

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

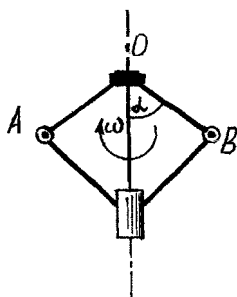
КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению курсовой работы
по теоретической механике

*«Динамика материальной точки
и механической системы»*

для студентов специальности Т.03.01.



Брест 1999.

У 531.32(07)
М54

При изучении курса теоретической механики раздел «Динамика» является важнейшим. В данном издании приведены задания, исходные данные и примеры решения задач из разделов динамики, имеющих практическую значимость для общетехнической подготовки студентов механических специальностей.

Основная цель методических указаний — активизировать самостоятельную работу студентов при изучении раздела «Динамика».

Составители: Борис Григорьевич Холодарь, доцент, к.т.н.,
Виталий Михайлович Хвисевич, доцент, к.т.н.

Общие положения.

Выполнение курсовой работы имеет целью оказать помощь студенту в освоении и закреплении материала по основной части курса ТМ — динамике механических систем. Предполагается, что выполнение курсовой работы вместо традиционных расчётно-графических работ позволяет студентам более глубоко воспринять материал в целом и его отдельных разделов в связи с комплексным характером предлагаемых заданий и необходимостью при их выполнении использовать материал нескольких разделов курса.

Задачи реализованы на схемах, которые являются идеализациями некоторых типичных элементов механизмов, используемых в машиностроении. Вместе с тем, предлагаемые схемы делают возможной сформулировать и более узкие задачи, что позволит учесть особенности индивидуальной подготовки и развития студентов.

Материал заданий соответствует объёму программы по курсу теоретической механики ([1] — [3]). Постановка задач, их схемы в значительной степени заимствованы из [3].

Вся курсовая работа состоит из решения трех заданий. Ниже представлены их варианты, кратко обсуждаются способы решения и рассматриваются примеры.

Задание Д-1.

Вынужденные колебания одномассовой системы.

Масса $m = 2$ кг, установленная на системе пружин (рис. 1), до момента времени $t = 0$ находилась в состоянии статического равновесия. При $t = 0$

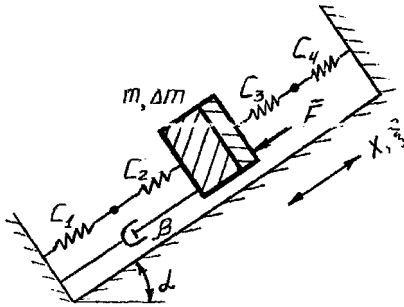


Рис. 1

механическая система получает возбуждение (силовое или кинематическое) и одновременно к массе добавляется $(+\Delta m)$ или снимается с нее $(-\Delta m)$ дополнительная масса $\Delta m = 1$ кг. Кинематическое возбуждение задается одним из трех законов:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \ddot{\xi}_0 \sin \omega t, & \dot{\xi} &= \dot{\xi}_0 \cos \omega t, \\ \ddot{\xi} &= \ddot{\xi}_0 \sin \omega t, & \text{причём } \dot{\xi}_0 &= \xi_0 \omega, \\ \ddot{\xi} &= -\dot{\xi}_0 \omega \cos \omega t & \text{а силовое - законом} \end{aligned}$$

$F = F_0 \sin \omega t$. Движение груза происходит в сопротивляющейся среде с линейным демпфированием $R = -\beta V$, пропорциональным скорости смещения груза относительно основания.

Параметры механической системы и возбуждения заданы в табл. 1.

В табл. 1 прочерки в колонках c_2 , c_3 , c_4 следует понимать как присутствие вместо пружины бесконечно жесткого элемента. Знаки "+" в колонках ξ , $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$, F указывают на конкретный характер возбуждения.

При проведении расчетов принять $c_1 = 1000$ Н/см, $c_2 = 2c_1$, $c_3 = c_1/3$, $c_4 = c_1/4$. Значения ξ_0 и F_0 равны одной пятой части статического смещения движущегося груза и его веса Mg соответственно.

При выдаче задания в группах преподаватель конкретизирует положительные направления осей x и ξ , значения частоты возбуждения ω и коэффициента сопротивления β .

Пользуясь исходными данными, требуется определить:

1. частоту (рад/с, Гц) и период собственных, свободных и вынужденных колебаний системы, частоту и период биений.
2. наибольшее и наименьшее значения абсолютного перемещения, скорости и ускорения груза во время движения
3. наибольшее абсолютное смещение точки соединения пружин с жесткостями c_1 и c_2 ;
4. наибольшие усилия в пружинах и демпфере;

5. наибольшую силу, действующую на основание, к которому прикреплен демпфер;

Для определения соответствующих величин следует воспользоваться их графическим представлением в пределах 1.5 — 2.0 периодов на частоте биений. Результаты свести в таблицу. Для контроля правильности построения графиков значения абсолютных и относительных перемещений, скоростей и ускорений, а также усилий в пружинах и демпфере для момента времени $t=0$ должны быть вычислены предварительно.

Таблица 1

Вар.	α	Δt	c_2	c_3	c_4	ξ	$\dot{\xi}$	$\ddot{\xi}$	F
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>
1	90	+	-	+	+	+			
2	60	-	+	+	-		+		
3	30	+	-	-	+			+	
4	90	-	+	+	+				+
5	60	+	-	+	+	+			
6	30	-	+	-	+		+		
7	90	+	-	+	-			+	
8	60	-	+	+	-				+
9	30	+	-	-	+	+			
10	90	-	+	+	-		+		
11	60	+	-	+	+			+	
12	30	-	+	-	+				+
13	90	+	-	-	+	+			
14	60	-	+	+	+		+		
15	30	+	-	+	-			+	
16	90	-	+	-	+				+
17	60	+	-	+	-	+			
18	30	-	+	+	+		+		
19	90	+	-	-	+			+	
20	60	-	+	+	-				+
21	30	+	-	+	-	+			
22	90	-	+	-	+		+		
23	60	+	-	+	-			+	
24	30	-	+	+	-				+

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>
25	90	+	-	-	+	+			
26	60	-	+	-	+		+		
27	30	+	-	+	+			+	
28	90	-	+	+	-				+
29	60	+	-	+	+	+			
30	30	-	+	-	+		+		

При подготовке к выполнению задания необходимо проработать следующие вопросы:

- абсолютное, относительное, переносное движения точки;
- теоремы о сложении скоростей и ускорений при сложном движении точки;
- основные уравнения динамики абсолютного и относительного движения точки;
- вывод дифференциального уравнения прямолинейных колебаний точки;
- решение линейных дифференциальных уравнений;
- основные положения теории колебательного движения точки (собственные, свободные и вынужденные колебания, их дифференциальные уравнения и их решения, частота, период, декремент колебаний, резонанс, биения, коэффициент динамичности).

Чтобы дать ответы на вопросы задачи, необходимо осуществить вывод и решение дифференциального уравнения (ДУ) колебаний точки при соответствующим образом сформулированных начальных условиях.

К составлению ДУ можно подойти с двух точек зрения — считать ось x абсолютной, неподвижной в пространстве, или считать ее подвижной, смещающейся вместе с основанием. Соответственно под x будем тогда понимать или абсолютное, или относительное перемещения, а для вывода ДУ использовать либо формулировку второго закона Ньютона, либо формулировку динамической теоремы Кориолиса.

В обоих случаях начало координат для оси x удобно поместить в точке, соответствующей равновесному состоянию системы грузов на пружинах, так как в этом случае правая часть ДУ будет наиболее простой. Непосредственно перед выводом уравнений необходимо систему пружин заменить одной пружиной эквивалентной жесткости по формулам.

$$\frac{1}{c_3} = \sum_i \frac{1}{c_i} \quad (\text{последовательное соединение});$$

$$c_3 = \sum_i c_i \quad (\text{параллельное соединение}).$$

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу (рис. 2): к грузу массы m , установленному на пружине жесткости c , добавляется дополнительная масса Δm и одновременно основание начинает двигаться по закону $\xi = \xi_0 \cos \omega t$. Определить закон движения грузов.

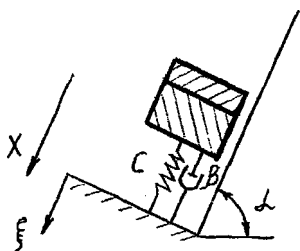


Рис. 2

Вначале рассмотрим первый способ, считая ось x абсолютной.

