начало координат, а направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси $0x$. Тогда одна и та же точка M будет иметь как прямоугольные, так и полярные координаты (рис. 4.7), которые связаны между собой равенствами

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (4.13)$$

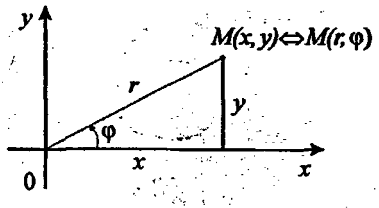

Рис. 4.7

Будем считать, что область интегрирования D находится в секторе, ограниченном лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$. Разобьем ее на элементарные области D_{ij} лучами, выходящими из начала координат (полюса) $\varphi=\varphi_i$, $i=\overline{0,m}$, $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_m=\beta$ и дугами концентрических окружностей $r=r_j$, $j=\overline{0,k}$ (рис. 4.8).

Обозначим $\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$, $i=\overline{1,m}$; $\Delta r_j=r_j-r_{j-1}$,

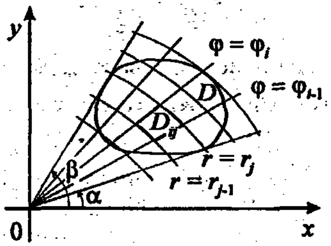

Рис. 4.8

Вычислим площадь ΔS_{ij} криволинейного четырехугольника D_{ij}

$$\Delta S_{ij}=\frac{1}{2}\left(r_{j-1}+\Delta r_j\right)^2\Delta\varphi_i-\frac{1}{2}r_{j-1}^2\Delta\varphi_i=r_{j-1}\Delta r_j\Delta\varphi_i+\frac{1}{2}\Delta r_j^2\Delta\varphi_i=$$

$$=\left(r_{j-1}+\frac{1}{2}\Delta r_j\right)\Delta r_j\Delta\varphi_i=r_{j*}\Delta r_j\Delta\varphi_i,\qquad r_{j*}=r_{j-1}+\frac{1}{2}\Delta r_j.$$

В каждой из элементарных областей D_{ij} выберем произвольно по точке $M_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$, вычислим значения функции $f(x,y)$ в этих точках, умножим их на площади соответствующих элементарных областей и просуммируем по всем разбиениям. В результате получим *интегральную сумму*

$$\sum_{i,j}f(M_{ij})\Delta S_{ij}=\sum_{i,j}f(x_{ij},y_{ij})\Delta S_{ij}. \qquad (4.14)$$

Так как функция $f(x,y)$ *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$, то предел интегральной суммы (4.14) не зависит от выбора точек $M_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ в элементарных областях D_{ij}. Поэтому выберем точки M_{ij} так, чтобы они находились на пересечении окружности радиуса r_{j*} и луча $\varphi=\varphi_i$. Тогда в силу (4.13) $x_{ij}=r_{j*}\cos\varphi_i$, $y_{ij}=r_{j*}\sin\varphi_i$.

Учитывая эти соотношения, а также выражение для площади ΔS_{ij} запишем интегральную сумму (4.14) в виде

$$\sum_{i,j} f(M_{ij})\Delta S_{ij} = \sum_{i,j} f(r_{j*}\cos\varphi_i,\ r_{j*}\sin\varphi_i) r_{j*}\Delta r_j \Delta\varphi_i . \qquad (4.15)$$

Нетрудно заметить, что правая часть равенства (4.15) есть *интегральная сумма* для функции $f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r$ по области D. Поэтому, переходя в равенстве (4.15) к пределу при условии, что число разбиений стремится к бесконечности, а диаметр наибольшей из элементарных областей стремится к нулю получим

$$\iint_D f(x,y)\underbrace{dxdy}_{dS} = \iint_D f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\underbrace{rdrd\varphi}_{dS} . \qquad (4.16)$$

Формула (4.16) дает *нам правило перехода в двойных интегралах от прямоугольных координат к полярным*. Отметим при этом, что элемент площади в прямоугольных координатах $dS=dxdy$ переходит в элемент площади в полярных координатах $dS=rdrd\varphi$. Учитывая это, *формула* для нахождения *площади в полярных координатах* примет вид

$$S = \iint_D dS = \iint_D rdrd\varphi. \qquad (4.17)$$

Покажем, как расставляются пределы интегрирования в двойном интеграле в полярной системе координат.

1. Пусть область D имеет вид (рис. 4.9),

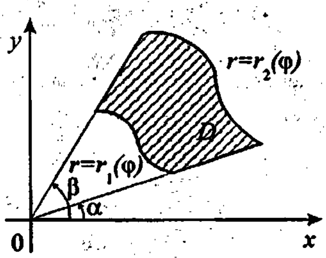

Рис. 4.9

тогда

$$\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr . \qquad (4.18)$$

2. Если полюс находится внутри области D (рис. 4.10), то

$$\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr . \qquad (4.19)$$

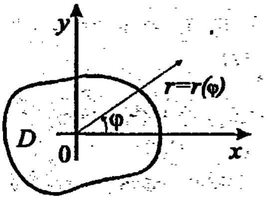

Рис. 4.10

Замечание 1. Если область интегрирования D ограничена лучами и дугами окружностей, то в этом случае при вычислении двойного интеграла, как правило, удобно переходить от прямоугольных координат к полярным.

Замечание 2. Укажем без доказательства, что если производится *общая замена переменных $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$,* при которой область D плоскости $x0y$ переходит в область D' плоскости $u0v$, причем функции $\varphi(u,v)$ и $\psi(u, v)$ однозначны, непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в области D', то формула замены переменной в двойном интеграле имеет вид

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]|J(u,v)|dudv, \qquad (4.20)$$

где $J(u, v)$ - *определитель Якоби*[*] *или якобиан перехода*

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Убедимся, что при переходе от прямоугольных координат к полярным $|J(u,v)|=|J(r,\varphi)|=r$. Так как $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, то

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) = r.$$

Теоретическое упражнение. Доказать, что важный для теории вероятностей и ее приложений *интеграл Эйлера-Пуассона*[**]

$$I=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (4.21)$$

---

[*] *К. Якоби (1804 – 1851) – немецкий математик.*

[**] *С. Пуассон (1781 – 1840) – французский математик и физик.*

Указание. Так как *определенный интеграл* не зависит от переменной интегрирования, то

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

Умножая это равенство на (4.21), получим произведение одномерных интегралов, которое можно рассматривать как двойной интеграл от произведения подынтегральных функций

$$I^2 = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy, \tag{4.22}$$

где область интегрирования D определяется неравенствами $0 \le x<+\infty$, $0 \le y<+\infty$ и представляет собой первый квадрант координатной плоскости $x0y$. Далее в интеграле (4.22) нужно в соответствии с (4.16), (4.18) перейти к полярным координатам, что приведет к вычислению двух простых одномерных интегралов.

4.5. Физические приложения двойных интегралов

1. Вычисление массы пластинки. Пусть требуется определить массу пластинки переменной плотности (сплав), занимающую на плоскости $x0y$ область D. *Плотность $\rho=\rho(x,y)$ – известная непрерывная функция.* При постоянной плотности (материал однородный) масса пластинки вычислялась бы по формуле $m=\rho S$, где ρ - *const*, S – площадь области D.

Всю пластинку D разобьем на n элементарных пластинок D_{ij} прямыми, параллельными координатным осям (рис. 4.3). В каждой их элементарных пластинок D_{ij} выберем произвольно по точке $M_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$. Вычислим плотность в точке M_{ij} и будем *приближенно* считать, что плотность каждой из элементарных пластинок *постоянна* и равна плотности в точке M_{ij}. Тогда $m_{ij}=\rho(M_{ij})\Delta S_{ij}$, где ΔS_{ij} – площадь элементарной пластинки D_{ij}, а приближенная масса всей пластинки будет равна

$$m_n = \sum_{i,j} m_{ij} = \sum_{i,j} \rho(M_{ij})\Delta S_{ij} = \sum_{i,j} \rho(x_{ij}, y_{ij})\Delta x_i \Delta y_j \, .$$

Переходя в этом равенстве к пределу при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а диаметр наибольшей из элементарных пластинок стремится к нулю, получим искомую массу всей пластинки

$$m = \iint_D \rho(x, y) dxdy \tag{4.23}$$

2. Координаты центра тяжести и статические моменты пластинки.

