

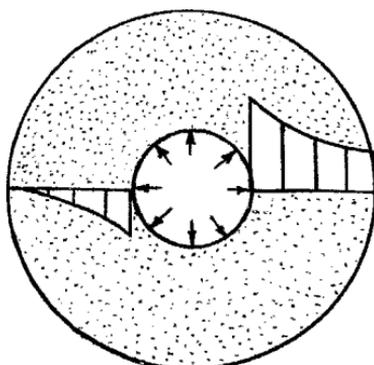
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

## ЗАДАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению курсовой работы  
*"Расчет конструктивных элементов здания  
общетехнического назначения на прочность,  
жесткость и устойчивость"*  
по дисциплине "Сопротивление материалов"  
для студентов специальностей С 04.02.00, Т 19.06.00



Брест 2000

УДК 620.10

В методических указаниях изложены требования к оформлению и содержанию курсовой работы, исходные данные, а также приведены примеры расчетов основных элементов каркаса здания.

Методические указания направлены на активизацию самостоятельной работы студентов при выполнении расчетов на прочность, жесткость и устойчивость простых конструктивных элементов зданий и сооружений.

## ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В качестве объекта для курсовой работы принято здание общетехнического назначения с неполным каркасом и наружными кирпичными стенами. В зданиях такого конструктивного решения может быть размещено технологическое оборудование насосных станций, гидротехнических лабораторий, складских хозяйств, различных производств заводов по выпуску строительных конструкций и др. Технологический процесс обслуживается подвесным краном.

Кирпичные стены воспринимают только ветровые нагрузки и, следовательно, на несущие элементы внутреннего каркаса действуют только вертикальные нагрузки (собственный вес и вес технологического оборудования).

В курсовой работе необходимо выполнить:

- расчет металлических балок перекрытия двутаврового поперечного сечения на прочность и жесткость по трем конструктивным схемам и выбрать более рациональную схему;
- расчет каменной колонны заданного поперечного сечения на прочность при внецентренном сжатии с исследованием ядра сечения;
- расчет металлической стойки на устойчивость и выбор рациональной формы поперечного сечения.

Требования по расчету конструктивных элементов приводятся в соответствующих разделах задания.

Курсовая работа выполняется на листах А4 (297×210), чернилами (не красными), четким почерком с одной стороны листов.

Схемы и рисунки необходимо выполнять на отдельных листах в масштабе с указанием необходимых размеров и обозначений. Схемы и рисунки допускается выполнять аккуратно карандашом.

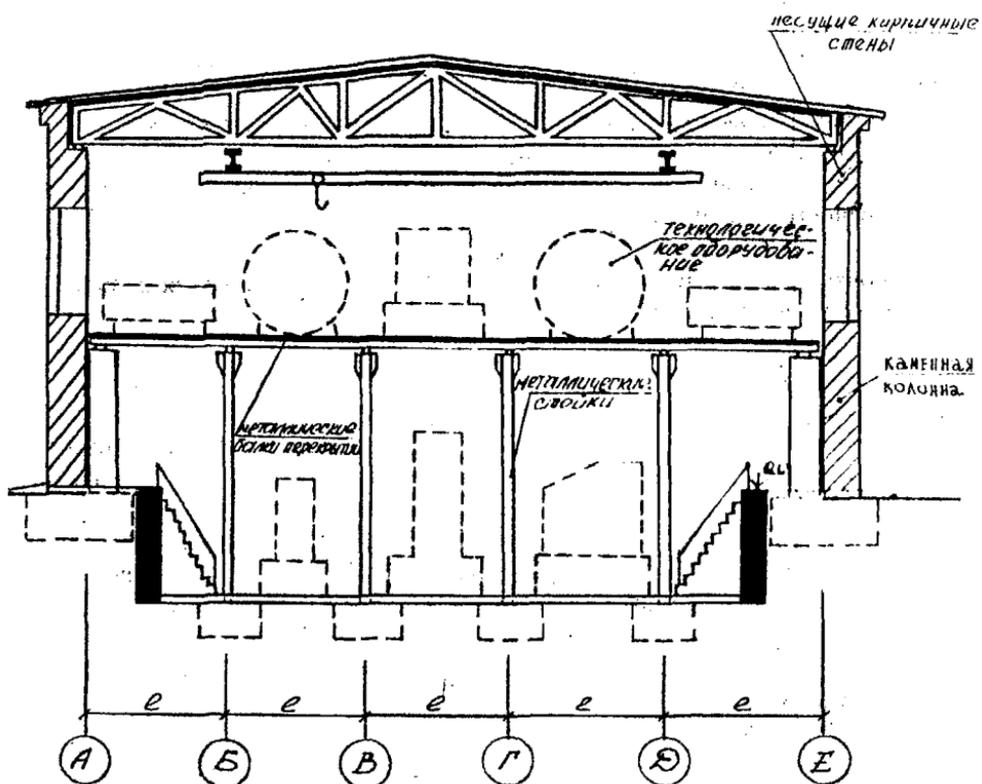
Перед расчетом каждого элемента надо полностью записать предъявляемые требования, исходные данные, составить эскиз в масштабе. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами.

Данные для решения задач выбираются студентом из таблиц вариантов исходных данных в соответствии с заданием.

### Структура курсовой работы:

- титульный лист (образец оформления приведен ниже);
- задание на курсовую работу;
- текст расчетов указанных элементов каркаса здания;
- выводы;
- перечень литературы.

Поперечный разрез здания



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

***"Расчет конструктивных элементов здания общетехнического назначения на прочность, жесткость и устойчивость"***  
по дисциплине "Сопротивление материалов"

Группа  
Исполнитель  
Руководитель

## Металлические балки перекрытия

Расчету подлежат шесть металлических балок:

- три статически определимые балки по первому варианту (I);
- две статически определимые балки по второму варианту (II);
- статически неопределимая балка по третьему варианту (III).

### Требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил ( $Q$ ) и изгибающих моментов ( $M$ ).
2. Определить опасное сечение балок по эпюре изгибающих моментов и подобрать стандартное сечение двутавра.  
Принять  $[\sigma]=160$  МПа.
3. В первом варианте для одной балки (по указанию руководителя) построить упругую линию, используя графоаналитический метод. Для остальных балок, руководствуясь эпюрой  $M$  и условиями закрепления балки, изобразить вид упругой линии.
4. Во втором варианте для одной балки (по указанию руководителя) построить упругую линию, используя метод начальных параметров.
5. В третьем варианте раскрыть статическую неопределимость любым известным способом (метод сравнения деформаций, уравнение трех моментов и др.).
6. Подсчитать расход металла по трем вариантам и выбрать более экономичный.
7. Для выбранного варианта произвести проверку прочности и жесткости.

Принять:  $[\tau]=100$  МПа;  $\frac{f}{l} = \frac{1}{500}$  в пролете и

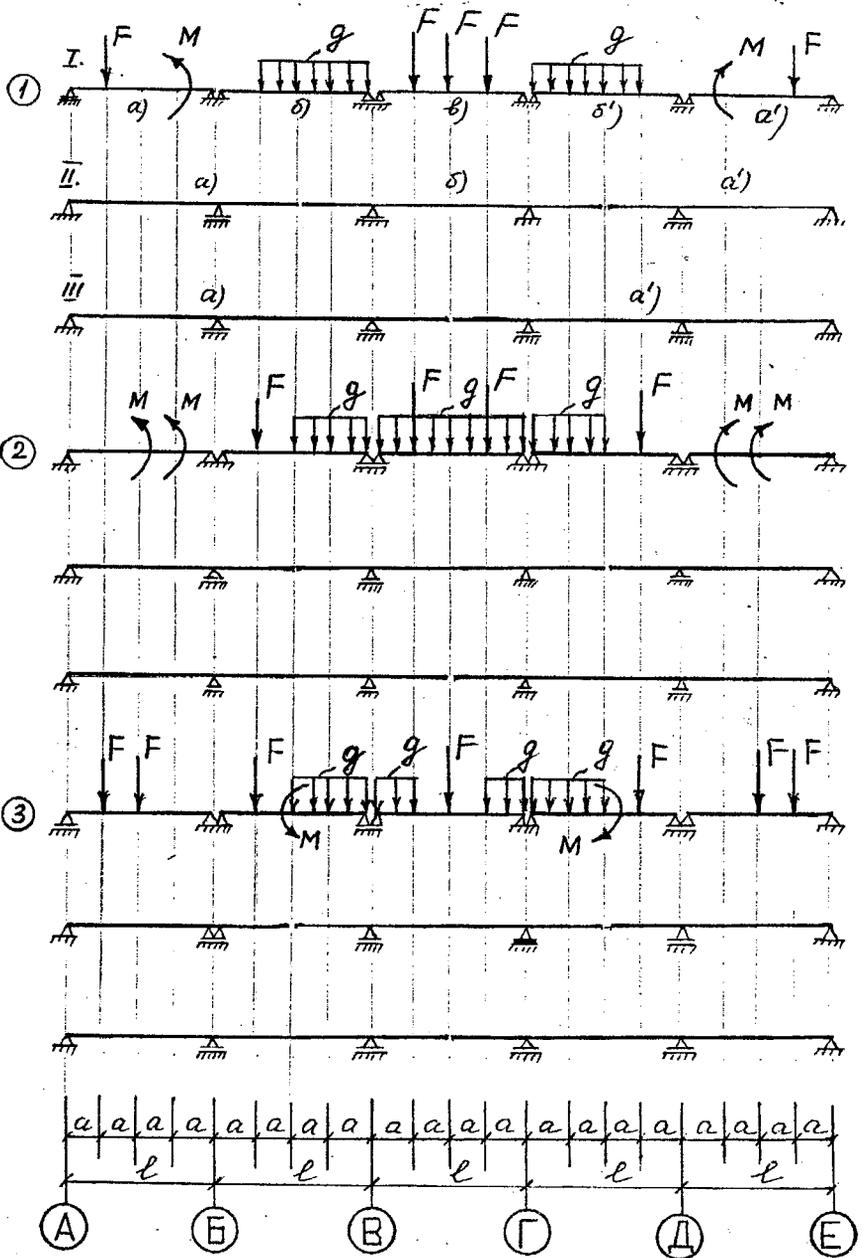
$$\frac{f}{a} = \frac{1}{100} \text{ на консолях; } E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

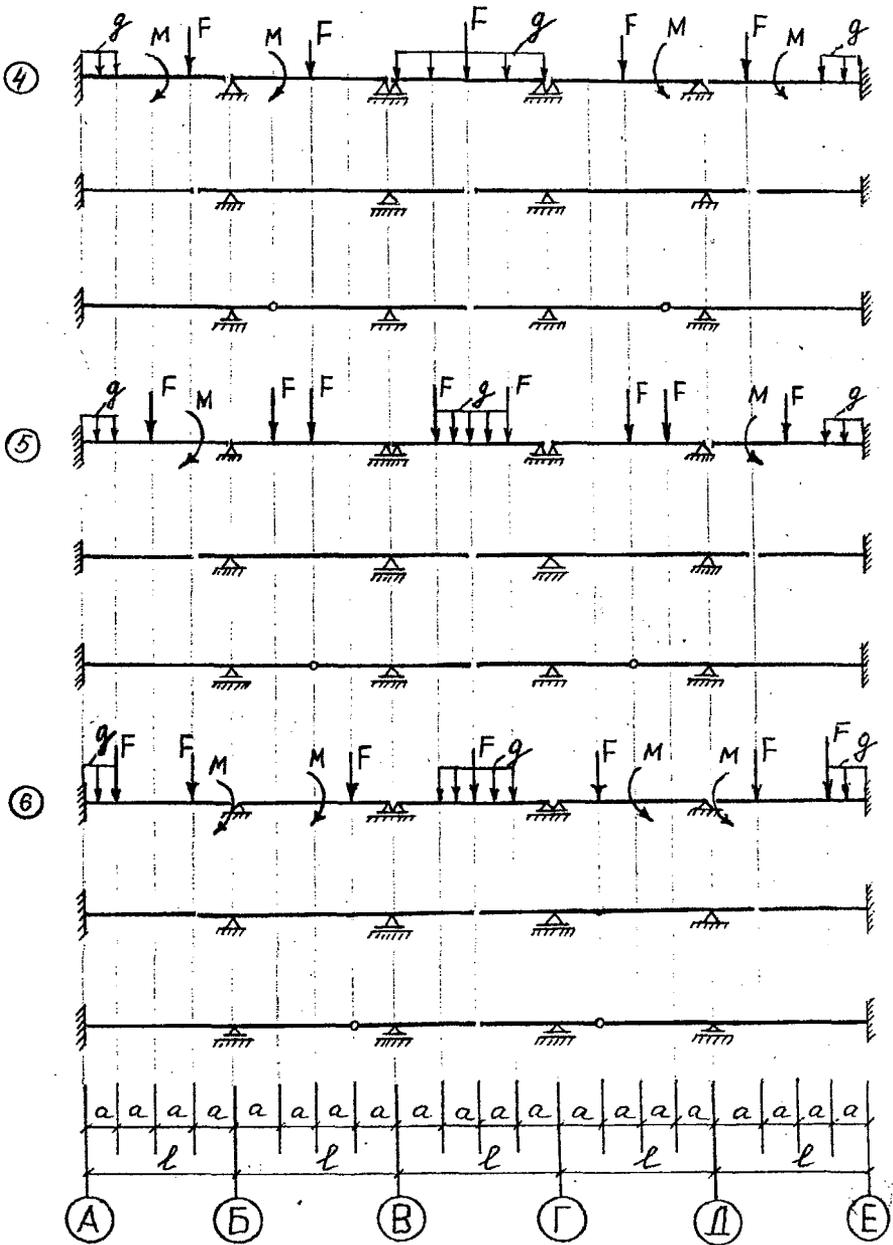
## Числовые данные для элемента 1

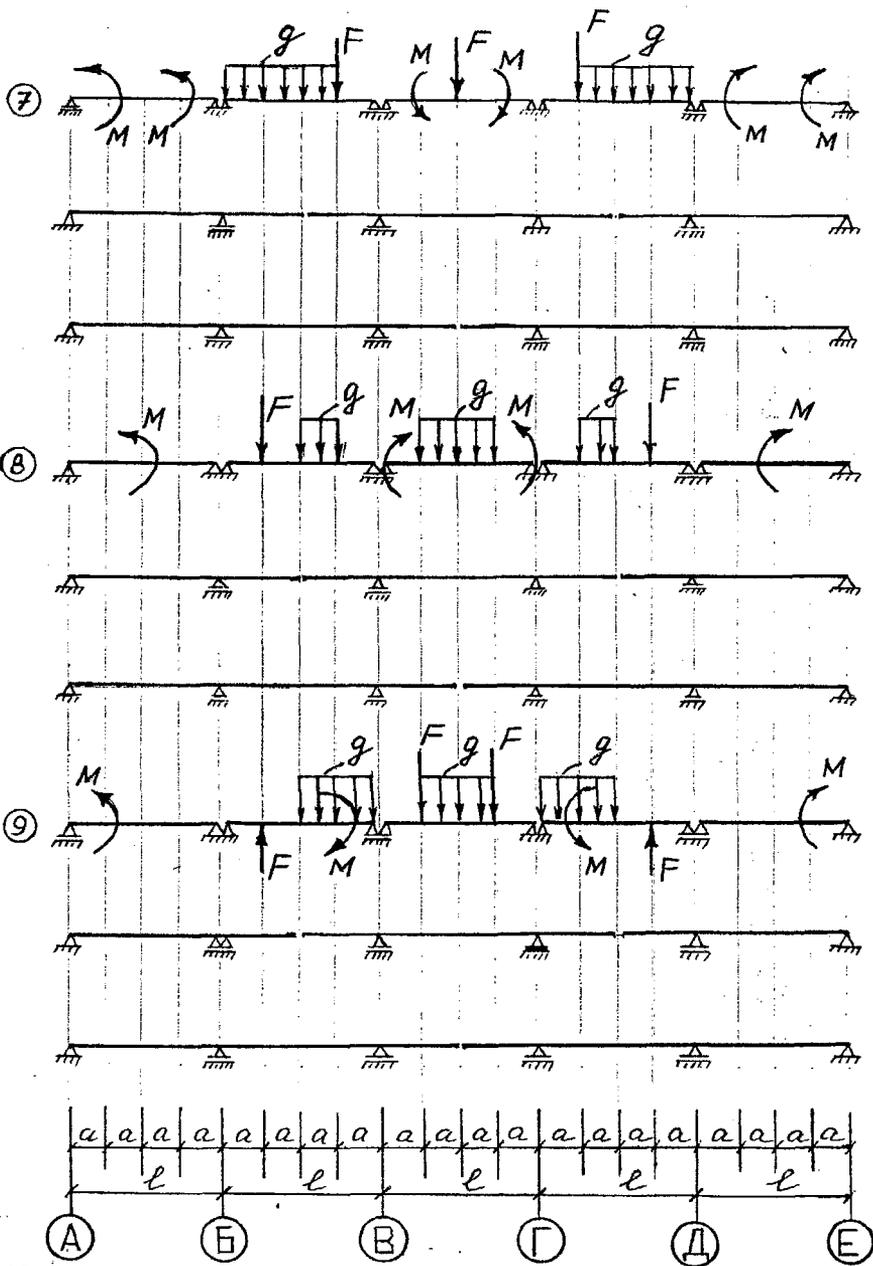
Таблица 1

Вариант	F (кН)	M (кНм)	q (кН/м)	a (м)
1	2	3	4	5
1	70	90	10	0.8
2	80	50	12	0.8
3	50	40	14	0.8
4	60	80	16	0.8
5	30	60	18	0.85
6	40	100	20	0.85
7	70	40	11	0.85
8	60	50	13	0.85
9	50	70	15	0.9
10	30	90	17	0.9
11	40	60	19	0.9
12	50	80	10	0.9
13	60	40	11	0.95
14	70	50	12	0.95
15	80	60	13	0.95
16	80	40	14	0.95
17	70	80	15	1.0
18	60	70	16	1.0
19	50	60	17	1.0
20	40	70	18	1.0
21	30	90	19	1.1
22	50	100	20	1.1
23	70	70	12	1.1
24	80	30	14	1.1
25	60	30	16	1.15
26	40	50	18	1.15
27	30	40	20	1.15
28	40	40	14	1.15
29	50	50	15	1.2
30	60	100	17	1.2
31	70	30	19	1.2
32	80	70	11	1.2

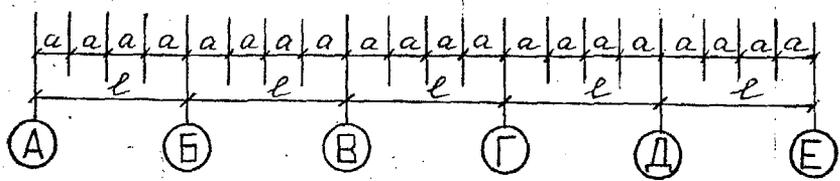
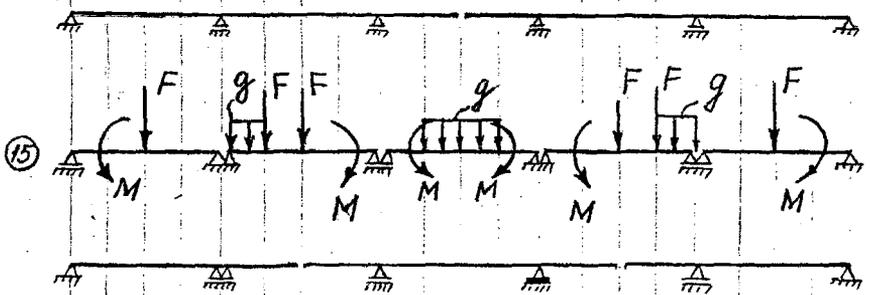
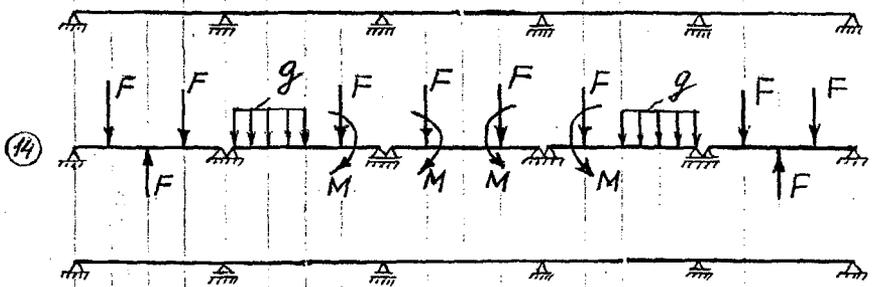
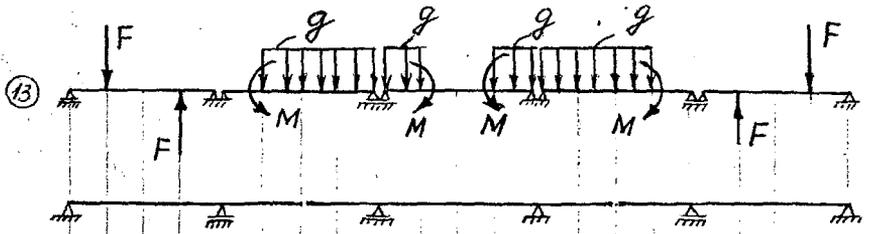
Расчетные схемы балок

