

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

**Построение эпюр внутренних усилий
в статически определимых
рамных системах**

**Методические указания
по курсу "Строительная механика"
для студентов строительных специальностей**

Брест 1994

УДК 624.04

В методических указаниях изложена методика определения внутренних усилий — изгибающих моментов, поперечных и продольных сил и построения эпюр этих усилий в плоских статически определенных рамках систем от действия внешних нагрузок. Приведены примеры расчетов. Содержатся задачи для самостоятельного решения с контролем результатов.

Методические указания предназначены для студентов специальностей 29.03 "Промышленное и гражданское строительство", 29.06 "Производство строительных изделий и конструкций", 29.06 "Водоснабжение, канализация, рациональное использование и охрана водных ресурсов" и 31.10 "Гидромелиорация" дневной и заочной форм обучения; могут использоваться в самостоятельной работе, при выполнении расчетно-проектировочных работ по строительной механике, при изучении курса строительных конструкций.

Методические указания составил — В.И. КИНАТОН, доцент, к.т.н.

Рецензент: директор научно-технического центра Госстроя Республики Беларусь, канд. техн. наук А.Я. НАЙЧУК

В процессе изучения строительной механики студенты всех специальностей и форм обучения изучают один из основных разделов курса, посвященный расчету плоских статически определимых рам на неподвижные нагрузки. Глубокое усвоение указанного материала является необходимой предпосылкой успешного изучения большинства других разделов курса строительной механики, связанных с расчетом как статически определимых, так и статически неопределимых стержневых систем более общего типа — как плоских, так и пространственных. Знание методов расчета плоских статически определимых рам необходимо и при изучении в дальнейшем курсов металлических, железобетонных и деревянных конструкций, а также других дисциплин.

Однако в учебной литературе по строительной механике изложение материала по расчету плоских статически определимых рам выполнено, как правило, недостаточно полно и последовательно, в ней также недостаточно детально разработанных примеров расчета различных типов рам. Все это создает для студентов при изучении рассматриваемой темы курса строительной механики дополнительные трудности.

Настоящие методические указания составлены с целью помочь студентам в усвоении основных понятий, приемов и методики расчета плоских статически определимых рам, в самостоятельном выполнении расчетно-проектировочных заданий и отдельных задач, в приобретении необходимых практических навыков по расчету рамных стержневых систем.

1. РАМЫ И ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В НИХ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ.

Рамами называют системы, состоящие из прямолинейных стержней, соединенных между собой жестко либо шарнирно в узлах. Рамы, как и все другие строительные сооружения, предназначены для восприятия действующих на них нагрузок и должны быть геометрически неизменяемыми. Здесь будем рассматривать только плоские статически определимые (не имеющие лишних связей) рамы. Степень свободы таких рам, которую можно определить, например, по формуле $W = Ш - 3 \cdot K$ (где $Ш$ — число простых шарниров в раме, включая опорные — при этом шарнирно неподвижная опора трактуется как один шарнир, а подвижная — как два; K — число контуров рамы), должна равняться, как известно, нулю. Этими требованиями определяется структура статически определимых рам, то есть принципы и характер соединения стержней между собой и с основанием. Приступая к расчету любой системы, в том числе и рамы, всегда необходимо проверить её геометрическую неизменяемость, то есть выполнить кинематический анализ системы. В данных методических указаниях вопросы кинематического анализа не рассматриваются. Принципы и поря-

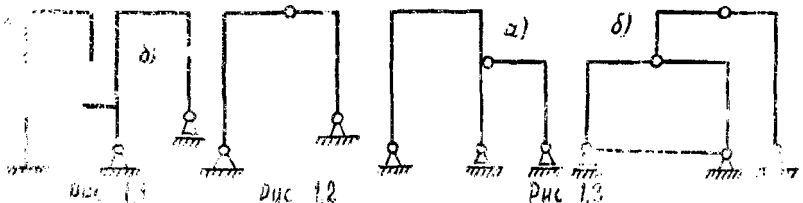
...множения кинематического анализа можно найти в литературе, указанной в разделе 5. Заметим, что на расчетных схемах стержни рам записаны их центральными линиями; поперечные сечения стержней независимо от их формы характеризуются в общем виде численными значениями площади и моментов инерции; реальные опорные устройства заменяются идеальными; нагрузки на стержни рам переносятся на их оси. По структуре статически определимые рамы можно разделить на простые, трехшарнирные и составные.

В простых рамах (рис. 1.1) стержни соединяются между собой только жестко и они представляют собой, по существу, ломаные стержни, соединенные с основанием тремя связями, которые реализуются обычно с использованием трех (основных) видов опор — шарнирно подвижной опоры (содержащей одну связь), шарнирно неподвижной (содержащей две связи) и заделки (содержащего три связи). Выделим отдельно простые рамы с заделкой (заделкой), которые называют консольными (рис. 1.1а). Расчет таких рам имеет некоторые особенности, на которых остановимся позже.

В трехшарнирных рамах стержни соединяются между собой как жесткими, так и шарнирными узлами (рис. 1.2), а число опорных связей больше трех. Особенность структуры простых трехшарнирных рам заключается в том, что их можно представить в виде трех дисков (простых ломаных стержней), соединенных между собой последовательно тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой. Следует отметить, что трехшарнирные рамы относятся к классу распорных систем, в которых при наличии только вертикальных нагрузок возникают и горизонтальные составляющие реакций (распор).

Составными будем называть рамы, состоящие из нескольких соединенных между собой простых рам (рис. 1.3а), либо комбинации простых и трехшарнирных рам (рис. 1.3б).

При действии на раму внешней нагрузки в каждом поперечном сечении её возникают три вида внутренних усилий (рис. 1.4), характеризующих взаимодействие частей рамы (стержня) относительно данного сечения:



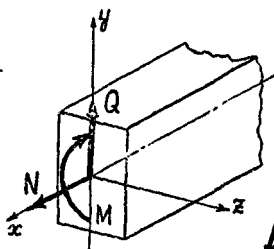


Рис. 1.4

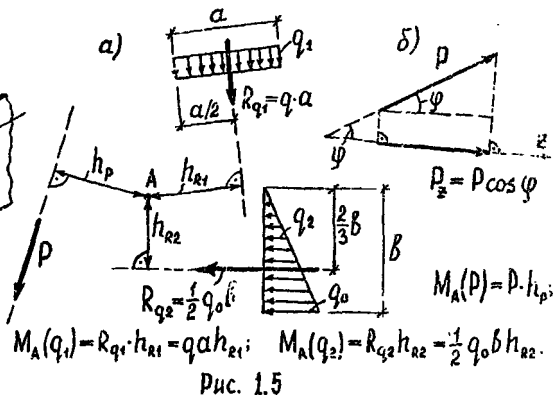


Рис. 1.5

- изгибающий момент M , действующий в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению элемента (стержня) рамы;
- поперечная сила Q , действующая в плоскости поперечного сечения и проходящая через его центр тяжести;
- продольная сила N , действующая перпендикулярно к сечению (вдоль оси стержня) и приложенная в центре тяжести сечения.

Ось стержня называют нижью, проходящую через центры тяжести поперечных сечений по длине стержня.

Определение внутренних усилий M , Q , N в сечениях статически определяемых стержневых систем выполняется на основе метода сечений, согласно которому в заданной точке оси элемента проводится сечение, разделяющее раму на две части. Затем рассматривается равновесие одной (любой) из частей рамы. При этом действие отброшенной части рамы заменяется внутренними усилиями, которые представляются в сечении в виде внешних сил. Из уравнений равновесия, число которых равно трем (что соответствует количеству неизвестных внутренних усилий), определяются внутренние усилия в рассматриваемом сечении (точке) рамы. Указанные положения позволяют сформулировать следующие правила определения внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях плоской рамы:

① Изгибающий момент в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил (включая и опорные реакции), приложенных к части рамы с одной стороны от сечения, относительно центра тяжести данного сечения.

② Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных к части рамы с одной стороны

от сечения, на ось, перпендикулярную к оси стержня.

① Продольная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных к части рамы с одной стороны от сечения, на ось касательную к оси стержня (для прикосновенных стержней — на ось самого стержня).