Напомним, что координаты центра тяжести $C(x_c, y_c)$ системы материальных точек $M_i(x_i, y_i)$ с массами m_i, $i=\overline{1,n}$ находятся по формулам:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}. \tag{4.24}$$

Определим координаты центра тяжести пластинки, занимающей на плоскости $x0y$ область D, с известной плотностью $\rho=\rho(x,y)$. Произведем разбиение пластинки D на элементарные пластинки D_{ij} как в предыдущей задаче. Далее приближенную массу элементарной пластинки D_{ij} сосредоточим в соответствующей точке $M_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ и на основании равенств (4.24) определим *приближенные* координаты центра тяжести такой системы материальных точек

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i,j} x_{ij}\rho(M_{ij})\Delta S_{ij}}{\sum\limits_{i,j} \rho(M_{ij})\Delta S_{ij}}, \quad y_c = \frac{\sum\limits_{i,j} y_{ij}\rho(M_{ij})\Delta S_{ij}}{\sum\limits_{i,j} \rho(M_{ij})\Delta S_{ij}}.$$

Переходя в этих равенствах к пределу когда число разбиений стремится к бесконечности, а диаметр наибольшей из элементарных пластинок стремится к нулю, получим *точные* формулы для вычисления координат центра тяжести плоской фигуры:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy} \tag{4.25}$$

или

$$x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy, \quad y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy, \tag{4.26}$$

где m – масса пластинки, которая находится по формуле (4.23).

Выражения $M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy$ и $M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy$ называются *статическими моментами* пластинки D относительно осей $0y$ и $0x$, т.е. формулы (4.25) записываются в привычном для механики виде $x_c = M_y/m$, $y_c = M_x/m$.

Если пластинка D однородна ($\rho(x,y)=const$), то формулы (4.26) упрощаются и принимают вид

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_D x dxdy, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint_D y dxdy, \tag{4.27}$$

где S – площадь области D.

3. ***Момент инерции пластинки.*** *Момент инерции материальной точки* относительно оси определяется как произведение массы точки на квадрат расстояния от нее до оси. *Момент инерции системы материальных точек* относительно одной и той же оси равен сумме моментов инерций всех точек системы. Пусть пластинка занимает на плоскости xOy область D и плотность распределения масс $\rho=\rho(x,y)$ - известна. Требуется найти ее моменты инерции I_x, I_y, I_O относительно осей Ox, Oy и начала координат O соответственно.

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно*, что

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y) dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y) dxdy,$$

$$I_O = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y) dxdy. \tag{4.28}$$

Замечание. Двойные интегралы применяются в теории вероятностей, вариационном исчислении и многих других разделах математики, имеющих многочисленные и разнообразные *экономические приложения*. В частности с их помощью можно находить средние издержки производства, объем произведенной продукции и т.д., если соответствующая зависимость выражается функцией двух переменных.

4.6. Тройные интегралы

Рассмотрим в R^3 ограниченную *пространственную область* Ω. Будем считать, что в замкнутой области $\overline{\Omega}$, т.е. в области Ω, включая ее граничную поверхность σ, задана *непрерывная* функция $f(x, y, z)$. Область Ω разобьем на n элементарных пространственных областей V_i, объемы которых будем обозначать ΔV_i (рис. 4.11).

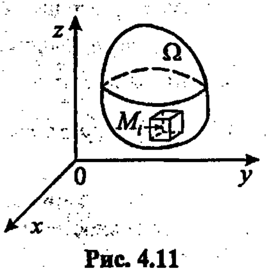

Рис. 4.11

В каждой из элементарных пространственных областей V_i выберем произвольно по точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим значения функции $f(x, y, z)$ в этих точках, умножим их на объемы соответствующих элементарных пространственных областей и просуммируем по всем разбиениям. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i \equiv \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i. \tag{4.29}$$

Составленная по указанному правилу сумма (4.29) называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y, z)$ в области Ω. Обозначим через λ - наибольший из диаметров элементарных пространственных областей V_i, $i = \overline{1, n}$.

Определение. Если существует *конечный предел* интегральной суммы (4.29) при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а диаметр λ наибольшей из элементарных пространственных областей стремится к нулю, не зависящий от способа разбиения области Ω на частичные области V_i и от выбора точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$ в них, то он называется *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по пространственной области Ω и обозначается символом

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dV = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i. \tag{4.30}$$

Как и для случая двойных интегралов справедлива аналогичная

Теорема. *(Достаточное условие существования тройного интеграла). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega}$, то она интегрируема в данной области*, т.е. предел (4.30) всегда существует, при этом он не зависит ни от способа разбиения области Ω на элементарные пространственные области V_i, ни от выбора точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$ в этих областях.

4.7. Вычисление тройного интеграла

Предположим, что подынтегральная функция $f(x, y, z)$ *непрерывна в замкнутой области* $\overline{\Omega}$. Так как в этом случае предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения области Ω на элементарные пространственные области V_i, то такие разбиения проведем плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Учитывая это, элементарный объем $dV = dxdydz$, т.е.

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz. \tag{4.31}$$

Будем считать, что область интегрирования Ω *правильная* относительно оси Oz, т.е. ограничена снизу и сверху поверхностями (рис. 4.12), уравнения которых нам известны и соответственно имеют вид

$$z = f_1(x, y), \quad z = f_2(x, y).$$

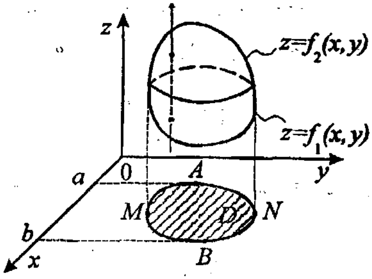

Рис. 4.12

Спроектируем пространственную область Ω на плоскость $x0y$ и обозначим эту проекцию через D. Будем считать, что область D является *правильной* относительно оси $0y$ и ее граница задана уравнениями:

$$\overline{AMB}:\ y = y_1(x),\ a \le x \le b; \qquad \overline{ANB}:\ y = y_2(x),\ a \le x \le b.$$

Тогда по аналогии с двойным интегралом можно показать, что тройной интеграл по пространственной области Ω сводится к последовательному вычислению трех одномерных определенных интегралов

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_2(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (4.32)$$

Отметим, что если область интегрирования Ω *правильная* относительно каждой из трех координатных осей, то пределы интегрирования в тройном интеграле можно расставить шестью различными способами, один из которых указан формулой (4.32).

Так как определение тройного интеграла совершенно аналогично определениям одномерного и двойного интегралов, то все основные свойства, справедливые для этих интегралов, по аналогии переносятся и на тройные интегралы.

Так, например, *теорема о среднем* для тройного интеграла запишется в виде

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V, \qquad (4.33)$$

где точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, V – объем пространственной области Ω. При этом число

$$f(M_0) = f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \qquad (4.34)$$

называется *средним значением функции* $f(x, y, z)$ *в области* Ω.

Если $f(x, y, z) \equiv 1$, то из равенств (4.31), (4.33) следует, что

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dV = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz, \qquad (4.35)$$

т.е. с помощью тройных интегралов можно вычислять объемы пространственных тел.

Пример. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{2z}{1-x-y}\,dxdydz,$$

где область Ω (рис. 4.13) ограничена плоскостями $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$.

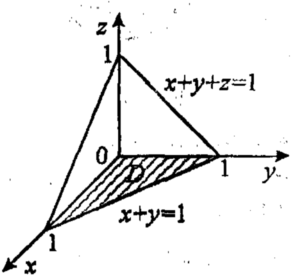

Рис. 4.13

На основании равенства (4.32) будем иметь

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{2z}{1-x-y}dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{1}{1-x-y}\cdot z^2\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x}(1-x-y)dy = \int\limits_0^1 dx\left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2 d(1-x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667\ .$$

Замечание. Из приведенного примера видно, что непрерывность подынтегральной функции в замкнутой области $\overline{\Omega}$ является лишь достаточным условием ее интегрируемости в этой области. Функция $f(x, y, z) = 2z/(1-x-y)$ обращается в бесконечность на части границы $x+y=1$ области D, тем не менее тройной интеграл I существует и конечен.

