МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

Кафедра автоматизации технологических процессов и производств

Методические указания

к выполнению расчетов переходных процессов в линейных электрических цепях по дисциплинам "Теоретические основы электротехники" и "Электротехника" для студентов специальностей 40 02 01, 53 01 01, 53 01 02

Брест 2003

Методические указания к выполнению расчетов переходных процессов в линейных электрических цепях по дисциплинам "Теоретические основы электротехники" и "Электротехника" для студентов спец. 40 02 01, 53 01 01, 53 01 02.

Составители: Н.И.Кирилюк, доцент,
И.М.Панасюк, ст. преп.

Оглавление

Введение.

Методические указания содержат руководства для выполнения расчетов переходных процессов в линейных электрических цепях найболее распространенными методами (классическим и операторным). В указаниях изложены основы теории, последовательность расчетов, требования к оформлению задач, примеры расчетов, список рекомендуемой литературы. Методические указания могут быть использованы при выполнении типовых расчетов, курсовых и других работ связанных с расчетом переходных процессов в линейных электрических цепях.

Цель методических указаний – выработка у студентов инженерно - технических навыков, а также методическая помощь при выполнении РГР, связанных с анализом и расчетом переходных процессов в линейных электрических цепях.

1. Общие указания и требования к выполнению РГР.

- РГР выполняются на отдельных листах формата А4 (210 на 297мм).
- Титульный лист оформляется в соответствии с требованиями стандарта СТ БГТУ 01-2002, предъявляемыми к подобного рода работам.
- Текст разборчиво записывается на одной стороне листов, обратные стороны которых предназначены для внесения студентом дополнений и исправлений допущенных ошибок.

При выполнении РГР рекомендуется руководствоваться следующими положениями:

- В начале каждой задачи приводятся исходные данные в соответствии с вариантом задания-распечатки (студент получает у преподавателя). Задание-распечатка вклеивается в отчет.
- Расчеты сопровождаются схемами с указанными на них направлениями обхода контуров, контурных токов, напряжений и т.д.
- При выполнении математических расчетов на ПЭВМ, следует прилагать задание-распечатку задачи.
- В решениях, где это требуется, приводятся на отдельных листах чертежи, графики, диаграммы и схемы, выполненные чертежным инструментом в соответствующих масштабах и соблюдением стандарта СТ БГТУ 01-2002. Графики и диаграммы рекомендуется выполнять на миллиметровой бумаге формата А4.
- Решения сопровождать подробными пояснениями и ссылками на используемую литературу.
- Все результаты вычислений записывать с тремя значащими цифрами, указывая единицы измерения расчетных величин.
- При записи формул пользоваться буквенными обозначениями величин и единиц измерения, в соответствии с ГОСТ 1494-77.

- В конце решения задачи приводится таблица результатов расчетов.
- На последней странице указывается список использованной в работе литературы, ставится дата окончания работы и подпись.
- РГР выполненная в полном объеме и правильно, допускается к защите.
- На повторную проверку не допущенные к защите РГР принимаются только при наличии первоначального варианта работы (с замечаниями преподавателя).

P.S. *Защита РГР осуществляется путем личного собеседования студента с преподавателем.*

2. Краткие теоретические сведения.

Переходным процессом называется процесс, который возникает в электрической цепи после ее *коммутации* (включение, выключение, переключение, изменение параметров цепи и т.д.). В результате коммутации цепь переходит от одного установившегося (стационарного) режима работы к другому установившемуся (стационарному) режиму.

Переходный процесс протекает в течение конечного интервала времени, зависящего от энергетических запасов в реактивных элементах цепи. Величина этого интервала может составлять от долей микросекунды до нескольких секунд. Практически переходные процессы можно считать мгновенными, однако, теоретически они длятся относительно большой промежуток времени. Причем напряжения и токи в цепи в это время могут значительно превышать напряжения и токи в установившихся режимах, вследствие чего возникает опасность повреждения (выхода из строя) некоторых элементов цепи. Однако при разумном ограничении напряжений и токов при переходных процессах их можно использовать для формирования всевозможных электрических сигналов.

Расчет электромагнитных процессов в переходных режимах связан с составлением и решением интегродифференциальных уравнений электрической цепи, составленных при помощи законов Кирхгофа. Такой расчет может выполняться двумя способами: с использованием мгновенных значений напряжений и токов (*классический метод*) или с использованием их комплексных значений (*операторный метод*). При наличии в цепи воздействия сложной формы, расчет переходных процессов классическим методом дополняется применением *интеграла Дюамеля* (*интеграла наложения*). В сложных цепях, описываемых дифференциальными уравнениями порядка выше второго, расчет ведется *методом переменных состояния*, который сводится к замене уравнения n – го порядка n уравнениями первого порядка. Под *переменными состояния* в этом случае понимают напряжения на емкостях и токи в индуктивностях (так как через них можно определить остальные напряжения и токи в цепи), а система дифференциальных уравнений для первых производных переменных состояния называют *уравнениями состояния*. Решение этой системы можно выполнять аналитическими или численными методами.

Метод расчета переходных процессов по комплексным значениям с использованием интегральных преобразований Лапласа или Карсона, называют *операторным*, а метод расчета, основанный на использовании интегрального преобразования Фурье – *спектральным* (или *частотным*). Преимущество этих методов состоит в том, что интегродифференциальные уравнения цепи в переходном режиме заменяются алгебраическими уравнениями относительно некоторой комплексной переменной (в операторном такой переменной является комплексная частота, называемая оператором $p=(\alpha+j\omega)$, в спектральном – используется только мнимая часть этой комплексной частоты, т.е. $p=j\omega$, а $\alpha=0$).