На движущуюся массу $m + \Delta m$ действуют силы веса, восстанавливающая сила в пружине \bar{F}_e и сила сопротивления \bar{R} . Для удобства определения \bar{F}_e и начального условия x_0 изобразим пружину в трех состояниях — исходном недеформированном, сжатой статической весовой нагрузкой и с дополнительным смещением верхнего конца на величину x (рис. 3). Из рисунка видно, что смещение концов пружины друг относительно друга составит

$$\Delta = f_{cm} + x = f_1(m) + f_2(\Delta m) + x.$$

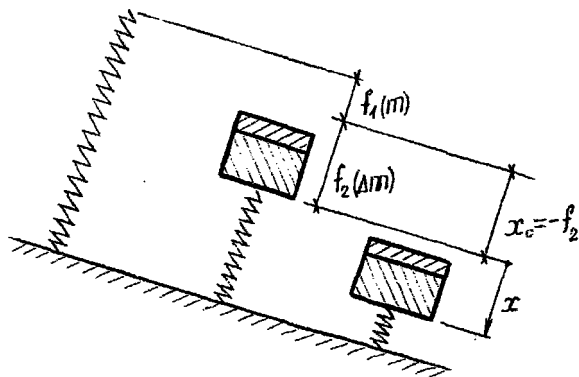


Рис. 3

Если основание подвижное, то при ξ и x , совпадающих по направлению:

$$\Delta = f_{cm} + x - \xi,$$

и тогда восстанавливающая сила равна:

$$F = c(f_{cm} + x - \xi).$$

Так как амортизатор закреплен между грузом и подвижным основанием, то сила сопротивления будет пропорциональна

$$\text{скорости их относительного смещения, то есть } R = \beta V_r = \beta \left(\dot{x} - \dot{\xi} \right).$$

Учитывая сказанное, находим

$$(m + \Delta m)\ddot{x} = (m + \Delta m)g \sin \alpha - c(f_{cm} + x - \xi) - \beta(\dot{x} - \dot{\xi}).$$

В равновесии ($x = \xi = \dot{x} = \dot{\xi} = \ddot{x} = \ddot{\xi} = 0$) имеем $(m + \Delta m)g \sin \alpha - cf_{cm} = 0$, поэтому эти слагаемые уходят из уравнения, и тогда получаем ДУ вида:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = k^2\xi + 2n\dot{\xi}, \quad (1)$$

где $k^2 = \frac{c}{m + \Delta m}$, $2n = \frac{\beta}{m + \Delta m}$.

Сформулируем начальные условия.

Так как при $t=0$ грузам не была придана начальная скорость, то $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0$. Для определения $x(0) = x_0$ достаточно посмотреть на рис. 3, откуда видно, что при $t=0$ грузы находились в отрицательной части оси x на расстоянии $f_2 = \frac{\Delta mg \sin \alpha}{c}$, то есть $x_0 = -\frac{\Delta mg \sin \alpha}{c}$.

Так как уравнение (1) линейное, то его решение имеет вид:

$$x = x^* + x^{**},$$

где x^{**} может быть найдено по виду правой части уравнения (1):

$$x^{**} = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Находим \dot{x} , \ddot{x} и подставив в ДУ получаем:

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t + 2n(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) + k^2 A \cos \omega t + k^2 B \sin \omega t = \\ = k^2 \xi_0 \cos \omega t - 2n \xi_0 \sin \omega t, \end{aligned}$$

откуда приходим к уравнениям для определения A и B :

$$\begin{aligned} (k^2 - \omega^2)A + 2n\omega B &= k^2 \xi_0, \\ -2n\omega A + (k^2 - \omega^2)B &= -2n\omega \xi_0. \end{aligned}$$

Решение x^* удобно взять в виде

$$x^* = e^{-nt}(D_1 \cos k_1 t + D_2 \sin k_1 t),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ — круговая частота свободных затухающих колебаний.

При ранее найденных A и B можно найти теперь постоянные D_1 и D_2 из начальных условий задачи.

Используя числовые данные своего варианта, определяем величины k , ω , n , f_{cm} , ξ_0 , A , B , D_1 , D_2 и записываем выражения для кинематических параметров x , \dot{x} , \ddot{x} , сил F_θ и R , силы на основании, к которому прикреплен демпфер $F_{осн} = F_{\theta 1,2} + R$ (в рассмотренном примере эта сила равна $F_{осн} = F_\theta + R$), и с помощью составленной на одном из алгоритмических

языков программы или используя известные математические пакеты (например, DERIVE, MERCURY и др.), строим графики соответствующих функций для участка времени $0 \div T_{\Pi}$, где время построения T_{Π} определяем как

$$T_{\Pi} = (1,5 \div 2,0) \frac{2\pi}{|k - \omega|}, \quad (k \neq \omega).$$

Найденные по п.1-6 задания величины сводим в таблицу.

При получении числовых значений следует проверять размерности используемых физических величин. Чтобы избежать ненужных ошибок, лучше всего перейти к размерности системы СИ при формулировке задачи.

Теперь рассмотрим решение задачи вторым способом, считая ось x подвижной (то есть, принимая, что $x = x_r$ — относительное смещение точки).

В этом случае по заданному движению основания находим переносное ускорение $a_e = \ddot{x}_e = \ddot{\xi}$ и соответствующую ему переносную силу инерции $\bar{\Phi}_e$, направленную противоположно ускорению \ddot{x}_e . Эту силу согласно основному уравнению динамики относительного движения следует добавить к действующим на точку силам, и тогда можно будет записать ДУ относительного движения в виде:

$$m\ddot{x}_r = \bar{G} + \bar{F}_e + \bar{R} + \bar{\Phi}_e.$$

В отличие от рассмотренного выше способа здесь $R = \beta V_r = \beta \dot{x}_r$, $F_e = c(f_{cm} + x_r)$.

В разбираемом примере $\dot{\xi} = -\xi_0 \omega^2 \cos \omega t$, и поэтому получаем

$$(m + \Delta m)\ddot{x}_r = (m + \Delta m)g \sin \alpha - c(f_{cm} + x_r) - \beta \dot{x}_r + (m + \Delta m)\xi_0 \omega^2 \cos \omega t.$$

После упрощений ДУ примет вид:

$$\ddot{x}_r + 2n\dot{x}_r + k^2 x_r = \xi_0 \omega^2 \cos \omega t.$$

при начальных условиях

$$x_r(0) = x_{r0} = -\frac{\Delta mg \sin \alpha}{c},$$

$$\dot{x}_r(0) = \dot{x}_a(0) - \dot{\xi}(0) = 0 + \xi_0 \omega \sin(\omega 0) = 0.$$

Условие для $x_r(0)$ понятно из предыдущего рассмотрения. При получении условия для $\dot{x}_r(0)$ мы учитываем, что для абсолютной скорости точки имеет место соотношение:

$$V(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}_e(0) + \dot{x}_r(0) = \dot{\xi}(0) + \dot{x}_r(0) = 0.$$

Полученное уравнение является классическим и рассмотрено во всех учебниках и пособиях по теоретической механике. Найдя x_r , при определении требуемых по п.1-2 задания параметров следует учесть, что абсолютное перемещение равно $x_a = x_r + \xi$.

Задание Д2.

Определение давления движущихся тел на связи механической системы.

Посередине вращающегося в подшипниках вертикально установленного вала AB закреплена однородная горизонтальная пластина так, что ось вала проходит через точку 1, 2 или 3 пластины. На пластине имеется желоб (направляющая) DE , по которому из положения D в положение E может двигаться точечная масса. Исходная скорость вращения вала $n_0 = 1000$ об/мин направлена против часовой стрелки. При $t = 0$ к валу прикладывается внешний момент $M_z(t)$, направленный противоположно вращению вала. В момент времени $t_1 = t_2/2$ точечная масса начинает перемещаться вдоль желоба под действием некоторой внутренней для рассматриваемой системы силы $F_{\text{об}}$, направленной всегда по касательной к желобу. Движение точки описывается одним из заданных законов относительного перемещения $s_r(t)$, скорости $V_r(t)$ или ускорения $a_r(t)$. Сопротивление движению точки и пластины отсутствует.

Для момента времени t_2 следует определить:

1. величину и направление движущей точку силы $F_{\text{об}}$;
2. величину и направление бокового давления точки на стенку желоба;
3. давление вала на опоры.

При проведении расчетов принять массу точку $m = 0,1$ кг, массу пластины $M = 2$ кг, длину вала $AB = 4R$, длину стороны или радиус пластины $R = 20$ см, время $t_2 = 2$ с. Вал считается невесомым.