Напомним, что момент силы относительно некоторой точки равен произведению величины этой силы на ее плечо относительно этой точки (например, на рис. 1.5а — $M_A(P) = P \cdot h_p$), где плечо силы относительно некоторой точки (h_p) определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы. Проекция силы на некоторую ось равна произведению величины силы на косинус угла между линией действия силы и указанной осью (рис. 1.5б). По указанным правилам легко определяются изгибающий момент относительно произвольной точки и проекция на любую ось нагрузки Q , распределенной на участке по любому закону, если ее привести к равнодействующей силе R_Q , приложенной в центре тяжести нагрузки на рассматриваемом участке. Вычисление изгибающих моментов относительно точки A для равномерно распределенной нагрузки Q_1 (равнодействующая R_{Q_1} приложена по середине участка, ко которому действует равномерно распределенная нагрузка) и нагрузки Q_2 , изменяющейся на участке по треугольному закону, показано на рис. 1.5а. Заметим, что от действия сосредоточенного момента изгибающий момент относительно любой точки равен величине самого сосредоточенного момента, а его проекция на любую ось равна нулю.

Для наглядного представления изменения внутренних усилий в сечениях рам строят эпюры внутренних усилий. Эпюрой усилий (M , Q , N и др.) называется график (диаграмма), изображающий закон изменения этого усилия по длинам всех элементов системы (стержней рамы) от действия постоянной нагрузки. Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр:

1. Осью (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна или просто совпадала с осью стержня.
2. Ординаты эпюры откладывают от базовой оси перпендикулярно к ней.
3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базовой оси.
4. Ординаты усилий откладывают в определенном выбранном масштабе, одинаковом в пределах одной эпюры. Кроме того на эпюрах проставляют значения ординат усилий в характерных точках, а в полях эпюр в кружочках ставят знаки ординат эпюр. Таким образом, каждая из ординат эпюры усилий представляет собой в определенном масштабе величину усилия, для которого построена эпюра, в соответствующем поперечном сечении рамы.

При определении внутренних усилий и построении их эпюр в строи-

тельной механике обычно, принимает следующие правила знаков:

– Поперечная сила в сечении положительна, если она стремится повернуть отсеченную часть рамы, из равновесия которой она определена, относительно точек близких к сечению по часовой стрелке, и отрицательна, если стремится повернуть эту часть против часовой стрелки – см. рис. 1.6;

– Продольная сила в сечении положительна, если она вызывает растяжение в стержне рамы (направлена от сечения), и отрицательна, если вызывает сжатие (направлена к сечению) – см. рис. 1.7.

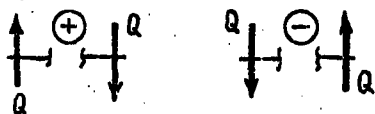


Рис. 1.6

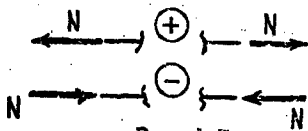


Рис. 1.7

Отметим, что при построении эпюр Q и N ординаты поперечных и продольных сил могут откладываться с любой стороны от базовых осей (стержневой рамы). При этом следует руководствоваться наибольшей наглядностью эпюр (чтобы эпюры на участках по возможности не накладывались друг на друга) и, желательно, чтобы для участков, являющихся продолжением друг друга по прямой, ординаты одного знака откладывались с одной стороны.

Для изгибающих моментов специального правила знаков не устанавливают, а откладывают ординаты их на растянутых волокнах (со стороны растянутых волокон). При определении величин изгибающих моментов знаки их принимают по собственному усмотрению. Удобно принять, например, как это сделано в данных методических указаниях, изгибающий момент в сечении положительным, если он действует относительно сечения по часовой стрелке. Растянутые волокна в сечении при этом определяются следующим образом. В той части рамы, из равновесия которой в расчетном сечении определен изгибающий момент, выделяем бесконечно малый элемент стержня, прилегающий к рассматриваемому сечению (на схемах этот бесконечно малый элемент стержня для наглядности изображается в виде элемента конечной длины). (Считаем затем, что в расчетном сечении указанный элемент имеет защемление, и прикладываем к нему вычисленный для расчетного сечения изгибающий момент. Анализируя теперь изгиб рассматриваемого элемента системы (рамы), несложно определить, с какой стороны стержня волокна будут растянуты, а с какой – сжаты. Например, для ломаного стержня, изображенного на рис. 1.8 а, изгибающий момент в сечении I-I, вычисленный из рассмотрения равновесия правой части системы, будет отрицательным (со стороны силы вырывает стержень).

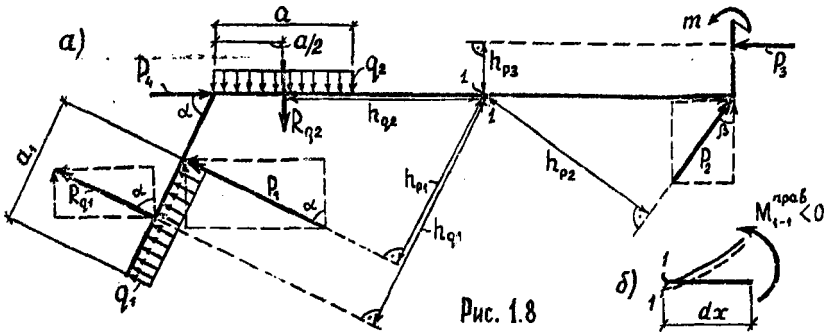


Рис. 1.8

тельно сечения I-I против часовой стрелки). Схема изгиба элемента системы, выделенного возле сечения I-I из правой ее части, показана на рис. 1.8б. Из анализа этой схемы видно, что растянутыми в сечении I-I будут нижние волокна (здесь и далее на схемах изгиба элементов со стороны растянутых волокон будем проводить штриховые линии).

Для системы, изображенной на рис. 1.8, которую будем считать равновесной, приведем несколько примеров вычисления (в общем виде) внутренних усилий в сечении I-I:

$$M_{1-1}^{(\text{лев})} = R_{q_1} \cdot h_{p_1} - R_{q_2} \cdot h_{q_2} + P_4 \cdot 0 = q_1 a_1 h_{q_1} + P_1 h_{p_1} - q_2 a_2 h_{q_2};$$

$$M_{1-1}^{(\text{прав})} = -P_3 \cdot h - m;$$

$$Q_{1-1}^{(\text{лев})} = (R_{q_1} + P_1) \cdot \cos 90^\circ - R_{q_2} \cos 0^\circ = (q_1 a_1 + P_1) \cos \alpha - q_2 a_2;$$

$$Q_{1-1}^{(\text{прав})} = -P_2 \cos \beta \cdot \cos 90^\circ = -P_2 \cos \beta;$$

$$N_{1-1}^{(\text{лев})} = (R_{q_1} + P_1) \sin \alpha - P_4 + R_{q_2} \cos 90^\circ = (q_1 a_1 + P_1) \sin \alpha - P_4;$$

$$N_{1-1}^{(\text{прав})} = -P_3 + P_2;$$

Здесь $M_{1-1}^{(\text{лев})}$, $Q_{1-1}^{(\text{лев})}$, $N_{1-1}^{(\text{лев})}$ — внутренние усилия в сечении I-I, полученные из рассмотрения левой части системы относительно этого сечения; $M_{1-1}^{(\text{прав})}$, $Q_{1-1}^{(\text{прав})}$, $N_{1-1}^{(\text{прав})}$ — те же усилия, полученные из рассмотрения правой части относительно сечения I-I. Заметим, что для системы, находящейся в равновесии, внутренние усилия в одном сечении, полученные из рассмотрения левой и правой частей, будут, естественно, равны друг другу (изгибающие моменты при этом будут получаться с противоположными знаками; растянутые же волокна, определенные по ним, будут расположены с одной стороны). Для рассмотренной системы (рис. 1.8), таким

образом, будем иметь: $M_{1-1}^{(лев)} = M_{1-1}^{(пр)}$; $Q_{1-1}^{(лев)} = Q_{1-1}^{(пр)}$; $N_{1-1}^{(лев)} = N_{1-1}^{(пр)}$. Это обстоятельство следует использовать для проверки правильности вычисления внутренних усилий в сечениях рам.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ПРОСТЫХ РАМАХ

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 2.1, представляющую собой ломаный стержень, соединенный с основанием тремя шарнирно подвижными опорами, реакции в которых направлены перпендикулярно опорным поверхностям (в направлении опорных связей). Из анализа рамы видно, что при определении внутренних усилий в любом ее сечении нельзя обойтись без знания величин опорных реакций. И, следовательно, расчет таких рам необходимо начинать с нахождения значений опорных реакций.

Опорные реакции определяются из уравнений равновесия рамы в целом, которые в общем случае можно представить в трех различных вариантах:

1) в виде сумм проекций сил на две произвольные не параллельные друг другу оси и сумм моментов сил относительно любой точки плоскости ($\sum X=0$; $\sum Y=0$; $\sum M=0$);

2) в виде суммы проекций сил на произвольную ось и двух сумм моментов относительно любых точек плоскости, не лежащих на одном перпендикуляре к указанной оси проекций ($\sum X=0$; $\sum M_A=0$; $\sum M_B=0$);

3) в виде трех сумм моментов относительно любых точек, не лежащих на одной прямой ($\sum M_A=0$; $\sum M_B=0$; $\sum M_C=0$).