Операторный метод расчета переходных процессов более эффективен, чем спектральный, поскольку преобразование Лапласа имеет меньше ограничений, чем преобразование Фурье. Также следует отметить, что методы расчета, основанные на использовании преобразований Лапласа и Карсона существенных различий не имеют.

Процесс перехода от одного стационарного состояния электрической цепи к другому, связан с запасами электромагнитной энергии в реактивных элементах:

$$W=\sum_{k=1}^{n}(Q_kU_{Ck}+\Psi_kI_{Lk}),$$

где Q_k, U_{Ck} – заряд и напряжение на емкости C_k, соответственно;

Ψ_k, I_{Lk} - магнитное потокосцепление и ток в индуктивности L_k соответственно;

k – порядковый номер ветви.

Поскольку при любых изменениях в электрической цепи, связанных с коммутацией, энергия, накопленная в индуктивностях и емкостях, мгновенно не изменяется, то для любого момента времени:

$$\sum_{k=1}^{n}(Q_k(0)_-U_{Ck}(0)_-)=\sum_{k=1}^{n}(Q_k(0)_+U_{Ck}(0)_+);$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\Psi_k(0)_-I_{Lk}(0)_-)=\sum_{k=1}^{n}(\Psi_k(0)_+I_{Lk}(0)_+),$$

где: $Q_k(0)_-$, $U_{Ck}(0_-$ –заряд и напряжение на емкостях до коммутации;

$Q_k(0)_-$, $U_{Ck}(0)_+$ –заряд и напряжение на емкостях после коммутации;

$\Psi_k(0)_-, I_{Lk}(0)_-$ - потокосцепление и ток в индуктивностях до коммутации;

$\Psi_k(0)_+, I_{Lk}(0)_+$ - потокосцепление и ток в индуктивностях после коммутации.

Из этих условий вытекают *законы коммутации*:

I. В ветви с индуктивностью ток в момент коммутации и в момент непосредственно после коммутации сохраняет то значение, которое он

имел непосредственно до коммутации, и изменяется именно с этого значения:

$$i_{Lk}(0)_{-} = i_{Lk}(0)_{+}.$$

II. В ветви с емкостью напряжение в момент коммутации и в момент непосредственно после коммутации сохраняет то значение, которое оно имело непосредственно до коммутации, и изменяется именно с этого значения:

$$u_{Ck}(0)_{-}=u_{Ck}(0)_{+}.$$

Следует отметить, что скачкообразно могут изменяться как токи в сопротивлениях и емкостях, так и напряжения на сопротивлениях и индуктивностях.

Значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях цепи в первый момент после коммутации называют *независимыми начальными условиями* (определяются по законам коммутации из докоммутационных схем), а все остальные токи и напряжения на элементах цепи в первый момент после коммутации – *зависимыми начальными условиями* (определяются расчетом схем замещения в момент коммутации, т.е. для момента времени $t=0$).

3. Методические указания и рекомендации по расчету классическим методом.

При расчете переходных процессов классическим методом вначале составляют систему итегродифференциальных уравнений цепи, используя для этого законы Кирхгофа для мгновенных значений.

Затем полученную систему уравнений путем замены переменных приводят к дифференциальному уравнению n – го порядка относительно искомой величины, в качестве которой обычно используют одну из переменных состояния (тока в любой индуктивности или напряжения на любой емкости). Общее решение полученного линейного дифференциального уравнения ищут в виде сумы двух членов:

$$i_L=i_{Lсв}+i_{Lуст} \text{ или } u_C=u_{Cсв}+u_{Cуст},$$

где $i_{Lсв}$, $u_{Cсв}$ – соответствуют общим решениям однородных уравнений (без независимых источников энергии) и поэтому называются *свободными составляющими* тока в индуктивности и напряжения на емкости;

$i_{Lуст}$, $u_{Cуст}$ - соответствуют частным решениям неоднородных уравнений (с независимыми источниками энергии) и поэтому называются *установившимися (принужденными) составляющими* тока в индуктивности и напряжения на емкости.

Решения для свободных составляющих ищут в виде:

$$i_{Lcc} = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t} \text{ или } u_{Ccc} = \sum_{k=1}^{n} B_k e^{p_k t}, \text{ если } p_1 \neq p_2 < 0;$$

$$i_{Lcc} = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t + \psi_i) \text{ или } u_{Ccc} = Be^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t + \psi_u), \text{ если } p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega;$$

где A_k, B_k - постоянные интегрирования однородных дифференциальных уравнений, которые определяются из начальных условий при помощи законов коммутации цепи;

p_k – корни соответствующих характеристических уравнений цепи, которые получают из дифференциальных уравнений путем замены производных оператором p_k.

Поскольку для линейных электрических цепей корни характеристических уравнений имеют отрицательные вещественные части, то с увеличением времени t все свободные составляющие решений стремятся к нулю, т.е. затухают. Это связано с тем, что запасы энергии в реактивных элементах ограничены, и при наличии потерь в цепи они уменьшаются, стремясь к нулю при $t \to \infty$.

При этом в решениях остаются только принужденные составляющие, которые характеризуют установившийся режим после коммутации. Для определения этих составляющих рассматривают цепь в установившемся состоянии после коммутации (т.е. при $t \to \infty$).

Таким образом, расчет переходных процессов классическим методом сводится к определению трех величин:

- постоянных интегрирования A_k (или B_k);
- корней характеристического уравнения p_k;
- принужденных (установившихся) составляющих i_{Lycm}, и u_{Cycm}.

4. Пример расчета классическим методом.