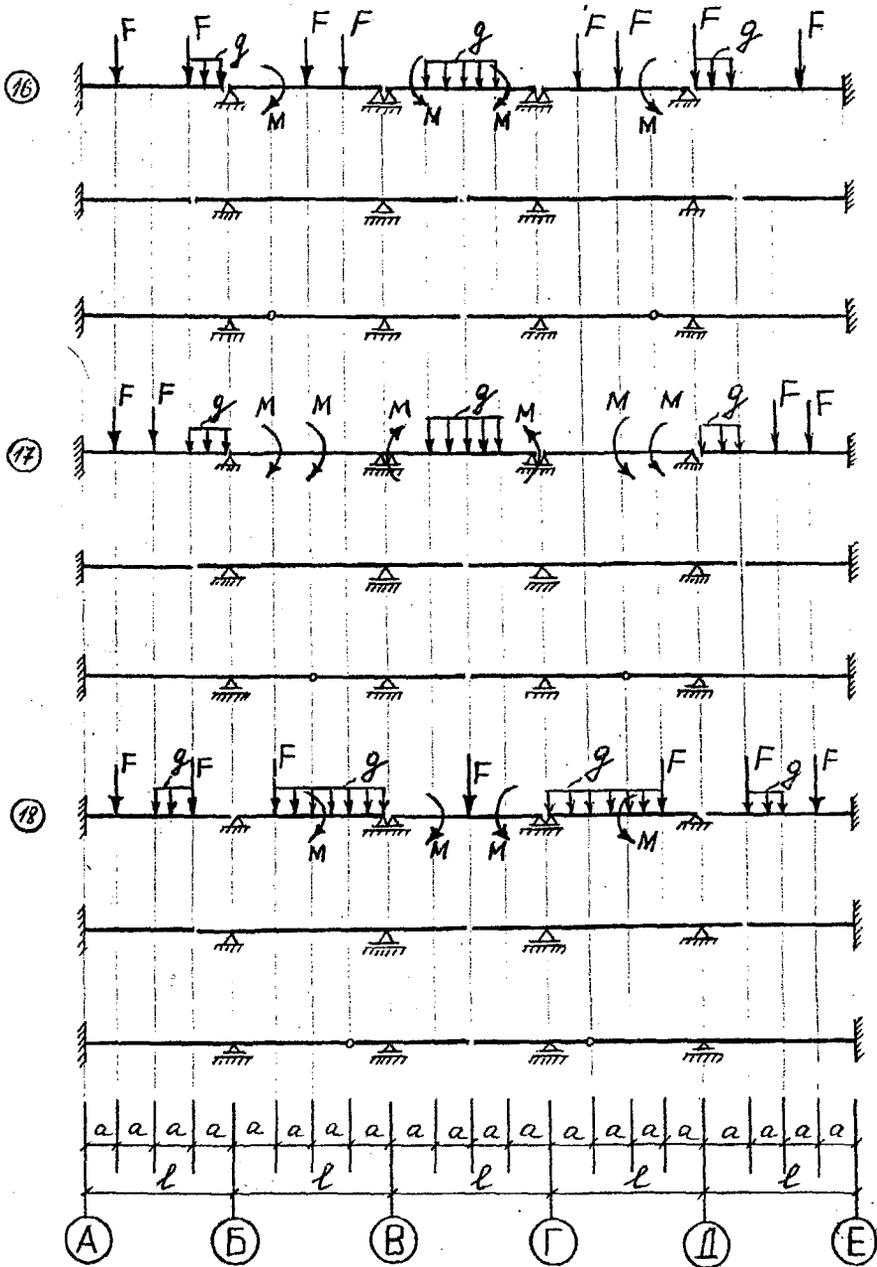


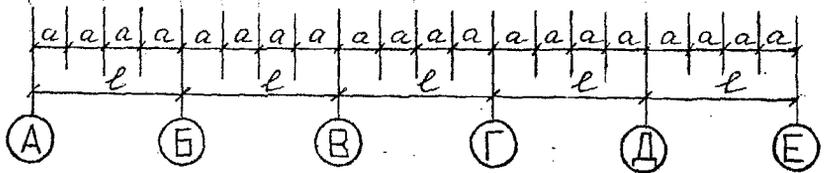
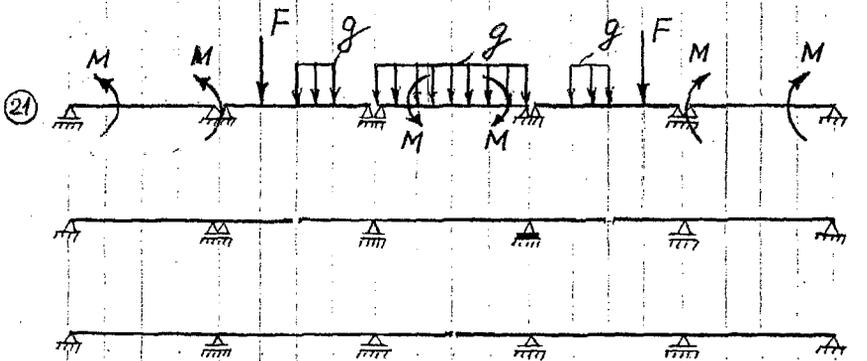
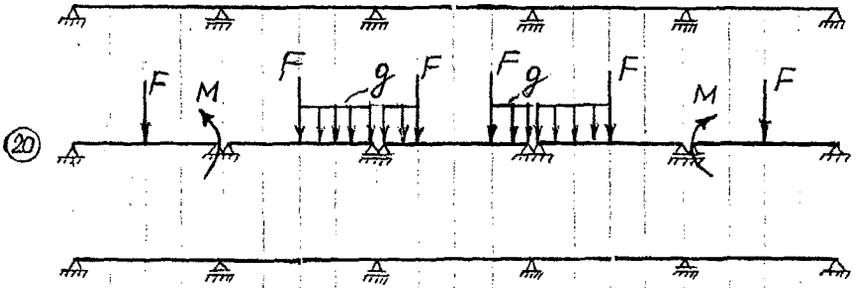
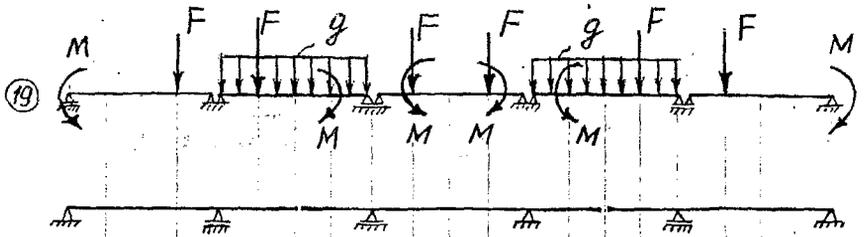


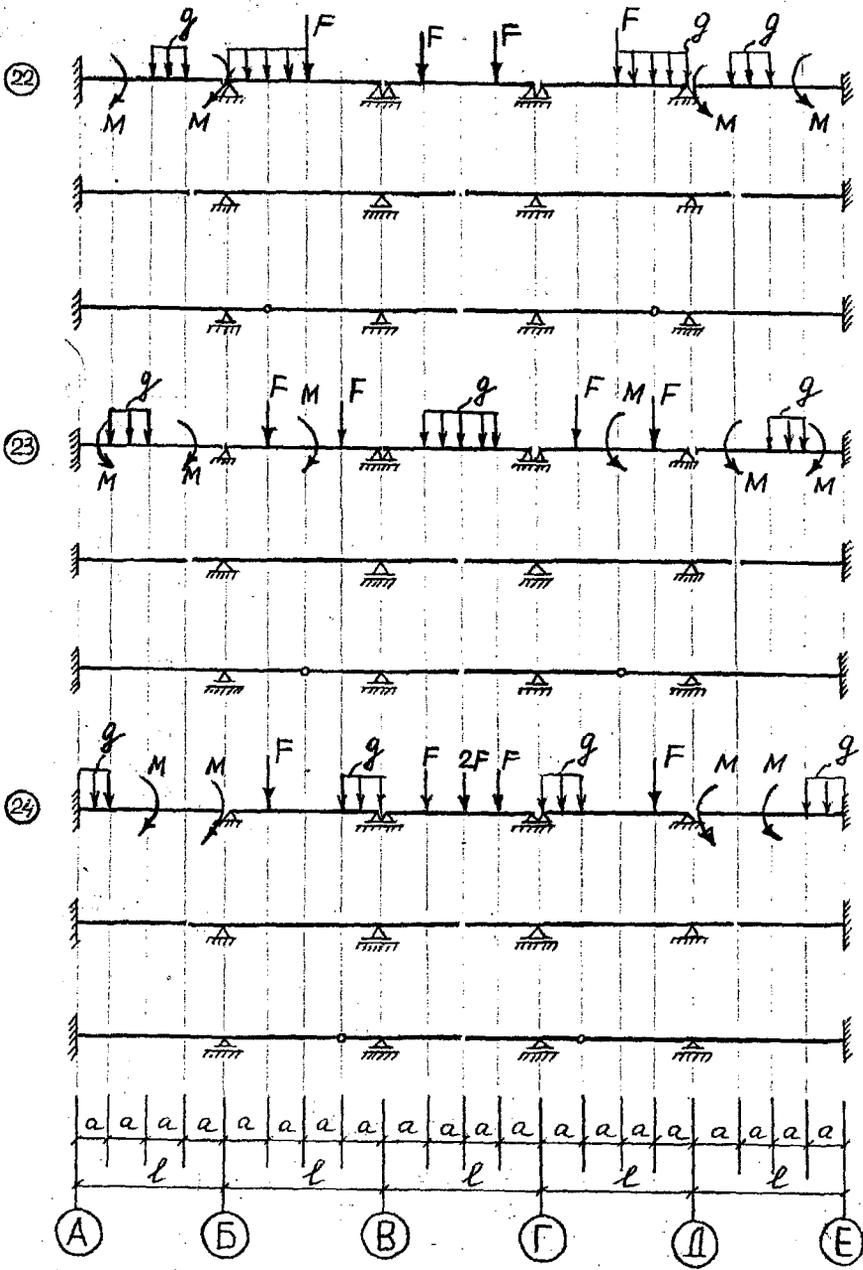




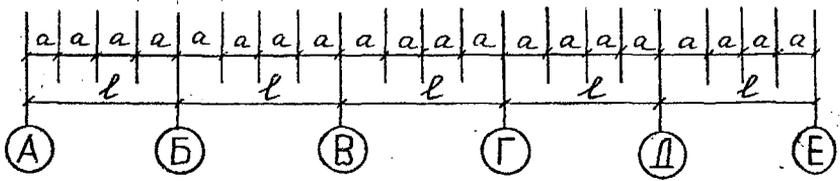
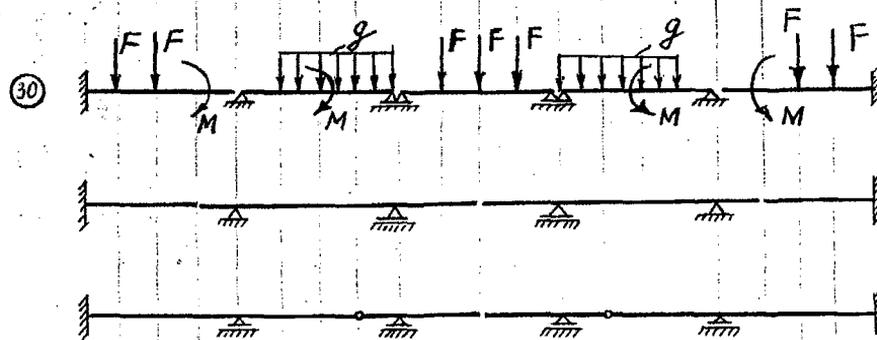
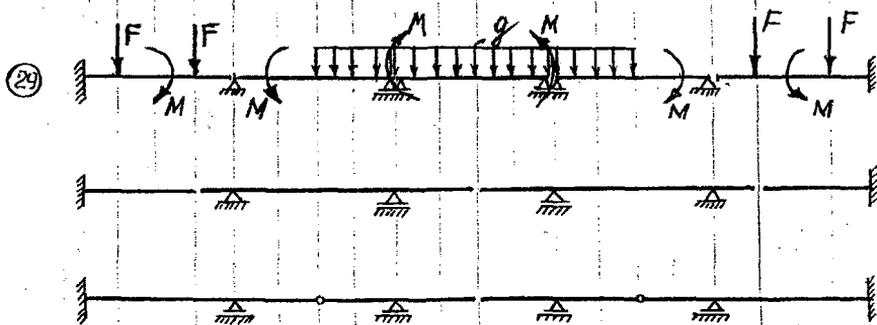
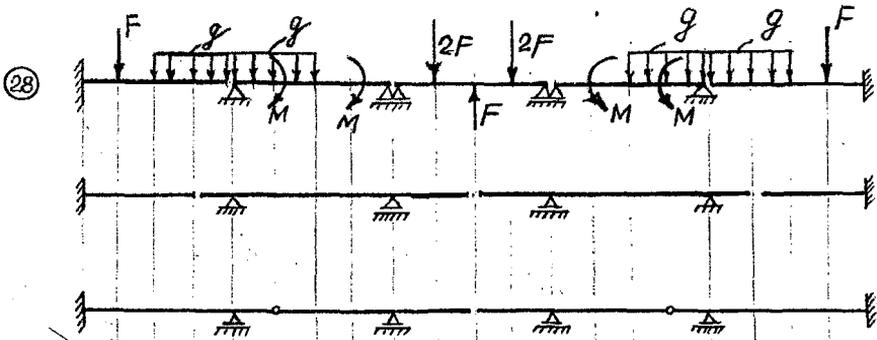


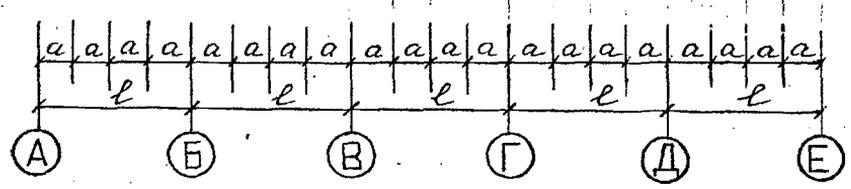
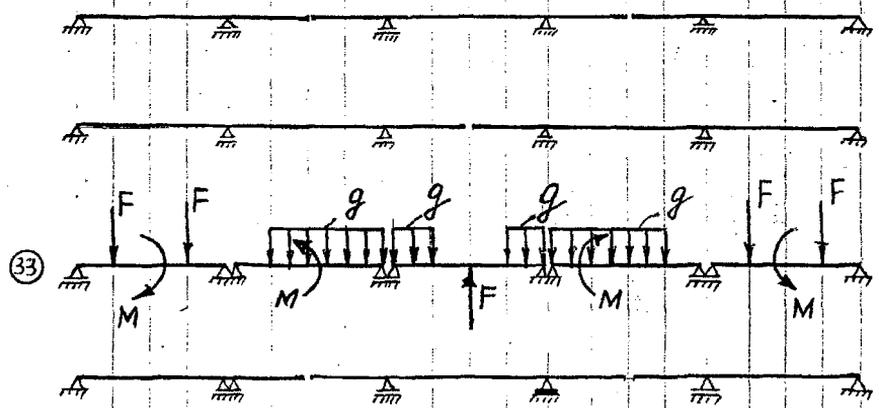
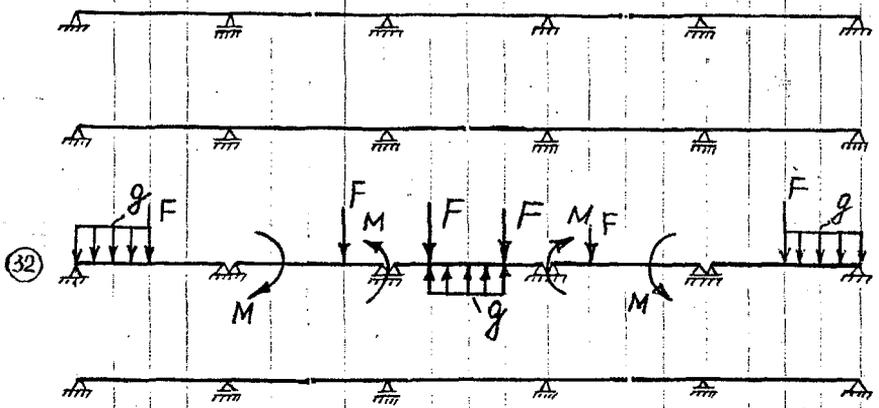
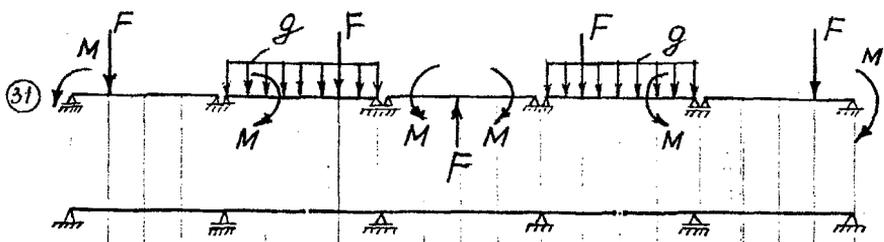












**Расход металла на балки перекрытий по  
трем конструктивным вариантам**

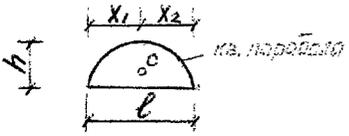
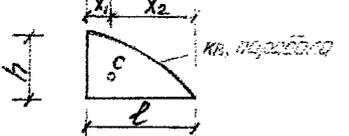
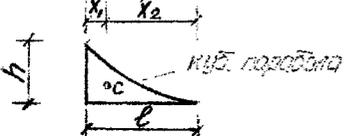
Таблица 2

Вариант	Марка балки	Сечение балки	Длина балки (м)	Вес 1 м.п. балки (кг)	Расход металла на балку (кг)	Расход металла на все балки (кг)
I	Б1а					
	Б1б					
	Б1в					
	Б1а'					
	Б1б'					
II	Б2а					
	Б2б					
	Б2а'					
III	Б3а					
	Б3а'					

**Площади и координаты центров тяжести фигур**

Таблица 3

Фигуры	Площадь $\omega$	Расстояние центра тяжести	
		$x_1$	$x_2$
1	2	3	4
	$lh$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3}$
	$\frac{lh}{3}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{4}$

1	2	3	4
 <p>кв. параболы</p>	$\frac{2lh}{3}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
 <p>кв. параболы</p>	$\frac{2lh}{3}$	$\frac{3l}{8}$	$\frac{5l}{8}$
 <p>куб. параболы</p>	$\frac{lh}{4}$	$\frac{l}{5}$	$\frac{4l}{5}$

## Каменная колонна

Расчету подлежит внецентренно нагруженная колонна по оси "А". Величину сжимающей силы  $F_{(N)}$  следует принять по формуле:

$$F_{(N)} = R_A + kF_T,$$

где  $R_A$  — реакция опоры;

$k$  — коэффициент перегрузки (задается руководителем);

$F_T$  — табличное значение нагрузки (табл. 4).

### ЗАДАНЫ:

1. Форма поперечного сечения колонны;
2. Координаты точки приложения силы;
3. Величины допускаемых напряжений на растяжение  $[\sigma_p]$  и сжатие  $[\sigma_c]$  и объемный вес  $\gamma$  материала колонны (табл. 4).

### ТРЕБУЕТСЯ:

1. Установить размеры поперечного сечения.

Последовательность данного этапа расчета следующая:

— определить геометрические характеристики в общем виде;

— определить положение нулевой линии;

— установить координаты опасных точек сечения;

— составить условия прочности на растяжение и сжатие и определить размеры поперечного сечения колонны;

— проверить прочность сечения с учетом собственного веса колонны.

2. Построить эпюры нормальных напряжений от силы  $F_{(N)}$ , используя принцип суперпозиции.
3. Построить ядро сечения и исследовать его.