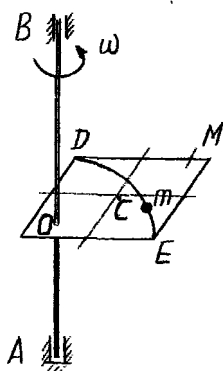


Рис. 4

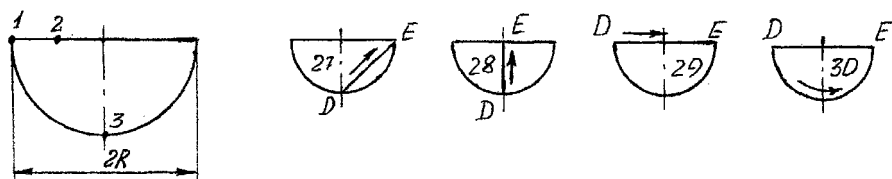
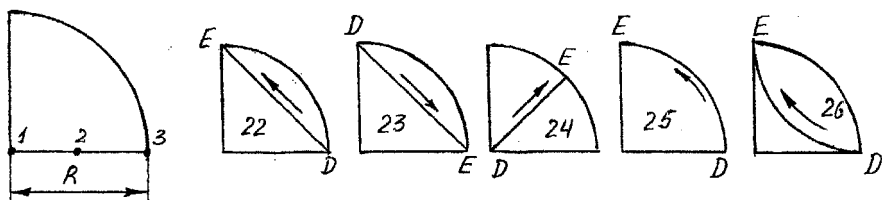
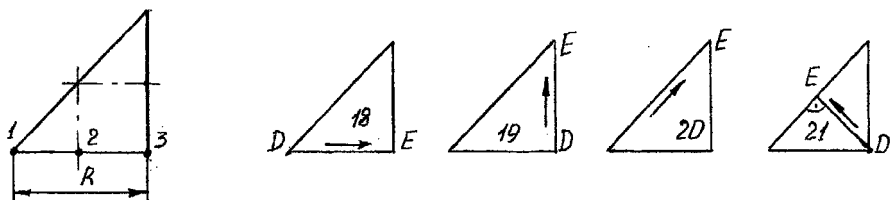
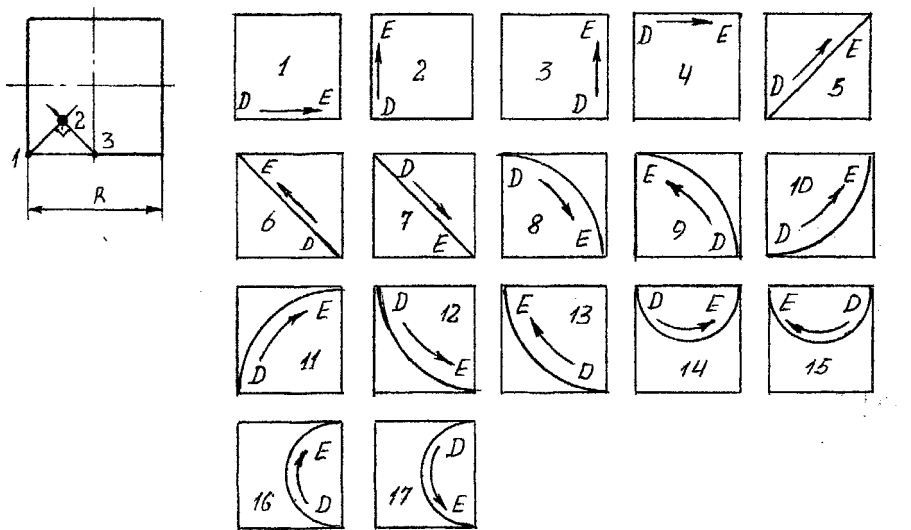
Варианты задания указаны в табл. 2, схема задачи — на рис. 4. Форма пластины и желоба показаны на схемах рис. 5.

Законы изменения вращающего момента $M_z(t)$ приведены на схемах рис. 6, причем численно величина $M_0 = 10J_0$, где J_0 — момент инерции пластины относительно оси вращения. Законы изменения $s_r(t)$, $V_r(t)$ или

Таблица 2

Номер варианта	Схема пластины	Момент Н*м	Относительное движение		
			S_r , см	V_r , см/с	a_r , см/с ²
1	1	1	1		
2	2	2	2		
3	3	3	3		
4	4	4		1	
5	5	5		2	
6	6	1		3	
7	7	2			1
8	8	3			2
9	9	4			3
10	10	5	1		
11	11	1	2		
12	12	2	3		
13	13	3		1	
14	14	4		2	
15	15	5		3	
16	16	1			1
17	17	2			2
18	18	3			3
19	19	4	1		
20	20	5	2		
21	21	1	3		
22	22	2		1	
23	23	3		2	
24	24	4		3	
25	25	5			1
26	26	1			2
27	27	2			3
28	28	3	1		
29	29	4	2		
30	30	5	3		

$a_r^{\pm}(t)$ показаны на схемах рис.7, причем значения s_0 , V_0 или a_0 следует подобрать так, чтобы при $t = t_2$ движущаяся точка оказалась бы в положении E.



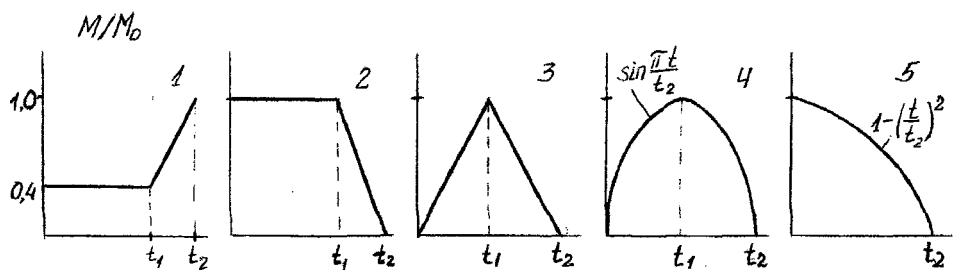


Рис. 6

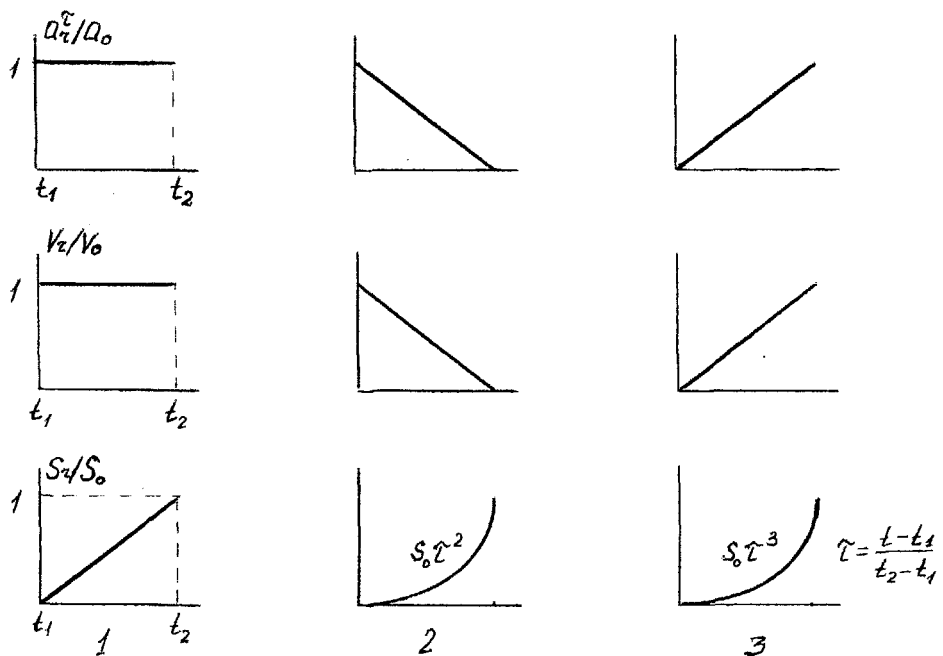


Рис. 7

Выбор точки пластины (1,2,3), через которую проходит ось вала, осуществляется преподавателем при выдаче задания в группах.

Задача охватывает следующие вопросы:

- моменты инерции твердых тел;
- теорема об изменении кинетического момента;
- динамическая теорема Кориолиса;
- принцип д'Аламбера для механической системы;
- уравнения вращательного движения тела;
- интегрирование дифференциальных уравнений движения точки.

Чтобы ответить на два первых вопроса задачи, необходимо использовать теорию относительного движения точки (кинематическая и динамическая теоремы Кориолиса), а для ответа на третий вопрос удобнее всего воспользоваться принципом д'Аламбера для механической системы.

Определение соответствующих сил инерции точки и пластины сможем провести, если найдем составляющие абсолютного ускорения точки, угловой скорости и ускорения пластины. При этом компоненты относительного движения точки в задаче легко находятся по исходным данным независимо от характера движения пластины. Угловую скорость пластины найдем из теоремы об изменении кинетического момента в интегральной форме (предварительно должна быть определена инерционная характеристика пластины — ее момент инерции), а угловое ускорение ε — путем последующего дифференцирования ω либо непосредственно из теоремы об изменении кинетического момента в дифференциальной форме. После этого определяется переносное и кориолисово ускорения точки, величина и направление сил инерции точки, главный вектор и главный момент сил инерции пластины. Далее из соответствующих уравнений определяются и реактивные силы a , следовательно, и давления на желоб и подшипниковые узлы вала.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ.

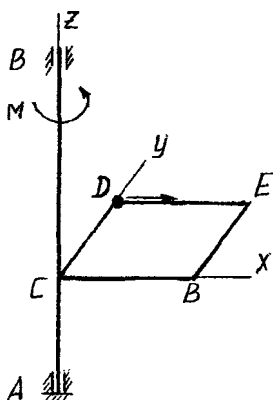


Рис. 8

В качестве примера рассмотрим решение следующей задачи (рис.8): пластина начинает движение под действием момента

$$M_z^a(t) = M_0 \frac{t}{t_1}, \quad 0 < t \leq t_1, \quad (1)$$

$$M_z^a(t) = M_0, \quad t_1 < t \leq t_2$$

причем при $t \leq t_1$ точечная масса m неподвижна, а при $t > t_1$ — движется по закону $a_r = a_0(1 - \tau)$. Пластина квадратная, со стороной R (т.е., $DE = R$), масса пластины M , масса точки m . Требуется определить при $t = t_2$ величину движущей точки

силы, давление точки на желоб и реакции подшипников вала.