4.8. Замена переменных в тройном интеграле

1. Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Положение точки P в цилиндрической системе координат определяется тройкой чисел $P(r, \varphi, z)$, где r и φ - полярные координаты проекции P_{xy} точки P на плоскости xOy, z – аппликата точки P (рис. 4.14).

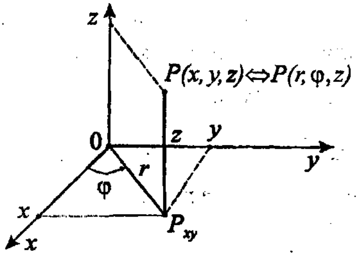

Рис. 4.14

Между прямоугольными и цилиндрическими координатами точки P справедливы следующие соотношения

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{4.36}$$

Здесь $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r < +\infty$, $|z| < +\infty$.

Чтобы в тройном интеграле по области Ω от прямоугольных координат перейти к цилиндрическим, пространственную область Ω разобьем на элементарные пространственные области поверхностями $r=c_1=const$, $\varphi=c_2=const$, $z=c_3=const$ (рис. 4.15).

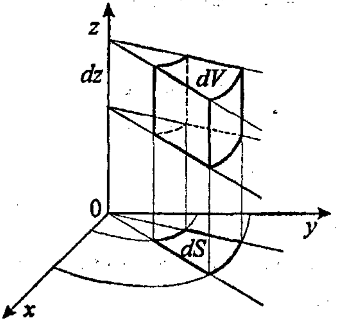

Рис. 4.15

Так как в полярной системе координат элемент площади $dS=rdrd\varphi$, то элементарный объем $dV=dS{\cdot}dz= rdrd\varphi dz$. Поэтому формула перехода в тройном интеграле от прямоугольных координат к цилиндрическим имеет вид

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz. \tag{4.37}$$

Если $f(x, y, z)=1$, то из равенств (4.35), (4.37) следует, что объем V пространственного тела Ω определяется по формуле

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} rdrd\varphi dz. \tag{4.38}$$

2. Тройной интеграл в сферических координатах. Положение точки P в сферической системе координат определяется тройкой чисел $P(r,\ \theta,\ \varphi)$, где r – длина радиуса - вектора точки P, ($r = \left|\overrightarrow{OP}\right|$), θ - угол между положительным направлением оси $0z$ и радиусом вектором $\overrightarrow{OP}$, φ - угол между положительным направлением оси $0x$ и проекцией радиуса - вектора $\overrightarrow{OP}$ на плоскость $x0y$ (рис. 4.16).

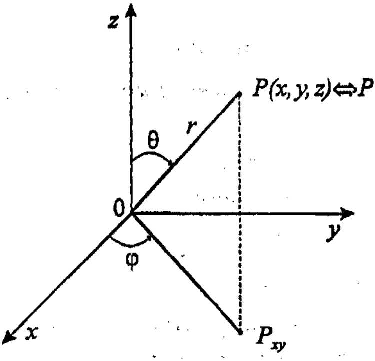

Рис. 4.16

Между прямоугольными и сферическими координатами точки P существует зависимость

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{4.39}$$

Здесь $0 \le r < +\infty,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Укажем без доказательства, что элемент объема в сферической системе координат определяется равенством

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr d\theta\, d\varphi.$$

Если по аналогии с (4.20) произвести замену (4.39), то нетрудно убедиться, что *якобиан перехода*

$$J(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2 \sin\ \theta.$$

Поэтому формула перехода в тройном интеграле от прямоугольных координат к сферическим имеет вид

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\, drd\theta\, d\varphi. \quad (4.40)$$

При $f(x,y\ z)\equiv 1$ из равенств (4.35), (4.40) следует, что объем V пространственного тела Ω определяется по формуле

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} r^2\sin\theta\, drd\theta\, d\varphi. \quad (4.41)$$

Замечание. Формулы (4.37), (4.40) следуют из общей формулы замены переменных в тройных интегралах с использованием соответствующих якобианов (см. [4 (т. 2), 9, 16, (т. 2), 19]).

4.9. Физические приложения тройных интегралов

Проводя аналогичные рассуждения, как и в п. 4.5, нетрудно получить расчетные формулы, приведенные ниже.

*1. **Вычисление массы тела.*** Если подынтегральная функция $\rho(x, y, z)$ задает объемную плотность тела, занимающего пространственную область Ω, то его масса

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z,)dxdydz. \quad (4.42)$$

*2. **Координаты центра тяжести тела.*** По аналогии с формулами (4.26) для плоских фигур, координаты центра тяжести $C(x_c, y_c, z_c)$ пространственного тела Ω выражаются формулами

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)dxdydz \equiv \dfrac{M_{yz}}{m}, \\ y_c = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)dxdydz \equiv \dfrac{M_{xz}}{m}, \\ z_c = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)dxdydz \equiv \dfrac{M_{xy}}{m}, \end{cases} \quad (4.43)$$

где m – *масса тела* Ω, которая находится по формуле (4.42), M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – *статические моменты тела* Ω относительно плоскостей $y0z$, $x0z$, $x0y$.

3. Моменты инерции тела. Моменты инерции материальной области Ω относительно координатных осей 0*x*, 0*y*, 0*z* и начала координат 0 определяются соответственно формулами

$$\begin{aligned}
I_x &= \iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz,\\
I_y &= \iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz,\\
I_z &= \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz,\\
I_0 &= \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

где $\rho(x, y, z)$ - объемная плотность вещества.

ГЛАВА 5.
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1. Криволинейный интеграл первого рода (по дуге)

Рассмотрим на плоскости $x0y$ кривую $\overline{AB}$, уравнение которой $y=g(x)$, $a\le x\le b$ (рис. 5.1).

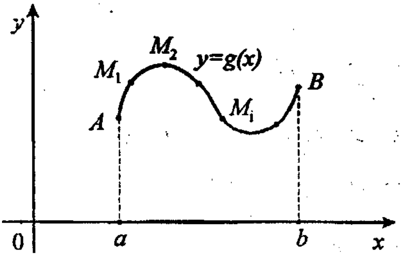

Рис. 5.1

Будем считать, что вдоль кривой $\overline{AB}$ задана *непрерывная* функция $f(x,y)$. Чтобы определить интеграл от $f(x,y)$ вдоль кривой $\overline{AB}$, поступим следующим образом: линию $\overline{AB}$ точками M_i, $i=\overline{0,n}$ разобьем на n элементарных дуг l_i, длины которых обозначим Δl_i, $i=\overline{1,n}$. Пусть $\lambda=max\Delta l_i$, $i=\overline{1,n}$. На каждой из элементарных дуг l_i выберем произвольно по точке $P_i(x_i, y_i)$, вычислим значения функции $f(x,y)$ в этих точках, умножим их на длины соответствующих элементарных дуг и просуммируем по всем разбиением. В результате получим

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta l_i. \qquad (5.1)$$

Составленная по указанному правилу сумма (5.1) называется *интегральной суммой по дуге* от функции $f(x, y)$ вдоль кривой $\overline{AB}$.

Определение. Если существует *конечный предел* интегральной суммы (5.1) при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а длина λ наибольшей из элементарных дуг стремится к нулю, не зависящий от способа разбиения кривой $\overline{AB}$ и от выбора точек $P_i(x_i, y_i)$, то он называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y)$ вдоль линии $\overline{AB}$ и обозначается символом

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta l_i. \qquad (5.2)$$

Отметим без доказательства, что если функция *f(x, y) непрерывна вдоль кривой* $\overline{AB}$, то предел (5.2) всегда существует, при этом он не зависит ни от способа разбиения линии $\overline{AB}$ на элементарные дуги, ни от выбора точек $P_i(x_i, y_i)$, принадлежащих им.