Числовые данные для элемента 2

Таблица 4

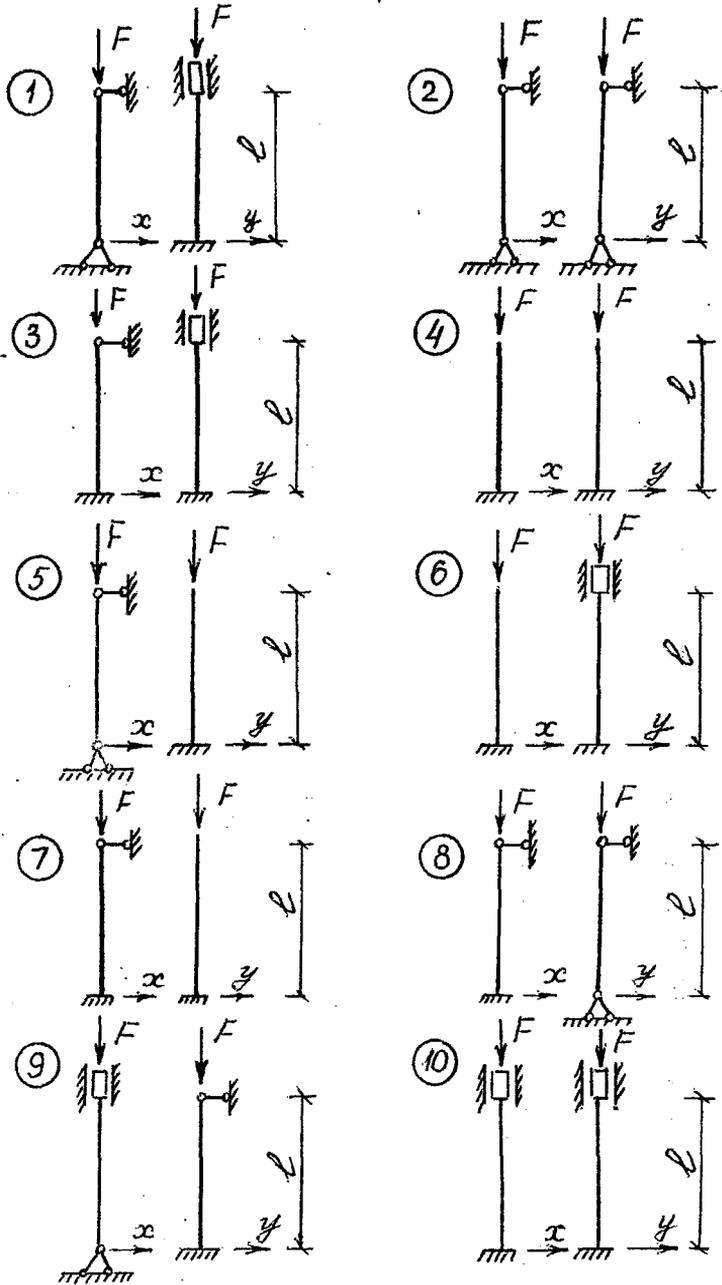
Вариант	Точка приложения силы	F <sub>T</sub> (кН)	Допускаемые напряжения (МПа)		γ (кН/м <sup>3</sup> )
			[σ <sub>p</sub> ]	[σ <sub>c</sub> ]	
1	2	3	4	5	6
1	1	100	0.8	4.0	16
2	2	120	0.8	4.5	18
3	3	140	0.8	5.0	20
4	4	160	0.8	5.5	22
5	1	180	0.8	6.0	24
6	2	110	0.8	6.5	26
7	3	130	0.8	7.0	28
8	4	150	0.8	7.5	30
9	1	170	1.0	4.0	16
10	2	100	1.0	4.5	18
11	3	120	1.0	5.0	20
12	4	140	1.0	5.5	22
13	1	160	1.0	6.0	24
14	2	180	1.0	6.5	26
15	3	110	1.0	7.0	28
16	4	130	1.0	7.5	30
17	1	150	1.2	4.0	16
18	2	170	1.2	4.5	18
19	3	100	1.2	5.0	20
20	4	120	1.2	5.5	22
21	1	140	1.2	6.0	24
22	2	160	1.2	6.5	26
23	3	180	1.2	7.0	28
24	4	110	1.2	7.5	30
25	1	130	1.4	4.0	16
26	2	150	1.4	4.5	18
27	3	170	1.4	5.0	20
28	4	100	1.4	5.5	22
29	1	120	1.4	6.0	24
30	2	140	1.4	6.5	26
31	3	160	1.4	7.0	28
32	4	180	1.4	7.5	30

## Исходные данные к элементу 3

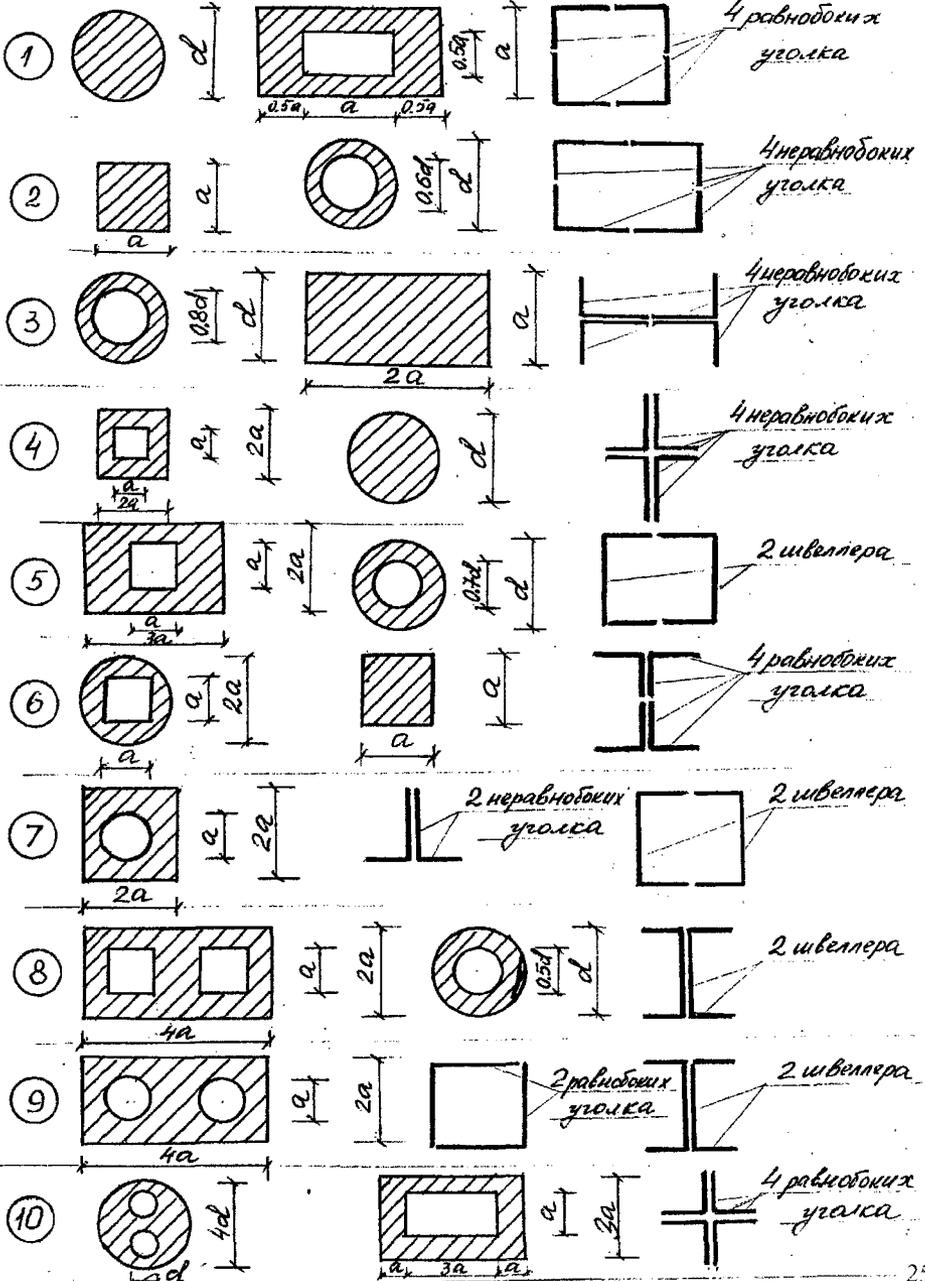
Таблица 5

Вариант	Длина стойки (м)	Схема закреп- ления стойки	Сечения стойки	Примечания
1	2	3	4	5
1	4.6	1	1	
2	4.4	2	2	
3	4.8	3	3	
4	4.0	4	4	
5	4.6	5	5	
6	3.8	6	6	
7	4.2	7	7	
8	4.8	8	8	
9	5.0	9	9	
10	5.6	10	10	
11	4.8	1	2	
12	4.6	2	3	
13	5.0	3	4	
14	4.2	4	5	
15	4.4	5	6	
16	4.0	6	7	
17	4.4	7	8	
18	5.0	8	9	
19	5.2	9	10	
20	5.8	10	1	
21	5.0	1	3	
22	4.8	2	4	
23	5.2	3	5	
24	4.4	4	6	
25	4.2	5	7	
26	4.0	6	8	
27	4.6	7	9	
28	5.2	8	10	
29	5.4	9	3	
30	5.6	10	4	
31	5.2	1	5	
32	5.0	2	6	

Схема закрепления стержня



Формы сечений стойки



**Расход металла на стойку  
(элемент 3)**

Таблица 6

Конструктивное решение стойки	Вес 1 м.п. стойки (кг)	Длина стойки (м)	Расход металла на стойку (кг)	Примечания
1	2	3	4	5
1				
2				
3				

**Значения коэффициента  $\varphi$  в зависимости от гибкости  $\lambda$   
элемента из стали Ст.3**

Таблица 7

Гибкость элемента ( $\lambda$ )	Коэффициент $\varphi$ для элементов из стали Ст.3
0	1.000
10	0.988
20	0.970
30	0.943
40	0.905
50	0.867
60	0.820
70	0.770
80	0.715
90	0.655
100	0.582
110	0.512
120	0.448
130	0.397
140	0.348
150	0.305
160	0.270
170	0.240
180	0.216
190	0.196
200	0.175
210	0.160
220	0.146

## Центрально нагруженная металлическая стойка

Необходимо выполнить расчет центрально нагруженной металлической стойки по оси "Б" (или по оси "В") с учетом обеспечения ее устойчивости.

Цель расчета — определить площадь поперечного сечения по трем конструктивным вариантам, указанным в задании. Подсчитать расход металла по каждому варианту, подсчет свести в таблицу.

Для наиболее рационального сечения определить критическую силу и найти коэффициент запаса устойчивости.

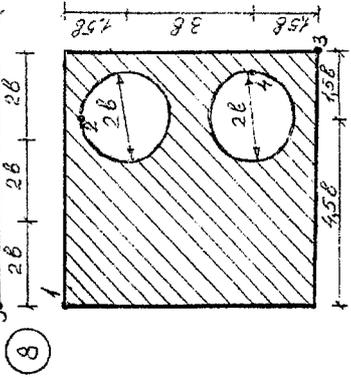
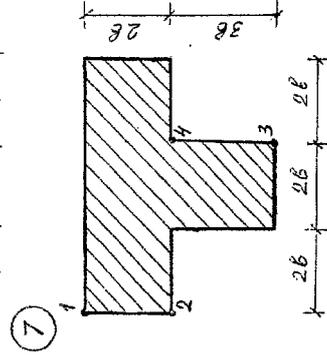
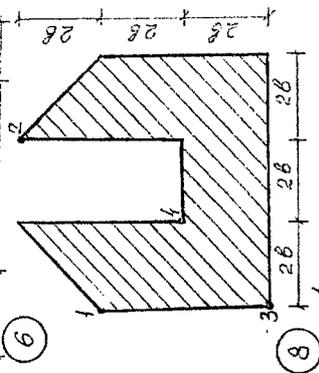
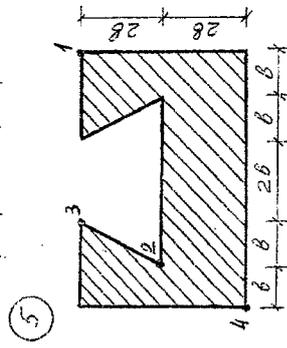
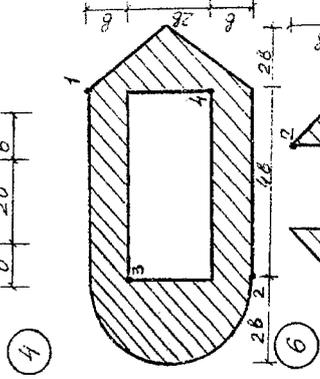
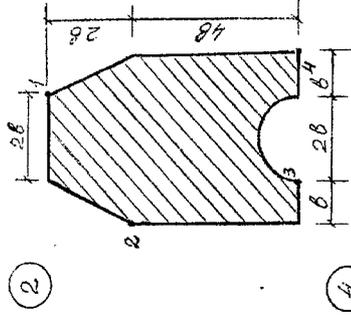
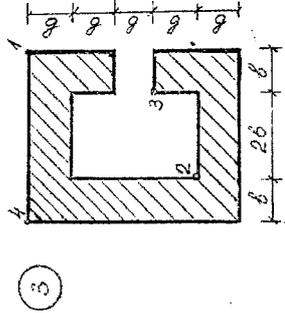
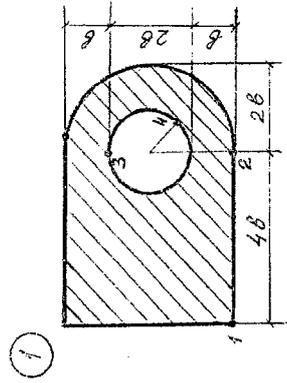
### ЗАДАНЫ:

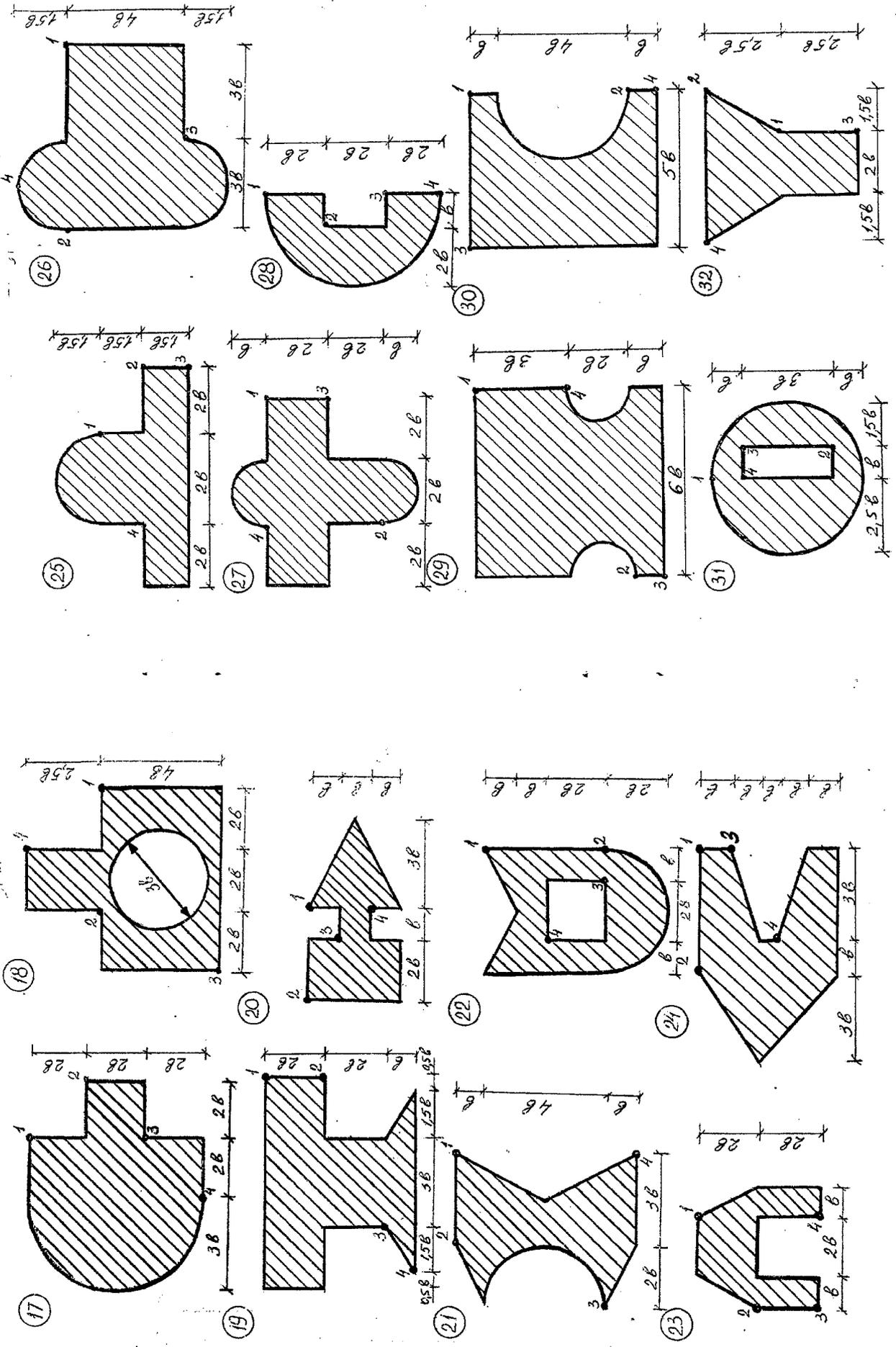
1. Длина стойки.
2. Схема закрепления концов стержня.
3. Типы поперечного сечения стержня.
4. Допускаемое напряжение металла на сжатие  $[\sigma]=160$  МПа.
5. Величину сжимающей силы  $F$  принять из расчета балок перекрытий.

### ПРИМЕЧАНИЕ:

Сечение необходимо располагать таким образом, чтобы устойчивость стойки была максимальной.







## ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ (ЭЛЕМЕНТ 1)

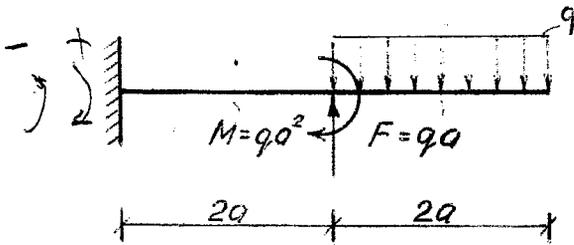
### Пример 1.

Дано: схема балки и нагрузка;

допускаемое напряжение  $[\sigma]=160$  МПа;

допускаемый прогиб  $\frac{f}{l} = \frac{1}{150}$ ;

модуль упругости материала  $E=2 \cdot 10^5$  МПа.



$$a=0,8 \text{ м:}$$

$$q=20 \text{ кН/м.}$$

Требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил (Q), изгибающих моментов (M).
2. Подобрать двутавровое сечение балки.
3. Графоаналитическим методом построить эпюру прогибов (упругую линию балки).
4. Проверить балку на жесткость.

### Решение.

1. Строим эпюры Q и M.

$$Q_B = 0; \quad M_B = 0; \quad Q_C^{сп} = 2qa = 2 \cdot 20 \cdot 0,8 = 32 \text{ кН:}$$

$$Q_C^{ан} = Q_C^{сп} - F = 2qa - qa = qa = 32 - 16 = 16 \text{ кН:}$$

$$M_C^{сп} = -2qa^2 = -2 \cdot 20 \cdot 0,8^2 = -25,6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$M_C^{ан} = -2qa^2 - qa^2 = -3qa^2 = -3 \cdot 20 \cdot 0,8^2 = -38,4 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$Q_A = qa = 20 \cdot 0,8 = 16 \text{ кН:}$$

$$M_A = -2qa \cdot 3a - M + F2a = -6 \cdot 20 \cdot 0,8^2 - 20 \cdot 0,8^2 + 2 \cdot 20 \cdot 0,8^2 = -64 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

По данным расчета строим эпюры Q и M (рис. 1б,в).

2. Подбираем сечение балки из двутавра.

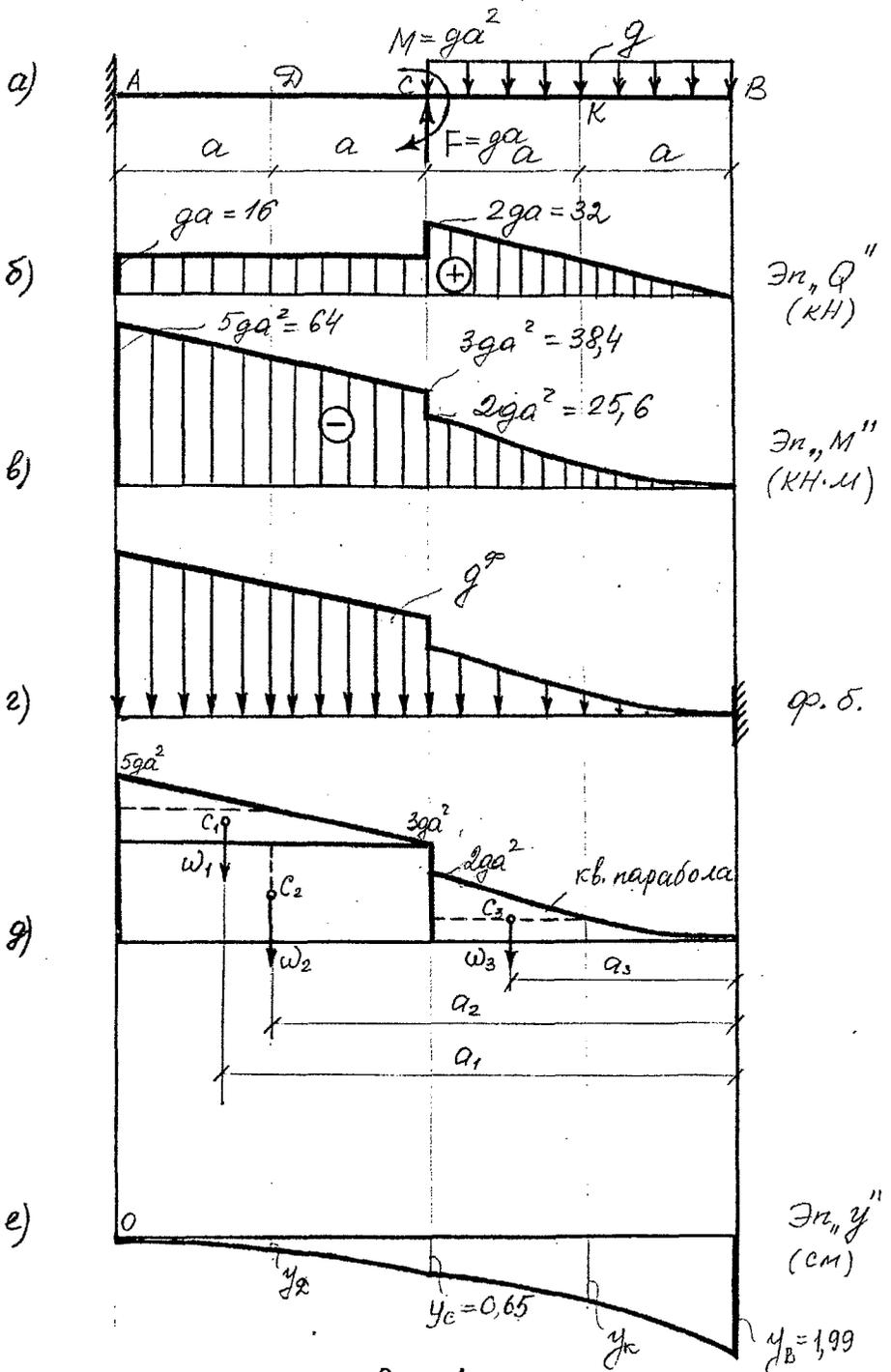


Рис. 1

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

откуда

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{64 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,4 \cdot 10^3 \text{ м}^3 = 400 \text{ см}^3.$$

По сортаменту ГОСТ 8239-72 берем I№27 а с моментом сопротивления равным:

$$W_x^* = 407 \text{ см}^3, \quad I_x = 5500 \text{ см}^4.$$

3. Строим эпюру прогибов, используя графоаналитический метод.

Возьмем фиктивную балку и приложим к ней фиктивную нагрузку, которой является эпюра  $M$  (см.рис.1г).

Прогиб в сечении балки определяется по формуле:

$$y = \frac{M^\Phi}{EI},$$

где  $M^\Phi$  - фиктивный момент в рассматриваемом сечении балки,

$EI$  - жесткость балки.