Выбор того или иного варианта составления уравнений равновесия, а также выбор точек и направлений осей, используемых при составлении этих уравнений, производится в каждом конкретном случае с таким расчетом, чтобы в каждое уравнение по возможности входила только одна неизвестная реакция (чтобы не решать систему уравнений) и по возможности не входили ранее определенные реакции. После вычисления опорных реакций всегда необходимо делать проверку правильности их определения, для чего рекомендуется подставить полученные их значения в какое-либо уравнение равновесия, не использованное ранее.

Определим опорные реакции для рассматриваемой рамы. Для этого здесь используем второй вариант уравнений равновесия:

$$\sum X=0; \quad R_1 \cdot 4 = 0, \quad R_A = 4 \text{ кН};$$

$$\sum M_L=0; \quad -4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 8 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - R_C \cdot 4 = 0; \quad R_C = 5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B=0; \quad -2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 8 - R_B \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad R_B = -7 \text{ кН}.$$

Заметим, что эти выписанные уравнения равновесия для определения опорных реакций являются также уравнениями для определения внутренних усилий в сечениях. Удобнее записывать в численные значения, а не в общем виде

с последующей подстановкой численных величин. Отметим также, что если величина реакции в результате ее определения получается отрицательной, это указывает на то, что мы неверно предположили направление этой реакции, в нашем примере — реакции R_3 и оно будет противоположным. В этом случае рекомендуется сразу же исправить направление реакции на действительное.

Проверка правильности определения опорных реакций:

$\sum M_K = 0$; $4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 8 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = 0$; $+64 - 64 = 0$; 0=0. Опорные реакции определены верно. Для удобства дальнейших расчетов численные значения вычисленных реакций рекомендуется показывать на расчетной схеме рамы (см. рис. 2.1).

Теперь перейдем к расчету и построению эпюр внутренних усилий. Несложно заметить, что любую раму можно разбить на отдельные участки (отрезки стержней), на каждом из которых изменение того или иного усилия описывается (в пределах этого участка) одним законом. Граничные точки этих участков, в которых происходит переход от одного закона изменения эпюр к другим, будем называть **характерными точками**. В качестве **характерных точек** выступают:

- точки, в которых приложены внешние сосредоточенные нагрузки (силы, моменты) либо опорные реакции;
- точки начала и конца приложения распределенных нагрузок;
- точки излома и разветвления стержней.

Для рамы, изображенной на рис. 2.1. можно выделить четыре расчетных участка: участок I—AT, II — TK, III — KB и IV — BC. Характерными при этом являются точки A, T, K, B, C.

Рассмотрим сначала участок I. Проведем на нем произвольное сечение I—I. Внутренние усилия в любом сечении рамы могут быть определены из рассмотрения как левой части рамы относительно сечения, так и правой (или соответственно как нижней, так и верхней частью рамы — для сечений, расположенных на вертикальных стержнях); при этом они должны получиться равными друг другу, что, как уже указывалось (см. раздел I), можно и нужно использовать для проверки правильности вычисления внутренних усилий в сечениях. Заметим также, что определение внутренних усилий в сечении удобнее производить из рассмотрения той отсеченной части рамы, на которую действует меньшее количество внешних сил. Для сечения I—I рассмотрим нижнюю часть рамы (для наглядности в этом примере покажем рассматриваемые части рамы отдельно рис. 2.2). Расстояние от верхней крайней точки участка (точки A) сечения I—I обозначим x , тогда выражения для определения внутренних усилий в произвольном сечении I—I участка I (для которого $0 < x < 4$).

Расчетная схема рѐмьы

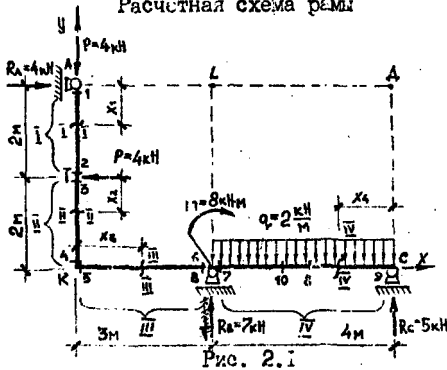


Рис. 2.1

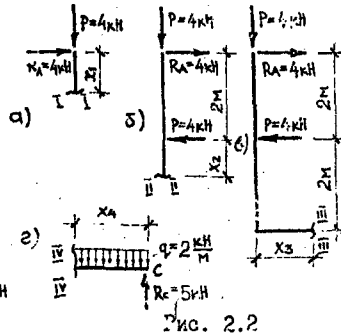


Рис. 2.2

Определение растянутых волокон

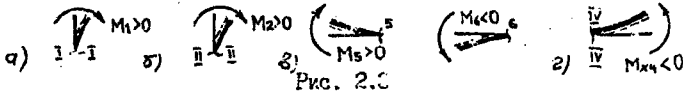


Рис. 2.3

Окончательные эпюры

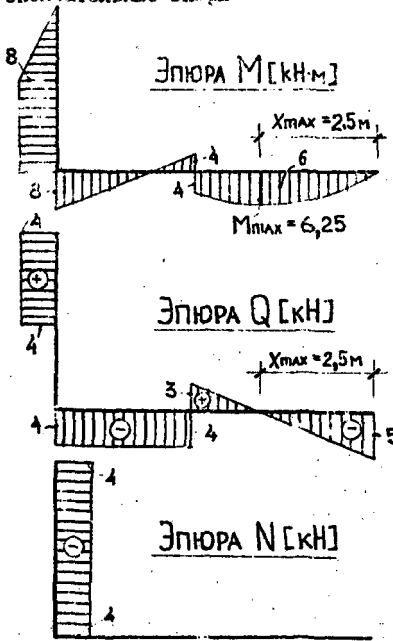
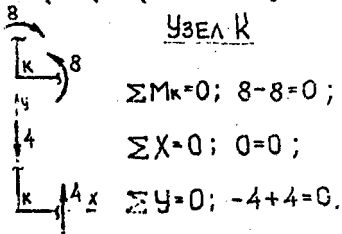


Рис. 2.4

Проверка равновесия узлов

УЗЕЛ К



ОПОРНЫЙ УЗЕЛ В

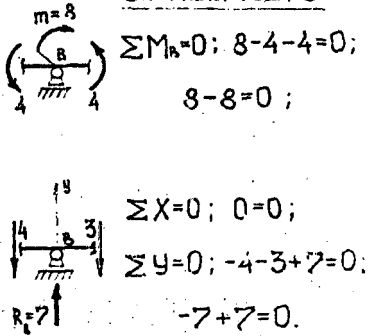


Рис. 2.5

полученные согласно выделенным правилам, будут иметь вид:

$$M_1^{(\text{верх})} = R_A \cdot X_1 + P \cdot 0 = 4 X_1; \quad Q_1^{(\text{верх})} = +R_A = 4; \quad N_1^{(\text{верх})} = -P = -4.$$

Изгибающий момент на участке I изменяется по линейному закону, а поперечная и продольная силы — постоянны. Подставляя в выражение изгибающего момента значения X_1 для крайних точек, найдем:

$M_1 - M_A = 4 \cdot 0 = 0$; $M_2 = 4 \cdot 2 = +8$ кН·м (сечение I расположено на бесконечно малом расстоянии сверху от точки Т — точки приложения силы Р). Растянутые волокна для сечения I (и в данном случае для всего участка I) определены на рис. 2.3а.