Из определения криволинейного интеграла первого рода следуют его простейшие свойства. Предполагая, что все рассматриваемые ниже интегралы по соответствующим дугам существуют, будем иметь:

1. $\int\limits_{\overline{AB}}[f_1(x,y) \pm f_1(x,y)]dl = \int\limits_{\overline{AB}} f_1(x,y)dl \pm \int\limits_{\overline{AB}} f_2(x,y)dl.$

2. $\int\limits_{\overline{AB}} c \cdot f(x,y)dl = c \cdot \int\limits_{\overline{AB}} f(x,y)dl, \quad c - \forall const.$

3. Если дуга $\overline{AB}$ состоит из дуг $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$, тогда

$$\int\limits_{\overline{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{\overline{AC}} f(x,y)dl + \int\limits_{\overline{CB}} f(x,y)dl.$$

4. $\int\limits_{\overline{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{\overline{BA}} f(x,y)dl,$

т.е. криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования.

5. $\int\limits_{\overline{AB}} dl = l,$ где l – длина дуги $\overrightarrow{AB}$.

6. ***Теорема о среднем.*** Если подынтегральная функция *f(x,y) непрерывна* в точках кривой $\overline{AB}$, то

$$\int\limits_{\overline{AB}} f(x,y)dl = f(x_0, y_0)l,$$

где точка $M_0(x_0, y_0) \in \overline{AB}$, l – длина дуги $\overline{AB}$.

При $f(x, y) \equiv 1$ из предыдущего равенства следует, что $\int\limits_{\overline{AB}} dl = l$.

Замечание 1. Если рассматривать материальную кривую $\overline{AB}$, плотность распределения масс которой $\rho = \rho(x, y)$, то $\int\limits_{\overline{AB}} \rho(x,y)dl = m.$, где m – масса дуги $\overline{AB}$ *(физический смысл криволинейного интеграла первого рода).*

С помощью криволинейных интегралов первого рода, по аналогии с тем, как это делалось в п. 4.5 и 4.9 для двойных и тройных интегралов, можно найти координаты центра тяжести материальной кривой, ее статические моменты и моменты инерции относительно координатных осей. Вывод этих формул предоставляется читателю.

Замечание 2. Криволинейный интеграл первого рода *по пространственной кривой* определяется аналогично (5.2).

5.2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода

1. Пусть *в прямоугольной системе координат* линия интегрирования $\overline{AB}$ задана уравнением $y=g(x)$, $a \le x \le b$. Так как в этом случае дифференциал длины дуги вычисляется по формуле $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, которая получается после дифференцирования интеграла (2.63) по верхнему пределу с учетом соотношения (2.20), то

$$\int_{\overline{AB}} f(x,y)dl=\int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,dx. \tag{5.3}$$

2. Если кривая $\overline{AB}$ задана *параметрически* уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то учитывая, что в данном случае $dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$, будем иметь

$$\int_{\overline{AB}} f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{5.4}$$

3. Пусть дуга $\overline{AB}$ задана *в полярных координатах* уравнением $r=r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, тогда учитывая, что в этом случае $dl=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$, получим

$$\int_{\overline{AB}} f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi. \tag{5.5}$$

Замечание. В формулах (5.3) – (5.5) предполагается, что линия интегрирования $\overline{AB}$ является гладкой, т.е. определяющие ее функции непрерывно дифференцируемы в соответствующих областях изменения своих аргументов.

5.3. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам)

Пусть требуется определить работу A, которую необходимо выполнить, чтобы переместить материальную точку M под действием силы $\vec{F}$ вдоль гладкой кривой $\overline{MN}$ из положения M в N (рис. 5.2).

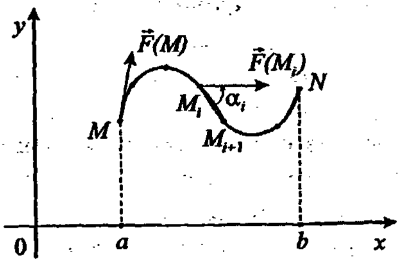

Рис. 5.2

Будем считать, что значение силы $\vec{F}$ в каждой точке $R(x, y)$ кривой $\overline{MN}$ нам известно как по величине, так и по направлению, т.е.

$$\vec{F}(R) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}. \qquad (5.6)$$

Всю дугу $\overline{MN}$ точками M_i, $i = \overline{0,n}$ разобьем на n элементарных дуг l_i, длины которых обозначим Δl_i, $i = \overline{1,n}$. Пусть $\lambda = max\Delta l_i$, $i = \overline{1,n}$. Далее каждую из элементарных дуг заменим хордой, соединяющей ее концы. Будем считать, что при движении точки вдоль элементарной хорды *сила постоянна* и равна значению силы в начальной точке хорды $\vec{F}(M_i)$. Длину элементарной хорды M_iM_{i+1} обозначим Δs_i, а ее проекции на координатные оси - Δx_i и Δy_i. Введем вектор $\overrightarrow{\Delta s_i} = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j}$. Вычислим элементарную работу ΔA_i, выполненную под действием *постоянной силы* $\vec{F}(M_i)$ вдоль элементарной хорды Δs_i. Из физики известно, что

$$\Delta A_i = \left|\vec{F}(M_i)\right| \cdot \left|\overrightarrow{\Delta s_i}\right| \cos\alpha_i = \left(\vec{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{\Delta s_i}\right) = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда работа, выполненная при движении материальной точки вдоль *всей* ломаной линии, будет равна

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right]. \qquad (5.7)$$

Чтобы вычислить точное значение A работы, выполненной при перемещении материальной точки вдоль кривой $\overline{MN}$, нужно в равенстве (5.7) перейти к пределу, когда число разбиений n стремится к бесконечности, а длина λ наибольшей из элементарных дуг стремится к нулю

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} A_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right]. \qquad (5.8)$$

Пусть теперь $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – *произвольные непрерывные на кривой* $\overline{MN}$ *функции.* Тогда сумма (5.7) называется *интегральной суммой по координатам* для функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ вдоль кривой $\overline{MN}$ (для вектор-функции (5.6)).

Отличие интегральной суммы (5.7) от интегральной суммы (5.1) состоит в том, что значение функции в фиксированной точке элементарной дуги умножается не на длину этой дуги, а на ее проекцию на соответствующую координатную ось.

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы (5.7) при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а длина λ наибольшей из элементарных стремится к нулю, то он называется *криволинейным интегралом второго рода* от функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ вдоль кривой $\overline{MN}$ и обозначается символом

$$\int\limits_{\overline{MN}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i\right]. \qquad (5.9)$$

Сравнивая между собой равенства (5.9) и (5.8) мы видим, что криволинейный интеграл второго рода по кривой $\overline{MN}$ численно равен работе, которую нужно выполнить при перемещении материальной точки вдоль кривой $\overline{MN}$ под действием силы (5.6) *(физический смысл криволинейного интеграла второго рода)*.

Из равенства (5.9) следует, что если *направление интегрирования* изменить на противоположное, то знак криволинейного интеграла второго рода также изменится на противоположный, т.е.

$$\int\limits_{\overline{MN}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int\limits_{\overline{NM}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \qquad (5.10)$$

Остальные свойства криволинейного интеграла второго рода аналогичны соответствующим свойствам криволинейного интеграла первого рода.

Отметим, что определение криволинейного интеграла второго рода по формуле (5.9) пригодно и для замкнутой кривой.

5.4. Вычисление криволинейных интегралов второго рода

1. Пусть *в прямоугольной системе координат* гладкая линия интегрирования $\overline{MN}$ задана уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$, тогда

$$\int\limits_{\overline{MN}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{a}^{b}\left[P(x,f(x))+Q(x,f(x))f'(x)\right]dx. \qquad (5.11)$$

2. Если гладкая кривая $\overline{MN}$ задана *параметрически* уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, то в этом случае

$$\int\limits_{\overline{MN}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]dt. \qquad (5.12)$$

Замечание. Совершенно аналогично определяется и вычисляется криволинейный интеграл второго рода по пространственной линии.

5.5. Формула Грина

Эта формула связывает двойной интеграл по области D и криволинейный интеграл по границе этой области L (рис. 5.3).