Разобьем фиктивную нагрузку на простые фигуры. Например, для вычисления прогибов в сечениях "В" и "С" площадь нагрузки разбиваем на три простых фигуры (см.рис.1д) с указанием их ц.т. и расстояний до сечения "В". Для этого воспользуемся таблицей 3.

Тогда

$$M = -\omega_1 a_1 - \omega_2 a_2 - \omega_3 a_3 = -2qa^2 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} 2a + 2a \right) - 3qa^2 \cdot 2a \cdot 3a -$$

$$-\frac{1}{3} 2qa^2 \cdot 2a \cdot \frac{3}{4} \cdot 2a = -\frac{80}{3} qa^4;$$

$$M_C^\Phi = -2qa^2 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} 2a - 3qa^2 \cdot 2a \cdot a = -\frac{26}{3} qa^4;$$

откуда

$$y_B = -\frac{M_B^\Phi}{EI} = -\frac{80 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 0,8^4}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = -1,99 \text{ см};$$

$$y_C = -\frac{M_C^\Phi}{EI} = -\frac{26 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 0,8^4}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = -0,65 \text{ см}.$$

Знак минус показывает, что прогиб балки вниз.

Для определения прогибов в сечениях "Д" и "К" трапецию и часть квадратной параболы надо разбить на более простые фигуры.

По данным расчета на рис. 1е построена эпюра прогибов ( $y$ ).

4. Проверяем балку на жесткость.

Условие жесткости имеет вид:

$$\frac{f}{l} \leq \left[ \frac{f}{l} \right],$$

где  $f=y_B$  - максимальный прогиб.

$l=4a$  - длина балки.

$$\frac{f}{l} = \frac{y_B}{4a} = \frac{1,99}{4 \cdot 80} = \frac{1}{161} \left[ \frac{f}{l} \right] = \frac{1}{150}.$$

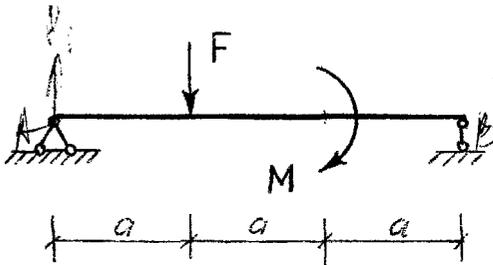
Условие жесткости выполняется.

### Пример 2.

Дано: схема балки и нагрузка.

Допускаемые напряжения  $[\sigma]=160$  МПа,  $[\tau]=100$  МПа.

Модуль упругости материала  $E=2 \cdot 10^5$  МПа.



$$\begin{aligned} a &= 1,2 \text{ м}; \\ F &= 150 \text{ кН}; \\ M &= 70 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Требуется:

1. Построить эпюры Q и M.
2. Подобрать двутавровое сечение балки.
3. Проверить балку на прочность.
4. Графоаналитическим методом построить эпюру прогибов (упругую линию балки).

### Решение.

1. Строим эпюры Q и M.

Определим опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$ .

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 3a - F \cdot 2a + M = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot 2a - M}{3a} = \frac{150 \cdot 2 \cdot 1,2 - 70}{3 \cdot 1,2} = 80,56 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 3a - M - F \cdot a = 0;$$

$$R_B = \frac{M + F \cdot a}{3a} = \frac{70 + 150 \cdot 1,2}{3 \cdot 1,2} = 69,44 \text{ кН};$$

Проверка:

$$\sum y = 0;$$

$$R_A + R_B - F = 0; \quad 80,56 + 69,44 - 150 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

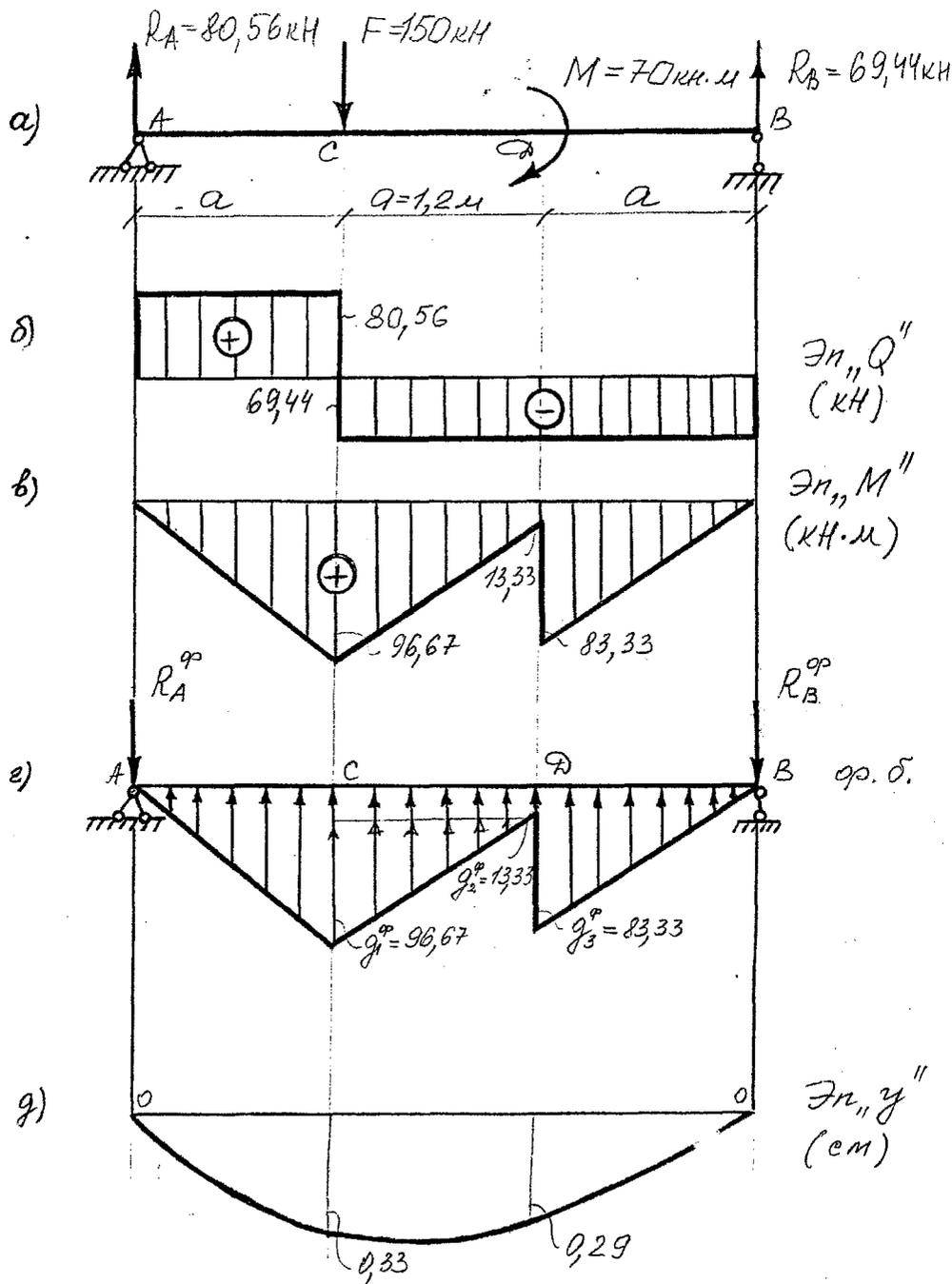


Рис. 2

$$\begin{aligned}
 Q_A = R_A &= 80,56 \text{ кН}; & M_A &= 0; & Q_C^{cb} &= R_A = 80,56 \text{ кН}; \\
 Q_C^{cnp} &= -R_B = -69,44 \text{ кН}; & M_C &= R_A \cdot a = 80,56 \cdot 1,2 = 96,67 \text{ кНм}; \\
 Q_D &= Q_B = -R_B = -69,44 \text{ кН}; & M_B &= 0; \\
 M_D^{cnp} &= R_B \cdot a = 69,44 \cdot 1,2 = 83,33 \text{ кНм}; \\
 M_D^{cb} &= R_B \cdot a - M = 69,44 \cdot 1,2 - 70 = 13,33 \text{ кНм}.
 \end{aligned}$$

Эпюры Q и M построены на рис. 26,в.

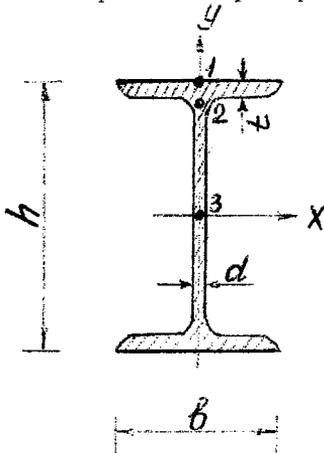
## 2. Подбираем двутавровое сечение балки.

Из условия прочности по нормальным напряжениям определим требуемый момент сопротивления.

$$W_X = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{96,67 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 604 \text{ см}^3.$$

Из таблицы прокатных профилей выбираем двутавр IN36.

Геометрические характеристики принятого двутавра:



$$\begin{aligned}
 h &= 36 \text{ см}; \\
 b &= 14,5 \text{ см}; \\
 t &= 1,23 \text{ см}; \\
 d &= 0,75 \text{ см}; \\
 I_X &= 13380 \text{ см}^4; \\
 W_X &= 743 \text{ см}^3; \\
 S_X &= 423 \text{ см}^3.
 \end{aligned}$$

Рис. 3.

## 3. Проверяем балку на прочность.

Т.к. принятое  $W_X = 743 \text{ см}^3$  больше требуемого  $604 \text{ см}^3$ , то проверку прочности по нормальным напряжениям (Т.1) не делаем.

Проверяем балку по касательным напряжениям в точке 3 (рис.3) сечения С слева, где  $Q_{\max} = 80,56 \text{ кН}$ .

Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{I_x d} \leq [\tau].$$

Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{80,56 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-5}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 0,75 \cdot 10^{-2}} = 33,96 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

Проверим прочность балки по главным напряжениям, используя третью теорию прочности.

Проверку производим в точках перехода от малой ширины к большей (точка 2) в сечении с одновременно большими значениями  $Q$  и  $M$ . Таких сечений может быть несколько. В нашем случае такое сечение одно. Это сечение С слева, где

$$Q_C = 80,56 \text{ кН}; \quad M_C = 96,67 \text{ кНм}.$$

Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];$$

Для точки 2:

$$y_2 = \frac{h}{2} - t = 18 - 1,23 = 16,77 \text{ см},$$

$$S_{x,2}^{\text{омс}} = b \cdot t \frac{h-t}{2} = 14,5 \cdot 1,23 \frac{36 - 1,23}{2} = 310 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_2 = \frac{M_C \cdot y_2}{I_X} = \frac{96,67 \cdot 10^3 \cdot 16,77 \cdot 10^{-2}}{13380 \cdot 10^{-8}} = 121,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{Q_C \cdot S_{x,2}^{\text{омс}}}{I_X d} = \frac{80,56 \cdot 10^3 \cdot 310 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 0,75 \cdot 10^{-2}} = 24,89 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{121,2^2 + 4 \cdot 24,89^2} = 131 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по главным напряжениям выполняется.

4. Строим эпюру прогибов балки, используя графоаналитический метод.

Берем фиктивную балку и прикладываем фиктивную нагрузку (эпюра  $M$ ).

Определяем фиктивные опорные реакции.

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A^{\Phi} \cdot 3a + q_1^{\Phi} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2a + \frac{1}{3}a\right) + q_2^{\Phi} \cdot a \cdot \frac{3}{2}a +$$

$$+ (q_1^{\Phi} - q_2^{\Phi}) \cdot a \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{3}a\right) + q_3^{\Phi} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a = 0;$$

$$\bar{R}_A^\Phi = \frac{1,17 \cdot 96,67 \cdot 1,2 + 1,5 \cdot 13,33 \cdot 1,2 + 83,33 \cdot 0,83 \cdot 1,2 + 0,33 \cdot 83,33 \cdot 1,2}{3} =$$

$$= 91,90 \text{ (кНм}^2\text{)};$$

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B^\Phi \cdot 3a + q_3^\Phi \cdot a \cdot \frac{1}{2} \left( 2a + \frac{1}{3}a \right) + q_2^\Phi \cdot a \cdot \frac{3}{2}a +$$

$$+ (q_1^\Phi - q_2^\Phi) \cdot a \frac{1}{2} \cdot \left( a + \frac{1}{3}a \right) + q_1^\Phi \cdot a \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a = 0;$$

$$R_B^\Phi = \frac{1,17 \cdot 83,33 \cdot 1,2 + 1,5 \cdot 13,33 \cdot 1,2 + 0,67 \cdot 83,33 \cdot 1,2 + 0,33 \cdot 96,67 \cdot 1,2}{3} =$$

$$= 82,09 \text{ (кНм}^2\text{)}.$$

Проверка реакций:

$$\sum y = 0;$$

$$-R_A^\Phi - R_B^\Phi + q_1^\Phi \cdot \frac{a}{2} + q_2^\Phi \cdot a + q_3^\Phi \cdot \frac{a}{2} + q_3^\Phi \cdot \frac{a}{2} = 0;$$

$$-91,90 - 82,09 + 173,99 = 0; \quad -173,99 + 173,99$$

$$0 = 0.$$

Определим фиктивные изгибающие моменты в сечениях С и Д.

$$M_C^\Phi = -R_A^\Phi \cdot a + q_1^\Phi \cdot a \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a = -91,90 \cdot 1,2 + 96,67 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,2^2 = -87,08 \text{ кНм}^2;$$

$$M_D^\Phi = -R_B^\Phi \cdot a + q_3^\Phi \cdot a \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a = -82,09 \cdot 1,2 + 83,33 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,2^2 = -78,51 \text{ кНм}^2$$

Прогибы в сечениях С и Д определяем по формуле:

$$y = \frac{M^\Phi}{EI_X};$$

тогда

$$y_C = \frac{M_C^\Phi}{EI_X} = -\frac{87,08 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -0,33 \text{ см.}$$

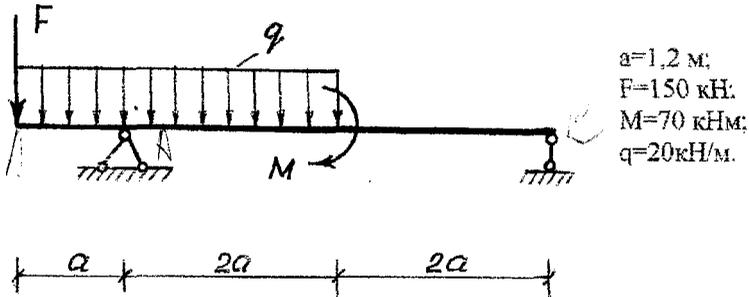
$$y_D = \frac{M_D^\Phi}{EI_X} = -\frac{78,51 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -0,29 \text{ см.}$$

Знак минус показывает, что прогибы вниз.

Эпюра прогибов ( $y$ ) построена на рис. 2д.

### ПРИМЕР 3

ДАНО: схема балки и нагрузка.



Требуется:

1. Построить эпюры  $Q$  и  $M$ .
2. Построить эпюру прогибов балки, определив прогибы трех сечений в пролете и на консоли (использовать метод начальных параметров).
3. Проверить балку на жесткость  $\left(\left[\frac{f}{a}\right] = \frac{1}{100}; \left[\frac{f}{l}\right] = \frac{1}{500}\right)$ .

### Решение

1. Строим эпюры  $Q$  и  $M$ .

Определяем опорные реакции (рис. 4а).

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 4a - F \cdot 5a - q \cdot 3a \cdot 3,5a + M = 0.$$

$$R_A = \frac{F \cdot 5a + 10,5qa^2 - M}{4a} = \frac{150 \cdot 5 \cdot 1,2 + 10,5 \cdot 20 \cdot 1,2^2 - 70}{4 \cdot 1,2} = 235,92 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 4a + F \cdot a - q \cdot 3a \cdot 0,5a - M = 0;$$

$$R_B = \frac{-F \cdot a + 1,5qa^2 + M}{4a} = \frac{-150 \cdot 1,2 + 1,5 \cdot 20 \cdot 1,2^2 + 70}{4 \cdot 1,2} = -13,92 \text{ кН}.$$

Знак минус показывает, что направление реакции  $R_B$  противоположно указанному. Исправляем направление (рис. 4а).

$$Q_O = -F = -150 \text{ кН}; \quad M_O = 0;$$

$$Q_A^{cr} = -F - qa = -150 - 20 \cdot 1,2 = -174 \text{ кН};$$

$$Q_A^{cnp} = Q_A^{cr} + R_A = -174 + 235,92 = 61,92 \text{ кН};$$

$$M_A = -F \cdot a - \frac{qa^2}{2} = -150 \cdot 1,2 - \frac{20 \cdot 1,2^2}{2} = -194,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

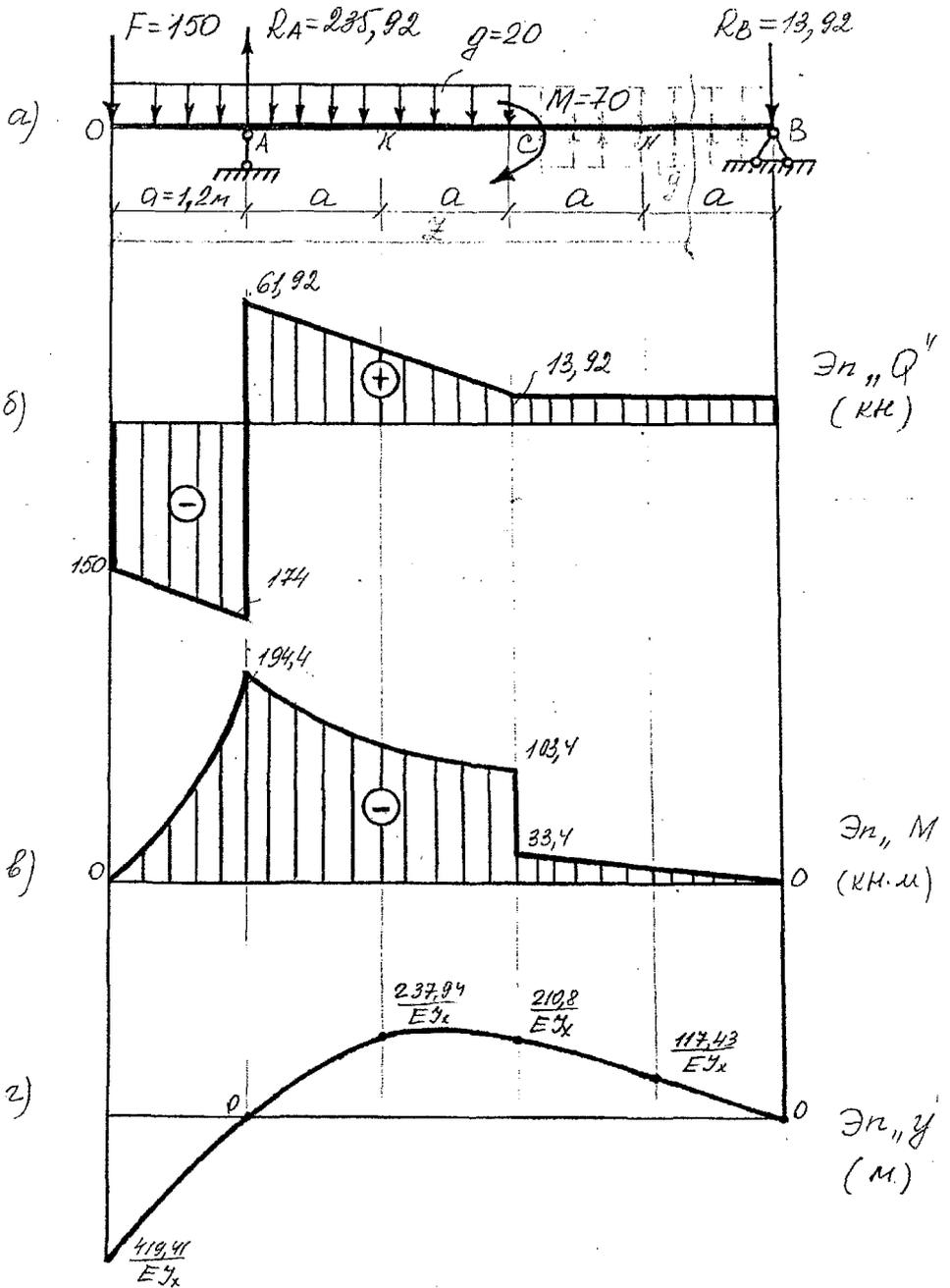


Рис. 4

$$Q_C = R_B = 13,92 \text{ кН};$$

$$M_C^{ca} = -R_B \cdot a - M = -13,92 \cdot 1,2 - 70 = -103,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C^{cny} = -R_B \cdot a = -13,92 \cdot 1,2 = -33,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_B = R_B = 13,92 \text{ кН}; \quad M_B = 0.$$

Эпюры  $Q$  и  $M$  построены на рис. 46.в.