Вначале определим момент инерции пластины относительно оси вращения J_z^{na} путем интегрирования или использования справочных данных и теоремы Штейнера-Гюйгенса. Так как пластина имеет простую форму, легко найти J_0 путем интегрирования:

$$\begin{aligned} J_z^{na} &= \int_0^R \int_0^R (x^2 + y^2) \rho h dx dy = \rho h \int_0^R \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) dy = \\ &= \rho h \int_0^R \left(\frac{R^3}{3} + Ry^2 \right) dy = \rho h \left(\frac{R^4}{3} + R \frac{R^3}{3} \right) = \rho h \frac{2}{3} R^4, \end{aligned}$$

где h — толщина пластины, ρ — плотность материала.

Так как $M = \rho h R^2$, то

$$J_z^{na} = \frac{2}{3} MR^2.$$

Найдем параметры относительного движения точки, используя исходный закон для ускорения a_r . Так как заданное относительное ускорение точки является касательным, то

$$V_r = \int a_r dt = \int a_0 (1 - \tau) (t_2 - t_1) d\tau = a_0 \left(\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) (t_2 - t_1) + C_1,$$

$$s_r = \int \left[a_0 \left(\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) (t_2 - t_1) + C_1 \right] dt = \int \left[a_0 \left(\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) (t_2 - t_1) + C_1 \right] (t_2 - t_1) d\tau =$$

$$= a_0 \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{6} \right) (t_2 - t_1)^2 + C_1 (t_2 - t_1) \tau + C_2.$$

Для определения C_1 и C_2 используем начальные условия для относительного движения: $s_r(t_1) = 0$, $V_r(t_1) = 0$, или $s_r(\tau = 0) = 0$, $V_r(\tau = 0) = 0$.

Тогда находим: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Следовательно,

$$V_r = a_0 \left(\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) (t_2 - t_1); \quad s_r = a_0 \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{6} \right) (t_2 - t_1)^2.$$

Найдем a_0 из условия $s_r(t_2) = R$. Так как $\tau(t_2) = 1$, то имеем $R = a_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) (t_2 - t_1)^2$ и, следовательно, $a_0 = \frac{3R}{(t_2 - t_1)^2}$.

Приступим к определению угловой скорости и углового ускорения пластины. Используем запись теоремы об изменении кинетического момента:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e, \quad (2)$$

где K_z — кинетический момент, а M_z^e — момент внешних сил относительно оси вращения z . Так как ось z вертикальна, то силы тяжести точки и пластины не создают моменты относительно оси z . Моменты относительно оси z от реактивных нагрузок на опорах также отсутствуют. Следовательно, момент M_z^e равен только приложенному активному моменту $M^a(t)$.

После интегрирования (2) имеем:

$$K_z(t) - K_z(0) = L_z^e(t), \quad (3)$$

где импульс момента

$$L_z^e = \begin{cases} M_0 \frac{t^2}{2t_1} & \text{при } 0 \leq t \leq t_1 \\ M_0 \left(t - \frac{t_1}{2} \right) & \text{при } t_1 \leq t < t_2 \end{cases} \quad (4)$$

На первом этапе движения $0 < t \leq t_1$ кинетический момент равен

$$K_z = K_z^{nz} + K_z^m = J_z^{nz} \omega + mR^2 \omega = (J_z^{nz} + mR^2) \omega,$$

поскольку точка остается неподвижной по отношению к желобу.

Так как при $t = 0$ в рассматриваемом примере $\omega(0) = 0$, то $K_z(0) = 0$, и находим

$$\omega(t) = \frac{M_0 t^2}{2(J_z^{nz} + mR^2)t_1}.$$

При $t > t_1$ для движущейся точки ее момент количества движения становится переменным, и его можно найти как сумму моментов количеств движения в переносном и относительном движении (рис.9):

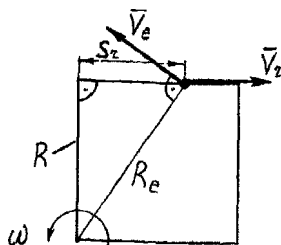


Рис. 9

$$K_z^m = -mRV_r + m(R^2 + s_r^2)\omega. \quad (5)$$

Знак минус перед первым слагаемым взят потому, что соответствующий момент направлен по часовой стрелке (противоположно принятому положительному направлению).

Используя (3)-(5), получаем:

$$J_z^{nn}\omega + m(R^2 + s_r^2)\omega - mRV_r = K_z(0) + M_0\left(t - \frac{t_1}{2}\right) = M_0\left(t - \frac{t_1}{2}\right).$$

Отсюда находим угловую скорость:

$$\omega = \frac{M_0\left(t - \frac{t_1}{2}\right) + mRV_r}{J_z^{nn} + m(R^2 + s_r^2)}. \quad (6)$$

При $t = t_2$ имеем $s_r = R$, $V_r = \frac{3}{2} \frac{R}{t_2 - t_1}$ и значение $\omega(t_2)$ легко определяется.

Угловое ускорение пластины на участке $t_1 < t < t_2$ находим, дифференцируя (6):

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{M_0 + mRa_r}{J_z^{nn} + m(R^2 + s_r^2)} \frac{\left[M_0\left(t - \frac{t_1}{2}\right) + mRV_r \right] 2ms_r V_r}{\left(J_z^{nn} + m(R^2 + s_r^2) \right)^2}. \quad (7)$$

При $t = t_2$ имеем $a_r(t_2) = 0$, остальные величины определялись выше. Поэтому $\varepsilon(t_2)$ можно получить прямым вычислением.

Теперь переходим к определению всех составляющих абсолютного ускорения движущейся точки.

В рассматриваемой задаче нормальная компонента относительного ускорения отсутствует, так как движение по желобу — прямолинейное.

Найдем компоненты переносного ускорения:

$$\bar{a}_e = a_e^r + \bar{a}_e^n, \quad a_e^r = \varepsilon R_e, \quad a_e^n = \omega^2 R_e, \quad R_e = \sqrt{R^2 + s_r^2}.$$

Модуль кориолисова ускорения равен $a_c = 2\omega V_r$, а его направление определяем по правилу Жуковского.

Все компоненты ускорения точки показаны на рис.10.

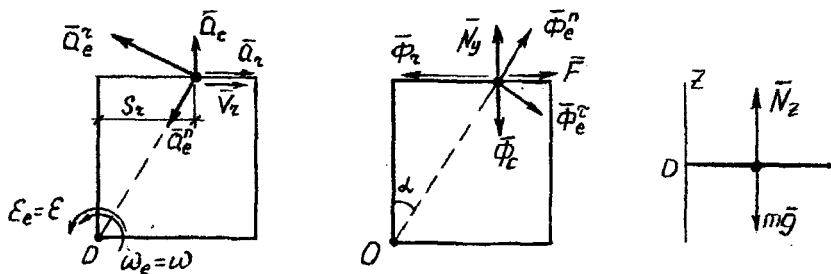


Рис. 10

Для определения движущей точку силы \vec{F} и ее давления на пластину и желоб запишем основное уравнение динамики относительного движения точки

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c, \quad (8)$$

или

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c + \vec{\Phi}_r = 0,$$

где $\vec{\Phi}_e$, $\vec{\Phi}_c$, $\vec{\Phi}_r$ — переносная, кориолисова и относительная силы инерции, направленные противоположно соответствующим ускорениям (рис.10), \vec{F} — движущая сила, $\vec{N} = \vec{N}_z + \vec{N}_y$ — реакция жлоба, причем ее удобно разложить на две составляющие (в плоскости пластины и перпендикулярно к ней), $\vec{G} = m\vec{g}$ — вес движущейся точки.

В виде проекций на оси координат уравнение (8) примет вид:

$$\sum X = F + \Phi_e^x \cos \alpha + \Phi_e^z \sin \alpha - \Phi_r = 0,$$

$$\sum Y = N_y - \Phi_e^x \sin \alpha + \Phi_e^z \cos \alpha - \Phi_c = 0,$$

$$\sum Z = -G + N_z = 0.$$

Из этих уравнений находим F , N_z , N_y при $t = t_2$. Давление точки на желоб равно по модулю $Q = \sqrt{N_z^2 + N_y^2}$ и направлено противоположно равнодействующей $\vec{N} = \vec{N}_z + \vec{N}_y$.

Переходим теперь к определению реакций подшипниковых узлов, используя принцип д'Аламбера. Здесь можно поступить двояко. В первом способе в качестве объекта можно рассматривать всю механическую систему,

состоящую из пластины и движущейся по ней точки, ввести в рассмотрение внешние силы, действующие на систему (силы веса, реакции опор), добавив

к ним силы инерции пластины и точки (для последней это будут силы $\bar{\Phi}_e^z$,

$\bar{\Phi}_e^n$, $\bar{\Phi}_c$, $\bar{\Phi}_r$, так как в сумме они представляют как раз силу инерции

д'Аламбера для точки). Силы \bar{N} и \bar{F} в расчетную схему не войдут, так как они являются внутренними силами для системы.

