МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические рекомендации и варианты контрольных работ по разделам «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» и «Введение в математический анализ» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2001

УДК 517.9

В настоящей методической разработке приведены варианты контрольных заданий по разделам «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» и «Предел, непрерывность, производная функции одной переменной» общего курса высшей математики для студентов технических специальностей заочной формы обучения. Даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольных работ.

Составители: А.В. Санюкевич, к.ф.-м.н., доцент
Л.Т. Мороз, доцент
В.Т.Джура, ассистент
Р.А.Гоголинская, ассистент

Содержание

Методические указания к выполнению контрольной работы 4
Вопросы по разделу «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» 5
Вопросы по разделу «Предел, непрерывность, производная функции одной переменной» 6
Варианты заданий контрольной работы № 1
Задание 1 7
Задание 2 8
Задание 3 9
Задание 4 11
Задание 5 11
Задание 6 12
Варианты заданий контрольной работы № 2
Задание 1 13
Задание 2 16
Задание 3 18
Задание 4 20
Задание 5 22
Задание 6 23
Решение типового варианта контрольной работы № 1
Задание 1 24
Задание 2 26
Задание 3 27
Задание 4 29
Задание 5 30
Задание 6 31
Решение типового варианта контрольной работы № 2
Задание 1 33
Задание 2 36
Задание 3 38
Задание 4 41
Задание 5 42
Задание 6 43
Литература 47

Методические указания к выполнению контрольной работы

В соответствии с учебным планом студенты-заочники I курса всех технических специальностей в I семестре выполняют две письменные контрольные работы по курсу «Высшая математика».

Задания в контрольных работах составлены в тридцати вариантах. Выбор варианта определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки студента. Приступая к выполнению контрольной работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями, изучить литературу. Далее следует предварительно наметить схему решения задачи.

Требования к выполнению контрольной работы.

1. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена в установленные сроки.

2. В начале работы должен быть указан номер варианта работы.

3. Задачи нужно решать в том порядке, в каком они даны в задании.

4. Перед решением задачи должно быть полностью приведено ее условие. Необходимо отделить решение задачи от ее условия некоторым интервалом. В том случае, если задача имеет общую формулировку, ее условие следует переписывать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта.

5. Решение задачи следует сопровождать необходимыми формулами, развернутыми расчетами и краткими пояснениями. Задачи, к которым даны ответы без развернутых расчетов, пояснений и кратких выводов, будут считаться нерешенными.

6. Выполненная контрольная работа должна быть оформлена аккуратно, написана разборчиво, чисто, без помарок и зачеркиваний. Запрещается произвольно сокращать слова (допускаются лишь общепринятые сокращения).

7. В конце работы следует привести список использованной литературы (автор, название учебника, главы, параграфа, страницы). Работа должна быть подписана студентом с указанием даты ее выполнения.

8. При удовлетворительном выполнении работа оценивается “допущена к защите”. К собеседованию студент обязан учесть все замечания рецензента и, не переписывая работу, внести в нее необходимые исправления и дополнения. После успешного прохождения собеседования студент получает зачет по работе и допускается к экзамену. Студенты, не получившие зачета по предусмотренным учебным планом работам, к экзаменам не допускаются.

На обложку контрольной работы необходимо наклеить бланк установленного образца и разборчиво заполнить все имеющиеся там реквизиты, отсутствие которых может задержать отправку проверенной работы. Указывайте индекс вашего предприятия связи, разборчиво пишите свою фамилию.

Если студент не может самостоятельно выполнить контрольную работу или какую-то ее часть, следует обратиться к ведущему преподавателю за консультацией.

Вопросы по разделу
«Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии»

1. Определение определителей различных порядков. Свойства определителей и методы их вычисления.
2. Виды матриц. Действия над матрицами.
3. Обратная матрица.
4. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричная запись и матричное решение этих систем.
5. Собственные числа и собственные векторы матрицы. Однородные системы линейных алгебраических уравнений.
6. Решение систем линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера.
7. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
8. Векторы. Линейные операции над векторами.
9. Линейная независимость векторов. Разложение вектора по произвольному базису.
10. Прямоугольная декартова система координат в пространстве.
11. Скалярное произведение векторов.
12. Векторное произведение векторов.
13. Смешанное произведение векторов.
14. Уравнение линии на плоскости. Виды уравнения прямой на плоскости.
15. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
16. Расстояние от точки до прямой.
17. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола и парабола.
18. Кривые второго порядка. Упрощение уравнения кривой 2-ого порядка.
19. Плоскость. Виды уравнений плоскости.
20. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
21. Прямая в пространстве. Виды уравнения прямой в пространстве.
22. Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
23. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
24. Расстояние от точки до плоскости и от точки до прямой в пространстве.
25. Метод параллельных сечений. Поверхности 2-го порядка: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, цилиндры.