## 2. Строим эпюру прогибов балки.

Запишем общий вид универсального уравнения прогибов метода начальных параметров для расчетной схемы балки (рис. 4а).

$$EI_X y_Z = EI_X y_O + EI_X \theta_O z - \frac{F \cdot z^3}{6} - \frac{q z^4}{24} + \frac{R_A (z-a)^3}{6} + \frac{M (z-3a)^2}{2} + \frac{q (z-3a)^4}{24};$$

где  $\theta_O$  и  $y_O$  — начальные параметры (угол поворота и прогиб сечения в начале координат, точка  $O$ ), которые определяем из граничных условий:

при  $z=a$ ;  $y_A=0$ ;

$$EI_X y_A = EI_X y_O + EI_X \theta_O a - \frac{F \cdot a^3}{6} - \frac{q a^4}{24} = 0;$$

при  $z=5a$ ;  $y_B=0$ ;

$$EI_X y_B = EI_X y_O + EI_X \theta_O \cdot 5a - \frac{F \cdot (5a)^3}{6} - \frac{q \cdot (5a)^4}{24} + \frac{R_A (4a)^3}{6} + \frac{M (2a)^2}{2} +$$

$$+ \frac{q (2a)^4}{24} = 0;$$

Решаем систему уравнений  $y_A=0$  и  $y_B=0$ .

$$EI_X y_O + EI_X \theta_O \cdot 1,2 - \frac{150 \cdot 1,2^3}{6} - \frac{20 \cdot 1,2^4}{24} = 0;$$

$$EI_X y_O + EI_X \theta_O \cdot 5 \cdot 1,2 - \frac{150 \cdot 6^3}{6} - \frac{20 \cdot 6^4}{24} + \frac{235,92 \cdot 4,8^3}{6} + \frac{70 \cdot 2,4^2}{2} + \frac{20 \cdot 2,4^4}{24} = 0.$$

После упрощения получим:

$$EI_X y_O + 1,2 EI_X \theta_O = 44,928;$$

$$EI_X y_O + 6 EI_X \theta_O = 1902,275.$$

Тогда

$$EI_X \theta_O = 386,95 \text{ кНм}^2; \quad EI_X y_O = -419,41 \text{ кНм}^3.$$

Проверка:

$$EI_X y_A = -419,41 + 1,2 \cdot 386,95 - \frac{150 \cdot 1,2^3}{6} - \frac{20 \cdot 1,2^4}{24} = -463,338 + 463,337 \approx 0.$$

Для построения эпюры прогибов вычислим прогибы следующих сечений:

сечение О ( $z=0$ ):  $EI_X y_O = -419,41$ ;  $y_O = -\frac{419,41}{EI_X}$ ;

сечение К ( $z=2a$ ):  $EI_X y_K = EI_X y_O + EI_X \theta_O \cdot 2a - \frac{F \cdot (2a)^3}{6} - \frac{q \cdot (2a)^4}{24} +$   
 $+\frac{R_A \cdot a^3}{6} = -419,41 + 2,4 \cdot 386,95 - \frac{150 \cdot 2,4^3}{6} - \frac{20 \cdot 2,4^4}{24} + \frac{235,92 \cdot 1,2^3}{6} = 237,94$ ;  
 $y_K = \frac{237,94}{EI_X}$ ;

сечение С ( $z=3a$ ):  $EI_X y_C = EI_X y_O + EI_X \theta_O \cdot 3a - \frac{F \cdot (3a)^3}{6} - \frac{q \cdot (3a)^4}{24} +$   
 $+\frac{R_A \cdot (2a)^3}{6} = -419,41 + 3,6 \cdot 386,95 - \frac{150 \cdot 3,6^3}{6} - \frac{20 \cdot 3,6^4}{24} + \frac{235,92 \cdot 2,4^3}{6} = 210,80$ ;  
 $y_C = \frac{210,80}{EI_X}$ ;

сечение N ( $z=4a$ ):  $EI_X y_N = EI_X y_O + EI_X \theta_O \cdot 4a - \frac{F \cdot (4a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4a)^4}{24} +$   
 $+\frac{R_A \cdot (3a)^3}{6} + \frac{M \cdot a^2}{2} + \frac{q \cdot a^4}{24} = -419,41 + 4,8 \cdot 386,95 - \frac{150 \cdot 4,8^3}{6} - \frac{20 \cdot 4,8^4}{24} +$   
 $+\frac{235,92 \cdot 3,6^3}{6} + \frac{70 \cdot 1,2^2}{2} + \frac{20 \cdot 1,2^4}{24} = 117,43$ ;  
 $y_N = \frac{117,43}{EI_X}$ ;

Эпюра прогибов построена на рис. 4г.

### 3. Проверяем балку на жесткость.

Проверим двутавр №45 с  $I_X = 27696 \text{ см}^4$

жесткость двутавра:  $EI_X = 2 \cdot 10^{11} \cdot 27696 \cdot 10^{-8} = 55392 \text{ кНм}^2$ ;

на консоли ОА

$$[f] = \frac{a}{100} = \frac{120}{100} = 1,2 \text{ см}; \quad y_O = \frac{419,41}{55392} = 0,76 \text{ см};$$

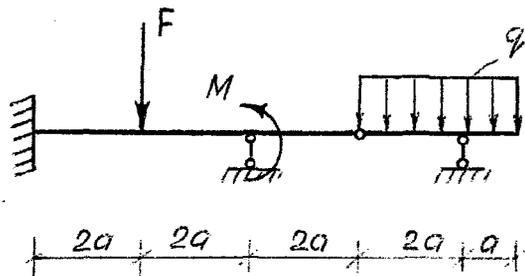
в пролете АВ

$$[f] = \frac{l}{500} = \frac{4a}{500} = \frac{480}{500} = 0,96 \text{ см}; \quad y_K = \frac{237,94}{55392} = 0,43 \text{ см};$$

Условия жесткости выполняются.

### ПРИМЕР 4

Дано: схема балки и нагрузка.



$a=1,0$  м;  
 $F=50$  кН;  
 $M=30$  кНм;  
 $q=10$  кН/м.

Требуется:

1. Раскрыть статическую неопределимость.
2. Построить эпюры  $Q$  и  $M$ .
3. Определить прогибы заданных сечений балки (сечения  $N$  и  $K$ ) и построить эпюру прогибов.

### Решение.

1. Раскроем статическую неопределимость балки.

Задача (балка) один раз статически неопределима, т.к. уравнений статики три, а неизвестных реакций четыре ( $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$ ).

Определяем опорные реакции.

Уравнения статики:  $\sum M_D = 0$ ;  $\sum M_B = 0$ ;  $\sum Y = 0$ .

Дополнительным уравнением будет  $Y_B = 0$ , т.е. прогиб на опоре  $B$  равен нулю. Определим  $R_C$ .

Рассмотрим часть балки  $DK$ . Для нее запишем  $\sum M_D = 0$ ;

$$-q \cdot 2a \cdot a + R_C \cdot 2a = 0,$$

откуда

$$R_C = \frac{2qa^2}{2a} = qa = 10 \cdot 1,0 = 10 \text{ кН}.$$

Для определения реакций  $R_A$  и  $M_A$  запишем два уравнения:

$$\sum M_B = 0; \quad M_A - R_A \cdot 4a + F \cdot 2a + M + R_C \cdot 4a - q \cdot 2a \cdot 3a = 0;$$

$$Y_B = 0; \quad -\frac{M_A \cdot (4a)^3}{2} + \frac{R_A \cdot (4a)^3}{6} - \frac{F \cdot (2a)^3}{6} = 0.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} M_A - 4R_A + 50 \cdot 2 \cdot 1,0 + 30 + 10 \cdot 4 \cdot 1,0 - 10 \cdot 6 \cdot 1,0 = 0; \\ -\frac{M_A \cdot 4^2}{2} + \frac{R_A \cdot 4^3}{6} - \frac{50 \cdot 2^3}{6} = 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} M_A - 4R_A = -110; \\ -8M_A + 10,67R_A = 66,67; \end{cases}$$

откуда получим:  $R_A = 38,13 \text{ кН}$ ;  $M_A = 42,52 \text{ кНм}$ .

Определяем  $R_B$ :

$$\sum Y = 0;$$

$$R_A + R_B - F - q \cdot 2a + R_C = 0;$$

$$R_B = -R_A + F + q \cdot 2a - R_C = -38,13 + 50 + 20 - 10 = 21,87 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum M_D = 0.$$

$$M_A - R_A \cdot 6a + F \cdot 4a + M - R_B \cdot 2a - q \cdot 2a^2 + R_C \cdot 2a = 42,52 - 38,13 \cdot 6 + 50 \cdot 4 + 30 - 21,87 \cdot 2 - 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 = 292,52 - 292,52 = 0.$$

Реакции определены верно.

2. Строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 5б, в).

$$Q_A = R_A = 38,13 \text{ кН}; \quad M_A = 42,52 \text{ кНм}; \quad Q_N^{ca} = R_A = 38,13 \text{ кН};$$

$$Q_N^{cp} = R_A - F = 38,13 - 50 = -11,87 \text{ кН};$$

$$M_N = -M_A + R_A \cdot 2a = -42,52 + 38,13 \cdot 2 = 33,74 \text{ кНм};$$

$$Q_B^{ca} = -11,87 \text{ кН}; \quad Q_B^{cp} = Q_B^{ca} + R_B = -11,87 + 21,87 = 10 \text{ кН};$$

$$M_B^{ca} = -M_A + R_A \cdot 4a - F \cdot 2a = -42,52 + 38,13 \cdot 4 - 50 \cdot 2 = 10 \text{ кНм};$$

$$M_B^{cp} = M_B^{ca} - M = 10 - 30 = -20 \text{ кНм};$$

$$Q_D = Q_B = 10 \text{ кН}; \quad M_D = 0; \quad Q_C = -R_C = -10 \text{ кН}; \quad M_C = 0.$$

На участке ДС эпюра  $M$  имеет максимум (т.к. есть точка, где  $Q=0$ ):

$$M_{\max} = R_C \cdot a - \frac{qa^2}{2} = 10 - \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 5 \text{ кНм}.$$

3. Определим прогибы в заданных сечениях и построим эпюру прогибов балки (рис. 5г).

Для участка СК запишем универсальное уравнение прогибов метода начальных параметров, учитывая, что начальные параметры ( $\theta_0$  и  $y_0$ ) равны нулю (зашемление).

Тогда

$$EI_{xy} yz = \alpha(z - 6a)EI_Y - \frac{M_A \cdot z^2}{2} + \frac{R_A \cdot z^3}{6} - \frac{F(z - 2a)^3}{6} - \frac{M(z - 4a)^2}{2} +$$

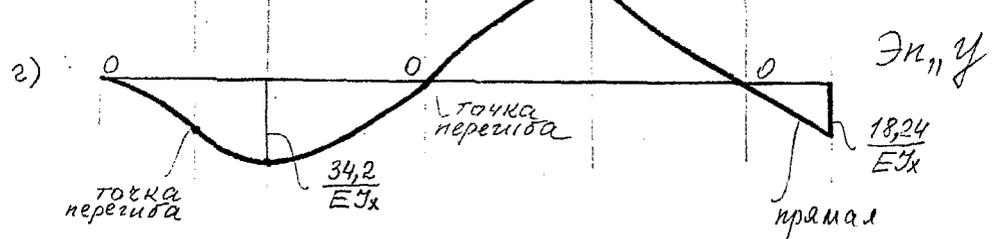
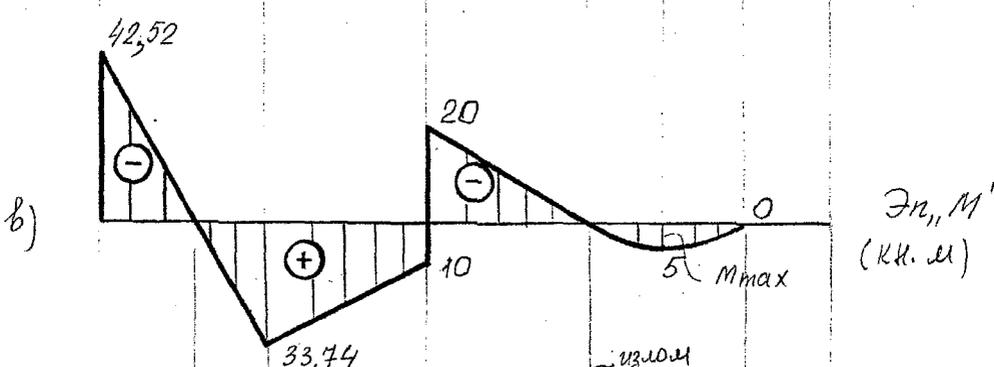
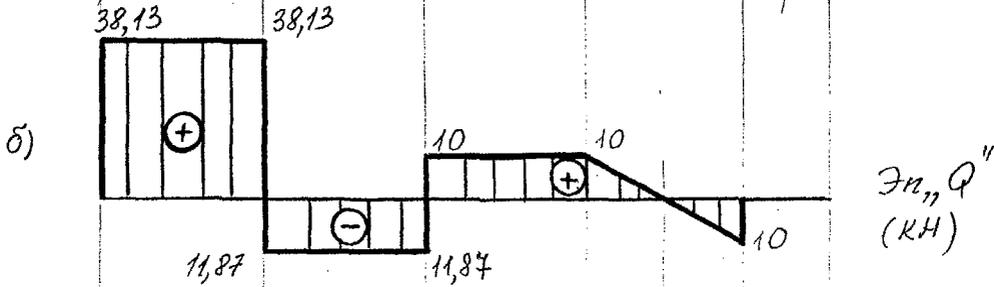
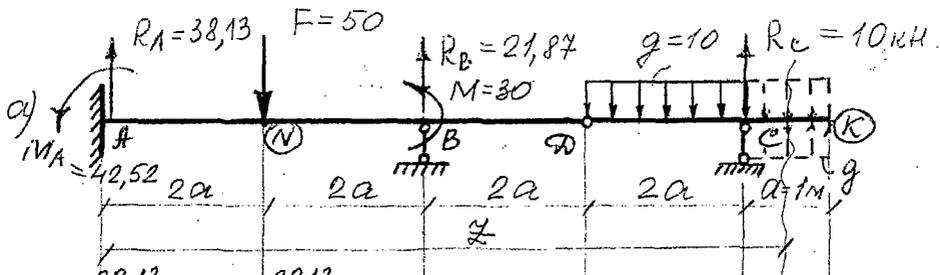


Рис. 5

$$+ \frac{R_B(z-4a)^3}{6} - \frac{q(z-6a)^4}{24} + \frac{R_C(z-8a)^3}{6} + \frac{q(z-8a)^4}{24};$$

где  $\alpha$  -- взаимный угол наклона сечений в шарнире Д.

При рассмотрении левой части балки от шарнира Д угол  $\alpha$  не учитывается.

Сечение N ( $z=2a$ ).

$$EI_X y_N = -\frac{M_A(2a)^2}{2} + \frac{R_A(2a)^3}{6} = -\frac{42,52 \cdot 2^2}{2} + \frac{38,13 \cdot 2^3}{6} = -34,2;$$

$$y_N = -\frac{34,2}{EI_X}.$$

Сечение K ( $z=9a$ ).

$$EI_X y_K = 3\alpha EI_X - \frac{M_A(9a)^2}{2} + \frac{R_A(9a)^3}{6} - \frac{F(7a)^3}{6} - \frac{M(5a)^3}{2} + \frac{R_B(5a)^3}{6} - \frac{q(3a)^4}{24} + \frac{R_C \cdot a^3}{6} + \frac{qa^4}{24};$$

Определяем  $\alpha$  из условия, что при  $z=8a$  прогиб на опоре С ( $y_C$ ) равен нулю.

$$EI_X y_C = 2\alpha EI_X - \frac{M_A(8a)^2}{2} + \frac{R_A(8a)^3}{6} - \frac{F(6a)^3}{6} - \frac{M(4a)^3}{2} + \frac{R_B(4a)^3}{6} - \frac{q(2a)^4}{24} = 0.$$

Откуда

$$2\alpha EI_X = \frac{42,52 \cdot 8^2}{2} - \frac{38,13 \cdot 8^3}{6} + \frac{50 \cdot 6^3}{6} + \frac{30 \cdot 4^2}{2} - \frac{21,87 \cdot 4^3}{6} + \frac{10 \cdot 2^4}{24} = -79,73;$$

$$\alpha EI_X = -39,87.$$

Тогда

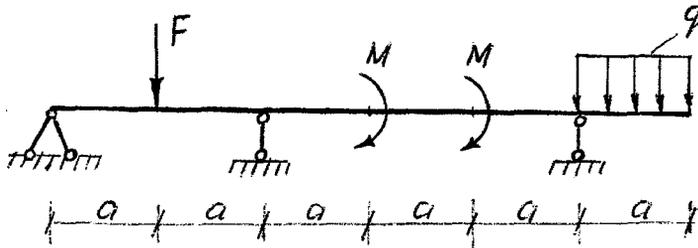
$$EI_X y_K = -119,6 - \frac{42,52 \cdot 9^2}{2} + \frac{38,13 \cdot 9^3}{6} - \frac{50 \cdot 7^3}{6} - \frac{30 \cdot 5^2}{2} + \frac{21,87 \cdot 5^3}{6} - \frac{10 \cdot 3^4}{24} + \frac{10 \cdot 1^3}{6} + \frac{10 \cdot 1^4}{24} = -18,24;$$

$$y_K = -\frac{18,24}{EI_X}.$$

Эпюра прогибов построена на рис. 5г.

### Пример 5

Дано: схема балки и нагрузка.



$a=1,0$  м;  
 $F=50$  кН;  
 $M=30$  кНм;  
 $q=10$  кН/м.

Требуется:

1. Раскрыть статическую неопределенность.
2. Построить эпюры Q и M.

### Решение.

Рассмотрим решение этой задачи тремя методами:

- метод сравнения деформаций;
- метод сил;
- метод уравнений трех моментов.

#### Метод сравнения деформаций (рис. 6)

1. Раскроем статическую неопределенность:

Балка один раз статически неопределима, т.е. неизвестных (опорных реакций) три, а уравнений статики два. Дополнительное уравнение будет представлять собой уравнение совместности деформаций.

Выберем основную систему (рис. 6б).

Прикладываем к основной системе неизвестную пока реакцию  $R_B$  и находим прогиб сечения B от этой силы (рис. 6в).

Воспользуемся методом начальных параметров.

Находим реакцию  $\bar{R}_A$ .

$$\sum M_C = 0: \quad -\bar{R}_A \cdot 5a + R_B \cdot 3a = 0,$$

откуда

$$\bar{R}_A = \frac{3}{5} R_B.$$

Уравнение прогиба в сечении B:

$$EI_K y_{B(\bar{R}_B)} = EI_K \theta_0 \cdot 2a - \frac{\bar{R}_A \cdot (2a)^3}{6} = EI_K \theta_0 \cdot 2a - \frac{3R_B \cdot (2a)^3}{5 \cdot 6}.$$

Находим  $\theta_0$ :  $EI_K \theta_0 = 0$ , тогда

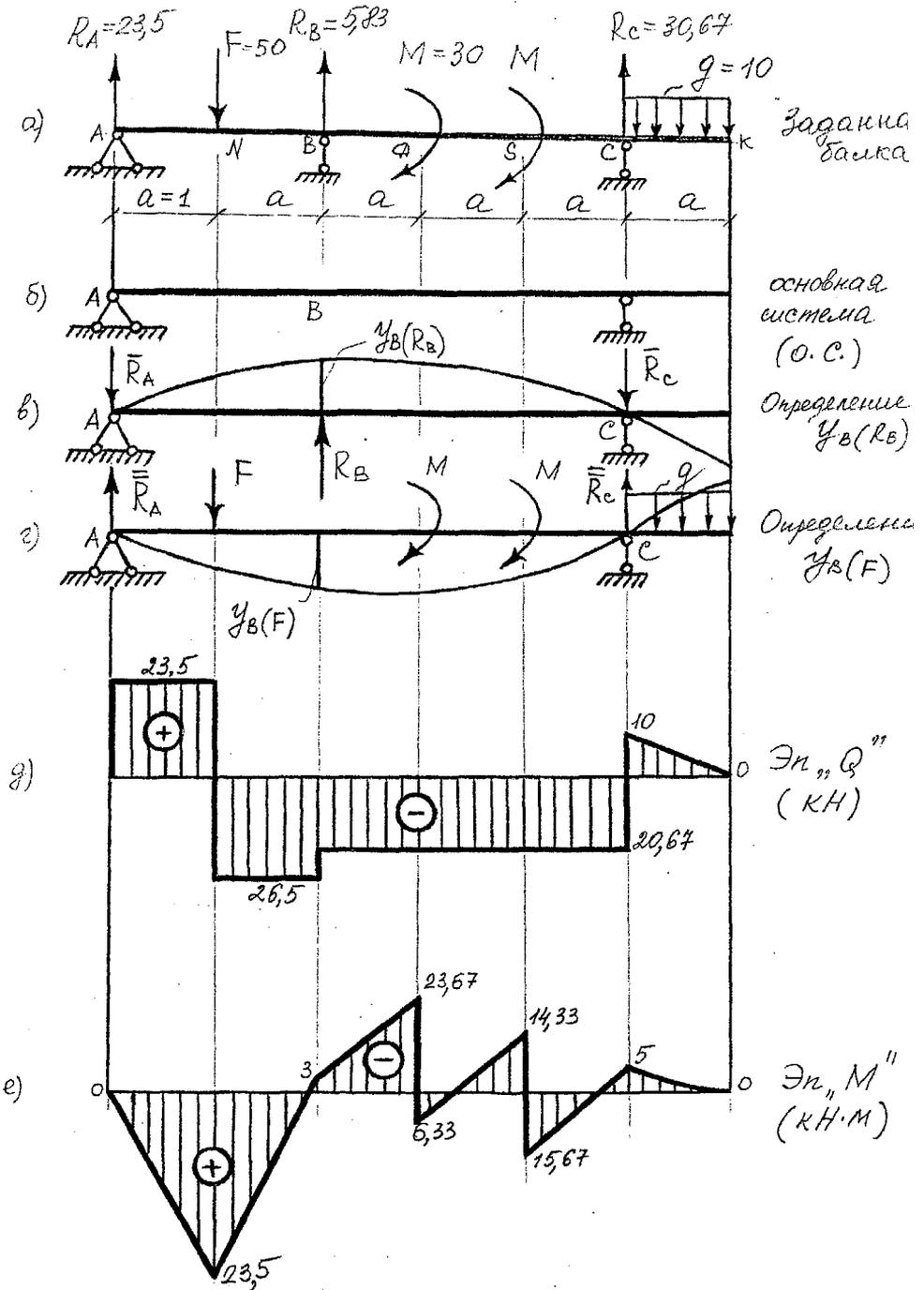


Рис. 6. Метод сравнения деформаций

$$EI_X y_C = EI_X \theta_O \cdot 5a - \frac{\bar{R}_A (5a)^3}{6} + \frac{R_B (3a)^3}{6} = 0;$$

$$EI_X \theta_O = \frac{3 \cdot R_B (5a)^3}{5a \cdot 5 \cdot 6} - \frac{R_B (3a)^3}{5a \cdot 6} = 1,6 R_B.$$

Прогиб сечения В будет

$$EI_X y_{B(R_B)} = 2 \cdot 1,6 R_B \cdot a - \frac{3 R_B (2a)^3}{5 \cdot 6} = 2,4 R_B a;$$

$$y_{B(R_B)} = \frac{2,4 R_B a}{EI_X}.$$

Прикладываем к основной системе (рис.6б) заданную нагрузку и находим прогиб сечения В от этой нагрузки (рис.6г).