Будем считать, что уравнения границы L области D, *правильной* относительно оси Ox, нам известны:

$$\overline{ACB}:\ y=y_1(x),\ a\le x\le b;\quad AD_1B:\ y=y_2(x),\ a\le x\le b.$$

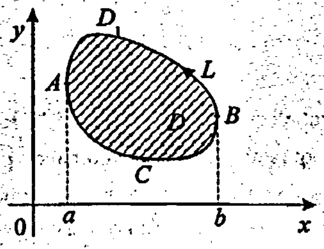

Рис. 5.3

Предположим, что в замкнутой области $\overline{D}$ заданы *непрерывно дифференцируемые функции P(x, y), Q(x, y)*. Вычислим интеграл

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy=\int\limits_a^b dx\cdot P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}=$$

$$=\int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx-\int\limits_a^b P(x,y_1(x))dx=\int\limits_{\overline{AD_1B}}P(x,y)dx-\int\limits_{\overline{ACB}}P(x,y)dx=$$

$$=-\int\limits_{\overline{BD_1A}}P(x,y)dx-\int\limits_{\overline{ACB}}P(x,y)dx=-\left[\int\limits_{\overline{ACB}}P(x,y)dx+\int\limits_{\overline{BD_1A}}P(x,y)dx\right]=-\oint\limits_L P(x,y)dx,$$

где обход контура L совершается против часовой стрелки *(положительное направление обхода, при котором область D остается слева)*. Такой обход замкнутых контуров предполагается и в дальнейшем.

Следовательно,

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy=-\oint\limits_L P(x,y)dx. \qquad (5.13)$$

Совершенно аналогично показывается, что

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy=\oint\limits_L Q(x,y)dy. \qquad (5.14)$$

Вычитая из равенства (5.14) равенство (5.13) получим формулу Грина*

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy=-\oint\limits_L P(x,y)dx. \qquad (5.15)$$

Следствие. Полагая в формуле (5.15) $P(x, y)= -y$, $Q(x, y)=x$ или $P(x, y)= -y$, $Q(x, y)=0$ соответственно получим:

---

* *Дж. Грин (1793 – 1841) – английский математик и физик.*

$$S=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx,\quad S=\iint_D dxdy=-\oint_L ydx, \tag{5.16}$$

где S – площадь области D *(геометрическое приложение криволинейного интеграла второго рода).*

5.6. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *непрерывно дифференцируемы* в замкнутой области $\overline{D}$ плоскости $x0y$. Возьмем в области D две произвольные точки M и N и соединим их различными линиями, лежащими в D (рис. 5.4).

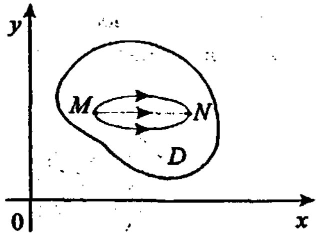

Рис. 5.4

Если интеграл

$$\int_{\overline{MN}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy \tag{5.17}$$

по любому из путей, лежащих в D и соединяющих точки M и N принимает одно и тоже значение, то говорят, что он не зависит от пути интегрирования.

Справедливы следующие утверждения, которые мы приведем без доказательства.

Теорема 1. Для того, чтобы криволинейный интеграл (5.17) не зависел от пути интегрирования в области D, необходимо и достаточно, чтобы *в каждой точке этой области* выполнялось условие

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}. \tag{5.18}$$

Можно показать, что выполнение условия (5.18) равносильно тому, что подынтегральное выражение в (5.17) есть полный дифференциал некоторой функции $u=u(x, y)$, т.е.

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \tag{5.19}$$

С учетом этого теорема 1 может быть переформулирована как

Теорема 2. Для того, чтобы криволинейный интеграл (5.17) не зависел от пути интегрирования в области D, необходимо и достаточно, чтобы его подынтегральное выражение было в этой области полным дифференциалом (5.19).

5.7. Поверхностные интегралы первого и второго рода и их вычисление

1. Поверхностные интегралы первого рода

В трехмерном пространстве $0xyz$ рассмотрим *гладкую двустороннюю поверхность* σ, у которой будем различать верхнюю сторону σ^+ и нижнюю - σ^-. *Гладкой* называется поверхность, в каждой точке которой существует касательная плоскость, непрерывно изменяющаяся при переходе от точки к точке.

Поверхность с краем называется *двусторонней*, если при переходе с ее верхней стороны на нижнюю мы должны обязательно перейти через край этой поверхности (рис. 5.5).

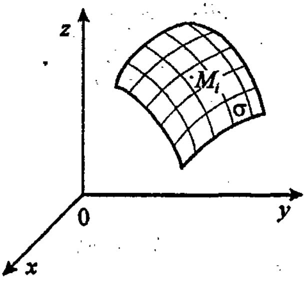

Рис. 5.5

В общем случае поверхность σ называется *двусторонней*, если *полный обход по любой замкнутой линии*, лежащей на этой поверхности и не имеющей общих точек с ее границей, *не меняет направления нормали к поверхности*. Выбор определенной стороны поверхности называют ее *ориентацией*. В каждой точке гладкой *двусторонней* поверхности σ определены два направления вектора нормали к ней, являющиеся взаимно противоположными.

Если на поверхности σ существует замкнутая линия, *полный обход по которой меняет направление нормали*, то эта поверхность называется *односторонней*. Классическим примером односторонней поверхности является *лист Мебиуса*[*], который можно получить, если длинную прямоугольную полоску бумаги один раз перевернуть и затем склеить ее противоположные концы.

---

[*] *А.Ф. Мебиус (1790 – 1868) – немецкий математик.*

В дальнейшем мы будем рассматривать только двусторонние поверхности.

Будем считать, что на поверхности σ задана *непрерывная* функция $f(x, y, z)$. Поверхность σ разобьем произвольными линиями на n элементарных поверхностей σ_i, площади которых будем обозначать $\Delta\sigma_i$, $i=\overline{1,n}$ (рис. 5.5). На каждой из элементарных поверхностей σ_i выберем произвольно по точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим значения функции $f(x, y, z)$ в этих точках, умножим их на площади соответствующих элементарных поверхностей и просуммируем по всем разбиениям. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i \equiv \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i. \qquad (5.20)$$

Составленная по указанному правилу сумма (5.20) называется *интегральной суммой* для функции $f(x,y,z)$ по поверхности σ.

Обозначим через λ - наибольший из диаметров элементарных поверхностей σ_i, $i=\overline{1,n}$.

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы (5.20) при условии, что число разбиений $n\to\infty$, а наибольшая из элементарных поверхностей стягивается в точку, не зависящей от способа разбиения поверхности σ на частичные поверхности σ_i и от выбора точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$ на них, то он *называется поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ по поверхности σ и обозначается символом

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i. \qquad (5.21)$$

Данное определение, по существу, аналогично определению двойного интеграла. Поэтому достаточное условие существования двойного интеграла и его свойства (см. п. 4.1) по аналогии переносятся и на поверхностные интегралы первого рода.

В частности при $f(x, y, z)\equiv 1$ из равенства (5.21) следует, что

$$\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma, \qquad (5.22)$$

где σ - площадь поверхности σ (геометрический смысл поверхностного интеграла первого рода).

Если по поверхности σ распределена масса m с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x, y, z)$, то интегральная сумма (5.20) при $f(x, y, z)=\rho(x, y, z)$ будет *приближенно* равна массе поверхности, точное значение которой на основании (5.21) выразится интегралом

$$m=\iint\limits_{\sigma}\rho(x,y,z)d\sigma. \qquad (5.23)$$

В этом заключается *физический смысл поверхностного интеграла первого рода*.

Координаты центра тяжести, статические моменты и моменты инерции материальной поверхности σ вычисляется по формулам, аналогичным (4.43), (4.44).