Задание: *Для электрической цепи (рис.1), классическим методом определить ток переходного процесса в ветви с индуктивностью* $\boldsymbol{i_L(t)}$ *и переходное напряжение на конденсаторе* $\boldsymbol{u_c(t)}$ *и построить графики найденных зависимостей при следующих условиях:*

- *в цепи действует синусоидальная э.д.с. -* $e(t) = 100\sin 10^4 t$, *В;*
- *переходной процесс возникает вследствие размыкания контакта **К**.*

Параметры элементов цепи: $R_1=100Ом$; $R_2=23Ом$; $R_3=22Ом$; $L=18мГ$; $C=0{,}97мкФ$.

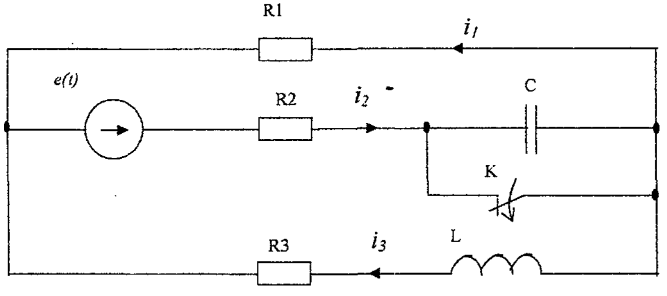

Рис.1.

Решение:

1. ***Задаемся условно-положительными направлениями токов в ветвях цепи*** (удобнее эти направления взять в соответствии с заданным направлением источника э.д.с.).

2. ***Определяем начальные независимые условия*** *(*ток в индуктивности $i_L(0)_+$ и напряжение на емкости $u_c(0)_+$ в момент времени непосредственно после коммутации, т.е. $t=0_+$*)*.

В докоммутационной схеме (рис.2) конденсатор закорочен, следовательно, $u_c(0)_-=0$, и согласно второму закону коммутации

$$\boxed{u_c(0)_+=u_c(0)_-=0.}$$

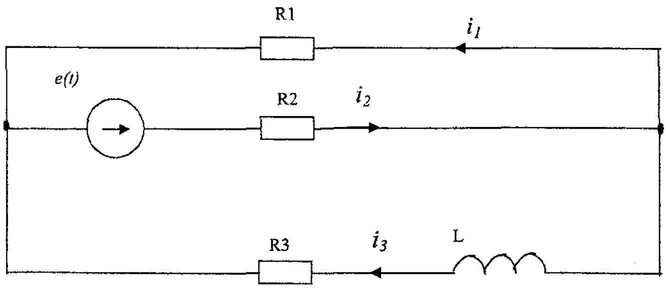

Рис.2.

Для определения тока $i_L(0)_-=i_3(0)_-$ в докоммутационной цепи применим метод преобразований, а расчет проведем символическим методом.

Эквивалентное полное комплексное сопротивление цепи (рис.2) относительно зажимов источника э.д.с.:

$$\underline{Z}(j\omega)_- = \cancel{R_1} + \frac{R_1(R_3+j\omega L)}{R_1+R_3+j\omega L} = 104{,}61e^{j21{,}37°}(\text{Ом}),$$

R₂

по закону Ома:

$$\underline{I}_{2m_-} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}(j\omega)_-} = 0{,}96e^{-j21{,}37°}(\text{А}),$$

по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_{2m_-} = \underline{I}_{1m_-} + \underline{I}_{3m_-},$$

откуда:

$$\underline{I}_{3m_-} = \underline{I}_{2m_-}\frac{R_1}{R_1+R_3+j\omega L} = 0{,}44e^{-j77{,}27°}(\text{А}),$$

или для мгновенных значений:

$$i_3(t)_- = 0{,}44\sin(10^4t-77{,}27°)(\text{А}).$$

Тогда:

$$i_3(0)_- = i_L(0)_- = 0{,}44 sin(-77{,}27^\circ) = -0{,}43(A),$$

и согласно первому закону коммутации

$$\boxed{\mathbf{i_L(0)_- = i_L(0)_+ = -0{,}43(A).}}$$

3. Определяем установившиеся (принужденные) составляющие (т.е. установившийся ток в индуктивности $i_{Lуст}$ и установившееся напряжение на емкости $u_{Cуст}$).

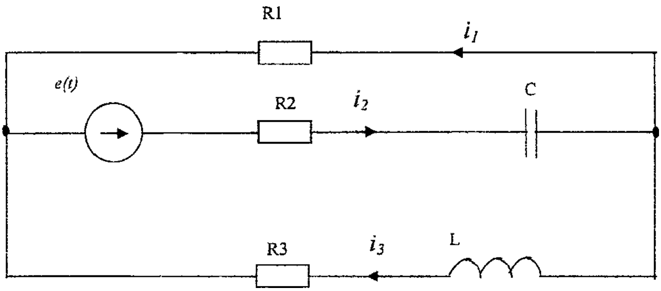

Рис.3.

Применяя метод преобразований для послекоммутационной схемы (рис.3) в символической форме эквивалентное полное сопротивление цепи относительно зажимов источника э.д.с.:

$$\underline{Z}(j\omega)_+ = R_2 + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_1(R_3 + j\omega L)}{R_1 + R_3 + j\omega L} = 117{,}65e^{-j33{,}52^\circ}(Ом).$$

Согласно закону Ома:

$$\underline{I}_{2m+} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}(j\omega)_+} = 0{,}685e^{j35{,}52^\circ}(A),$$

а соответственно:

$$\underline{I}_{3m+} = \underline{I}_{2m+}\frac{R_1}{R_1 + R_3 + j\omega L} = 0{,}393e^{-j22{,}09^\circ}(A)$$

или для мгновенных значений:

$$\boxed{\mathbf{i_{3уст} = 0{,}393 sin(10^4 t - 22{,}09^\circ)(A).}}$$

Определяем установившееся напряжение на конденсаторе:

$$\underline{U}_{Cm+} = \underline{I}_{2m+}\frac{1}{j\omega C} = 88{,}16e^{-j56{,}25^\circ}(B),$$

или для мгновенных значений:

$$\boxed{\mathbf{u_{Cуст} = 88{,}16 sin(10^4 t - 56{,}25^\circ)(B).}}$$

4. Определяем свободные составляющие (т.е. свободный ток в индуктивности $i_{Lсв}$ и свободное напряжение на емкости $u_{Cсв}$).