Аналогично определим внутренние усилия на участке II ($0 \leq X_2 \leq 4$) (см. рис. 2.1, 2.2 б, 2.3 б):

$$M_{II}^{(\text{верх})} = 4 \cdot (2 + X_2) - 4 \cdot 0 - 4 \cdot X_2 = 8 \quad (\text{при любом значении } X_2);$$

$$Q_{II}^{(\text{верх})} = 4 - 4 = 0; \quad N_{II}^{(\text{верх})} = -4$$

и на участке III ($0 \leq X_3 \leq 3$) (см. рис. 2.2 в, 2.3 в):

$$M_{III}^{(\text{лев})} = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot X_3 = 8 - 4 \cdot X_3 \quad (\text{при } X_3 = 0 - \text{точка 5} - M_5 = 8 \text{ кН·м; при } X_3 = 3 - \text{точка 6} - M = 8 - 4 \cdot 3 = -4 \text{ кН·м}); \quad Q_{III}^{(\text{лев})} = -4;$$

$$N_{III}^{(\text{лев})} = 0.$$

Несколько сложнее определяются внутренние усилия на участке IV. Для произвольного сечения IV—IV на участке рассмотрим правую часть рамы (рис. 2.2 г). Тогда выражения для внутренних усилий на участке IV будут иметь вид:

$$M_{IV}^{(\text{прав})} = -5 \cdot X_4 + 2 X_4 \cdot \frac{X_4}{2} = X_4^2 - 5 X_4; \quad Q_{IV}^{(\text{прав})} = -5 + 2 X_4; \quad N_{IV}^{(\text{прав})} = 0.$$

Видно, что изгибающий момент на участке IV изменяется по криволинейному, параболическому закону, а поперечная сила — по линейному закону (не постоянна — в отличие от участков I, II, III). Для построения эпюры М на этом участке, таким образом, необходимо вычислить значения изгибающих моментов минимум в трех точках например, по краям участка — в точках 7 и 9 и в середине его — в точке 8):

$$\text{т. 7} - X_4 = 4 \text{ м}; \quad M_7 = 4 - 5 \cdot 4 = -4 \text{ (кН·м)};$$

$$\text{т. 8} - X_4 = 2 \text{ м}; \quad M_8 = 2 - 5 \cdot 2 = -6 \text{ (кН·м)};$$

$$\text{т. 9} - X_4 = 0; \quad M_9 = 0.$$

Растянутые волокна на участке IV по полученным значениям изгибающих моментов определены на рис. 2.3 г, а сама эпюра М представлена на

рис. 2.3 г. Для построения эпюры поперечных сил вследствие линейного ее изменения на участке IV достаточно вычислить значения Q в двух точках (т.к. через две точки всегда можно провести прямую линию) — обычно

вычисляют эти значения в крайних точках участка:

$$т. 7 - X_7 = 4 \text{ м}; \quad Q_7 = -5 + 2 \cdot 4 = +3 \text{ (кН)};$$

$$т. 9 - X_9 = 0; \quad Q_9 = -5 + 2 \cdot 0 = -5 \text{ (кН)}.$$

Следует иметь в виду, что на участках действия равномерно распределенных нагрузок, на которых изгибающие моменты изменяются по параболическому закону, эпюра M может иметь экстремум (максимальное или минимальное значение), который является важной характеристикой эпюры и должен определяться. Если выполнить анализ полученных выражений для M_{II} и Q_{II} , то несложно выяснить, что экстремальные значения изгибающие моменты принимают в сечениях, в которых поперечные силы равны нулю. Эти сечения могут быть определены из выражений для Q (в нашем примере $-Q_{II} = 2 \cdot X_4 - 5 = 0$; $X_{max} = 2,5 \text{ м}$), или по эпюрам Q из геометрических соображений ($5/X_{max} = 3/(4 - X_{max})$; $X_{max} = 2,5 \text{ м}$). Максимальный изгибающий момент на участке $IУ$ рассматриваемой рамы, таким образом, имеет место в сечении $Ю(X_{max} = 2,5 \text{ м})$ и равен: $M_{II}^{max} = 2,5^2 - 5 \cdot 2,5 = -6,25 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$. Окончательные эпюры M , Q , N в рассматриваемой раме представлены на рис. 2.4.

Все узлы рамы, включая опорные, должны находиться в равновесии. Под узлами здесь будем понимать точки излома либо разветвления стержней рамы, а также точки примыкания стержней через шарниры. Поэтому после построения в раме окончательных эпюр M , Q и N целесообразно выполнить проверку равновесия её узлов. Для выполнения указанной проверки узлы выделяем (вырезаем) из рамы, изображаем отдельно (для наглядности показываем и элементы примыкающих к узлам стержней) и прикладываем к ним внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях, бесконечно близки к узлам, и внешние сосредоточенные нагрузки — силы и моменты, действующие в узлах (если они, конечно, есть). После этого составляем уравнения равновесия всех сил, приложенных к узлам ($\sum M_u = 0$; $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$) и проверяем их выполнение. Для рассмотренной рамы проверка равновесия узлов показана на рис. 2.5.

Ⓜ Анализ полученных эпюр внутренних усилий позволяет установить ряд общих закономерностей в изменении эпюр M , Q , N , которые будут соблюдаться для любых рам:

1) на прямолинейном ненагруженном участке эпюра изгибающих моментов всегда линейна и может быть построена по двум ординатам (обычно для крайних сечений участка), а эпюры Q и N — постоянны;

2) на участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра M всегда изменяется по криволинейному, параболическому закону и должна строиться минимум по трем ординатам (обычно для крайних и среднего сечений на участке); выпуклость эпюры M при этом направлена в сторону действия равномерно распределенной нагрузки; эпюра Q на таком

участке всегда линейна и может быть построена по двум ординатам (для крайних сечений);

3) в точке приложения сосредоточенной силы эпюра M всегда имеет излом, направленный в сторону действия силы, а эпюра Q — скачок на величину произведения этой силы на косинус угла между силой и осью, нормальной к оси стержня; если внешняя сила перпендикулярна оси стержня, то скачок на эпюре Q будет равен величине самой силы;

4) в точке приложения сосредоточенного момента эпюра M всегда имеет скачок на величину этого момента;

5) в шарнире изгибающий момент всегда равен нулю (не следует путать сечение в шарнире и сечение, бесконечно близкое к шарниру; так, если в сечении, бесконечно близком к шарниру, применен сосредоточенный момент, то на эпюре M в этом сечении, согласно предыдущему положению, будем иметь скачок с нуля в шарнире до значения сосредоточенного момента в точке его приложения);

6) на участке действия распределенной нагрузки в сечении, в котором поперечная сила равна нулю, изгибающий момент всегда имеет экстремум (минимум, максимум);

7) при принятых правилах знаков знак эпюры Q можно определить (проверить) по эпюре M по следующему правилу: эпюра Q на участке положительна, если для совмещения по кратчайшему пути оси стержня на участке с касательной к эпюре M на том же участке ось стержня необходимо поворачивать по часовой стрелке; если для указанного совмещения ось стержня нужно поворачивать против часовой стрелки, то эпюра Q на участке будет иметь отрицательный знак.

Используя изложенные общие закономерности изменения эпюр M , Q , N эти эпюры можно строить, не составляя зависимостей для изгибающих моментов, поперечных и продольных сил по участкам, а ограничиваясь вычислением значений указанных усилий в характерных сечениях рамы.

Для иллюстрации такого приема построения эпюр M , Q и N рассмотрим раму, изображенную на рис. 2.6. Рама является консольной (см. разд. I) и при вычислении внутренних усилий в любом ее сечении можно обойтись без нахождения опорных реакций, если рассматривать все время равновесие отсеченных консольных частей рамы. И, следовательно, при построении эпюр внутренних усилий в таких рамах опорные реакции можно не определять, если это не требуется специально. С другой стороны, зная опорные реакции, мы всегда имеем возможность выполнить проверку правильности предыдущих расчетов (рассматривая равновесие отсеченной части со стороны опоры; равновесие опорного узла). Заметим, что нагрузка Q , действующая на наклонный стержень (рис. 2.6), задана равномерно распределенной на горизонтальную проекцию этого

стержня.

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на 4 участка (см. рис. 2.6). При построении эпюры изгибающих моментов рассуждаем следующим образом. На участках I, III, IV рамы эпюра M будет изменяться по линейному закону и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков, то есть в сечениях 1, 2, 6, 7, 8, 9. На участке II, на который действует равномерно распределенная нагрузка, эпюра M будет изменяться по параболическому закону и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты в сечениях 3, 4, 5. Выполним вычисление изгибающих моментов в указанных сечениях (I+9), рассматривая относительно сечений равновесие консольных частей рамы (на рис. 2.7 показаны соответствующие консольные части рамы для сечений 5 и 8):

$$M_1 = -3,5 \cdot 0 = 0; \quad M_2 = -3,5 \cdot 2 = -7 \text{ (кН}\cdot\text{м)}; \quad M_3 = -3,5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -7 \text{ (кН}\cdot\text{м)};$$

$$M_4 = -3,5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -5,5 \text{ (кН}\cdot\text{м)}; \quad M_5 = -3,5 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = +5 \text{ (кН}\cdot\text{м)};$$

$$M_6 = +9 - 8 \cdot 0 = 9 \text{ (кН}\cdot\text{м)}; \quad M_7 = +9 - 8 \cdot 2 = -7 \text{ (кН}\cdot\text{м)};$$

$$M_8 = +9 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3^2 / 2 + 2 \cdot 4 - 3,5 \cdot 6 = -2 \text{ (кН}\cdot\text{м)};$$

$$M_9 = +9 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 4 + 3,5 \cdot 2 = +10 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Определение растянутых волокон в сечениях I+9 по действующим в них изгибающим моментам показано на рис. 2.8. Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме представлена на рис. 2.9 а.