2. Вычисление поверхностных интегралов первого рода

Пусть σ - поверхность, определяемая *дифференцируемой* функцией $z=\varphi(x, y)$ и пусть функция $f(x, y, z)$

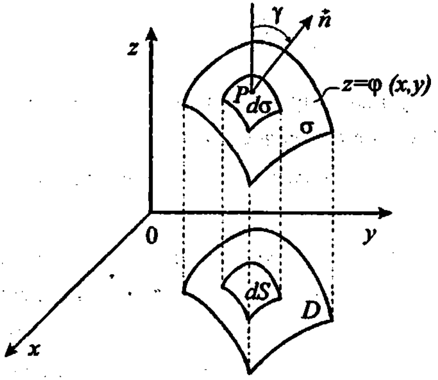

Рис. 5.6

непрерывна на поверхности σ, а значит и интегрируема по этой поверхности. Будем считать, что поверхность σ взаимно-однозначно проектируется на область D плоскости $x0y$ (рис. 5.6).

Выберем на поверхности σ элементарную площадку $d\sigma$ и обозначим ее проекцию на плоскость $x0y$ через dS. На поверхности $d\sigma$ возьмем точку P и проведем через нее нормаль $\vec{n}$ к этой поверхности. Обозначим через γ угол между положительным направлением оси Oz и нормалью $\vec{n}$ (рис. 5.6). Далее элементарную поверхность $d\sigma$ заменим соответствующей элементарной площадкой касательной плоскости к поверхности σ в точке P. Тогда $d\sigma|\cos\gamma|=dS$. Известно, что

$$|\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}, \quad dS=dxdy.$$

Следовательно,

$$d\sigma=\frac{dS}{|\cos\gamma|}=\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\,dxdy.$$

Поэтому интеграл по поверхности σ выразится через двойной интеграл по ее проекции D на плоскость $x0y$ следующим образом

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\,dxdy. \qquad (5.24)$$

Аналогично получаются формулы, выражающие интеграл первого рода по поверхности σ через двойные интегралы по ее проекции на плоскости $x0z$ и $y0z$. Их запись предоставляется читателю.

Если $f(x, y, z)\equiv 1$, то из равенства (5.24) следует, что площадь поверхности σ, заданной уравнением $z=\varphi(x, y)$, вычисляется по формуле

$$\sigma = \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \iint\limits_{D}\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\,dxdy. \qquad (5.25)$$

Пример. Вычислить интеграл

$$J = \iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2+z-\frac{1}{2}\right)d\sigma$$

где σ - часть поверхности $z=1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, отсекаемой плоскостью $z=0$ (рис.5.7).

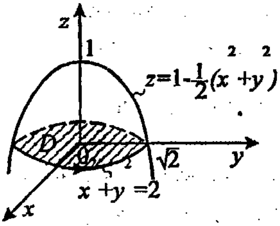

Рис. 5.7

Учитывая, что $z_x' = -x$, $z_y' = -y$ в соответствии с формулой (5.24) перейдем от поверхностного интеграла к двойному по области D

$$J = \iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2+z-\frac{1}{2}\right)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D}\left(x^2+y^2+1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}dxdy\ .$$

Для вычисления этого интеграла перейдем к полярным координатам.

$$J=\frac{1}{2}\iint_D\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}}rdrd\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}}rdr=$$

$$=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\left(1+r^2\right)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{5}\left(9\sqrt{3}-1\right)\approx 9{,}16\,.$$

3. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть теперь σ - некоторая *ориентируемая* поверхность, заданная уравнением $z=\varphi(x, y)$, а $R(x, y, z)$ - *непрерывная* функция, определенная в точках этой поверхности. *Ориентация поверхности* заключается в выборе одной из двух ее сторон и осуществляется следующим образом. Если векторы нормалей к поверхности составляют *острые (тупые) углы* с осью $0z$, то будем считать, что выбрана *верхняя (нижняя) сторона* σ^+ (σ^-) поверхности σ.

Поверхность σ разобьем на n элементарных поверхностей σ_i, проекции которых на плоскость $x0y$ обозначим S_i, а их площади - ΔS_i, $i=\overline{1,n}$. На каждой из элементарных поверхностей σ_i выберем произвольно по точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим значения функции $R(x, y, z)$ в этих точках, умножим их на проекции соответствующих элементарных областей на плоскость $x0y$ и просуммируем по всем разбиениям. Получим

$$\pm\sum_{i=1}^{n}R(M_i)\Delta S_i=\pm\sum_{i=1}^{n}R(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i,\tag{5.26}$$

где знак + (–) берется для верхней (нижней) стороны σ^+ (σ^-) поверхности σ.

Составленная по указанному правилу сумма (5.26) называется *интегральной суммой* для функции *$R(x,y,z)$ по проекции* поверхности σ на плоскость $x0y$. Пусть λ - наибольший из диаметров элементарных поверхностей σ_i, $i=\overline{1,n}$.

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы (5.26) при условии, что число разбиений $n\to\infty$, а наибольшая из элементарных поверхностей стягивается в точку, то он называется *поверхностным интегралом второго рода* от функции $R(x, y, z)$ по проекции выбранной стороны поверхности σ на плоскость $x0y$ и обозначается символом

$$\iint_\sigma R(x,y,z)\,dxdy=\pm\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}R(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i.\tag{5.27}$$

Совершенно аналогично определяются поверхностные интегралы второго рода

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz, \quad \iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)\,dzdx.$$

Сумму

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz + \iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)\,dzdx + \iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)\,dxdy.$$

принято называть общим поверхностным интегралом второго рода и записывать

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy.$$

Между поверхностными интегралами первого и второго рода существует следующая связь

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\sigma}\left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right]d\sigma = \\ &= \iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy, \end{aligned} \qquad (5.28)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к поверхности σ.

Из равенства (5.27) следует, что

$$\iint\limits_{\sigma^{+}} R(x,y,z)\,dxdy = -\iint\limits_{\sigma^{-}} R(x,y,z)\,dxdy,$$

т.е. при изменении стороны поверхности поверхностный интеграл второго рода меняет знак на противоположный. Это свойство и является отличительным для поверхностных интегралов первого и второго рода, в то время как остальные их свойства аналогичны.

Перейдем теперь к *вычислению* поверхностного интеграла второго рода (5.27). Предположим, что поверхность σ взаимно-однозначно проектируется на область D плоскости $x0y$, тогда

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)\,dxdy \equiv \iint\limits_{\sigma^{\pm}} R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint\limits_{D} R(x,y,\varphi(x,y))\,dxdy, \qquad (5.29)$$

где $\sigma^{\pm}$ - соответственно верхняя или нижняя стороны поверхности σ, заданной уравнением $z=\varphi(x, y)$.

5.8. Формулы Остроградского и Стокса

Формула Остроградского[*] связывает между собой тройной интеграл по объему V, ограниченному *замкнутой* поверхностью σ, с интегралом по данной поверхности и имеет вид

---

[*] *М.В. Остроградский (1801 – 1861) – русский математик.*

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oint\!\!\!\!\oint\limits_\sigma [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] d\sigma = \tag{5.30}$$
$$= \oint\!\!\!\!\oint\limits_\sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy .$$

Здесь предполагается, что функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ вместе со своими частными производными *непрерывны* во всей пространственной области V, включая ее границу – поверхность σ.

Формула Стокса* связывает между собой криволинейный интеграл по замкнутой пространственной кривой L с поверхностным интегралом по поверхности σ, краем которой является L. Она записывается

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$= \iint\limits_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma =$$
$$= \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{5.31}$$

При этом направление интегрирования по контуру L выбирается так, что если смотреть с конца нормали $\bar{n}$ к поверхности σ, то обход границы L должен быть виден против хода часовой стрелки (рис. 5.8).

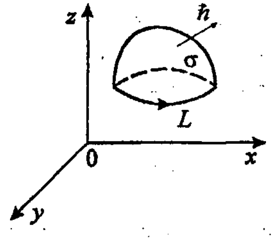

Рис. 5.8

Предполагается, что функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ вместе со своими частными производными *непрерывны* во всех точках поверхности σ, включая ее границу L.

Доказательство важных для теории и приложений формул (5.30), (5.31) приведено в более полных руководствах по интегральному исчислению (см., например, [4 (т. 2), 9, 16 (т.2), 19]).

Дж. Стокс (1819 – 1903) – английский физик и математик.