а) *Определяем свободную составляющую тока в ветви содержащей индуктивность* $i_{3св}$:

Для определения вида свободной составляющей необходимо записать характеристическое уравнение послекоммутационной цепи и найти его корни. Это уравнение можно записать двумя способами:

- Составляют дифференциальные уравнения по законам Кирхгофа для послекоммутационной цепи и, проведя их алгебраизацию (т.е. заменяя дифференциалы на переменную *p*, а интегралы - на *1/p*), а затем, решая полученные алгебраические уравнения, находят их корни.
- Записывают выражение комплексного полного сопротивления послекоммутационной цепи относительно зажимов источника э.д.с. Затем делают замену $j\omega$ на перменную *p* и приравнивают полученное выражение к нулю. Решая уравнение относительно *p* находят корни.

Рассматриваемая цепь после коммутации описывается дифференциальными уравнениями, записанными по законам Кирхгофа:

$$i_{2св} - i_{1св} - i_{3св} = 0$$

$$i_{2св}R_2 + \frac{1}{C}\int i_{2св}dt + L\frac{di_{3св}}{dt} + i_{3св}R_3 = 0$$

$$i_{1св}R - i_{3св}R_3 - L\frac{di_{3св}}{dt} = 0$$

Проведя алгебраизацию этих уравнений, получим:

$$-i_{1св} + i_{2св} - i_{3св} = 0$$

$$i_{2св}R_2 + \frac{1}{pC}i_{2св} + pLi_{3св} + i_{3св}R_3 = 0$$

$$i_{1св}R_1 - i_{3св}R_3 - pLi_{3св} = 0$$

Составив матрицу, находим ее определитель:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & R_2+1/pC & pL+R_3 \\ R_1 & 0 & -(R_3+pL) \end{vmatrix} = (R_1LC+R_2LC)p^2+(R_1R_2C+R_2R_3C+R_1R_3\,C+L)p+(R_1+R_3)$$

Подставив заданные значения параметров цепи в определитель и приравняв его к нулю, решаем полученное характеристическое уравнение:

$2{,}147 \cdot 10^{-6}p^2+22855 \cdot 10^{-6}p+122=0$

Корни этого уравнения – комплексно-сопряженные:

$$\boxed{\mathbf{p_{1,2} = -5321 \pm j5337}}$$

К аналогичному результату можно прийти, записав выражение комплексного полного сопротивления для послекоммутационной схемы относительно зажимов источника:

$$\underline{Z}(j\omega)_+ = R_2 + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_1(R_3 + j\omega L)}{R_1 + R_3 + j\omega L}$$

Затем заменяем $j\omega$ на p:

$$\underline{Z}(p)_+ = R_2 + \frac{1}{pC} + \frac{R_1(R_3 + pL)}{R_1 + R_3 + pL}$$

Приравняв правую часть к нулю, и подставив исходные параметры, решают полученное характеристическое уравнение.

Поскольку для анализируемой цепи, корни характеристического уравнения получились комплексно-сопряженные, то свободная составляющая тока имеет вид:

$$i_{3св} = Ae^{-5321t}\sin(5337t + \psi_i),\text{(A)}$$

а переходной ток:

$$i_3(t) = Ae^{-5321t}\sin(5337t + \psi_i) + 0{,}393\sin(10^4 t - 22{,}1^\circ),\text{(A)}$$

В полученном уравнении неизвестны – постоянные A и ψ_i. Для однозначного их определения составляем еще одно уравнение, путем дифференцирования выше записанного:

$$\frac{di_3(t)}{dt} = A(-5321)e^{-5321t}\sin(5337t + \psi_i) + Ae^{-5321t}5337\cos(5337t + \psi_i) +$$

$$+ 0{,}393 * 10^4\cos(10^4 t - 22{,}1^\circ)$$

Для момента времени $t=0$, эти уравнения примут вид:

$$i_3(0) = A\sin\psi_i + 0{,}393\sin(-22{,}1^\circ)$$

$$\frac{di_3(0)}{dt} = A(-5321)\ \sin\psi_i + 5337A\cos\psi_i + 0{,}393 * 10^4\cos(-22{,}1^\circ)$$

Для определения $\frac{di_{3(0)}}{dt}$, являющегося начальным зависимым условием, составляем систему уравнений по законам Кирхгофа для момента времени $t=0_+$:

$$i_1(0\ )_+ + i_3(0\ )_+ = i_2(0\ )_+$$

$$R_2 i_2(0\ )_+ + u_C(0\ )_+ + L\frac{di_3(0\ )_+}{dt} + R_3 i_3(0\ )_+ = 0$$

$$R_1 i_1(0\ )_+ - R_3 i_3(0\ )_+ - L\frac{di_3(0\ )_+}{dt} = 0$$

Подставив исходные значения параметров цепи и решая ее относительно $i_1(0)_+$, $i_2(0)_+$ и $\frac{di_3(0)_+}{dt}$:

$$i_1(0\ )_+ - i_2(0\ )_+ = 0{,}43$$

$$23 i_2(0\ )_+ + 18 * 10^{-3} \frac{di_3(0\ )_+}{dt} = -22(-0{,}43)$$

$$100 i_1(0)_+ - 18 * 10^{-3} \frac{di_3(0)_+}{dt} = 22(-0{,}43)$$

получим: $\frac{di_3(0)_+}{dt}$=972,22 , $i_2(0)_+$=-0,3496(A).