Аналогичные рассуждения проводим и при построении эпюр поперечных и продольных сил. На участках I, III, IV поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения на этих участках эпюр Q и N достаточно вычислить значения поперечных и продольных сил в одном (произвольном) сечении:

$$Q_I = N_I = N_2 = 0; \quad N_{III} = N_6 = N_7 = 0; \quad N_{IV} = N_8 = N_9 = -8 - 4 \cdot 3 = -20 \text{ (кН)}.$$

На участке II и поперечные, и продольные силы будут изменяться по линейным законам и для построения эпюр Q и N на этом участке необходимо вычислить значения поперечных и продольных сил в двух сечениях — 3 и 5:

$$Q_3 = -3,5 \sin \alpha + 2 \sin \alpha = (-3,5 + 2) \cdot 0,8 = -1,2 \text{ (кН)};$$

$$Q_5 = (-3,5 + 2) \sin \alpha + 4 \cdot 3 \cos \alpha = -1,5 \cdot 0,8 + 12 \cdot 0,6 = +6 \text{ (кН)};$$

$$N_3 = +3,5 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = (3,5 - 2) \cdot 0,6 = +0,9 \text{ (кН)};$$

$$N_5 = 3,5 \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 4 \cdot 3 \sin \alpha = (3,5 - 2) \cdot 0,6 + 12 \cdot 0,8 = +10,5 \text{ (кН)}.$$

Построение по полученным данным эп. Q , N изображены на рис. 2.9б, в.

На эпюре поперечных сил на участке II имеется сечение, в котором поперечная сила равна нулю. В этом сечении изгибающий момент на участке должен иметь экстремальное значение. Координаты указанного сечения вычислим из геометрических соображений:

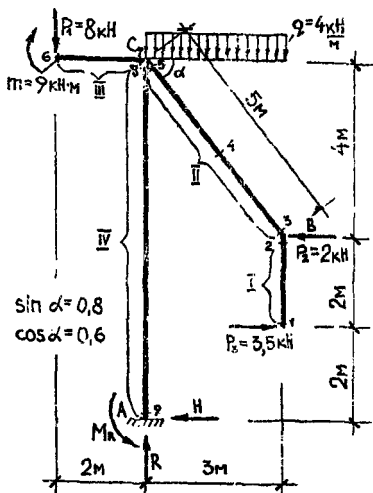


Рис. 2.6. Расчетная схема рамы

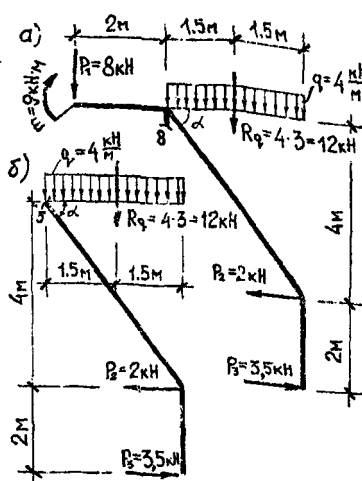


Рис. 2.7

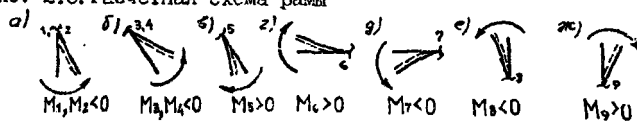


Рис. 2.8. Определение растянутых волокон

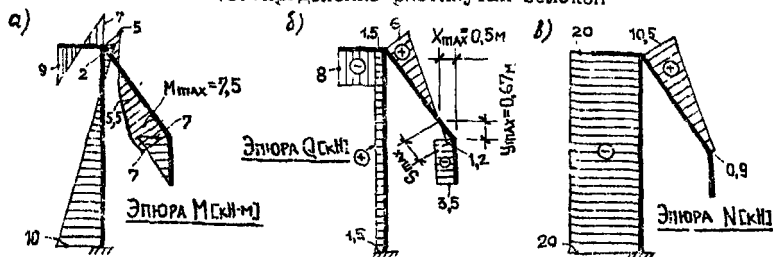


Рис. 2.9. Окончательные эпюры

УЗЕЛ С

$$\sum M_c = 0; 5 + 2 - 7 = 0;$$

$$\sum X = 0; 10.5 \cos \alpha - 6 \sin \alpha - 1.5 = 0;$$

$$10.5 \cdot 0.6 - 6 \cdot 0.8 - 1.5 = 0;$$

$$\sum Y = 0; -8 + 20 - 6 \cos \alpha - 10.5 \sin \alpha = 0;$$

$$20 - 20 = 0; -8 + 20 - 6 \cdot 0.6 - 10.5 \cdot 0.8 = 0;$$

УЗЕЛ В

$$\sum M_b = 0; 3 - 3 = 0;$$

$$\sum Y = 0; 0.9 \sin \alpha - 1.2 \cos \alpha = 0;$$

$$0.9 \cdot 0.8 - 1.2 \cdot 0.6 = 0; 0.72 - 0.72 = 0;$$

$$\sum X = 0; 1.2 \sin \alpha - 0.9 \cos \alpha - 2 + 3.5 = 0;$$

$$-12 \cdot 0.8 - 0.9 \cdot 0.6 + 1.5 = 0; -1.5 + 1.5 = 0.$$

Рис. 2.10. Проверка равновесия узлов

$$\frac{1,2}{S_{\max}} = \frac{6}{5 - S_{\max}}; \quad 1,2(5 - S_{\max}) = 6 \cdot S_{\max}; \quad S_{\max} = 0,833 \text{ м};$$

$$X_{\max} = S_{\max} \cdot \cos \alpha = 0,833 \cdot 0,6 = 0,5 \text{ м}; \quad Y_{\max} = S_{\max} \sin \alpha = 0,833 \cdot 0,8 = 0,67 \text{ м}$$

Тогда максимальное (по абсолютной величине) значение изгибающего момента на участке II будет равно

$$M_{\max} = -3,5 \cdot 2,67 + 2 \cdot 0,67 + 0,5 \cdot 4 \cdot 0,5^2 = -7,50 \text{ (кН·м)}.$$

После получения окончательных эпюр M , Q и N выполняется проверка равновесия узлов, показанная для рассмотренной рамы на рис. 2.10.

На этом расчет консольной рамы можно и закончить, если нас не интересуют реакции заделки.

Следует отметить, что в проектной практике расчета сооружений величины опорных реакций обычно знать необходимо (они используются в расчетах опорных узлов, нижележащих конструкций и т.д.). Поэтому здесь также выполним определение реактивных усилий в заделке, для чего рассмотрим равновесие рамы в целом:

$$\sum X = 0; \quad 3,5 - 2 - H = 0; \quad H = 1,5 \text{ (кН)};$$

$$\sum Y = 0; \quad R - 8 - 4 \cdot 3 = 0; \quad R = 20 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_A = 0; \quad 9 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 4 + 3,5 \cdot 2 - M_R = 0; \quad M_R = 10 \text{ (кН·м)}.$$

Несложно увидеть, анализируя окончательные эпюры M , Q и N (рис. 2.9), что значения вычисленных опорных реакций равны соответствующим внутренним усилиям в пропорном сечении 9. Это свидетельствует о том, что опорный узел A находится в равновесии (проверку его равновесия можно выполнить аналогично тому, как это сделано для узла B - рис. 2.5) и что расчет рамы выполнен верно.

В связи с указанным заметим также, что опорные реакции после построения окончательных эпюр M , Q и N могут быть определены и из вырезания (рассмотрения равновесия) опорных узлов.

! На основе анализа выполненных примеров можно предложить следующий порядок построения эпюр внутренних усилий M , Q и N в рамах:

1. На расчетной схеме рамы показываем предполагаемые направления опорных реакций.

2. Составляем уравнения равновесия рам, решая которые определяем значения опорных реакций.

3. Выполняем проверку правильности определения опорных реакций.

4. Раму разбиваем на расчетные участки (участки между характерными точками) и определяем сечения, в которых необходимо вычислять внутренние усилия (M , Q , N) для построения их эпюр.

5. Вычисляем значения внутренних усилий (M , Q и N) в указанных сечениях (на основе выше изложенных правил) и строим окончательные

эпюры внутренних усилий (с учетом общих закономерностей изменения эпюр на участках); на участках действия равномерно распределенных нагрузок при этом вычисляем (если они есть) экстремальные значения изгибающих моментов.

6. Выполняем проверки равновесия узлов и соблюдения общих закономерностей изменения эпюр.

Каждый из указанных этапов расчета подробно рассмотрен выше. В ряде случаев некоторые из этапов могут быть опущены. Так, например, для консольных рам расчет можно начинать сразу с пункта 4 (см. расчет рамы, представленной на рис. 2.6).