Используем метод начальных параметров.

$$\sum M_C = 0; \quad \bar{R}_A \cdot 5a - F \cdot 4a + 2M + \frac{qa^2}{2} = 0;$$

$$\bar{R}_A = \frac{F \cdot 4a - 2M - \frac{qa^2}{2}}{5a} = \frac{50 \cdot 4 - 2 \cdot 30 - 5}{5} = 27 \text{ кН}.$$

Уравнение прогибов сечения В от нагрузки будет

$$EI_X y_{B(F)} = EI_X \theta_O \cdot 2a + \frac{\bar{R}_A (2a)^3}{6} - \frac{F \cdot a^3}{6};$$

определяем  $EI_X \theta_O$

$$EI_X y_C = EI_X \theta_O \cdot 5a + \frac{\bar{R}_A (5a)^3}{6} - \frac{F(4a)^3}{6} + \frac{M(2a)^2}{2} + \frac{Ma^2}{2} = 0;$$

$$EI_X \theta_O = -\frac{27 \cdot 5^3}{5 \cdot 6} + \frac{50 \cdot 4^3}{5 \cdot 6} - \frac{30 \cdot 2^2}{2} - \frac{30 \cdot 1^2}{2} = -20,83;$$

Тогда

$$EI_X y_{B(F)} = -2 \cdot 20,83 + \frac{27 \cdot 2^3}{6} - \frac{50 \cdot 1^3}{6} = -14,00;$$

$$y_{B(F)} = -\frac{14,00}{EI_X}.$$

Т.к. прогиб на опоре В отсутствует, то запишем

$$y_B = y_{B(R_B)} + y_{B(F)} = 0,$$

или

$$\frac{2,4R_B}{EI_X} - \frac{14,00}{EI_X} = 0; \quad R_B = \frac{14,00}{2,4} = 5,83 \text{ кН.}$$

Дальше балка рассчитывается как статически определимая.

2. Строим эпюры Q и M.

$$\sum M_C = 0; \quad R_A \cdot 5a - F \cdot 4a + R_B \cdot 3a + 2M + \frac{qa^2}{2} = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot 4a - R_B \cdot 3a - 2M - qa^2 / 2}{5a} = \frac{50 \cdot 4 - 5,83 \cdot 3 - 60 - 5}{5} = 23,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_C \cdot 5a - qa \cdot 5,5a - 2M + R_B \cdot 2a - F \cdot a = 0;$$

$$R_C = \frac{5,5qa^2 + F \cdot a - R_B \cdot 2a + 2M}{5a} = \frac{5,5 \cdot 10 + 50 - 5,83 \cdot 2 + 2 \cdot 30}{5} = 30,67 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_B + R_C - F - qa = 0$$

$$23,5 + 5,83 + 30,67 - 50 - 10 = 0$$

$$60 - 60 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Определяем Q и M характерных точек.

$$Q_A = R_A = 23,5 \text{ кН}; \quad M_A = 0;$$

$$Q_N^{сн} = R_A = 23,5 \text{ кН}; \quad Q_N^{срп} = 23,5 - 50 = -26,5 \text{ кН};$$

$$M_N = R_A \cdot a = 23,5 \cdot 1 = 23,5 \text{ кН};$$

$$Q_B^{сн} = -26,5 \text{ кН}; \quad Q_B^{срп} = -26,5 + 5,83 = -20,67 \text{ кН};$$

$$M_B = R_A \cdot 2a - F \cdot a = 23,5 \cdot 2 - 50 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad Q_D = Q_S = -30,67 \text{ кН};$$

$$M_D^{сн} = R_A \cdot 3a - F \cdot 2a + R_B \cdot a = 23,5 \cdot 3 - 50 \cdot 2 + 5,83 = -23,67 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D^{срп} = -23,67 + M = -23,67 + 30 = 6,33 \text{ кН};$$

$$M_S^{сн} = -1,5qa^2 + R_C \cdot a - M = 10 \cdot 1,5 + 30,67 - 30 = -14,33 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_S^{срп} = -1,5qa^2 + R_C \cdot a = -15 + 30,67 = 15,67 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_C^{сн} = qa - R_C = 10 - 30,67 = -20,67 \text{ кН}; \quad Q_C^{срп} = qa = 10 \text{ кН};$$

$$M_C = -\frac{qa^2}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad Q_K = 0; \quad M_K = 0.$$

Эпюры Q и M построены на рис. бд,е.

### Метод сил (рис. 7)

#### 1. Раскроем статическую неопределимость.

Выберем основную систему путем введения шарнира на опоре 1 (рис. 7б).

Приложим к основной системе заданную нагрузку и неизвестные моменты  $X_1$ , получим эквивалентную систему (рис. 7в).

Неизвестные опорные моменты  $X_1$  определяем из канонического уравнения метода сил:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0,$$

которое показывает, что на опоре 1 сечения не могут поворачиваться одно относительно другого и их взаимный угол поворота должен равняться нулю.

Для вычисления  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  нагружаем основную систему поочередно заданной нагрузкой (рис. 7г) и единичным моментом  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 7д) и строим грузовую (рис. 7е) и единичную (рис. 7ж) эпюры моментов.

Перемещения определяем по правилу Верещагина, т.е. путем перемножения эпюр.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1 \cdot 2a}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1 \cdot 2a}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{3EI} = \frac{1,67}{EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = & \frac{1}{EI} \left[ \frac{25 \cdot 2a}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{21,67a}{2} \left( 0,67 + \frac{1}{3} \cdot 0,33 \right) + \frac{8,33a}{2} \left( 0,543 + \frac{2}{3} \cdot 0,127 \right) - \right. \\ & - \frac{13,34 \cdot 0,62a}{2} \left( 0,33 + \frac{1}{3} \cdot 0,21 \right) + \frac{16,67 \cdot 0,77a}{2} \left( 0,08 + \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right) - \\ & \left. - \frac{5 \cdot 0,23a}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,08 \right] = \frac{1}{EI} (12,5 - 8,45 + 1,26 - 1,65 + 1,58 - 0,015) = \frac{5,225}{EI}; \end{aligned}$$

Находим  $X_1$

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = - \frac{5,225}{1,67} \approx -3 (\text{кН} \cdot \text{м}).$$

Знак минус показывает, что направление момента противоположно принятому.

#### 2. Строим эпюры Q и M.

После определения опорного момента опорные реакции в эквивалентной системе определяются из уравнений равновесия (рис. 7з).

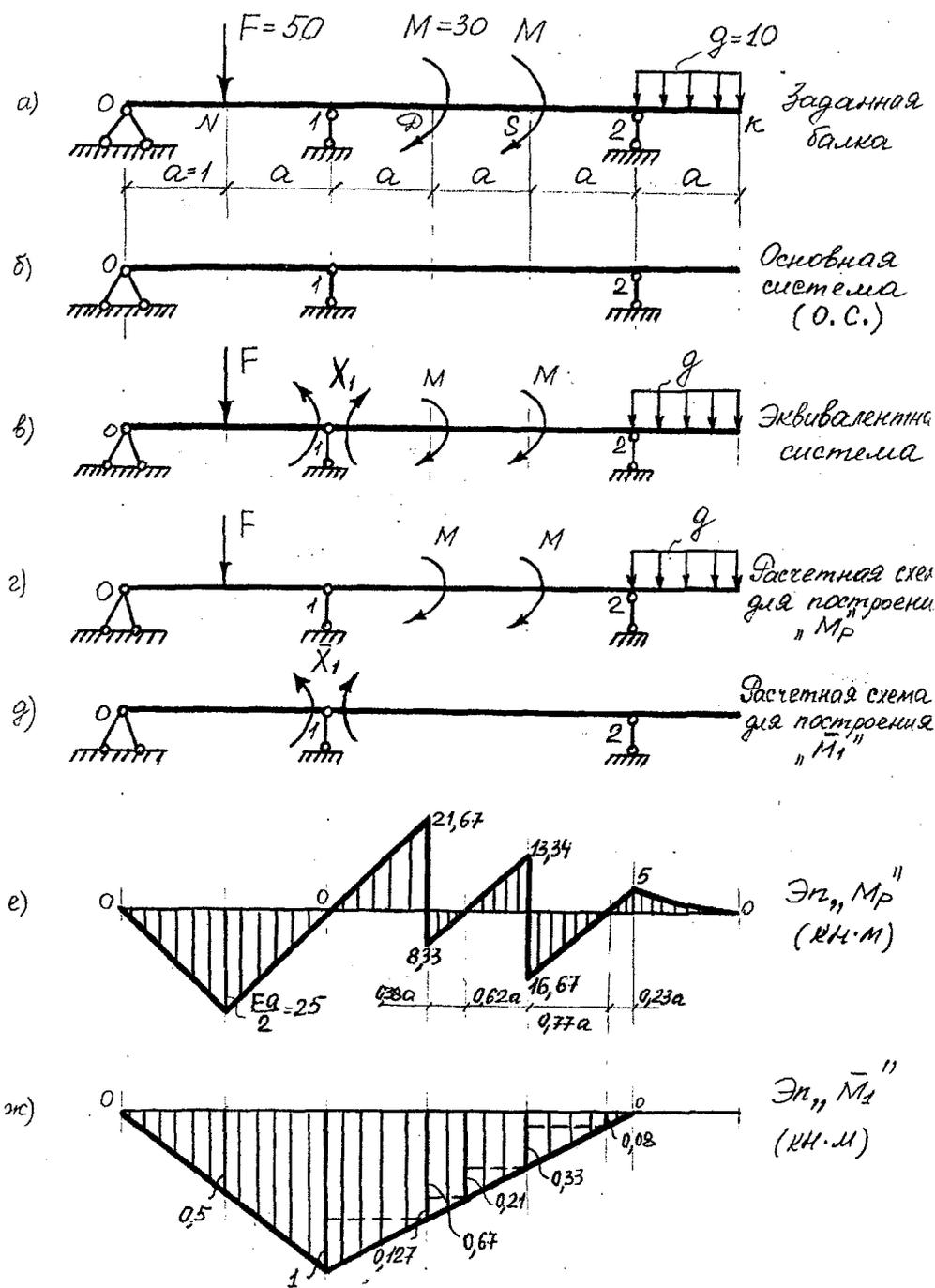


Рис. 7. Метод сил

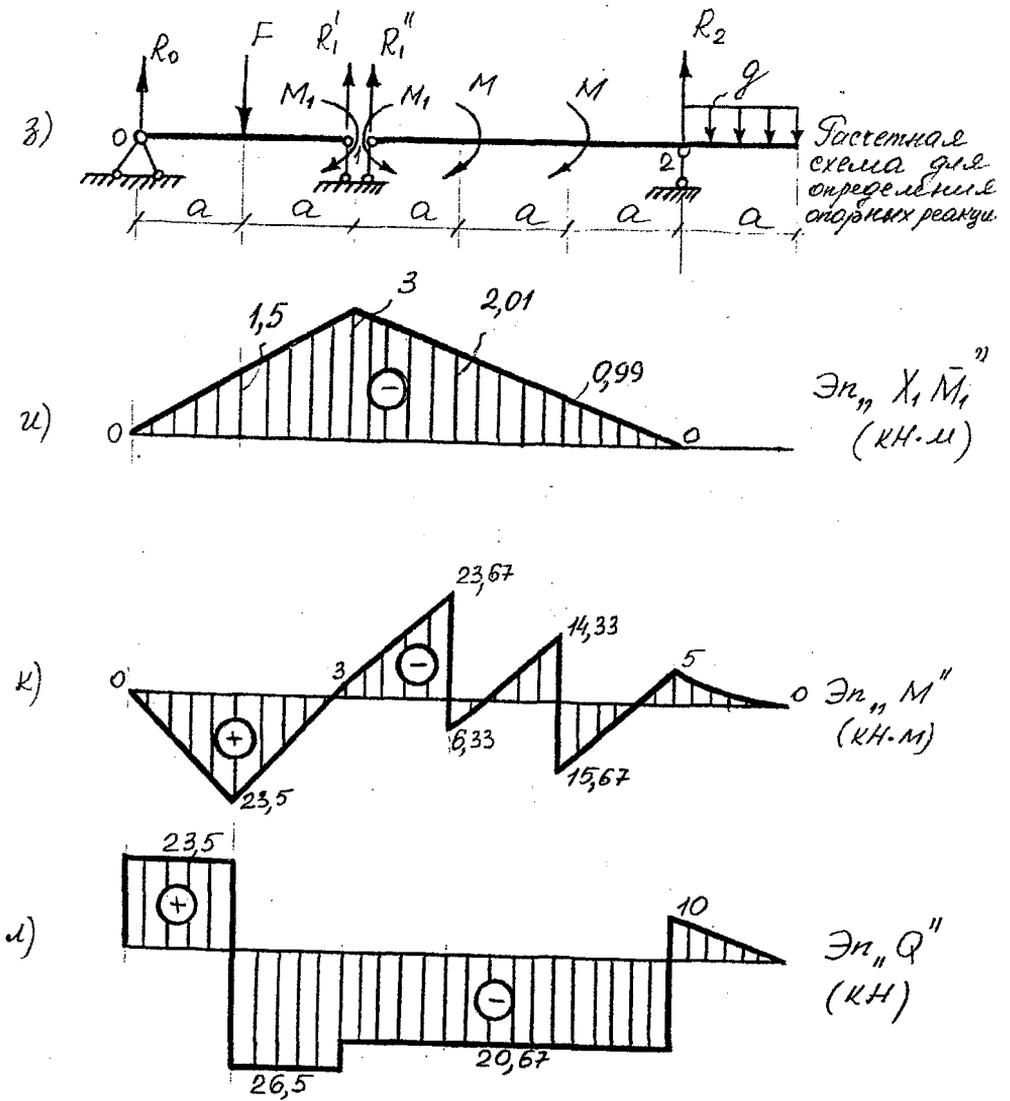


Рис. 7. Метод сил (продолжение)

$$\sum M_1 = 0; \quad R_0 \cdot 2a - F \cdot a + M_1 = 0;$$

$$R_0 = \frac{F \cdot a - M_1}{2a} = \frac{50 \cdot 1 - 3}{2} = 23,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_0 = 0; \quad R_1' \cdot 2a - Fa - M_1 = 0;$$

$$R_1' = \frac{F \cdot a + M_1}{2a} = \frac{50 \cdot 1 + 3}{2} = 26,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_2 = 0; \quad R_1'' \cdot 3a - M_1 + 2M + \frac{qa^2}{2} = 0;$$

$$R_1'' = \frac{M_1 - 2M - \frac{qa^2}{2}}{3a} = \frac{3 - 2 \cdot 30 - 5}{3} = -20,67 \text{ кН};$$

$$R_1 = R_1' + R_1'' = 26,5 - 20,67 = 5,83 \text{ кН};$$

$$\sum M_1 = 0; \quad R_2 \cdot 3a - qa \cdot 3,5a - 2M + M_1 = 0;$$

$$R_2 = \frac{q \cdot 3,5a^2 + 2M - M_1}{3a} = \frac{10 \cdot 3,5 + 2 \cdot 30 - 3}{3} = 30,67 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \sum y = 0; \quad R_0 + R_1 + R_2 - F - qa = 0;$$

$$23,5 + 5,83 + 30,67 - 50 - 10 = 0$$

$$60 - 60 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Эпюра Q построена обычным способом на рис. 7д.

Эпюра M строится по формуле:

$$M = M_P + X_1 \bar{M}_1;$$

т.е. путем суммирования грузовой (рис. 7е) и единичной, умноженной на опорный момент  $M_1$  (рис. 7и).

Окончательная эпюра M построена на рис. 7к.

### Метод уравнений трех моментов (рис. 8)

1. Раскроем статическую неопределенность.

Выберем основную систему (рис. 8б).

Обозначим опоры балки 0, 1, 2. Неизвестным является момент на опоре 1, т.е.  $M_1$ .

Строим эпюры  $M_0$  и  $Q_0$ , как для простых однопролетных балок (рис. 8в, д).

Запишем уравнение трех моментов для опоры 1.

$$2M_1 \cdot (2a + 3a) + M_2 \cdot 3a = -6R_1^{\Phi},$$

где

$$M_2 = -\frac{qa^2}{2} = -\frac{10 \cdot 1^2}{2} = -5 \text{ кНм},$$

$$R_1^{\Phi} = B_1^{\Phi} + A_2^{\Phi}.$$

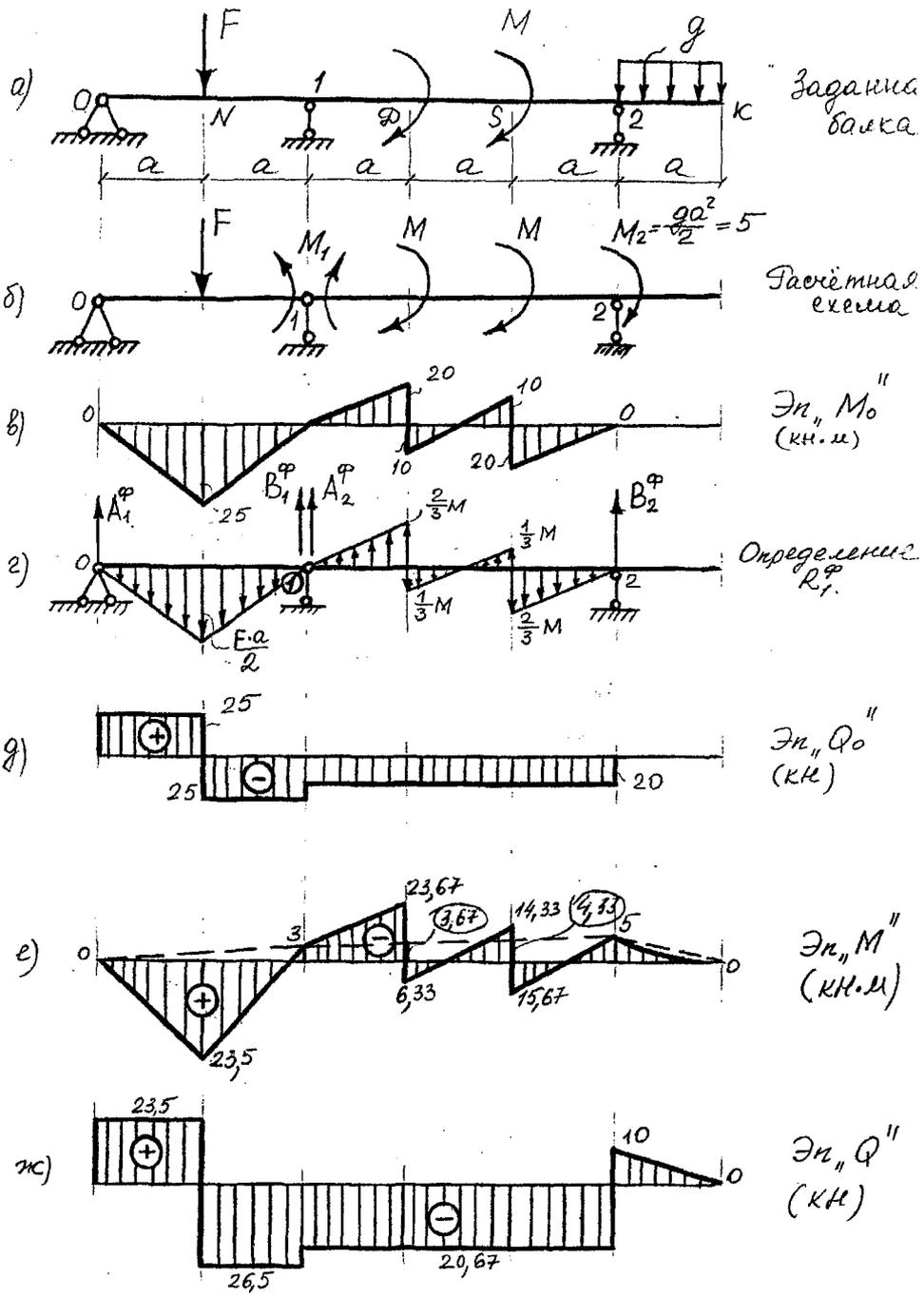


Рис. 8. Уравнение трех моментов

Определим фиктивные реакции  $B_1^\Phi$  и  $A_2^\Phi$ , рассматривая балки 0-1 и 1-2 (рис. 3г).

Определение  $B_1^\Phi$ :

$$\sum M_0 = 0; \quad B_1^\Phi \cdot 2a - \frac{F a^2}{2} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = 0;$$

$$B_1^\Phi = \frac{F a^2}{4} = \frac{50}{4} = 12.5.$$

Определение  $A_2^\Phi$ :

$$\sum M_2 = 0;$$

$$A_2^\Phi \cdot 3a + \frac{2}{3} M \frac{a}{2} \left( 2a + \frac{1}{3} a \right) - \frac{M}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} a + \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \right) + \frac{M}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( a + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \right) - \frac{2}{3} M \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} a = 0;$$

$$A_2^\Phi \cdot 3a + \frac{7Ma^2}{9} - \frac{11Ma^2}{72} + \frac{7Ma^2}{72} - \frac{2Ma^2}{9} = 0.$$

$$A_2^\Phi \cdot 3a + \frac{Ma^2}{2} = 0; \quad A_2^\Phi = -\frac{Ma}{6} = -\frac{30 \cdot 1}{6} = -5.$$

*Примечание:*

Выражения для  $B_1^\Phi$  и  $A_2^\Phi$  можно было взять из табл. 9.1, стр. 253-256 [Справочное пособие по сопротивлению материалов] под редакцией М.И. Руцаина. Минск 1970г.

$$10M_1 \cdot a - 5 \cdot 3a - 6 \cdot (12,5 \cdot 5);$$

$$M_1 = -\frac{30}{10} = -3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Моменты направлены в противоположную сторону, указанную на рис. 3б.