5.9. Элементы теории векторного поля. Поток, дивергенция, циркуляция, вихрь

Пусть каждой точке *P(x, y, z)∈Ω* ставится в соответствие определенное число или вектор. Тогда говорят, что в области Ω задано соответственно *скалярное* или *векторное поле*. Скалярное поле определяется числовой функцией *u=u(x, y, z)*, заданной в области Ω. Векторное поле задается обычно с помощью векторной функции от скалярных аргументов

$$\vec{A}(P)=A_x(x,y,z)\vec{i}+A_y(x,y,z)\vec{j}+A_z(x,y,z)\vec{k}. \qquad (5.32)$$

Изучая скалярные поля, мы рассмотрели их основные характеристики, такие как поверхности и линии уровня, производную по направлению, градиент. Основными характеристиками векторных полей являются векторные линии, поток вектора через поверхность, дивергенция, циркуляция и ротор векторного поля.

Определение. Векторной линией поля называется такая линия *L*, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением вектора поля (рис. 5.9).

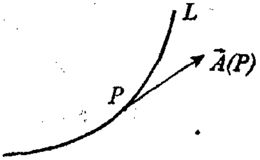

Рис. 5.9

Векторные линии в конкретных полях имеют определенный смысл. Так, например, в поле скоростей движущейся жидкости векторные линии совпадают с линиями тока, а в электромагнитных полях – с силовыми линиями.

Из условия коллинеарности вектора поля (5.32) и вектора касательной (5.40) следует, что для определения векторных линий в пространственном случае нужно решить систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{A_x(x,y,z)}=\frac{dy}{A_y(x,y,z)}=\frac{dz}{A_z(x,y,z)},$$

а для плоских полей – дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{A_x(x,y)}=\frac{dy}{A_y(x,y)}.$$

1. Поток вектора через поверхность. Дивергенция

Сначала рассмотрим задачу о нахождении потока идеальной несжимаемой жидкости через некоторую двустороннюю поверхность. Будем считать, что движение жидкости является установившимся или стационарным, т.е. скорость частички жидкости зависит лишь от ее положения в пространстве и не зависит от времени. Пусть поле скоростей движущейся жидкости $\vec{v} = \vec{v}(P)$, $\forall P(x, y, z) \in \Omega$, нам известно. Рассмотрим в этом поле двустороннюю поверхность σ, которую разобьем произвольными линиями на n элементарных поверхностей. Обозначим через $d\sigma$ - элементарную поверхность, содержащую точку P, а через $\vec{n}(P)$ - *единичный* вектор нормали к *внешней* стороне этой поверхности. Пусть φ - угол между векторами $\vec{n}(P)$ и $\vec{v}(P)$ (рис. 5.10).

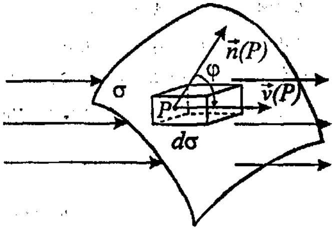

Рис. 5.10

Определение 1. Потоком Q через поверхность σ называется количество жидкости, проходящей через эту поверхность за единицу времени в направлении единичного вектора нормали к поверхности.

Элементарный поток dQ, проходящий через элементарную поверхность $d\sigma$, будет равен объему соответствующего элементарного цилиндра

$$dQ = np_{\vec{n}}\vec{v}(P)d\sigma = |\vec{v}(P)|\cos\varphi\, d\sigma = |\vec{v}(P)| \cdot |\vec{n}(P)| \cdot \cos\varphi\, d\sigma = (\vec{v}(P) \cdot \vec{n}(P))d\sigma,$$

где $(\vec{v}(P) \cdot \vec{n}(P))$ - есть *скалярное произведение* указанных векторов.

Далее суммируя элементарные потоки, проходящие через все элементарные поверхности, или, другими словами, интегрируя по поверхности σ получим, что поток жидкости, проходящий через поверхность σ вычисляется по формуле

$$Q = \iint\limits_{\sigma} (\vec{v}(P) \cdot \vec{n}(P))d\sigma. \qquad (5.33)$$

Поток вектора $\vec{A}(P)$ произвольного поля (5.32) вычисляется по аналогичной формуле

$$Q = \iint_{\sigma} \left(\vec{A}(P) \cdot \vec{n}(P)\right) d\sigma. \tag{5.34}$$

Так как координаты векторов $\vec{A}(P)$ и $\vec{n}(P)$ известны: $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{n}(P) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то учитывая свойства скалярного произведения векторов, равенство (5.34) может быть записано в виде

$$Q = \iint_{\sigma} (A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma) d\sigma. \tag{5.34$'$}$$

Рассмотрим теперь поток движущейся жидкости через *замкнутую* поверхность σ (рис. 5.11).

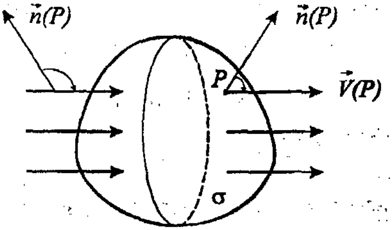

Рис.5.11

Как и раньше, здесь $\vec{n}(P) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *единичный* вектор нормали к *внешней* стороне поверхности σ.

Легко видеть, что поток жидкости, проходящей через *замкнутую* поверхность, равен количеству жидкости, выходящей из этой поверхности, минус количество жидкости, втекающей в нее. Поэтому:

1). Если $Q=0$, то это означает, что из объема, ограниченного *замкнутой* поверхностью σ, вытекает жидкости столько же, сколько и втекает в него, т.е. *внутри поверхности σ нет ни источников, ни стоков*;

2). Если $Q>0$, то *внутри поверхности σ есть источник*;

3). Если $Q<0$, то *внутри поверхности σ есть сток.*

Чтобы определить, есть ли в точке P, принадлежащей объему, ограниченному *замкнутой* поверхностью σ источник или сток, поступим следующим образом. Окружим точку P некоторой *замкнутой* поверхностью σ_1, например, сферой радиуса ε с центром в точке P. Пусть V – объем, ограниченный поверхностью σ_1. Вычислим предел, равный отношению потока жидкости, проходящей через *замкнутую* поверхность σ_1, к объему V, ограниченному этой поверхностью, при условии, что поверхность σ_l стягивается в точку P, т. е.

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\sigma_1}(\vec{v}(P)\cdot\vec{n}(P))d\sigma_1}{V}. \tag{5.35}$$

Нетрудно убедиться, что если предел (5.35) отличен от нуля, то он характеризует мощность (плотность) источника или стока в точке P.

Определение 2. Предел отношения потока вектора скорости $\vec{v}(P)$ через замкнутую поверхность σ_l, окружающую точку P, к объему, ограниченному этой поверхностью, при условии, что она стягивается в точку P, называется *дивергенцией* или *расходимостью* векторного поля скоростей $\vec{v}(P)$ и обозначается символом

$$div\vec{v}(P)=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\sigma_1}(\vec{v}(P)\cdot\vec{n}(P))d\sigma_1}{V}. \tag{5.36}$$

Дивергенция произвольного векторного поля, заданного равенством (5.32), определяется аналогично

$$div\vec{A}(P)=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\sigma_1}(\vec{A}(P)\cdot\vec{n}(P))d\sigma_1}{V}. \tag{5.37}$$

Предположим, что все координаты вектор-функции (5.32) *непрерывно дифференцируемы* в области Ω. Справедлива следующая

Теорема. *Дивергенция* векторного поля, заданного равенством (5.32), вычисляется по формуле

$$div\vec{A}(P)=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_P. \tag{5.38}$$

Доказательство. Заменим в числителе формулы (5.37) двойной интеграл по *замкнутой* поверхности σ_1 по формуле Остроградского (5.30) через тройной интеграл по объему V, ограниченному данной поверхностью, и применим к тройному интегралу теорему о среднем. Получим

$$div\vec{A}(P) = \lim_{V\to 0}\frac{\oiint\limits_{\sigma_1}(\vec{A}(P)\cdot\vec{n}(P))d\sigma_1}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\iiint\limits_V\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dV}{V} =$$

$$= \lim_{\substack{V\to 0\\(P_1\to P)}}\frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Big|_{P_1}\cdot V}{V} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Big|_P,$$

что и утверждалось.