3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ТРЕУГОЛЬНЫХ И СОСТАВНЫХ РАМАХ

Рассмотрим раму, представленную на рис. 3.1. 3 опорах этой рамы возникает четыре неизвестных опорных реакции и, как несложно заметить, из равновесия рамы в целом величины этих опорных реакций найти нельзя. Для их определения необходимо рассмотреть равновесие отдельных частей рамы. При этом исходя из наглядности и удобства расчета можно идти разными путями. Здесь вначале расчленим заданную раму по шарниру С на две части так, как показано на рис. 3.2, и определим в первую очередь опорную реакцию R_C и внутренние реактивные силы между рассматриваемыми частями рамы в шарнире С из равновесия правой части рамы (рис. 3.2а):

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & X_C - 1,5 \cdot 4 &= 0; & X_C &= 6 \text{ (кН)}; \\ \sum M_C^{\text{пр}} &= 0; & 1,5 \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 - R_2 \cdot 6 &= 0; & R_2 &= 4 \text{ (кН)}; \\ \sum Y &= 0; & -6 + 4 + Y_C &= 0; & Y_C &= 2 \text{ (кН)}; \end{aligned}$$

После этого рассмотрим равновесие левой части рамы (рис. 3.2б) и определим остальные опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & H_2 - 6 &= 0; & H_2 &= 6 \text{ (кН)}; \\ \sum M_A &= 0; & 12 + 2 \cdot 4 - 6 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 6 - R_2 \cdot 8 &= 0; & R_2 &= 5,5 \text{ (кН)}; \\ \sum Y &= 0; & -2 - 2 \cdot 4 + 5,5 + R_A &= 0; & R_A &= 4,5 \text{ (кН)}; \end{aligned}$$

Левая часть рамы ABCD (рис. 3.2б) представляет собой замкнутый контур и определение внутренних усилий в любом ее сечении невозможно без ее расчленения на отдельные части. Поэтому разделим эту часть рамы на две части по шарнирам А и В так, как показано на рис. 3.3. Внутренние реактивные усилия в шарнирах А и В определим из рассмотрения верхней части ACB, составляя при этом уравнения равновесия как части ACB в целом, так и составляющих ее частей AC и CB. Следует от-

метить, что в рассматриваемом случае для части рамы АСВ нельзя составить ни одного уравнения, в которое входила бы только одна неизвестная реакция (при принятых направлениях составляющих реакций). Поэтому для определения усилий X_A , Y_A , X_B , Y_B здесь необходимо решать систему уравнений, например, такого вида:

$$\begin{cases} \sum M_C^0 = 0; & -Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ \sum M_A^{\text{внеш}} = 0; & 12 + 2 \cdot 4 - 6 \cdot 4 - X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 6 = 0, \end{cases}$$

откуда $X_A = 2$ кН, $Y_A = 5$ кН. Теперь определим X_B и Y_B :

$$\sum X = 0; \quad X_A - 6 - 2 = 0; \quad X_B = 8 \text{ (кН)};$$

$$\sum Y = 0; \quad Y_A + 5 - 2 - 2 \cdot 4 = 0; \quad Y_B = 5 \text{ (кН)}.$$

Таким образом, все необходимые для расчетов внутренних усилий в сечениях рамы опорные реакции и внутренние реакции в шарнирах (усилия взаимодействия между отдельными частями рамы) определены. Для проверки правильности их вычисления рассмотрим равновесие нижней части рамы АДВ:

$$\sum X^{\text{внеш}} = 0; \quad -8 + 6 + 2 = 0; \quad +8 - 8 = 0;$$

$$\sum Y^{\text{внеш}} = 0; \quad 4,5 + 5,5 - 5 - 5 = 0; \quad 10 - 10 = 0;$$

$$\sum M_A^{\text{внеш}} = 0; \quad 2 \cdot 2 - 5 \cdot 8 + 4,5 \cdot 8 = 0; \quad 40 - 40 = 0.$$

Заметим, что реакции взаимодействия частей АС и СВ в шарнире С здесь не определялись. Это можно не делать, так как внутренние усилия в любом сечении рамы можно вычислить и не зная их, а используя уже известные реакции в опорах и шарнирах.

Построение эпюр внутренних усилий в заданной раме теперь не представляет большой сложности. Для этого надо построить эти эпюры отдельно в частях рамы СЕ (рис. 3.2а), АСВ (рис. 3.3а) и АДВ (рис. 3.3б), как в простых рамах, аналогично тому, как это делается в разделе 2, и затем эти эпюры объединить на общей схеме рамы (рис. 3.1). Окончательные эпюры М, Q и N для рассматриваемой рамы, построенные таким образом, представлены на рис. 3.4.

Приведем еще один пример. Рассмотрим сложную составную раму, изображенную на рис. 3.5. Рама опирается на основание (землю) с помощью двух шарнирно-подвижных опор (А и В) и одной шарнирно-подвижной опоры (Д). В опоре Д возникает одна опорная реакция (R_D), направленная вдоль опорного стержня (перпендикулярно к опорной поверхности). В шарнирно-неподвижных опорах (А, В) в общем-то тоже возникает по одной реакции, но в связи с тем, что чаще всего неизвестно их направление, такие реакции раскладывают обычно на две составляющие (например, по осям X и Y; хотя можно раскладывать их на две любые другие взаимноперпендикулярные оси, если это удобно), которые при этом часто называют просто реакциями в шарнирно-неподвижной опоре. Бывает случай,

когда можно указать и направление полной опорной реакции в шарнирно неподвижной опоре. Такой случай имеет место и в рассматриваемой раме, для которой легко определяется направление полной реакции в опоре А. Структура рамы (рис. 3.5) такова, что ее диск АЕ соединяется с остальной частью рамы и основанием с помощью только двух шарниров в

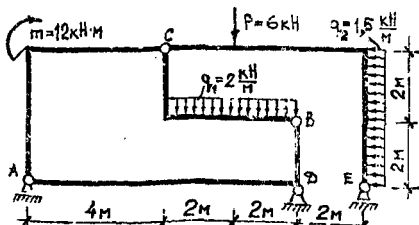


Рис. 3.1

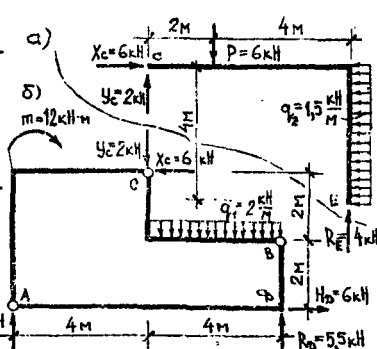


Рис. 3.2

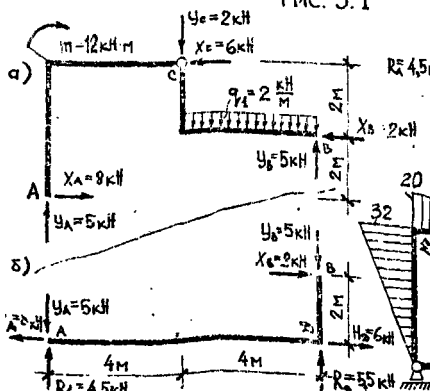


Рис. 3.3

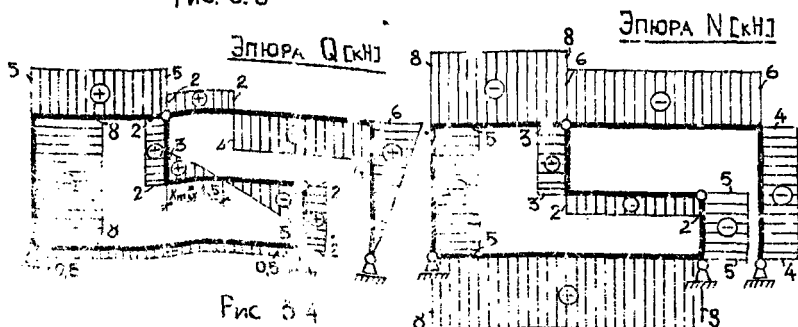
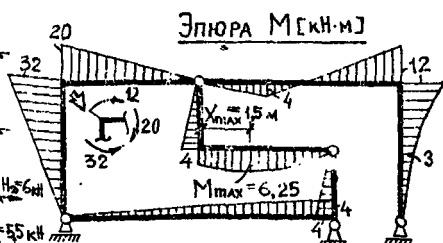


Рис. 3.4

точках А и F, и при этом этот диск ненагружен внешними нагрузками. А это значит, что часть рамы (диск) А F будет находиться под действием только двух сил — опорной реакции R_A и реактивного усилия в шарнире F. Но любое плоское тело при действии на него двух сил будет находиться в равновесии только тогда, когда эти силы направлены навстречу друг другу. Следовательно полная опорная реакция в опоре А должна быть направлена по прямой, соединяющей точки А и F (см. рис. 3.6). Направление же полной опорной реакции в опоре В здесь сразу определить не удастся, поэтому эту реакцию будем искать в виде двух составляющих V_B и H_B (рис. 3.7). Опорную реакцию в опоре А (R_A) тоже можно разложить на две составляющие, однако при этом вследствие известного ее направления неизвестной будет все равно только одна величина — R_A .