Во втором способе можно для рассмотрения выбрать только пластину,

а действие на нее движущейся точки учесть силами \bar{Q} и $\bar{F}^* = -\bar{F}$, то есть, переведя внутренние силы для системы в разряд внешних для пластины. Оба подхода дадут одинаковые результаты, так как из (8) видно, что

$$\left(\bar{F}^* + \bar{Q}\right) = -\left(\bar{F} + \bar{N}\right) = \bar{G} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c + \bar{\Phi}_r.$$

Выберем второй способ, как более простой. Соответствующая расчетная схема показана на рис.11.

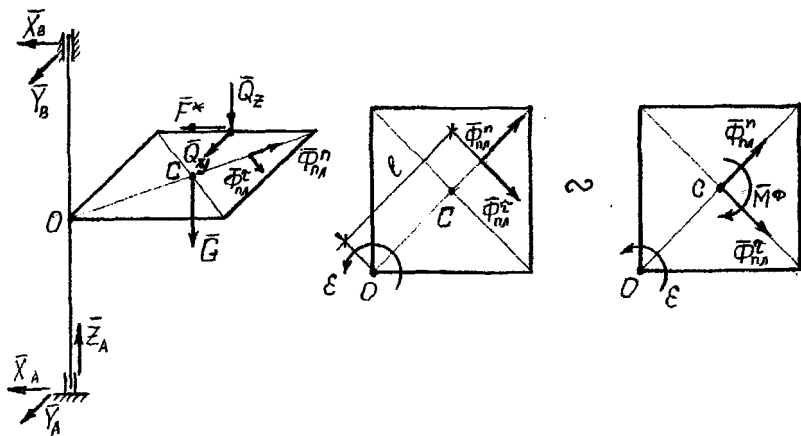


Рис.11

Силы инерции пластины $\bar{\Phi}_{nl}^n$ и $\bar{\Phi}_{nl}^z$ определяются через компоненты абсолютного ускорения центра масс пластины ($OC = R \frac{\sqrt{2}}{2}$):

$$\Phi_{nl}^n = M\omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \Phi_{nl}^z = M\epsilon R \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Касательная сила инерции $\bar{\Phi}_{nl}^{\tau}$ приложена в центре тяжести эшоры распределенных по площади пластины касательных сил инерции ее точек.

Плечо силы $\bar{\Phi}_{nl}^{\tau}$ относительно точки O можно найти из условия

$$J_{nl}\varepsilon = \Phi_{nl}^{\tau}l,$$

где J_{nl} — найденный ранее момент инерции пластины относительно оси вращения.

Во многих случаях удобнее силы инерции перенести в центр тяжести тела (то есть считать, что они как бы приложены в центре тяжести тела), но дополнительно в этом случае необходимо ввести в рассмотрение момент сил инерции M^{Φ} относительно центра тяжести тела (в нашей задаче $M^{\Phi} = J_c\varepsilon = M\frac{R^2}{6}\varepsilon$ так как момент центробежных сил инерции равен нулю).

Для определения пяти неизвестных реактивных сил составим необходимые уравнения:

$$\sum X = -X_A - X_B - F^* + \Phi_{nl}^n \cos 45^\circ + \Phi_{nl}^{\tau} \sin 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y = -Y_A - Y_B - Q_y + \Phi_{nl}^n \sin 45^\circ - \Phi_{nl}^{\tau} \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Z = Z_A - G - Q_z = 0,$$

$$\sum M_X^{(A)} = Y_B 4R + Q_y 2R - Q_z R - \Phi_{nl}^n \sin 45^\circ 2R + \Phi_{nl}^{\tau} \cos 45^\circ 2R - G \frac{R}{2} = 0$$

$$\sum M_Y^{(A)} = -X_B 4R - F^* 2R + \Phi_{nl}^n \cos 45^\circ 2R + \Phi_{nl}^{\tau} \sin 45^\circ 2R + G \frac{R}{2} = 0.$$

Из этих уравнений находим компоненты реакций $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B,$ и радиальные реакции подшипников $N_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$ и $N_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$. Соответствующие давления на подшипниковые узлы будут равны по модулю и противоположны по направлению найденным реакциям.

Расчёт характеристик манипулятора

Механическая система, все элементы которой находятся в вертикальной плоскости, состоит из манипулятора и связанного с ним демпфирующе-разгрузочного устройства (ДРУ). Манипулятор состоит из двух звеньев, приводимых в движение независимыми приводами А и В, один из которых является внешним (привод звена 1). Предполагается, что двигатели манипулятора А и В обеспечивают такие законы изменения активных силовых факторов, развиваемых двигателями, при которых обеспечивается на промежутке времени $0 \leq t \leq \tau$ для звена 1 движение по заданному закону $f_1(t)$, а для звена 2 — перемещение захвата D, находящегося на его конце, строго по заданной прямой ON.

Схемы манипуляторов показаны на рис. 12-13, схемы ДРУ — на рис. 14. Звенья манипулятора считаются тонкими стержнями заданной длины и массы. Тела, изображенные на схемах в виде круга, считаются сплошными цилиндрами заданных диаметров и масс. Двигатели А и В считаются точечными массами ($m_A = m_B = 2$ кг). Величины масс тел 3,4,5 составляют $m_3 = 0$ кг, $m_4 = 6$ кг, $m_5 = 4$ кг. Радиусы колес равны $R_4 = 0,1$ м, $r_4 = R_5 = 0,05$ м. Остальные числовые данные в зависимости от варианта приведены в табл. 3. Длины участков ломаных стержней манипуляторов (например, в вариантах 7,8 и т.д.) обозначены через знак суммы (плюс), причем отсчет длин ведется от места расположения соответствующего двигателя. Жесткость пружины и коэффициент силы сопротивления вязких амортизаторов необходимо подобрать самостоятельно из условия, чтобы статическое смещение амортизатора при равновесии системы составляло не более 25% от его смещения во время рабочего хода механизма, а максимальное усилие амортизатора не превышало бы статическое усилие в пружине.

В начальный момент времени система находится в покое. Пружина деформированна на величину статического смещения. Для схем манипуляторов 1-8 и 9-16 закон движения ведущего звена 1 принять по указанию преподавателя в виде одной из зависимостей:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + (\varphi_k - \varphi_0) \cdot (10 - 15\tau + 6\tau^2) \tau^3, \\ \varphi &= \varphi_0 + (\varphi_k - \varphi_0) \cdot \left(\tau - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\tau \right), & \tau &= \frac{t}{T_k} \\ \varphi &= \varphi_0 + (\varphi_k - \varphi_0) \cdot (1 - \cos \pi\tau), \\ \varphi &= \varphi_0 + (\varphi_k - \varphi_0) \cdot \sin^2 \pi\tau, \end{aligned}$$

В расчётах время рабочего хода манипулятора T_k принять равным

$T_k = 2$ сек, значения φ_0 и φ_k указаны в табл. 3.

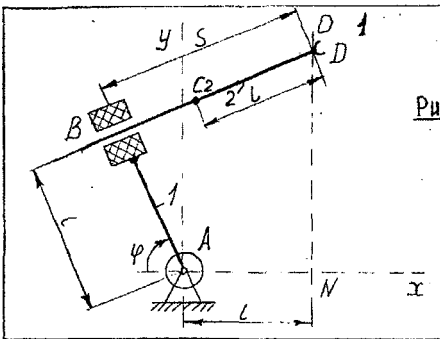
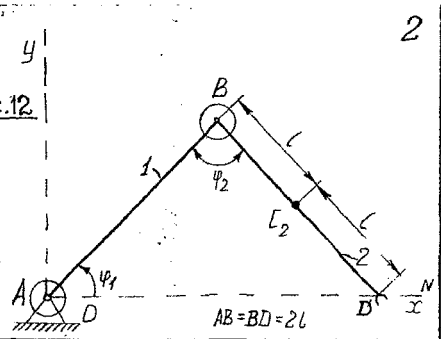
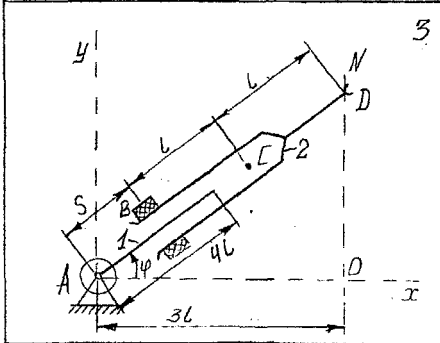