2. Строится эпюра опорных моментов. На рис. 3е она показана пунктиром.

В любом сечении  $z$  неразрезной балки моменты определяются по формуле (рис. 3е):

$$M_z = M_0 + \frac{M_n}{l_n} z + \frac{M_{n-1}}{l_n} (l_n - z).$$

Пролет 0-1: при  $z=0$ ;  $M_z = M_0 = 0$ ;

$$\text{при } z=a; \quad M_z = 25 + \frac{-3a}{2a} = 23,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } z=2a; \quad M_z = M_1 = -3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

пролет 1-2: при  $z=a$ ;  $M_z = M_0 + \frac{-5a}{3a} + \frac{-3 \cdot 2a}{3a} = M_0 - 3,67$ ;

$$M_{II}^{ca} = -20 - 3,67 = -23,67 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{II}^{cnp} = 10 - 3,67 = 6,33 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\text{при } z=2a; M_Z = M_O + \frac{-5 \cdot 2a}{3a} + \frac{3a}{3a} = M_O - 4,33;$$

$$M_S^{ca} = -10 - 4,33 = -14,33 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_S^{cnp} = 20 - 4,33 = 15,67 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке 2-К эпоры Q и M строятся как для консоли.

Эпюру M можно построить по формуле:

$$M = M_0 + M_{0n}.$$

Эпюру поперечных сил  $Q_Z$  строят по формуле (рис. 8ж):

$$Q_Z = Q_0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}.$$

Для первого пролета (0-1):

$$Q_Z = Q_0 + \frac{-3+0}{2a} = Q_0 - 1,5;$$

$$Q_0 = Q_N = 25 - 1,5 = 23,5 \text{ кН};$$

$$Q_N = Q_1 = -25 - 1,5 = -26,5 \text{ кН}.$$

Для второго пролета (1-2):

$$Q_Z = Q_0 + \frac{-5+3}{3a} = Q_0 - 0,67$$

$$Q = -20 - 0,67 = -20,67 \text{ кН}.$$

Опорные реакции определяются по эпюре Q по формуле:

$$R_n = Q_n^{np} - Q_n^{лев}$$

$$R_0 = 23,5 \text{ кН}; \quad R_1 = -20,67 + 26,5 = 5,83 \text{ кН};$$

$$R_2 = 10 + 20,67 = 30,67 \text{ кН}.$$

Проверка равновесия балки:

$$\sum y = 0; \quad R_0 + R_1 + R_2 - F - qa = 0;$$

$$23,5 + 5,83 + 30,67 - 50 - 10 = 0; \quad 60 = 60; \quad 0 = 0.$$

**Пример расчета внецентренно нагруженной  
каменной колонны (элемент 2)**

Дано:

Каменная колонна сложной формы подвергнута внецентренно-  
му сжатию. Допускаемые напряжения материала на сжатие  
[ $\sigma_c$ ]=5,8 Мпа; на растяжение [ $\sigma_p$ ]=1,1 Мпа.

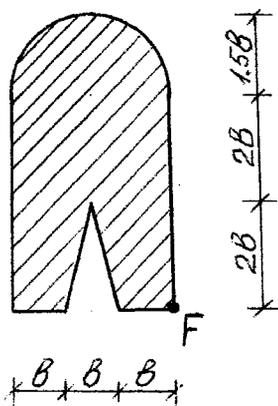
Общая нагрузка  $F_{(N)}$  равна:

$$F = F_T + kR_A$$

где  $F_T = 120$  кН;  $k = 1,2$ ;

$R_A = 80$  кН – реакция опоры "А" при расчете балок;

$\gamma = 23$  кН/м<sup>3</sup> – объемный вес материала колонны;  $h = 5$  м.



Требуется:

1. Определить геометрические характеристики поперечного сечения колонны.
2. Определить положение нулевой линии и опасных точек сечения.
3. Вычислить наибольшие сжимающее и растягивающее напряжения.
4. Подобрать размеры поперечного сечения из расчета на прочность.
5. Проверить прочность сечения с учетом собственного веса колонны.
6. Построить эпюры нормальных напряжений.
7. Построить и исследовать ядро сечения.

## Решение

1. Определяем геометрические характеристики поперечного сечения колонны.

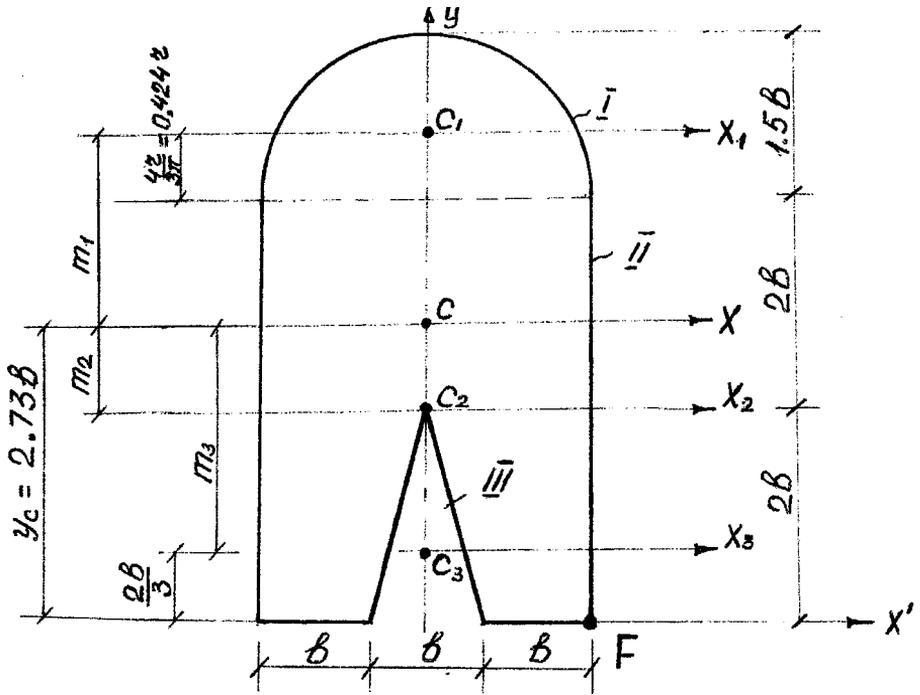


Рис. 1. Определение геометрических характеристик.

Находим положение центра тяжести сечения. Для этого проводим произвольно ось  $x'$  и находим координату центра тяжести  $y_c$  ( $x_c=0$ ; т.к. ось  $y$  является осью симметрии).

$$y_c = \frac{\sum S_{x'}}{\sum A}$$

где

$$\sum S_{x1} = S_{x1}^I + S_{x1}^{II} + S_{x1}^{III} = \frac{\pi(1,5b)^2}{2} (4b + 0,424 \cdot 1,5b) + 4b \cdot 3b \cdot 2b - \frac{2b \cdot b}{2} \cdot \frac{2b}{3} = 16,37b^3 + 24b^3 - 0,67b^3 = 39,7b^3;$$

$$\sum A = A^I + A^{II} + A^{III} = \frac{\pi(1,5b)^2}{2} + 12b^2 - b^2 = 14,53b^2;$$

тогда  
60

$$y_C = \frac{39,7b^3}{14,53b^2} = 2,73b.$$

Координаты центров тяжести отдельных элементов сечения относительно центральных осей  $x$ ;  $y$ .

$$m_1 = y_1 - y_C = 4,63b - 2,73b = 1,91b;$$

$$m_2 = y_2 - y_C = 2b - 2,73b = -0,73b;$$

$$m_3 = y_3 - y_C = 0,67b - 2,73b = -2,06b.$$

Проверим положение центра тяжести сечения.

$$\begin{aligned} S_X &= A^I \cdot m_1 + A^{II} \cdot m_2 + A^{III} \cdot m_3 = 3,53b^2 \cdot 1,91b + 12b^2(-0,73b) - b^2(-2,06b) = \\ &= 6,74b^3 - 8,76b^3 + 2,06b^3 = 0,04 \approx 0. \end{aligned}$$

Находим главные моменты инерции.

$$I_X = I_X^I + I_X^{II} + I_X^{III} = 0,11 \cdot (1,5b)^4 + A^I \cdot m_1^2 + \frac{3b(4b)^3}{12} + A^{II} \cdot m_2^2 + \frac{b(2b)^3}{36} +$$

$$+ A^{III} \cdot m_3^2 = 0,557b^4 + 3,53b^2(1,91b)^2 + 16b^4 + 12b^2 \cdot (-0,73b)^2 - 0,22b^4 -$$

$$- b^2 \cdot (-2,06b)^2 = 31,37b^4;$$

$$I_Y = I_Y^I + I_Y^{II} + I_Y^{III} = \frac{\pi(3b)^4}{128} + \frac{4b(3b)^3}{12} - \frac{b^3 \cdot 2b}{48} = 1,987b^4 + 9b^4 - 0,042b^4 = 10,95b^4.$$

Квадраты радиусов инерции сечения:

$$i_X^2 = \frac{I_X}{A} = \frac{31,37b^4}{14,53b^2} = 2,16b^2;$$

$$i_Y^2 = \frac{I_Y}{A} = \frac{10,95b^4}{14,53b^2} = 0,75b^2.$$

## 2. Определяем положение нулевой линии и опасных точек сечения.

Координаты точки приложения силы  $F$ :

$$x_F = 1,5b; \quad y_F = -2,73b.$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат:

$$a_X = -\frac{i_Y^2}{x_F} = -\frac{0,75b^2}{1,5b} = -0,5b;$$

$$a_Y = -\frac{i_X^2}{y_F} = \frac{2,16b^2}{2,73b} = 0,79b.$$

Наносим нулевую линию на чертеж (рис.3). Проведя касательные к сечению параллельно нулевой линии (н.л.), устанавливаем, что наиболее опасными будут точки "F" и "B".

3. В точке "F" будут наибольшие сжимающие напряжения, в точке "B" — наибольшие растягивающие напряжения. Напряжения в этих точках определяются по формулам:

$$\sigma_F = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F \cdot y_F}{i_X^2} + \frac{x_F \cdot x_F}{i_Y^2} \right);$$

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_B \cdot y_B}{i_X^2} + \frac{x_B \cdot x_B}{i_Y^2} \right);$$

где

$$F = 120 + 1,2 \cdot 80 = 216 \text{ кН};$$

$$x_F = 1,5b; \quad y_F = -2,73b;$$

$$x_B = -1,5b \cdot \cos \alpha = -1,5b \cdot 0,845 = -1,27b;$$

$$y_B = 4b - 2,73b + 1,5b \sin \alpha = 1,27b + 1,5b \cdot 0,534 = 2,07b;$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{a_X}{a_Y} \right| = \frac{0,5b}{0,79b} = 0,633; \quad \alpha = 32,33^\circ;$$

$$\cos \alpha = 0,845; \quad \sin \alpha = 0,534.$$

4. Определяем размеры поперечного сечения из расчета на прочность.

Т.к. материал колонны не одинаково сопротивляется деформации сжатия и растяжения, размеры сечения определяем из условия прочности на сжатие и условия прочности на растяжение. Из этих двух условий принимаем большее значение размеров.

Условие прочности на сжатие:

$$\sigma_F = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F^2}{i_X^2} + \frac{x_F^2}{i_Y^2} \right) \leq [\sigma_c],$$

откуда

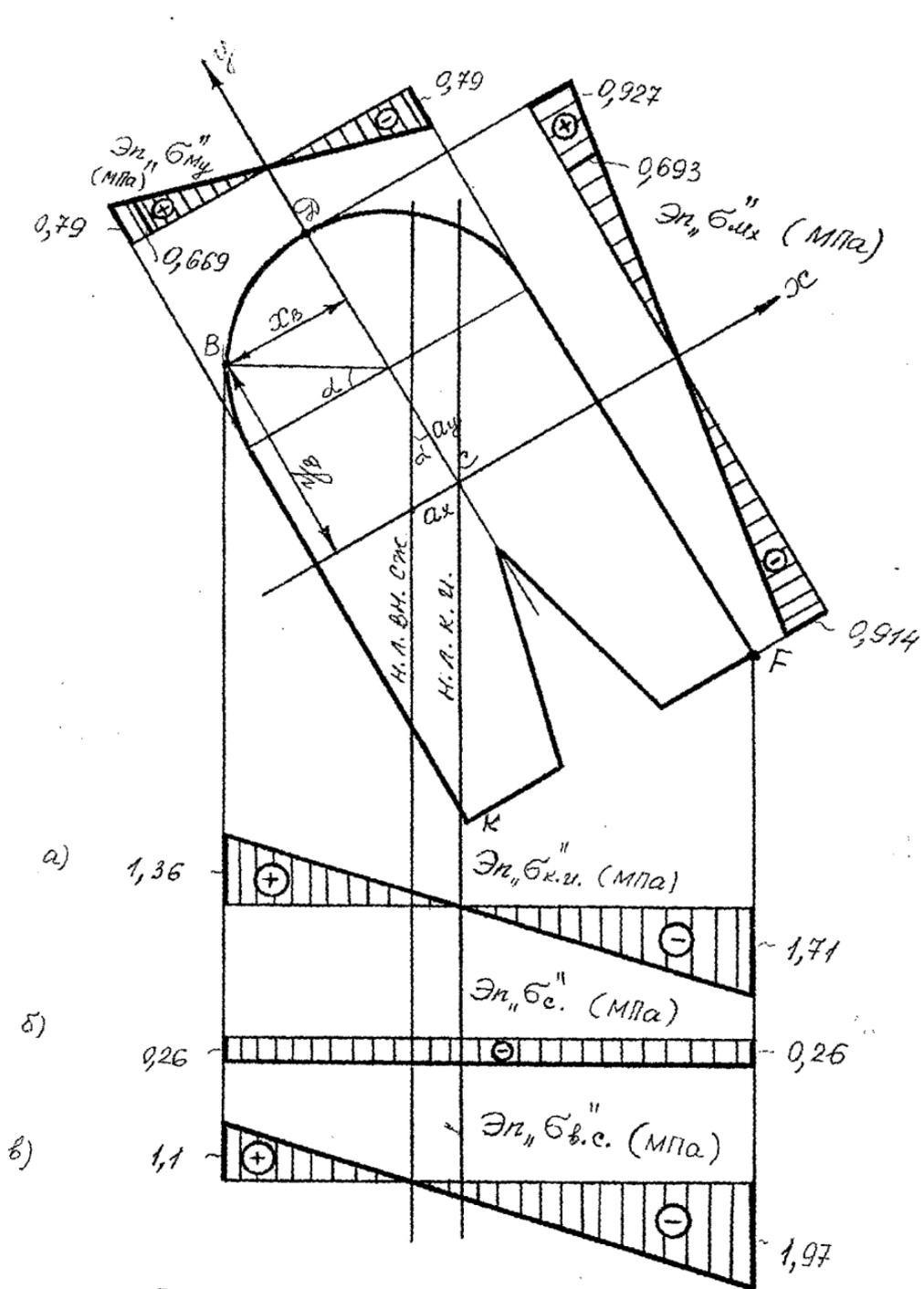


Рис. 3. Построение эпюр нормальных напряжений

$$-\frac{F}{14,53b^2} \left( 1 + \frac{(-2,73b)^2}{2,16b^2} + \frac{(1,5b)^2}{0,75b^2} \right) \leq [\sigma_c];$$

$$\frac{7,45F}{14,53b^2} \leq 5,8 \cdot 10^6; \quad b = \sqrt{\frac{0,513 \cdot 216 \cdot 10^3}{5,8 \cdot 10^6}} = 13,8 \text{ см.}$$

Условие прочности на растяжение:

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_B}{i_Y^2} + \frac{x_F x_B}{i_Y^2} \right) \leq [\sigma_p],$$

откуда

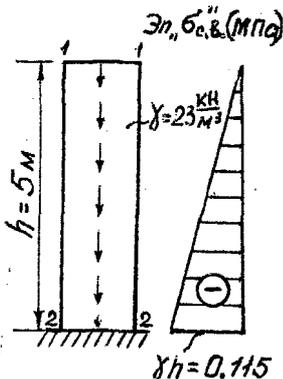
$$-\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{-2,73 \cdot 2,07b^2}{2,16b^2} + \frac{1,5 \cdot (-1,27)b^2}{0,75b^2} \right) \leq 11 \cdot 10^6;$$

$$\frac{4,156F}{14,53b^2} \leq 11 \cdot 10^6; \quad b = \sqrt{\frac{0,286 \cdot 216 \cdot 10^3}{11 \cdot 10^6}} = 23,7 \text{ см.}$$

Окончательно принимаем  $b=23,7$  см.

### 5. Проверяем прочность сечения с учетом собственного веса колонны.

Построим эпюру нормальных напряжений по высоте колонны от собственного веса.



По эпюре напряжений ( $\sigma_{с.в.}$ ) видно, что наибольшие сжимающие напряжения будут у основания колонны (сечение 2-2), а наибольшие растягивающие напряжения в верхней части (сечение 1-1).

Определяем напряжения в опасных точках сечения.

Рис.2. Эпюра напряжений от собственного веса.

### Сечение 1-1.

$$\sigma_F^{(1)} = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F^2}{i_X^2} + \frac{x_F^2}{i_Y^2} \right) = \frac{-216 \cdot 10^3}{14,53 \cdot 0,237^2} \left( 1 + \frac{(-2,73b)^2}{2,16b^2} + \frac{(1,5b)^2}{0,75b^2} \right) =$$
$$= -1,97 \text{ МПа} \langle [\sigma_C] = 5,8 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_B^{(1)} = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_B}{i_X^2} + \frac{x_F x_B}{i_Y^2} \right) = \frac{-216 \cdot 10^3}{14,53 \cdot 0,237^2} \cdot$$

$$\left( 1 + \frac{-2,73 \cdot 2,07b^2}{2,16b^2} + \frac{1,5 \cdot (-1,27)b^2}{0,75b^2} \right) = 1,1 \text{ МПа} = [\sigma_P] = 1,1 \text{ МПа}.$$

### Сечение 2-2

$$\sigma_F^{(2)} = \sigma_F^{(1)} + \sigma_{CB} = -1,97 - 0,115 = -2,08 \text{ МПа} \langle [\sigma_C];$$

$$\sigma_B^{(2)} = \sigma_B^{(1)} + \sigma_{CB} = 1,1 - 0,115 = 0,985 \text{ МПа} \langle [\sigma_P].$$

Вывод: Условия прочности выполняются.

Опасным является сечение 1-1.

### 6. Строим эпюры нормальных напряжений.

Эпюры нормальных напряжений строим от прямых изгибов относительно осей  $x, y$ . Величина напряжений от моментов  $M_x = Fy_F$ ;  $M_y = Fx_F$  в точках F, K, B, D определяем по формулам:

$$\sigma_{M_x}^F = -\frac{Fy_F y_F}{I_X} = -\frac{216 \cdot 10^3 \cdot (-2,73)^2 \cdot 0,237^2}{31,37 \cdot 0,237^4} = -0,914 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_x}^D = -\frac{Fy_F y_D}{I_X} = -\frac{216 \cdot 10^3 \cdot (-2,73) \cdot 2,77 \cdot 0,237^2}{31,37 \cdot 0,237^4} = 0,927 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_x}^B = -\frac{Fy_F y_B}{I_X} = -\frac{216 \cdot 10^3 \cdot (-2,73) \cdot 2,07 \cdot 0,237^2}{31,37 \cdot 0,237^4} = 0,693 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_y}^F = -\frac{F x_F x_F}{I_Y} = -\frac{216 \cdot 10^3 \cdot (1,5) \cdot 1,5 \cdot 0,237^2}{10,95 \cdot 0,237^4} = -0,79 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_y}^K = -\frac{F x_F x_K}{I_Y} = -\frac{216 \cdot 10^3 \cdot (-1,5) \cdot 1,5 \cdot 0,237^2}{10,95 \cdot 0,237^4} = 0,79 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_y}^B = -\frac{F x_F x_B}{I_Y} = -\frac{216 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot (-1,27) \cdot 0,237^2}{10,95 \cdot 0,237^4} = 0,669 \text{ МПа}.$$

Складывая ординаты эпюр  $\sigma_{M_x}$ ,  $\sigma_{M_y}$ , строим эпюру косоуго изгиба (рис. 3а).

Нулевая линия косоугольного изгиба проходит через ц.т. сечения и параллельна н.л. внецентренного сжатия.

Строим эпюру нормальных напряжений от центрального сжатия по формуле:

$$\sigma_C = -\frac{F}{A} = -\frac{216 \cdot 10^3}{14,53 \cdot 0,237^2} = -0,26 \text{ (МПа)}$$

(см. рис.36).

Складывая эпюры  $\sigma_{кл}$  и  $\sigma_C$ , получим эпюру внецентренного сжатия (рис.3в).

7. Строим и исследуем ядро сечения.

Проводим нулевую линию (н.л.) 1-1 (рис.4).