При определении опорных реакций в рассматриваемой раме также не удастся составить ни одного такого уравнения, в которое входило бы только одно неизвестное, поэтому придется решать систему уравнений. Здесь удобно использовать следующую систему двух уравнений:

$$\sum M_B = 0; \quad 0,6 \cdot R_A \cdot 11 + 0,8 R_A \cdot 3 + 1 \cdot R_B - (4 \cdot 5) \cdot 2,5 - 10 \cdot 1 + 10 = 0;$$

$$\sum M_C^{AB} = 0; \quad 0,6 \cdot R_A \cdot 6 - 0,8 \cdot R_A \cdot 2 - 4 \cdot R_B + 10 = 0,$$

решая которую, найдем: $R_A = 5$ кН; $R_B = 5$ кН. Заметим, что момент реакции R_A относительно точек В и С в уравнениях равновесия можно брать, если это удобно, и непосредственно в виде произведения этой реакции на ее плечи относительно точек В и С.

Далее теперь не составляет труда определить все остальные опорные реакции в раме (см. рис. 3.7) и построить в ней эпюры внутренних усилий М, Q и N (см. рис. 3.8—3.10).

Особенности расчета трехшарнирных и комбинированных рам, таким образом, заключаются в следующем. Во-первых, при определении опорных реакций в таких рамах необходимо использовать не только уравнения равновесия рамы в целом, но и уравнения равновесия отдельных ее частей (простых ломаных стержней). Во-вторых, внутренние усилия в сечениях таких рам в ряде случаев не могут быть вычислены только по внешним нагрузкам и опорным реакциям. Так, при наличии в раме замкнутых контуров нельзя обойтись без расчленения рамы на отдельные части и определения внутренних реактивных усилий в шарнирах, соединяющих эти части рамы друг с другом (см. пример расчета рамы, представленной на рис. 3.1).

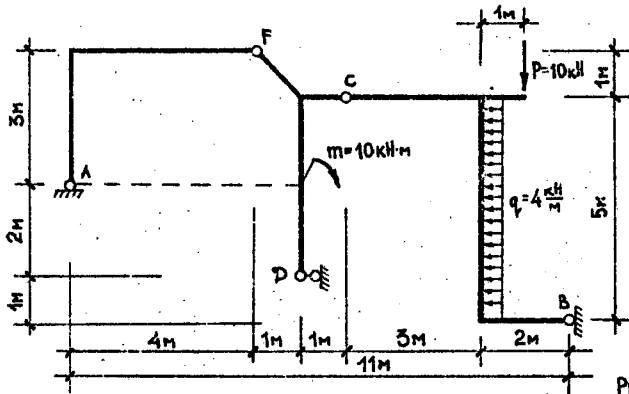


Рис. 3.5

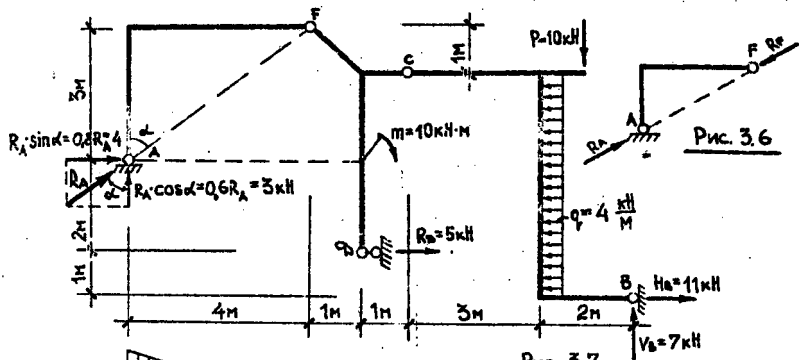


Рис. 3.7

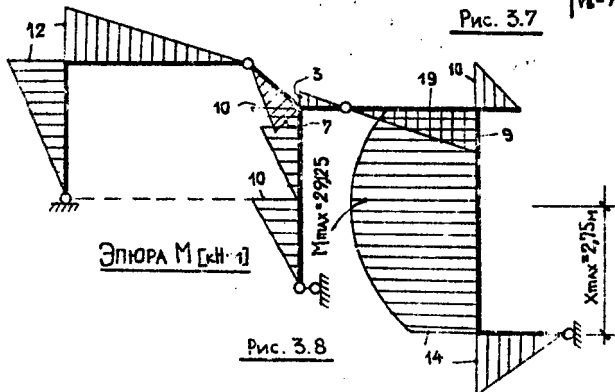


Рис. 3.8

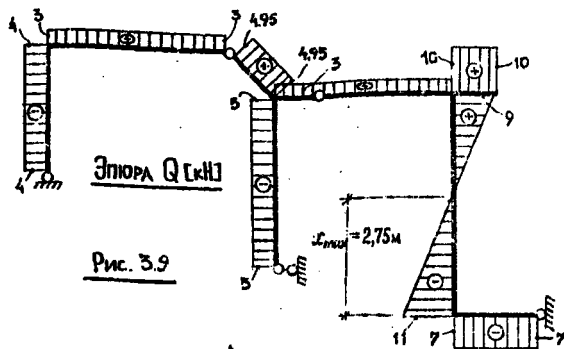


Рис. 3.9

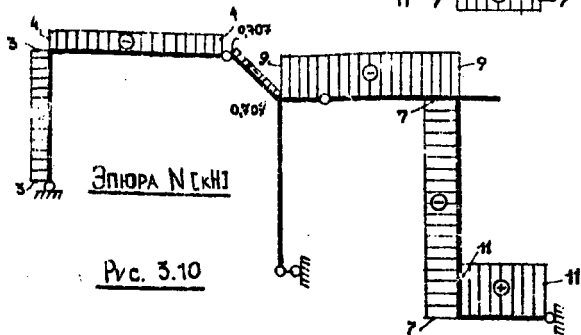
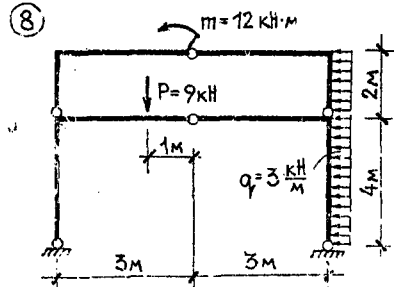
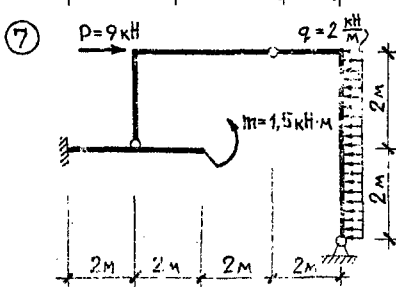
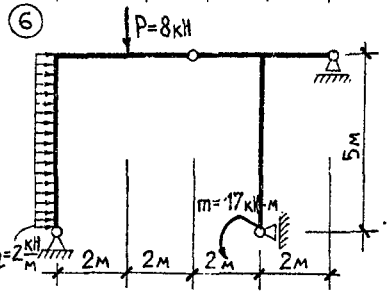
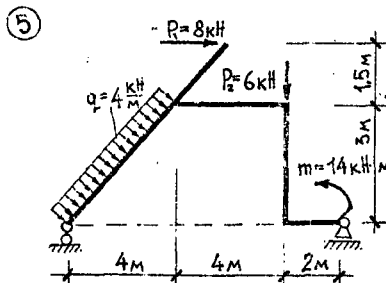
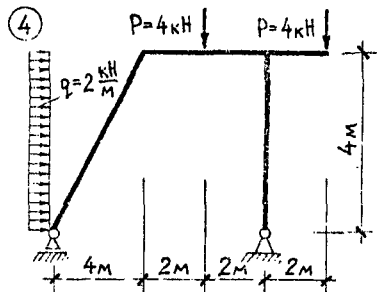
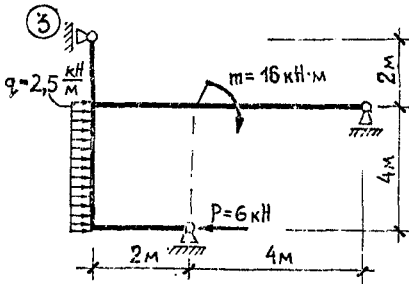
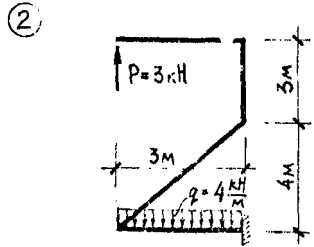
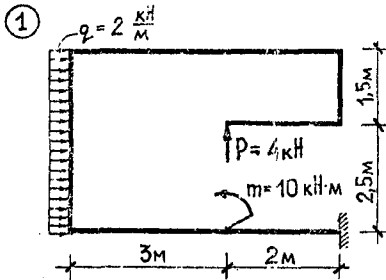


Рис. 3.10

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для рам, изображенных ниже, нужно построить эпюры внутренних усилий M , Q , N , выполнив при этом все необходимые вычисления и проверки. Построенные эпюры внутренних усилий для каждой рамы можно сверить с эпюрами, приведенными в разделе 6. В случае, если при решении задач будут возникать вопросы, необходимо обратиться к разделам 1, 2, 3 настоящих методических указаний. При изучении темы рекомендуется использовать также литературу, приведенную в разделе 5, где тоже есть примеры расчетов рам.