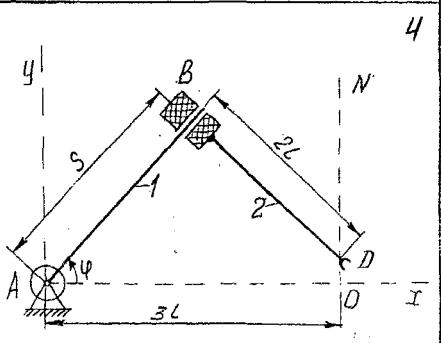
Рис. 12



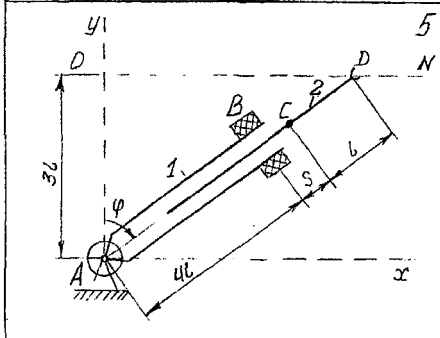
2



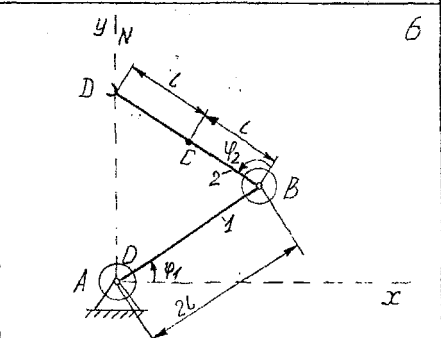
3



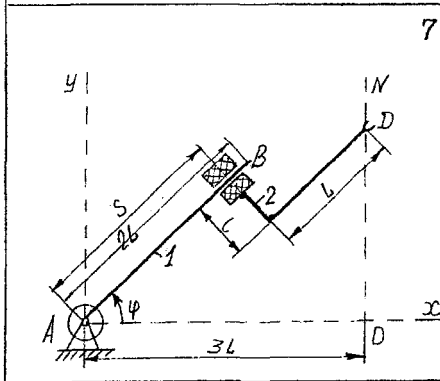
4



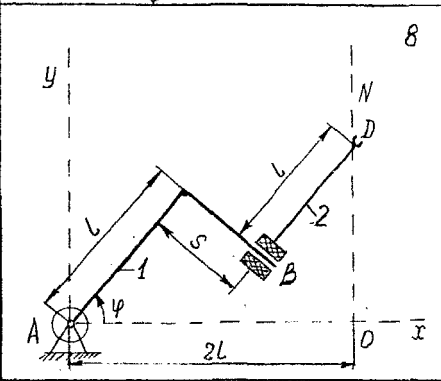
5



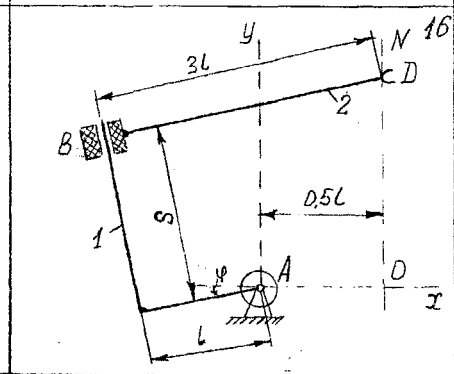
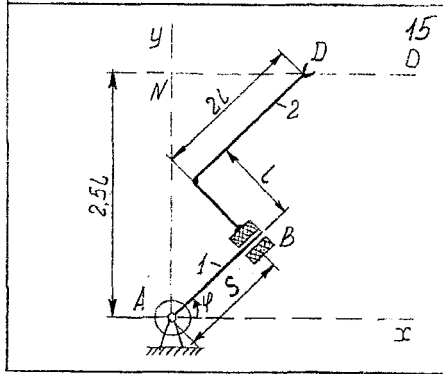
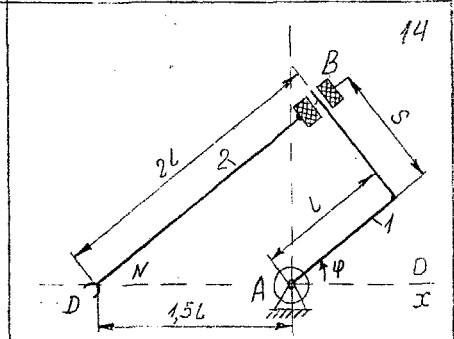
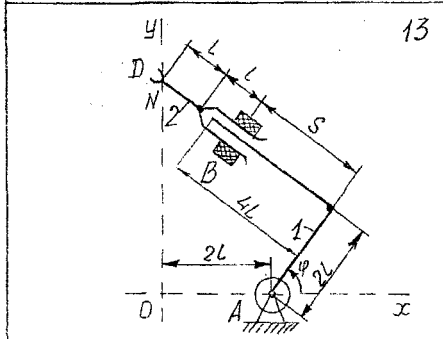
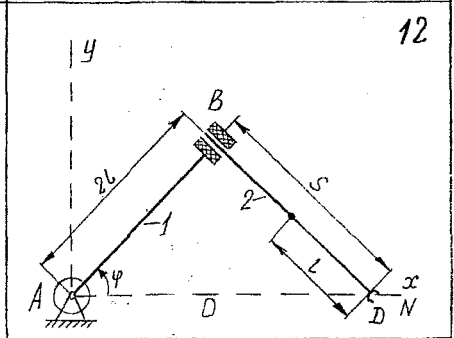
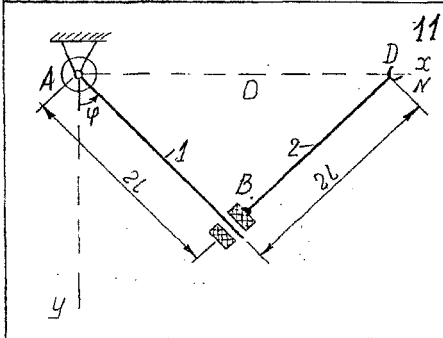
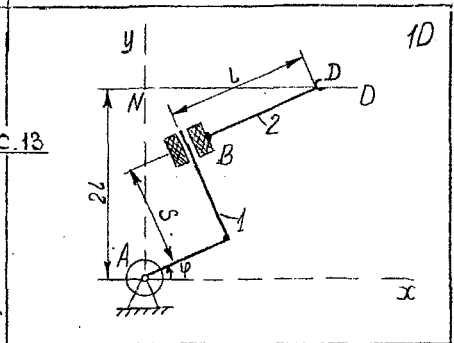
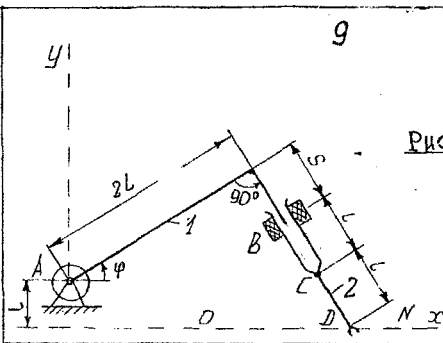
6