Из равенства (5.38) видно, что *дивергенция* вектора $\vec{A}(P)$ *есть величина скалярная.*

С помощью введенных понятий потока вектора и дивергенции, *формула Остроградского* (5.30) может быть записана *в векторной форме*

$$Q = \oiint\limits_{\sigma}(\vec{A}(P)\cdot\vec{n}(P))d\sigma = \iiint\limits_V div(\vec{A}(P)dV, \qquad (5.39)$$

т. е. поток вектора $\vec{A}(P)$ через замкнутую поверхность σ равен тройному интегралу от дивергенции вектора $\vec{A}(P)$ по объему V, ограниченному этой поверхностью.

2. Циркуляция и ротор (вихрь) векторного поля

Будем считать, что все координаты вектор-функции (5.32), определяющей векторное поле в области Ω, *непрерывно дифференцируемы* в этой области. Выберем в области Ω некоторую линию L (рис. 5.12) и рассмотрим вектор

$$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}. \qquad (5.40)$$

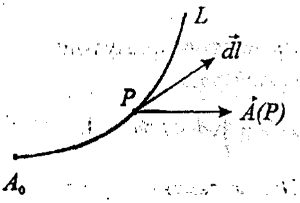

Рис.5.12

Пусть A_0 есть точка отсчета длины дуги $|\vec{dl}| = |\overline{A_0P}|$. При выполнении данного равенства вектор $\vec{dl}$, направленный по касательной к линии L, всегда представляется формулой (5.40).

Рассмотрим интеграл вдоль линии L от скалярного произведения векторов $\vec{A}(P)$ и $\vec{dl}$

$$\int\limits_L \left(\vec{A}(P)\cdot\vec{dl}\right) = \int\limits_L A_x dx + A_y dy + A_z dz. \tag{5.41}$$

Определение 1. Если линия L *замкнута*, то криволинейный интеграл (5.41) называется *циркуляцией* вектора $\vec{A}(P)$ вдоль контура L и обозначается

$$C = \oint\limits_L (\vec{A}(P)\cdot\vec{dl}) = \oint\limits_L A_x dx + A_y dy + A_z dz. \tag{5.42}$$

Если $\vec{A}(P)$ - вектор силы, то циркуляция (5.42) численно равна работе этой силы при перемещении материальной точки по замкнутому контуру L. В этом состоит *физический смысл циркуляции*. Для полей иной природы циркуляция имеет другой физический смысл.

Определение 2. *Ротором* или *вихрем* векторного поля $\vec{A}(P)$, заданного равенством (5.32), называется ***вектор***, который обозначается символом $rot\vec{A}(P)$ и определяется формулой

$$rot\vec{A}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{5.43}$$

Физический смысл ротора на примере поля скоростей точки P, вращающейся вокруг некоторой оси, состоит в том, что он равен удвоенной угловой скорости вращения [1, 9, 19]. Следовательно, отличный от нулевого вектор $rot\vec{A}(P)$ свидетельствует о вращении векторного поля $\vec{A}(P)$. Это объясняет происхождение названия «*ротор*», т.е. «*вращение*».

С помощью введенных понятий циркуляции и ротора *формула Стокса* (5.31) может быть записана *в векторной форме*

$$C = \oint\limits_L (\vec{A}(P)\cdot\vec{dl}) = \iint\limits_\sigma \left(rot\vec{A}(P)\cdot\vec{n}(P)\right)d\sigma, \tag{5.44}$$

т. е. *циркуляция* вектора $\vec{A}(P)$ по замкнутому контуру L, являющемуся границей поверхности σ, равна *потоку* вектора $rot\vec{A}(P)$ через поверхность σ.

Циркуляция характеризует вращательную способность векторного поля $\vec{A}(P)$ по *замкнутому* контуру L.

Векторное поле $\vec{A}(P)$ называется *соленоидальным* или *трубчатым*, если $div\vec{A}(P) = 0$ и *потенциальным или безвихревым*, если $rot\vec{A}(P) = \vec{0}$, $\forall\ P(x,y,z)\in\Omega$.

Справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема. Пусть в односвязной области Ω равенством (5.32) задано векторное поле $\vec{A}(P)$. Для того, чтобы оно было *потенциальным* в Ω, необходимо и достаточно, чтобы существовала дважды непрерывно дифференцируемая функция $u=u(x,y,z)$, такая, что

$$\vec{A}(P) = grad u. \tag{5.45}$$

Функция, $u=u(x,y,z)$ удовлетворяющая в области Ω равенству (5.45), называется потенциалом поля $\vec{A}(P)$. Очевидно, что потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого, так как

$$grad\, u = grad\,(u+C),\ \ C - \forall const.$$

Теоретическое упражнение. Доказать *самостоятельно* соотношение:

$$div\, rot\vec{A}(P) = 0,\quad rot\ grad u = \vec{0}, \tag{5.46}$$

предполагая, что функции $\vec{A}(P)$, $u=u(x,y,z)$ *дважды непрерывно дифференцируемы* в области Ω.

Из равенств (5.46) следует, что *соленоидальным* будет поле ротора любого векторного поля, а *потенциальным* – поле градиентов любого скалярного поля. Хотя соленоидальные и потенциальные поля не исчерпывают всех векторных полей можно доказать, что любое векторное поле является линейной комбинацией полей этих двух типов (см., например, Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М.: Наука, 1969).

Более полно эту важную для теории и приложений тему нужно смотреть в [1, 4 (т. 2), 9, 16 (т. 2), 19].

В заключение приведем список литературы, которая частично использовалась при написании данного учебного пособия и может служить для более углубленной самостоятельной проработки рассмотренного здесь материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин И.Н. Курс высшей математики. – М.: Просвещение, 1992.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988.
3. Гурский Е.И., Домашов В.П. и др. Руководство к решению задач по высшей математике. Ч. 1,2. – Мн.: Вышэйшая школа, 1989, 1990.
4. Гусак А.А. Высшая математика. Т. 1,2. – Мн.: ТетраСистемс, 1998.
5. Гусак А.А. Справочное пособие по решению задач: Математический анализ и дифференциальные уравнения. – Мн.: ТетраСистемс, 1998.
6. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 1999.
7. Данко П.Е., Попов А.Н., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2. – М.: Высшая школа, 1997.
8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1983.
9. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ. – Мн.: Вышэйшая школа, 1993.
10. Жевняк Р.М., Карпук А.А. и др. Общий курс высшей математики.– Орша: АРФА, 1996.
11. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. – М.: ИНФРА-М, 1997.
12. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1998.
13. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. и др. Высшая математика для экономистов. – М.: ЮНИТИ, 1997.
14. Кузнецов А.В., Янчук Л.Ф. и др. Высшая математика. Общий курс. – Мн.: Вышэйшая школа, 1993.
15. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1986.
16. Пискунов Н.С. Диффереенциальное и интегральное исчисления. Т. 1,2. – М.: Наука, 1985.
17. Рябушко А.П. Бархатов В.В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 2,3. – Мн.: Вышэйшая школа, 1991.
18. Справочник по математике для экономистов /Под. ред. В.И. Ермакова. – М.: Высшая школа, 1997.
19. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 4. Кратные интегралы 86

Глава 5. Криволинейные и поверхностные интегралы 105

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Тузик Альфред Иванович

Высшая математика. Интегрирование функций одной и нескольких переменных

Учебное пособие для студентов технических и экономических специальностей ВУЗов

Редактор Строкач Т.В.
Технический редактор Тузик А.И.
Художник Бобко И.А.
Компьютерный набор: Барас З.И., Цыганок О.Е., Тузик А.А.
Компьютерная верстка: Бобко И.А., Цыганок О.Е.

ISBN 985-6584-17-5
9 789856 584179

Издательство Брестского государственного технического университета
(Лицензия ЛВ №382 от 1.09.2000г.) Брест, ул. Московская, 267.

Подписано в печать 26.06.2000г. Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага офсетная. Усл. п.л. 7,7.
Уч. изд.л. 8,25. Тираж 300 экз. Заказ № 763.

Отпечатано на ризографе Брестского государственного технического университета.
224017, Брест, ул. Московская, 267.