С учетом этого уравнения для определения A и ψ_i для момента времени $t=0_-$:

$-0{,}28=-A\sin\psi_i$	*или*	$-0{,}28=A\sin\psi_i$
$-0{,}5=-A\sin\psi_i+A\cos\psi_i$		$-0{,}78=A\cos\psi_i$

Откуда:

$$\boxed{A=\sqrt{0{,}28^2+0{,}78^2}=0{,}829} \text{ и } \quad tg\psi_i=\frac{-0{,}28}{-0{,}78}=0{,}36$$

Тогда с учетом области значений арктангенса:

$$\boxed{\psi_i = arctg0{,}36 + 180^\circ(-1) = -160{,}25^\circ}$$

Выражение для свободной составляющей переходного тока в ветви с индуктивностью:

$$\boxed{i_{3св} = 0{,}829 e^{-5321t} \sin(5337t - 160{,}25^\circ),(\mathrm{A})}$$

Окончательно переходной ток:

$$\boxed{i_3(t) = 0{,}829 e^{-5321t} \sin(5337t - 160{,}25^\circ) + 0{,}393 \sin(10^4 t - 22{,}1^\circ),(\mathrm{A})}$$

Графическое изображение тока в ветви с индуктивностью представлено на рис.4

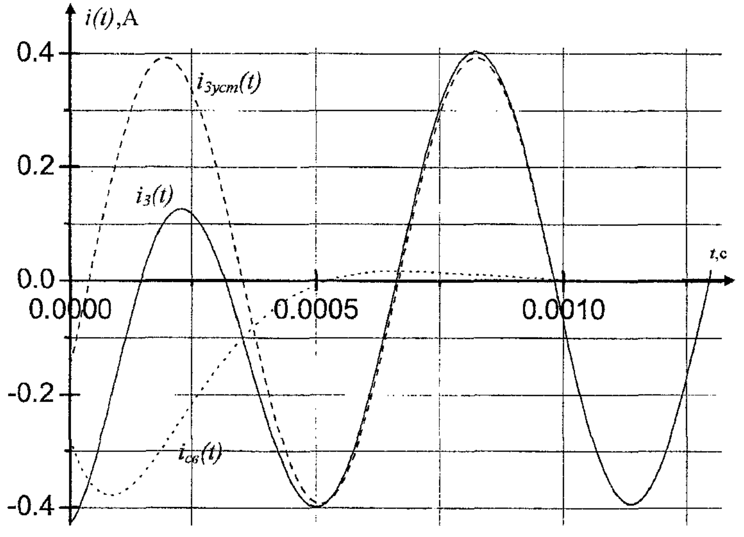

Рис.4

При построении графиков принято, что переходной процесс заканчивается за время $t_n = 4\tau$, где τ - постоянная времени переходного процесса(при действительных отрицательных разных корнях характеристического уравнения, равная обратному значению модуля наименьшего из них, а при комплексно-сопряженных – обратному значению модуля действительной части).

б) Определяем свободную составляющую напряжения на емкости $u_{Cсв}$, которая имеет вид:

$$u_{Ccc} = Be^{-5321t}\sin(5337t + \psi_u),$$

а переходное напряжение:

$$u_C(t) = u_{Cсв} + u_{Cуст} = Be^{-5321t}\sin(5337t + \psi_u) + 88{,}156\sin(10^4 t - 56{,}25°)$$

Для определения постоянных B и ψ_u поступаем аналогично, как и при определении постоянных A и ψ_i, дифференцируя $u_c(t)$:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = B(-5321)e^{-5321t}\sin(5337t + \psi_u) + Be^{-5321t}5337\cos(5337t + \psi_{ui}) +$$
$$+ 88{,}156 * 10^4\cos(10^4 t - 56{,}25°)$$

умножив полученное выражение на C имеем:

$C\frac{du_C(t)}{dt}=i_2(t)$.

С учетом этого записываем систему уравнений для момента времени непосредственно после коммутации, т.е. $t=0_+$:

$u_C(0)_+ = B\sin\psi_u + 88{,}156\sin(-56{,}25°)$

$i_2(0)_+ = C[B(-5321)\sin\psi_u + B5337\cos\psi_{ui} + 88{,}156*10^4\cos(-56{,}25°)]$.

Воспользовавшись результатами выше решенной системы уравнений по законам Кирхгофа для момента времени $t=0_+$ и начальными независимыми условиями, последнюю систему уравнений запишем:

$$0 = B\sin\psi_u + 88{,}156\sin(-56{,}25°)$$

$$\frac{1}{0{,}97*10^{-6}}(-0{,}3496) = B(-5321)\sin\psi_u + B5337\cos\psi_{ui} + 88{,}156*10^4\cos(-56{,}25°)$$

Откуда, аналогично, как и для тока получаем:

$\boxed{\Psi_u=139{,}65° \text{ и } B=113{,}18, (\text{В})}$

Тогда свободная составляющая переходного напряжения на емкости имеет вид:

$$\boxed{u_{Ccc} = 113{,}18e^{-5321t}\sin(5337t+139{,}65°), (\text{В})}$$

Окончательно переходное напряжение:

$$\boxed{u_C(t) = 113{,}18e^{-5321t}\sin(5337t+139{,}65°) + 88{,}156\sin(10^4 t - 56{,}25°), (\text{В})}$$

Графическое изображение напряжения на емкости представлено на рис.5.