Отрезки, отсекаемые н.л. на осях координат:

$$a_X = \infty; \quad a_Y = -2,73b.$$

Координаты точки приложения силы (т.1):

$$x_F = -\frac{i_Y^2}{a_X} = 0;$$

$$y_F = -\frac{i_X^2}{a_Y} = \frac{2,16b^2}{2,73b} = 0,79b = 0,79 \cdot 0,237 = 18,7 \text{ см.}$$

Проводим н.л. 2-2:

$$a_X = -1,5b; \quad a_Y = \infty.$$

Координаты точки приложения силы (т.2):

$$x_F = -\frac{i_Y^2}{a_X} = -\frac{0,75b^2}{1,5b} = 0,5b = 0,5 \cdot 0,237 = 11,85 \text{ см.}$$

$$y_F = \frac{i_X^2}{a_Y} = 0.$$

Проводим н.л. 3-3:

$$a_X = \infty; \quad a_Y = 2,77b.$$

Координаты точки приложения силы (т.3):

$$x_F = -\frac{i_Y^2}{a_X} = 0;$$

$$y_F = -\frac{i_X^2}{a_Y} = -\frac{2,16b^2}{2,77b} = -0,78b = -0,78 \cdot 0,237 = -18,5 \text{ см.}$$

Проводим н.л. 4-4:

$$a_X = 1,5b; \quad a_Y = \infty.$$

Координаты точки приложения силы (т.4):

$$x_F = -\frac{i_y^2}{a_x} = -\frac{0,75b^2}{1,5b} = -0,5b = -0,5 \cdot 0,237 = -11,85 \text{ см},$$

$$y_F = -\frac{i_x^2}{a_y} = 0.$$

Соединяем координаты точек ядра прямыми и кривой линиями, получаем ядро сечения (рис. 4).

Исследуем ядро сечения.

а) Приложим силу в ц.т. сечения (г. "С").

$$\sigma = -\frac{F}{A} = -\frac{216 \cdot 10^3}{14,53 \cdot 0,237^2} = -0,26 \text{ МПа}.$$

б) Приложим силу в точке "а" (в ядре сечения). При этом  $x_F=0,25b$ ,  $y_F=0$ .

Напряжения в крайних точках z и N будут:

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_z}{i_y^2} \right) = -\frac{216 \cdot 10^3}{14,53 \cdot 0,237^2} \left( 1 + \frac{0,25 \cdot (-1,5)b^2}{0,75b^2} \right) = -0,13 \text{ МПа};$$

$$\sigma_N = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_N}{i_y^2} \right) = -\frac{216 \cdot 10^3}{14,53 \cdot 0,237^2} \left( 1 + \frac{0,25 \cdot 1,5b^2}{0,75b^2} \right) = -0,39 \text{ МПа}.$$

в) Приложим силу в точке "2" (на границе ядра сечения);  $x_F=0,5b$ ;  $y_F=0$ .

Напряжения будут:

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_z}{i_y^2} \right) = -\frac{216 \cdot 10^3}{14,53 \cdot 0,237^2} \left( 1 + \frac{0,5 \cdot (-1,5)b^2}{0,75b^2} \right) = 0;$$

$$\sigma_N = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_N}{i_y^2} \right) = -\frac{216 \cdot 10^3}{14,53 \cdot 0,237^2} \left( 1 + \frac{0,5 \cdot 1,5b^2}{0,75b^2} \right) = -0,52 \text{ МПа}.$$

г) Приложим силу в точке "d" (за ядром сечения).

$x_F = b$ ;  $y_F = 0$

Напряжения будут:

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_z}{i_y^2} \right) = -\frac{216 \cdot 10^3}{14,53 \cdot 0,237^2} \left( 1 + \frac{-1,5b^2}{0,75b^2} \right) = 0,26 \text{ МПа};$$

$$\sigma_N = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_N}{i_y^2} \right) = -\frac{216 \cdot 10^3}{14,53 \cdot 0,237^2} \left( 1 + \frac{1,5b^2}{0,75b^2} \right) = -0,52 \text{ МПа}.$$

Эпюры напряжений построены на рис. 4а, б, в, г.

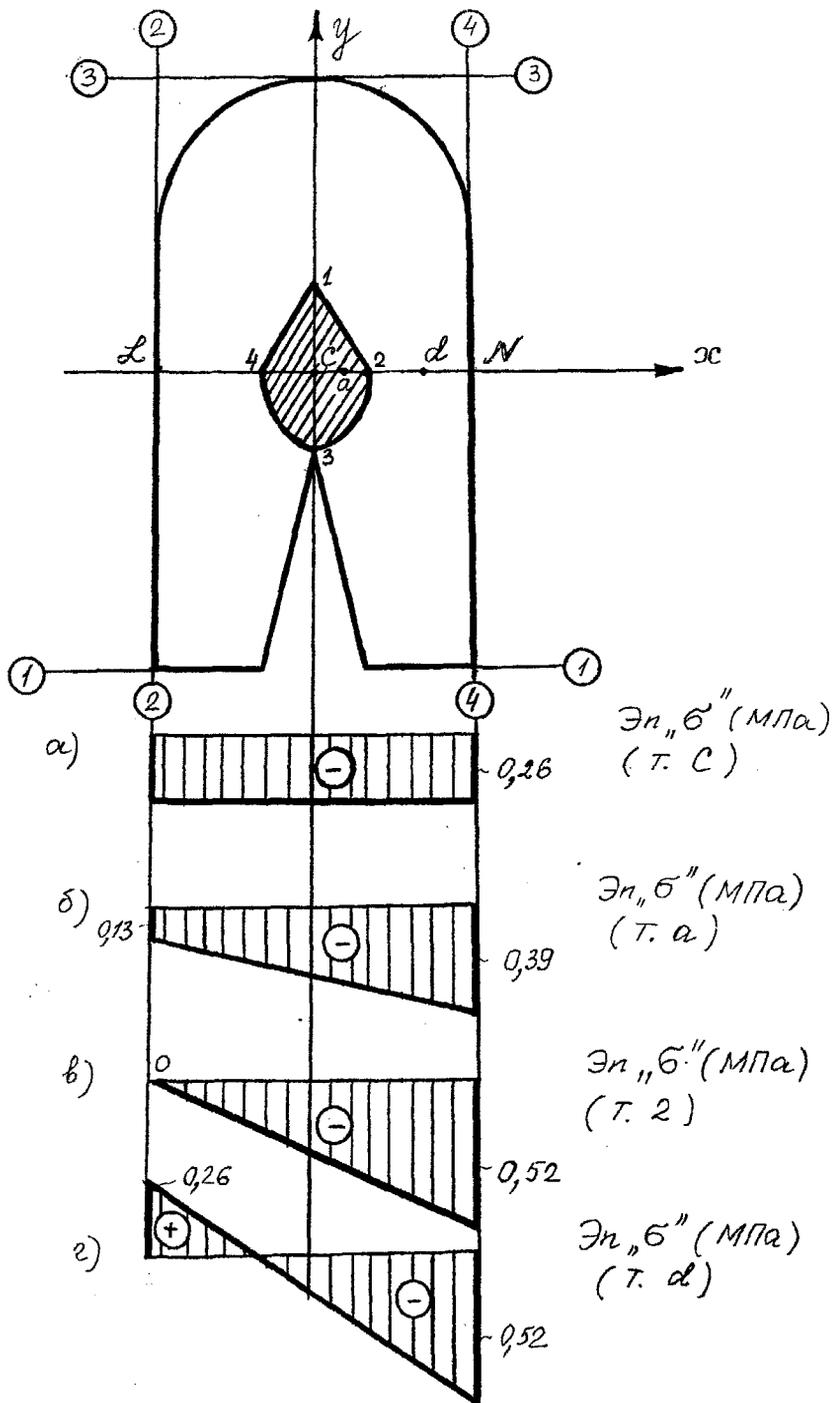


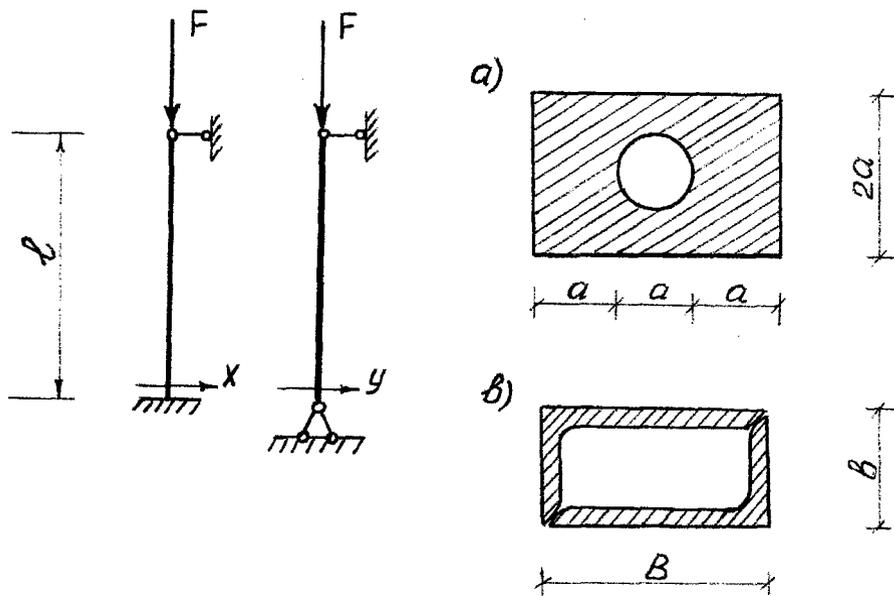
Рис.9. Построение и исследование ядра сечения

**Пример расчета центрально сжатой металлической стойки на устойчивость**

(элемент 3)

**Дано:** Стальная стойка длиной  $l$  нагружена продольной сжимающей нагрузкой  $F$  от воздействия вышележащих конструкций (элемент 1). Допускаемое напряжение материала стойки  $[\sigma] = 160$  МПа.

Модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа; длина стойки  $l = 5$  м; сжимающая сила  $F = 235$  кН.



Требуется:

1. Подобрать размеры поперечного сечения стоек по двум вариантам.
2. Сравнить полученные стойки по весу и принять наиболее рациональную.
3. Определить критическую силу для принятой стойки.
4. Найти коэффициент запаса устойчивости.

**Решение**

1. Подбираем размеры поперечного сечения стойки.

*Вариант "а":*

Расположим сечение стойки таким образом, чтобы его несущая способность была максимальной. Для этого нужно, чтобы гибкость стержня была наименьшей.

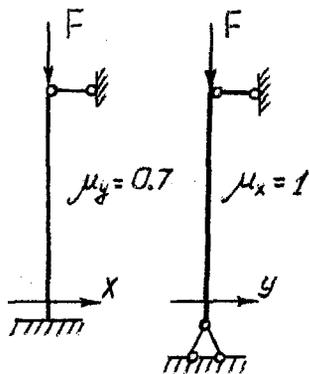


Рис. 1. Схема закрепления стойки.

Площадь сечения:

$$A = 6a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = 5,215a^2.$$

Осевые моменты инерции сечения:

$$I_X = \frac{2a(3a)^3}{12} - \frac{\pi a^4}{64} = 4,451a^4;$$

$$I_Y = \frac{3a(2a)^3}{12} - \frac{\pi a^4}{64} = 1,951a^4.$$

Радиусы инерции:

$$i_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{4,451a^4}{5,215a^2}} = 0,924a;$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{1,951a^4}{5,215a^2}} = 0,612a.$$

Гибкость стержня:

$$(1) \begin{cases} \lambda_X = \frac{\mu_X l}{i_X} = \frac{1 \cdot 500}{0,924a} = \frac{541}{a}; \\ \lambda_Y = \frac{\mu_Y l}{i_Y} = \frac{0,7 \cdot 500}{0,612a} = \frac{572}{a}. \end{cases}$$

Развернем (повернем) сечение на  $90^\circ$ , тогда

$$i_X = 0,612a; \quad i_Y = 0,924a.$$

Гибкость стержня:

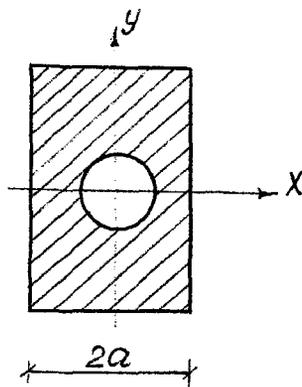


Рис. 2. Схема сечения

$$(2) \begin{cases} \lambda_{\perp} = \frac{\mu_{\perp} l}{i_{\perp}} = \frac{1 \cdot 500}{0,612a} = \frac{817}{a}; \\ \lambda_{\parallel} = \frac{\mu_{\parallel} l}{i_{\parallel}} = \frac{0,7 \cdot 500}{0,924a} = \frac{379}{a}. \end{cases}$$

Сравнивая (1) и (2) видим, что сечение будет более устойчиво, если оно расположено, как показано на рис. 2, т.е. случай (1).

Используя условие устойчивости и метод последовательных приближений, определим размеры сечения стойки.

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma].$$

Первое приближение:  $\varphi_1 = 0,5$

Площадь сечения:

$$A = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{235 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 29,375 \text{ см}^2.$$

Размеры сечения:

$$a = \sqrt{\frac{A}{5,215}} = \sqrt{\frac{29,375}{5,215}} = 2,37 \text{ см.}$$

Минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = i_y = 0,612a = 0,612 \cdot 2,27 = 1,45 \text{ см.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 500}{1,45} = \frac{350}{1,45} = 240 > 220.$$

Второе приближение:  $\varphi_2 = 0,2$

$$A = \frac{F}{\varphi_2[\sigma]} = \frac{235 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 160 \cdot 10^6} = 73,44 \text{ см}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{5,215}} = \sqrt{\frac{73,44}{5,215}} = 3,75 \text{ см.}$$

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{350}{2,3} = 152.$$

По таблице 7 принимаем

$$\varphi_2^* = \varphi_{150} - \frac{\varphi_{150} - \varphi_{160}}{10} \cdot 2 = 0,305 - \frac{0,305 - 0,27}{10} \cdot 2 = 0,298 > 0,2.$$

Третье приближение:  $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^*}{2} = \frac{0,2 + 0,298}{2} = 0,25$

$$A = \frac{F}{\varphi_3[\sigma]} = \frac{235 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 160 \cdot 10^6} = 58,75 \text{ см}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{5,215}} = \sqrt{\frac{58,75}{5,215}} = 3,36 \text{ см};$$

$$i_y = 0,612 \cdot 3,36 = 2,05 \text{ см};$$

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{350}{2,05} = 170.$$

По таблице  $\varphi$  находим  $\varphi_3^* = 0,24 \approx \varphi_3 = 0,25$

Проверим прочность:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_3^* A} = \frac{235 \cdot 10^3}{0,24 \cdot 58,87 \cdot 10^{-4}} = 166,3 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{166,3 - 160}{160} \cdot 100\% = 3,94\% < 5\%,$$

что допустимо.

Окончательно принимаем  $a = 3,36 \text{ см}; A = 5,215 \cdot 3,36^2 = 58,87 \text{ см}^2$ .

Вариант "б"

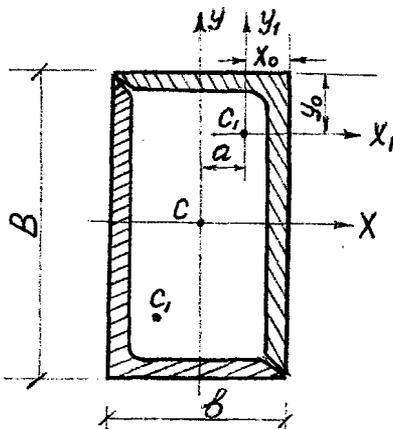


Рис. 3. Схема составного сечения.

Первое приближение:  $\varphi_1 = 0,5$

$$A = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{235 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 29,375 \text{ см}^2.$$

По сортаменту для неравнобоких уголков ГОСТ 8510-72 принимаем два неравнобоких уголка  $125 \times 80 \times 7$ .

$$A_1 = 14,1 \text{ см}^2; \quad A = 2 \cdot 14,1 = 28,2 \text{ см}^2; \quad I_{Y1} = 73,7 \text{ см}^4;$$

$$x_0 = 1,8 \text{ см}; \quad b = 8,0 \text{ см}.$$

Определяем геометрические характеристики сечения.

$$I_y = 2 \left[ I_{T1} + (b - x_0)^2 A_1 \right] = 2 \left[ 73,7 + (8 - 1,8)^2 \cdot 14,1 \right] = 1231 \text{ см}^4.$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1231}{28,2}} = 6,61 \text{ см.}$$

$$\lambda_y = \frac{\mu_y \cdot l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 500}{6,61} = 53$$

По таблице 7 для  $\lambda_y = 53$  находим

$$\varphi_{53} = \varphi_{50} - \frac{\varphi_{50} - \varphi_{60}}{10} \cdot 3 = 0,867 - \frac{0,867 - 0,82}{10} \cdot 2 = 0,858 >> 0,5;$$

$$\varphi_1^* = 0,858$$

Второе приближение:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,858}{2} = 0,68;$$

$$A = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{235 \cdot 10^3}{0,68 \cdot 160 \cdot 10^3} = 21,6 \text{ см}^2.$$

Принимаем 2L100×63×7.

$$A_1 = 11,1 \text{ см}^2; \quad A = 22,2 \text{ см}^2; \quad I_{T1} = 35 \text{ см}^4;$$

$$x_0 = 1,46 \text{ см}, \quad b = 6,3 \text{ см.}$$

Определяем геометрические характеристики сечения.

$$I_y = 2 \left[ I_{T1} + (b - x_0)^2 A_1 \right] = 2 \left[ 35 + (6,3 - 1,46)^2 \cdot 11,1 \right] = 599 \text{ см}^4.$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{599}{22,2}} = 5,19 \text{ см.}$$

$$\lambda_y = \frac{300}{5,19} = 67,4.$$

$$\varphi_{67,4} = \varphi_{60} - \frac{\varphi_{60} - \varphi_{70}}{10} \cdot 7,4 = 0,82 - \frac{0,82 - 0,77}{10} \cdot 7,4 = 0,783 > \varphi_2 = 0,68.$$

$$\varphi_2^* = 0,783.$$

Третье приближение:  $\varphi_3 = \frac{0,68 + 0,78}{2} = 0,73.$

$$A = \frac{235 \cdot 10^3}{0,73 \cdot 160 \cdot 10^3} = 20,1 \text{ см}^2.$$

Принимаем 2L100×63×6.

$$A_1 = 9,59 \text{ см}^2; \quad A = 19,18 \text{ см}^2; \quad I_{Y1} = 30,6 \text{ см}^4;$$

$$x_0 = 1,42 \text{ см} \quad b = 6,3 \text{ см}$$

Определяем геометрические характеристики сечения.

$$I_y = 2 \left[ I_{Y1} + (b - x_0)^2 \cdot A_1 \right] = 2 \left[ 30,6 + (6,3 - 1,42)^2 \cdot 9,59 \right] = 518 \text{ см}^4.$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{518}{19,18}} = 5,2 \text{ см}; \quad \lambda_y = \frac{350}{5,2} = 67,3;$$

$\varphi_{67,3} = \varphi_{67,4}$  (см. второе приближение).

Тогда  $\varphi_3^* = 0,78 \approx 0,73 = \varphi_3$ .

Проверим прочность

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_3^* \cdot A} = \frac{235 \cdot 10^3}{0,78 \cdot 19,18 \cdot 10^{-4}} = 157 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

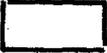
Перенапряжение составляет

$$\frac{157 - 160}{160} \cdot 100\% = -1,9\% < 5\%.$$

Окончательно принимаем 2L100×63×6,  $A = 19,18 \text{ см}^2$

## 2. Сравним полученные стойки по весу (см. таблицу 6)

Удельный вес стали:  $\gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3$ .

Конструктивное решение стойки	Вес 1 м.п. стойки (кг)	Длина стойки (м)	Расход металла (кг)	Примечание
1	2	3	4	5
	46,21	5	231	
	15,06	5	75,3	

Наиболее рациональной будет стойка составного поперечного сечения.

## 3. Определяем критическую силу для составной стойки.

Для принятой стойки  $\lambda_y = 67,3 < \lambda_{кр} = 100$ , следовательно, для определения критической силы используем формулу Ясинского.

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 67,3 = 233,3 \text{ МПа};$$

тогда

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 233,3 \cdot 10^6 \cdot 19,18 \cdot 10^{-4} = 447 \text{ кН}.$$

4. Определим коэффициент запаса устойчивости.

Коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{кр.}}{F} = \frac{447}{235} = 1,9.$$

### *Литература*

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов.-15-е изд. М., Наука, 1976.-607с.
2. Смирнов А.Ф. и др. Сопротивление материалов. 3-е изд. М.: Высшая школа, 1975.-480с.
3. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов.-5-е изд. -К.Вища школа. Головное изд. 1986-775с.
4. Рудицын М.Н. и др. Справочное пособие по сопротивлению материалов. - 3-е изд.-Минск, Вышэйшая школа, 1970.-630с.
5. Любошин М.И., Ишкович Г.М. Справочник по сопротивлению материалов.- 2-е изд.- Минск. Вышэйшая школа. 1969.-464с.
6. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов.-2-е изд.- К.Будівельник. 1982.-280с.
7. Методические указания к выполнению расчетно-проектировочной работы: "Построение эпюр внутренних силовых факторов в стержнях" (Сост. Михалок Н.С. и др.) -Брест, БИСИ, 1990-27с.
8. Методические указания к расчетно-проектировочной работе по сопротивлению материалов "Расчет колонны на внецентренное сжатие" (Сост. Михалок Н.С. и др.)-Брест, БПИ, 1993-14с.
9. Методические указания "Расчет сжатых стержней на устойчивость при продольном изгибе" (Сост. Михалок Н.С. и др.)-Брест, БПИ, 1992-22с.

# УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

Мартиновский Владимир Леонидович  
Хвисевич Виталий Михайлович

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению курсовой работы  
по дисциплине "Сопротивление материалов"  
(для студентов специальностей С 04.02.00, Т 19.06.00.)

Ответственный за выпуск: Хвисевич В.М.

---

Подписано к печати 20<sup>09</sup>.99 г. Формат 60x84/16 Бумага писчая N 1. Усл. п.л. 4,4. Уч. изд. л. 4,75. Заказ N 37. Тираж 150 экз. Бесплатно. Отпечатано на ризографе Брестского политехнического института. 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.