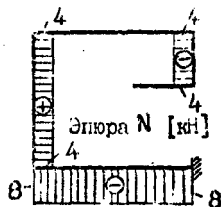
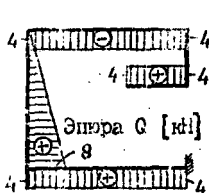
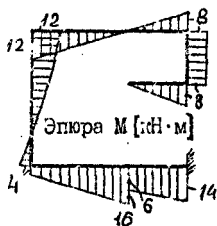
5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

рекомендуемой для изучения темы "Построения эпюр внутренних усилий в плоских статически определимых стержневых рамных системах"

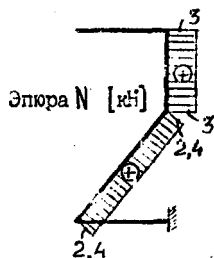
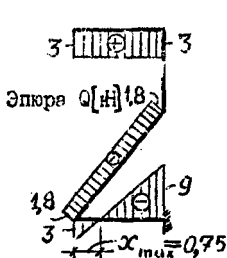
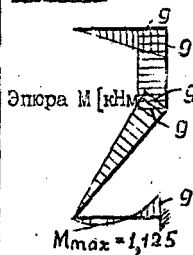
Название учебника, пособия	Общие вопросы построения эпюр, кинематический анализ рам	Построение эпюр усилий	
		в простых рамах	в составн. и комбинир. рамах
Дарков А.В., Широ Г.С. Сопротивление материалов - М., 1979	с. 7-13, 202-224	с. 224-242	-
Довнар Е.П., Колшун Л.И. Строительная механика. - Мн., 1986	с. 9-14	с. 72-73	с. 72-73
Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс. - М., 1986	с. 9-25, 33-35, 44-45	с. 31-92	с. 127-129
Мухин Н.Б., Першин А.Н., Шишмак Б.А. Статика сооружений. - М., 1980	с. 7-14, 25-30	с. 65-80	с. 80-87
Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики Под. ред. Г.К.Клейна. - М., 1973 - М., 1980	- -	с. 12-18 с. 28-29	с. 18-20, 49-53 с. 53-57
Сопротивление материалов/Под ред. Г.С.Писаренко. - Киев, 1986	с. 42-50, 53-70	с. 70-75	-
Строительная механика/Под ред. А.В.Даркова. - М., 1978	с. 9-10, 20-23, 54-59	с. 63-66	с. 117-118
Строительная механика. Стержневые системы/Под ред. А.Л. Смирнова. - М., 1981	с. 6-21	с. 98-103	с. 189

6. ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

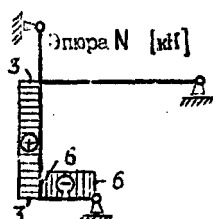
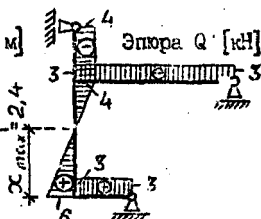
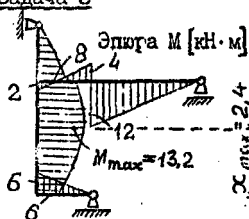
Задача 1



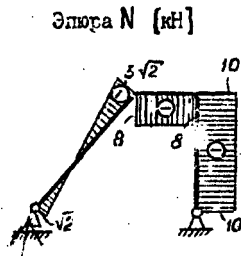
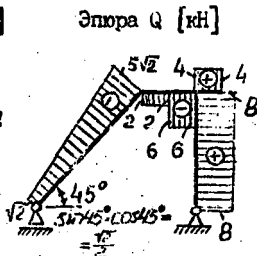
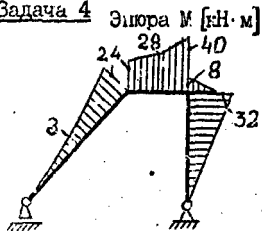
Задача 2



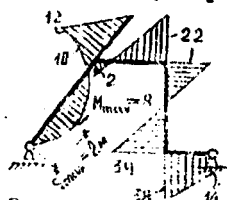
Задача 3



Задача 4

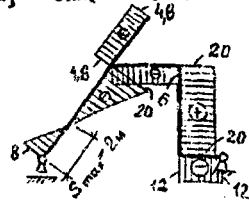


Задача 5 Эпюра M [кН·м]

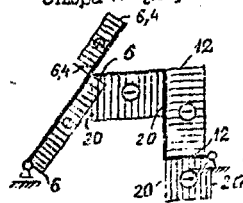


Эпюра Q [кН]

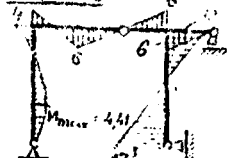
Эпюра Q [кН]



Эпюра N [кН]



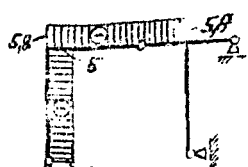
Задача 5



Эпюра M [кН·м]

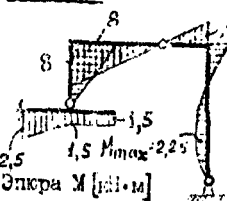


Эпюра Q [кН]

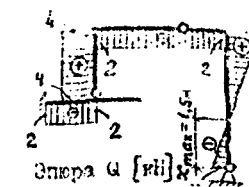


Эпюра N [кН]

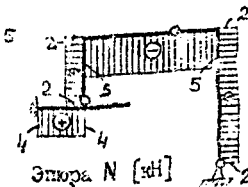
Задача 7



Эпюра M [кН·м]

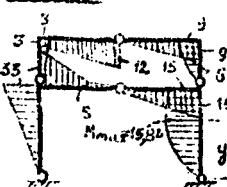


Эпюра Q [кН]

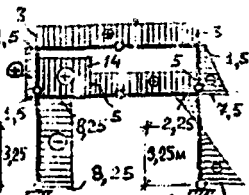


Эпюра N [кН]

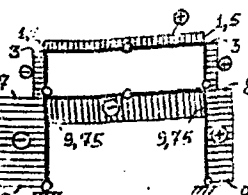
Задача 8



Эпюра M [кН·м]



Эпюра Q [кН]



Эпюра N [кН]

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарков А.В., Шаро Г.С. Сопротивление материалов. — М.: Высш. школа, 1975. — 654 с.
2. Сопротивление материалов / Под ред. Писаренко Г.С. — М.: Высш. школа, 1966. — 775 с.
3. Строительная механика / Под ред. А.В.Даркова. — М.: Высш. школа, 1976. — 600 с.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Введение	3
1. Рама и внутренние усилия в ней. Общие понятия	3
2. Построение эпюр внутренних усилий в простых рамах	9
3. Построение эпюр внутренних усилий в трехшарнирных и составных рамах	18
4. Задачи для самостоятельной работы	23
5. Список литературы, рекомендуемой для самостоятельной работы	25
6. Ответы на задачи для самостоятельной работы	26
Список использованной литературы	27

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составитель: Игнатюк Валерий Иванович

**Построение эпюр внутренних усилий
в статически определимых рамах:
Методические указания
для студентов строительных специальностей**

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.

Редактор Строкач Т.В.

Подписан к печати 31.01.94 г. формат 60x84/16. Бумага писч.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,6. Уч.-изд.л. 1,75. Тираж 400 экз.
Заказ № 280. Цена договорная. Отпечатано на ротативе Брестского
политехнического института. 224017, Брест, ул. Московская, 267.