7



8



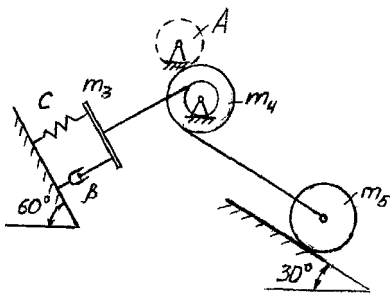


Схема 1

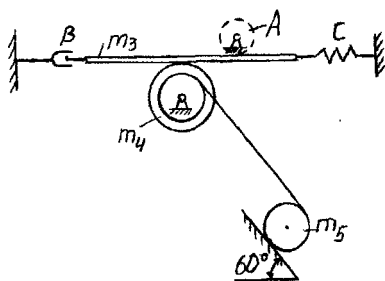


Схема 2

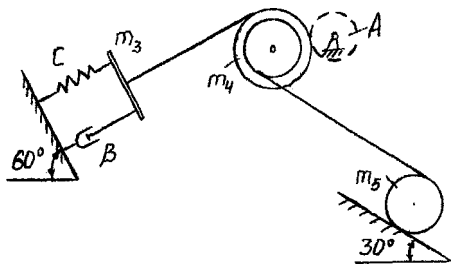


Схема 3

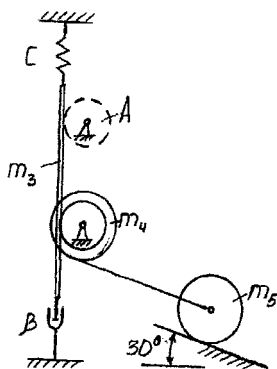


Схема 4

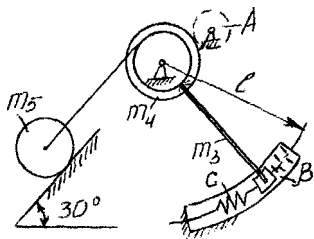


Схема 5

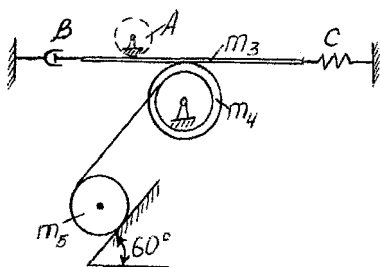


Схема 6

Номер варианта	Схема манипулятора	Схема ДРУ	m_1	m_2	l_1	l_2	l	φ_0	φ_k
			кг				м	рад	
1	1	1	4	4	1	4l	0,5	$\pi/3$	$2\pi/3$
2	2	2	4	2	2l	2l	0,3	0	$\pi/3$
3	3	3	3	3	4l	3l	0,2	0	$\pi/3$
4	4	4	4	2	2l	2l	0,5	$\pi/6$	$\pi/3$
5	5	5	3	3	4l	3l	0,3	0	$\pi/3$
6	6	6	4	2	2l	2l	0,4	$\pi/6$	$\pi/3$
7	7	1	5	2	5l	l+l	0,3	0	$\pi/3$
8	8	2	3	2	l+2l	l	0,4	0	$\pi/6$
9	9	3	4	2	2l+2l	2l	0,3	0	$\pi/6$
10	10	4	3	2	l+2l	l	0,4	$\pi/6$	$\pi/3$
11	11	5	3	2	3l	2l	0,3	$\pi/6$	$\pi/3$
12	12	6	4	2	2l	4l	0,4	$\pi/6$	$\pi/3$
13	13	1	3	3	2l+4l	2l	0,4	$\pi/4$	$\pi/2$
14	14	2	4	2	l+l	2l	0,5	$\pi/6$	$\pi/4$
15	15	3	3	2	3l	l+l	0,4	$\pi/3$	$\pi/2$
16	16	4	3	2	l+2l	3l	0,4	$\pi/6$	$\pi/3$
17	1	5	4	4	l	4l	0,5	$\pi/3$	$2\pi/3$
18	2	6	4	2	2l	2l	0,3	0	$\pi/3$
19	3	1	3	3	4l	3l	0,2	0	$\pi/3$
20	4	2	4	2	2l	2l	0,5	$\pi/6$	$\pi/3$
21	5	3	3	3	4l	3l	0,3	0	$\pi/3$
22	6	4	4	2	2l	2l	0,4	$\pi/6$	$\pi/3$
23	7	5	5	2	5l	l+l	0,3	0	$\pi/3$
24	8	6	3	2	l+2l	l	0,4	0	$\pi/3$
25	9	1	4	2	2l+2l	2l	0,3	0	$\pi/6$
26	10	2	3	2	l+2l	l	0,4	$\pi/6$	$\pi/3$
27	11	3	3	2	3l	2l	0,3	$\pi/6$	$\pi/3$
28	12	4	4	2	2l	4l	0,4	$\pi/6$	$\pi/3$
29	13	5	3	3	2l+4l	2l	0,4	$\pi/4$	$\pi/2$
30	14	6	4	2	l+l	2l	0,5	$\pi/6$	$\pi/4$

Пользуясь указанными исходными данными, следует для отрезка времени $0 \leq \tau \leq 1$ определить:

1) необходимый закон изменения во времени управляющих силовых факторов, развиваемых двигателями А и В для обеспечения заданной программы движения захвата;

2) требуемые полезные мощности двигателей;

3) реактивные усилия в связях тела 5 для времени t , когда момент, развиваемый двигателем А, максимален.

Задача охватывает следующие теоретические вопросы:

— дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоского движений твердого тела;

— теорема об изменении кинетической энергии;

— уравнения Лагранжа 2-го рода.

Наметим коротко план решения задачи.

Несмотря на наличие двух независимых приводов, система имеет одну степень свободы, так как движение захвата по заданной прямой ON накладывает связь (зависимость) на движение звена 2. Поэтому в первую очередь следует установить математический вид этой зависимости, исходя из геометрии манипулятора. После этого получим возможность описать всю кинематику механизма, так как закон изменения $\varphi(t)$ известен. Следовательно, необходимые усилия определяются как решение первой задачи динамики — найти силы по известному движению. Динамику системы можно описать либо с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода, либо разбив ее на части и составив дифференциальные уравнения движения каждого тела, ориентируясь на вид этого движения (поступательное, вращательное, плоское). Но во втором случае придется вводить в уравнения не только активные, но и все без исключения реактивные силы.

Следует иметь в виду, что фактически предположено, что все нити за время движения напряжены (растянуты), и это обстоятельство требовалось бы подтвердить дополнительным анализом результатов решения задачи на всем отрезке времени $0 \leq t \leq T_k$.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

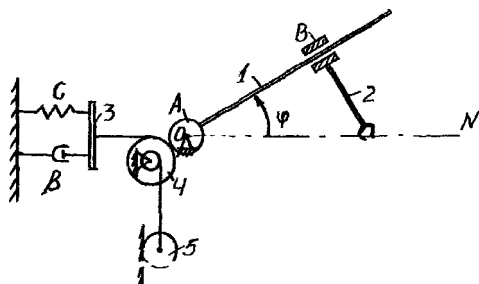


Рис. 15

В качестве примера рассмотрим ход решения задачи по схеме рис. 15.

Дано: $m_A, m_B, m_1, m_2, m_3 = 0, m_4, m_5, r_4, R_A, R_4, R_5, l_1, l_2,$

$$\varphi = \varphi_0 \left(1 - \cos \frac{\pi t}{T_k} \right),$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leq t \leq T_k.$$

Составим выражение для кинетической энергии механизма:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_A + T_B.$$

Для тел А,1,4, совершающих вращательное движение, кинетическая энергия определится по формуле

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (9)$$

Для тела 5, совершающего плоское движение, кинетическую энергию удобнее всего найти по теореме Кенига

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_5^2 + \frac{1}{2} J_5 \omega_5^2, \quad (10)$$

где V_5 — скорость центра масс, J_5 — момент инерции относительно центра масс.

Кинетическая энергия тела В определится по формуле:

$$T_B = \frac{1}{2} m_B V_B^2 = \frac{1}{2} m_B (V_{Be}^2 + V_{Br}^2), \quad (11)$$

поскольку В — точечная масса, а скорость ее является геометрической суммой переносной и относительной скоростей (в данном случае \vec{V}_{Be} и \vec{V}_{Br} взаимно перпендикулярны).

Кинетическая энергия тела 3 равна нулю, так как его массой мы пренебрегаем.

Определим моменты инерции тел:

$$J_A = \frac{m_A R_A^2}{2}; \quad J_1 = \frac{m_1 l_1^2}{12} + m_1 \left(R_A + \frac{l_1}{2} \right)^2; \quad J_4 = \frac{m_4 R_A^2}{2}; \quad J_5 = \frac{m_5 R_5^2}{2}. \quad (12)$$

Выразим скорости (линейные и угловые) точек и тел системы через скорость вращения двигателя А:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \dot{\varphi}; \quad \omega_4 = \dot{\varphi} \frac{R_A}{R_4}; \quad V_3 = \omega_4 R_4 = \dot{\varphi} R_A; \quad V_5 = \omega_4 r_4 = \dot{\varphi} \frac{R_A r_4}{R_4}; \\ \omega_5 = \frac{V_5}{R_5} = \omega_1 \frac{R_A r_4}{R_4 R_5}; \quad V_{Be} = (l_1 - s) \dot{\varphi}; \quad V_{Br} = \dot{s}. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом зависимостей (9)-(13) можно найти кинетическую энергию всех тел системы, кроме тела 2.

Тело 2 совершает плоское движение и его кинетическую энергию можно найти либо по теореме Кенига, аналогично (10), либо непосредственным интегрированием

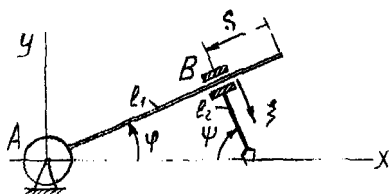


Рис. 16

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho \bar{V}_M^2 d\xi,$$

где ρ — погонная масса

стержня, \bar{V}_M — скорость его произвольной точки М, ξ — координата точки М, отсчитываемая вдоль стержня (в данном случае отсчет будем вести от тела В, см. рис. 16).

Имеем:

$$\begin{aligned} \vec{r}_M = \vec{r}_B + \vec{r}_{MB}, \\ x_M = (R_A + l_1 - s) \cos \varphi + \xi \sin \varphi, \\ y_M = (R_A + l_1 - s) \sin \varphi + \xi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_{x_M} &= [(R_A + l_1 - s) \sin \varphi + \xi \cos \varphi] \dot{\varphi} - \cos \varphi \dot{s}, \\ V_{y_M} &= [(R_A + l_1 - s) \cos \varphi + \xi \sin \varphi] \dot{\varphi} - \sin \varphi \dot{s}, \\ V_M &= [(R_A + l_1 - s)^2 + \xi^2] \dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 - 2\xi \dot{\varphi} \dot{s}, \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \left\{ [(R_A + l_1 - s)^2 + \frac{l_2^2}{3}] \dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 - l_2 \dot{\varphi} \dot{s} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Если использовать для вычисления T_2 теорему Кенига, то будем иметь:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\psi}^2,$$

$$\text{где } V_{C_2}^2 = \left[(R_A + l_1 - s)^2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 - l_2 \dot{\varphi} \dot{s}, \quad J_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$\dot{\psi} = -\dot{\varphi}$, что приводит, естественно, к выражению (14).