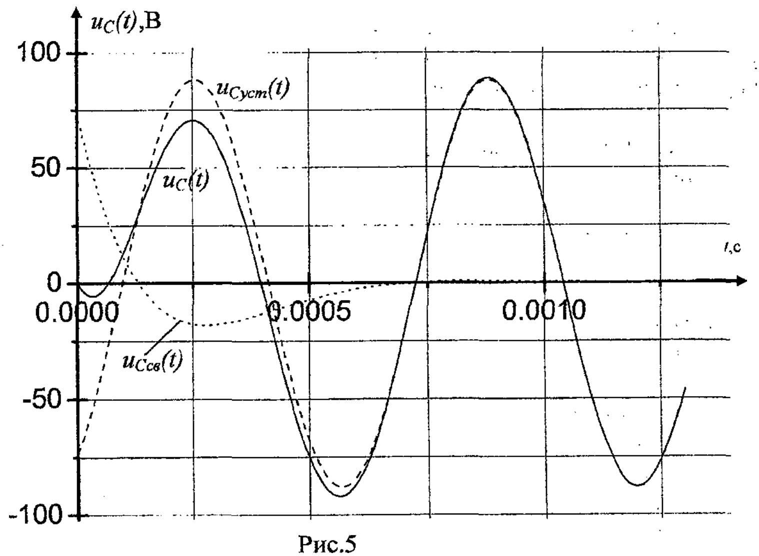

Рис.5

5. Методические указания и рекомендации по расчету операторным методом.

Операторный метод относится к методам расчета переходных процессов по комплексным значениям. Суть этого метода состоит в том, что некоторая функция $f(t)$ (обычно ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$) вещественного переменного (в нашем случае времени t), называемая *оригиналом*, заменяется соответствующей функцией $F(p)$ (соответственно $I(p)$ и $U(p)$) комплексного переменного p, называемой *изображением*. Указанные функции связаны соотношением:

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

называемым *прямым интегральным преобразованием Лапласа*, в котором $p=\alpha+j\omega$ – комплексная переменная, обычно называемая *оператором*, ω - *угловая частота*, α – *некоторая вещественная постоянная*. Применительно к электрическим цепям оператор p можно рассматривать как комплексную частоту ω, в которой $\alpha>0$ характеризует затухание гармонических колебаний, представленных вращающимся вектором $e^{j\omega t}$.

Особенностью рассматриваемого метода является возможность замены интегродифференциальных уравнений цепи, составленных для временных функций, алгебраическими уравнениями, в результате чего значительно упрощается их решение.

Алгоритм расчета цепей операторным методом состоит из трех основных этапов:

1) составления операторной схемы замещения цепи;
2) расчета операторной схемы замещения;
3) определения оригинала реакции цепи по его операторному изображению.

На первом этапе необходимо выполнить следующие действия:

- рассчитать начальные условия в цепи для всех переменных состояния, т.е. для напряжений на емкостях и токов в индуктивностях до коммутации (при $t=0_-$);
- представить исходную схему после коммутации, при этом произведя замену элементов оригинальной схемы их операторными эквивалентами.

На втором этапе, при расчете операторной схемы замещения допускается использование всех известных методов расчета цепей постоянного тока:

- законов Кирхгофа и любых эквивалентных преобразований,
- методов контурных токов и узловых напряжений,
- методов наложения и эквивалентного генератора.

При этом возможно решение как прямых, так и обратных задач, поскольку операторная схема замещения позволяет рассчитать изображения напряжений и токов всех ветвей цепи. Источники напряжений и токов, соответствующие ненулевым начальным условиям в исходной цепи, допускают любые эквивалентные преобразования, используемые для независимых источников.

На третьем этапе, при определении оригинала функции по ее эквивалентному операторному изображению допускаются следующие способы:

- использование справочных таблиц операторного соответствия;
- применение формул разложения и вычетов.

Таблицы операторных соответствий приводятся в большинстве справочников по математике.

В случае когда изображение $F(p)$ представлено в виде дробно-рациональной функции, у которой степень m полинома числителя $F_1(p)$ не выше степени n полинома знаменателя $F_2(p)$, т.е. $m<n$:

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1}+...+a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1}+...+b_1 p + b_0},$$

то оригинал можно определить по *формуле разложения*, которая имеет вид:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_k t},$$

где $F_2'(p)=\frac{dF_2(p)}{dp}\Big|_{p=p_k}$ - производная знаменателя при $p=p_k$; p_k – корни уравнения $F_2(p)=0$, которые являются полюсами функции $F(p)$.

В случае если корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные оригинал можно определить по формуле разложения, имеющей вид: $f(t)=2RE[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1 t}]$

Для определения оригинала можно также использовать *формулу вычетов*: $f(t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{p=p_k}{res}\,F(p)e^{p_k t}$,

где $\underset{p=p_k}{res}F(p)$ - вычет функции $F(p)$ в полюсе $p=p_k$.

6. Пример расчета операторным методом.

Задание: *Для электрической цепи (рис.6), операторным методом определить ток переходного процесса в ветви с индуктивностью* $i_L(t)$ *и переходное напряжение на конденсаторе* $u_c(t)$ *и построить графики найденных зависимостей при следующих условиях:*

- *в цепи действует постоянная э.д.с. –E=100 В;*
- *переходной процесс возникает вследствие переключения контакта **К** из положения1 в положение 2.*

Параметры элементов цепи: *R_1=100Ом; R_2=27Ом; R_3=18Ом; L=17мГ; С=0,91мкФ.*

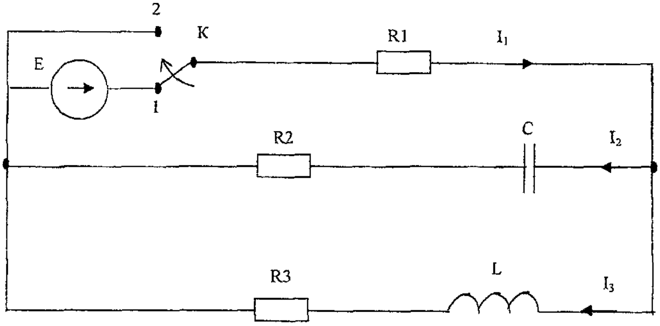

Рис.6.

Решение:

1. Задаемся условно-положительными направлениями токов в ветвях цепи (удобнее эти направления взять в соответствии с заданным направлением источника э.д.с.).

2. Определяем начальные независимые условия (ток в индуктивности $i_L(0)_+$ и напряжение на емкости $u_c(0)_+$ в момент времени непосредственно после коммутации, т.е. $t=0_+$ ключ K_2 в положении 1).

Поскольку в докоммутационной схеме действовал источник постоянной э.д.с., то в установившемся режиме до коммутации заряженный конденсатор представлял собой обрыв, а индуктивность была эквивалентна короткому замыканию.

Следовательно:

$$i_2(0)_- = 0, \text{ а } i_3(0)_- = i_1(0)_- = i_L(0)_- = i_L(0)_+ = \frac{E}{R_1 + R_3} = 0{,}847,(A).$$

По второму закону Кирхгофа для верхнего контура при обходе по часовой стрелке:

$R_1 i_1(0)_- + R_2 i_2(0)_- + u_C(0)_- = E,$

откуда после подстановки исходных параметров цепи:

$u_C(0)_- = E - R_1 i_1(0)_- = 15{,}254(B),$

Итак,

$$\boxed{\begin{array}{l} i_L(0)_- = i_L(0)_+ = 0{,}847,(A). \\ u_C(0)_- = u_C(0)_+ = 15{,}254(B) \end{array}}$$

3. Составляем операторную схему, для чего рассмотрим послекоммутационную цепь, т.е. после переключения ключа **К** в положение **2** (Рис.7).

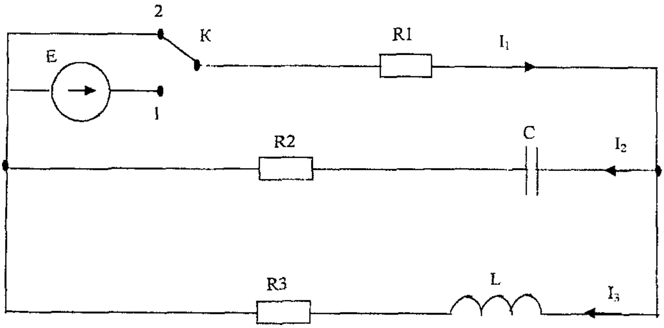

Рис.7

Очевидно, что после коммутации источник э.д.с. будет отключен и при этом послекоммутационная операторная схема рассматриваемой цепи будет иметь вид (Рис.8):

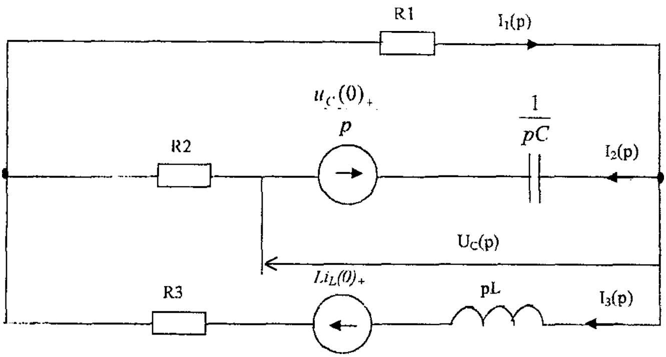

Рис.8.

4. Находим изображения $U_C(p)$ и $I_L(C)$

для операторной схемы (Рис.8) методом двух узлов:

$$U_{ab}(p) = \frac{\sum\limits_k \frac{E_k(p)}{Z_k(p)} + \sum\limits_k J_k(p)}{\sum\limits_k \frac{1}{Z_k(p)}} = \frac{\frac{u_C(0)_+}{p}\frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC}} - Li_L(0)_+\frac{1}{R_3 + pL}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC}} + \frac{1}{R_3 + pL}},$$

подставив исходные значения параметров и начальных независимых условий цепи, получим:

$$U_{ab} = \frac{-0{,}0000117992p - 1{,}41569}{1{,}96469*10^{-6}p^2 + 0{,}0215373p + 118}.$$

Тогда по закону Ома:

$$\boxed{I_L(p)=I_3(p)=\frac{U_{ab}(p)+Li_L(p)}{R_3+pL}=\frac{1{,}66499*10^{-6}p+0{,}0157949}{1{,}96469*10^{-6}p^2+0{,}0215373p+118}};$$

$$I_2(p)=\frac{U_{ab}(p)-\dfrac{u_C(0)_+}{p}}{R_2+\dfrac{1}{pC}}=\frac{-1{,}547*10^{-6}-0{,}001638}{1{,}96469*10^{-6}p^2+0{,}0215373p+118};$$

$$\boxed{U_C(p)=I_2(p)\frac{1}{pC}+\frac{u_C(0)_+}{p}=\frac{0{,}0000299698p-1{,}37147}{1{,}96469*10^{-6}p^2+0{,}0215373p+118}}$$

5. Переходим от изображений к оригиналам.