Кинетическая энергия всего механизма запишется как

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{m_A R_A^2}{2} + m_1 \left(\frac{l_1^2}{12} + \left(R_A + \frac{l_1}{2} \right)^2 \right) + \frac{m_4 R_A^2}{2} + \frac{3}{2} m_5 \frac{R_A^2 r_A^2}{R_4^2} \right] \dot{\varphi}^2 + \\ + \frac{1}{2} m_D \left[(l - s)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 \right] + \frac{1}{2} m_2 \left[\left[(R_A + l_1 - s)^2 + \frac{l_2^2}{3} \right] \dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 - l_2 \dot{\varphi} \dot{s} \right]. \quad (15)$$

Поскольку имеет место условие $y_D = 0$, то находим связь

$$l_2 = (R_A + l_1 - s) \operatorname{tg} \varphi,$$

отсюда

$$s = R_A + l_1 - \frac{l_2}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad (16)$$

$$\dot{s} = \frac{l_2 \dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi}. \quad (17)$$

Сейчас можно поступить по-разному: либо подставить s и \dot{s} из выражений (16) и (17) в (15) и свести задачу к одному уравнению Лагранжа 2-го рода для обобщенной координаты φ , либо использовать два уравнения Лагранжа по переменным φ и s , а затем в конце решения использовать зависимости (16) и (17). Второй путь в нашей задаче более удобен, так как проще приводит к выражениям для управляющих силовых факторов M_A и F_B .

Итак, используя (15), находим

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial s}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right).$$

Обозначим левые части уравнений Лагранжа через

$$Z_\varphi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad Z_s = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s}$$

и будем считать, что они у нас имеются.

Теперь определим обобщенные силы Q_φ и Q_s , соответствующие координатам φ и s . Это можно сделать несколькими способами (по аналитиче-

скому определению $Q_i = \sum_k \bar{F}_k \frac{\delta \bar{r}_k}{\delta q_i}$; по работе всех сил системы на выбранном возможном перемещении $Q_k = \frac{\delta A}{\delta q_k}$ (пользуясь понятием потенциальной энергии), но мы выберем второй, как наиболее наглядный.

Пойдём Q_s .

Для этого дадим координате s положительное возможное перемещение и определим работу сил системы. Работу будут давать здесь только силы веса тела В и тела 2, и движущая сила F_B (в данном конкретном случае все эти работы положительны)

$$\delta A = G_B \sin \varphi \delta s + G_2 \sin \varphi \delta s + F_B \delta s.$$

Следовательно,

$$Q_s = F_B + (G_B + G_2) \sin \varphi.$$

Аналогично определим и Q_φ , только здесь придется учесть работу большего числа сил:

$$\delta A = \delta A(G_1) + \delta A(G_B) + \delta A(G_2) + \delta A(G_5) + \delta A(F_{\text{упр}}) + \delta A(F_{\text{аморт}}) + \delta A(M_A).$$

Будем иметь:

$$\delta A(G_1) + \delta A(G_B) + \delta A(G_2) = (G_1 x_{C1} \delta \varphi - G_B x_B \delta \varphi - G_2 x_{C2} \delta \varphi = \\ - \left[G_1 \left(R_A + \frac{l_1}{2} \right) \cos \varphi + G_B (R_A + l_1 - s) \cos \varphi + G_2 \left((R_A + l_1 - s) \cos \varphi + \frac{l_2}{2} \sin \varphi \right) \right] \delta \varphi;$$

$$\delta A(G_5) = G_5 \frac{R_A r_4}{R_4} \delta \varphi;$$

$$\delta A(F_{\text{упр}}) = -c(f_{cm} + R_A(\varphi - \varphi_0)) R_A \delta \varphi;$$

$$\delta A(F_{\text{аморт}}) = -\beta R_A \dot{\varphi} R_A \delta \varphi;$$

$$\delta A(M_A) = M_A \delta \varphi;$$

$$Q_\varphi = M_A - \left[G_1 \left(R_A + \frac{l_1}{2} \right) \cos \varphi + G_B (R_A + l_1 - s) \cos \varphi + G_2 \left((R_A + l_1 - s) \cos \varphi + \frac{l_2}{2} \sin \varphi \right) \right] + \\ + G_5 \frac{R_A r_4}{R_4} - c(f_{cm} + R_A(\varphi - \varphi_0)) R_A - \beta R_A^2 \dot{\varphi}. \quad (18)$$

Величину $F_{\text{упр}}(\varphi_0) = cf_{cm}$ можно найти либо из уравнений статического равновесия системы, либо по принципу возможных перемещений, либо из условия $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}(\varphi = \varphi_0) = 0$ (здесь Π — потенциальная энергия системы). Поскольку последнее условие эквивалентно $Q_\varphi(\varphi_0) = 0$, то мы им воспользуемся и найдем из (18):

$$F_{\text{упр}} = cf_{cm} = G_5 \frac{r_4}{R_4} - \left[G_1 \left(R_A + \frac{l_1}{2} \right) + G_B (R_A + l_1) + G_2 (R_A + l_1) \right] - G_2 \frac{l_2}{2} \sin \varphi_0.$$

Окончательно

$$Q_\varphi = M_A - \left[G_1 \left(R_A + \frac{l_1}{2} \right) + (G_B + G_2)(R_A + l_1) \right] (\cos \varphi - \cos \varphi_0) - (G_B + G_2) s \cos \varphi - \\ - G_2 \frac{l_2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) - cR_A^2 \cdot (\varphi - \varphi_0) - \beta R_A^2 \dot{\varphi}.$$

Так как левые части уравнений Лагранжа уже известны, то находим

$$F_R = Z_S - (G_B + G_2) \sin \varphi;$$

$$M_A = Z_\varphi + \left[G_1 \left(R_A + \frac{l_1}{2} \right) + (G_B + G_2)(R_A + l_1) \right] (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + (G_B + G_2) s \cos \varphi + \\ + G_2 \frac{l_2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + cR_A^2 \cdot (\varphi - \varphi_0) + \beta R_A^2 \dot{\varphi}.$$

Используя полученные выражения, а также выражения для φ , $\dot{\varphi}$, s , \dot{s} , Z_φ , Z_S , можем теперь построить на компьютере требуемые зависимости силовых факторов $F_B(t)$, $M_B(t)$ и мощностей $N_F(t)$, $N_M(t)$ и дать ответы на первый и второй вопросы задачи.

Перед проведением вычислений найдем c и β .

За время рабочего хода манипулятора амортизатор сожмется на величину $s_{3k} = R_A \cdot (\varphi_k - \varphi_0) = \frac{\pi}{6} R_A$. По условию задачи $f_{cm} \leq 0,25s_{3k} = \frac{\pi}{24} R_A$.

Имея эту величину и найдя значение cf_{cm} из выражения (19), получаем возможность определить жесткости $c \geq \frac{24}{\pi R_A} F_{cm}$.

Поскольку имеем $V_{3\max} = R_A \frac{\pi^2}{6T_k}$, то можем определить и коэффициент сопротивления β из условия задачи $\beta V_{3\max}^2 \leq F_{cm}$:

$$\beta \leq \frac{F_{cm} 6T_k}{\pi^2 R_A}.$$

Для ответа на третий вопрос задачи составляем расчетную схему (рис. 17) для тела 5 и записываем дифференциальные уравнения плоского движения этого тела:

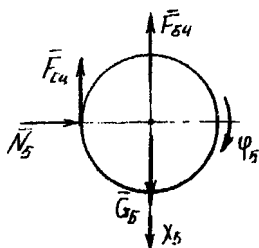


Рис. 17

$$\begin{aligned} m_5 \ddot{x}_5 &= G_5 - F_{c4} - F_{54}; \\ N_5 &= 0; \\ J_5 \ddot{\varphi}_5 &= F_{c4} R_5. \end{aligned}$$

Из них имеем

$$F_{c4} = \frac{J_5 \ddot{\varphi}_5}{R_5} = \frac{G_5 R_A r_4}{2gR_4} \frac{\pi^3}{6T_k^2} \cos \frac{\pi}{T_k} t;$$

$$F_{54} = G_5 - F_{c4} - m_5 \ddot{x}_5 = G_5 \left(1 - \frac{R_A r_4}{gR_4} \frac{\pi^2}{4T_k^2} \cos \frac{\pi}{T_k} t \right).$$

Момент времени, для которого следует определить F_{c4} и F_{54} , найдем из графика $M_1(t)$, который уже должен быть построен.

Условие напряженности нити $P'_{54} > 0$ дает нам еще одну зависимость между конструктивными параметрами системы:

$$\frac{R_A r_4}{R_4} < \frac{4T_k^2 g}{\pi^3},$$

которую все же можно проверить по исходным данным задачи.

Литература

1. Типовая программа дисциплины «Теоретическая механика» для инженерных специальностей высших учебных заведений.- Мн. БГУПА, 1994г.
2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М., Высш. школа, 1986.
3. Ялонский А. А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. М., Высшая школа, 1985.

Учебное издание

Составители: Борис Григорьевич Холодарь
Виталий Михайлович Хвисевич

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению курсовой работы
по теоретической механике
“Динамика материальной точки
и механической системы”
для студентов специальности Т.03.01.

Ответственный за выпуск Хвисевич В.М.

Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 29.01.99, Формат 60x84/16. Бумага писчая N1.
Усл. п. л. 2.1. Уч. Изд.л. 2,25. Заказ 414. Тираж 150 экз. Бесплатно.
Отпечатано на роталпринте Брестского политехнического института.
224017.
г. Брест, ул. Московская, 267.