Воспользуемся формулой разложения:

$$f(t)\doteq\sum_k\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_kt}$$

а) Находим оригинал тока $i_L(t)$:

Из выражения для изображения $I_L(p)$:

$F_1(p)=1{,}66499*10^{-6}p+0{,}0157949$;

$F_2(p)=1{,}96469*10^{-6}p^2+0{,}0215373p+118$;

$F_2'(p)=3{,}92938*10^{-6}p+0{,}0215373$

Приравняв к нулю $F_2(p)$, получим биквадратное уравнение,

$1{,}96469*10^{-6}p^2+0{,}0215373p+118=0$

решая которое находим корни:

$\boxed{p_{1,2}=-5481{,}08\pm j5478{,}88.}$

Поскольку полученные корни комплексно-сопряженные, то и слагаемые, соответствующие им в формуле разложения также будут комплексно-сопряженными и в сумме дадут удвоенную действительную часть. Поэтому в нашем случае можно формулу разложения, записать в следующем виде:

$$f(t)\doteq 2\,\mathrm{Re}[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1t}]$$

Подставив в эту формулу найденные заранее значения $p_1, F_2'(p_1), F_1(p_1)$, получим:

$\boxed{i_L(t)=1{,}048e^{-5481{,}08t}\sin(5478{,}88t+55{,}9^\circ)),(A)}$

Графическое изображение переходного тока в ветви с индуктивностью представлено на рис.9.

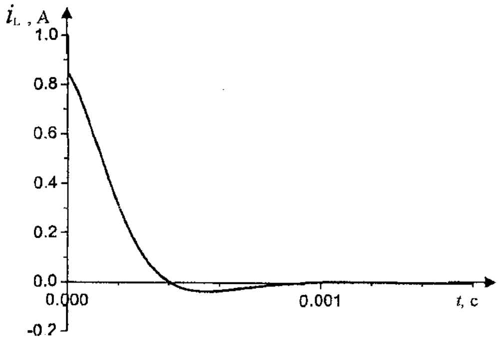

Рис.9.

б) Находим оригинал напряжения $u_C(t)$:

Поступая аналогично, как и в предыдущем пункте из выражения для изображения $U_C(p)$:

$$F_1(p) = 0{,}0000299698p + 1{,}37147$$

$$F_2(p) = 1{,}96469 * 10^{-6} p^2 + 0{,}0215373p + 118$$

$$F_2'(p) = 3{,}92938 * 10^{-6} p + 0{,}0215373$$

Очевидно поскольку знаменатели выражений для $U_C(p)$ и $I_L(p)$ одинаковы, то и корни будут те же, т.е. $p_{1,2}=-5481{,}08\pm j5478{,}88$.

Тогда воспользовавшись формулой разложения, получим:

$$\boxed{u_C(t) = 143{,}1e^{-5481{,}08t}\sin(5478{,}88t + 174{,}1^\circ)),(A).}$$

Графическое изображение переходного напряжения на емкости представлено на рис 10.

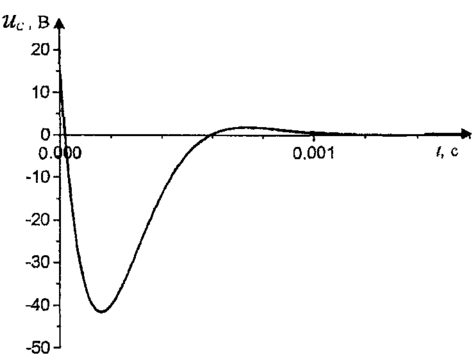

Рис.10.

Список рекомендуемой литературы.

1. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. Ч. 1. М.: Энергия, 1978.
2. Атабеков Г. И., Купалян С.Д., Тимофеев А. Б.,Хухриков С. С. Теоретические основы электротехники. Ч.2 и 3. М.: Энергия, 1979.
3. Бирюков В. Н., Попов В. П., Семенцов В.И. Сборник задач по теории цепей. М.: Высшая школа, 1985.
4. Задачник по теоретическим основам электротехники /Под ред. К. М. Поливанова. М.: Энергия,1973.
5. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы теории цепей. М.: Энергия, 1975.
6. Карлащук В. И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Workbench и ее применение. М.: Солон-Р, 1999.
7. Константинов В. И., Симонов А. Ф., Федоров-Королев А. А. Сборник задач по теоретической электротехнике. М.:Энергия, 1975.
8. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. М.: Высшая школа, 1981.
9. Прянишников В. А. Теоретические основы электротехники. Курс лекций. СПб: КОРОНА принт, 2000.
10. Сборник задач по теоретическим основам электротехники /Под ред. Л. А. Бессонова. М., 1988.
11. Типовые задачи по теории электрических цепей. Учебное пособие /Под ред. А. Б. Новгородцева. СПб: ГТУ, 1991.
12. Электротехника и электроника в экспериментах и упражнениях. Практикум на Electronics Workbench. Том 1. М.: Додека, 1999.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Николай Иванович Кирилюк,
Игорь Михайлович Панасюк

Методические указания
к выполнению расчетов переходных процессов
в линейных электрических цепях
по дисциплинам "***Теоретические основы электротехники***" и
"***Электротехника***"
для студентов специальностей 40 02 01, 53 01 01, 53 01 02

Ответственный за выпуск: Кирилюк Н.И.
Редактор: Строкач Т.В.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 22.04.2003г. Формат 60х84/16. Бумага "Чайка" Усл.п.л. 1,4. Уч.изд.л. 1,5. Заказ № 489 . Тираж 150 экз. Отпечатано на ризографе Учреждения образования "Брестский государственный технический университет". 224017, г. Брест, ул. Московская, 267