Вопросы по разделу
«Предел, непрерывность, производная функции одной переменной»

26. Функция и способы ее задания. Основные элементарные функции, свойства, графики.
27. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.
28. Второй замечательный предел.
29. Бесконечно малые и их свойства. Сравнение бесконечно малых.
30. Предел функции. Основные теоремы о пределах.
31. Первый замечательный предел.
32. Непрерывность функции в точке. Свойства.
33. Точки разрыва и их классификация.
34. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.
35. Задачи, приводящие к понятию производной.
36. Производная функции, ее геометрический и механический смыслы.
37. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции.
38. Таблица производных.
39. Определение дифференциала функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции. Приложения дифференциала в приближенных вычислениях.
40. Производные функций, заданных параметрически и неявно.
41. Производные и дифференциалы высших порядков.
42. Теоремы о среднем: Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
43. Формула Тейлора.
44. Разложение по формулы Тейлора функций e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^n$.
45. Правило Лопиталя.
46. Условия монотонности функции.
47. Экстремумы функции. Необходимое и достаточные условия.
48. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.
49. Выпуклость, вогнутость графика функции, точки перегиба.
50. Асимптоты графика функции.
51. Общее исследование и построение графика функции.
52. Определение векторной функции скалярного аргумента.
53. Предел, непрерывность, производная векторной функции скалярного аргумента.
54. Кривизна и кручение кривой.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

"Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии"

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами: 1) по формулам Крамера; 2) методом Гаусса; 3) матричным методом.

1.1 $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=4, \\ 2x_1+6x_2+x_3=2, \\ 4x_1+8x_2-x_3=2; \end{cases}$

1.2 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+3x_3=2; \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=7, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=6; \end{cases}$

1.4 $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=9, \\ 3x_1-5x_2+x_3=-4, \\ 4x_1-7x_2+x_3=5; \end{cases}$

1.5 $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=9, \\ x_1+x_2-x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12; \end{cases}$

1.6 $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=6, \\ 5x_2+4x_3=-20, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22; \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-9, \\ x_1+5x_2+x_3=20, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=15; \end{cases}$

1.8 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+4x_3=9, \\ x_2+x_3=2; \end{cases}$

1.9 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=-1, \\ x_1+2x_2-4x_3=9, \\ -x_1-12x_2+14x_3=1; \end{cases}$

1.10 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=12, \\ 3x_1-x_2+4x_3=-13, \\ -x_1+5x_2-x_3=27; \end{cases}$

1.11 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 2x_1+x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3=1; \end{cases}$

1.12 $\begin{cases} 7x_1+4x_2-x_3=13, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+x_3=-10; \end{cases}$

1.13 $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=9, \\ x_1+x_2-x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12; \end{cases}$

1.14 $\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15, \\ 3x_1+x_2+4x_3=13, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9; \end{cases}$

1.15 $\begin{cases} 3x_1-5x_2-6x_3=8, \\ 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ x_1-4x_2-2x_3=-9; \end{cases}$

1.16 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=12, \\ 7x_1-5x_2+x_3=-33, \\ 4x_1+x_3=-7; \end{cases}$

1.17 $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4, \\ x_1+3x_2-x_3=11, \\ x_1-2x_2+x_3=-7; \end{cases}$

1.18 $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=1, \\ x_1+5x_2+x_3=-3; \end{cases}$

1.19 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6; \end{cases}$ **1.20** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases}$

1.21 $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$ **1.22** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

1.23 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8; \end{cases}$ **1.24** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2; \end{cases}$

1.25 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10; \end{cases}$ **1.26** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16; \end{cases}$

1.27 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$ **1.28** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 = -6, \\ x_1 + x_3 = 1; \end{cases}$

1.29 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$ **1.30** $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

Задание 2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы:

2.1 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; **2.2** $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; **2.3** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; **2.4** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

2.5 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$; **2.6** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; **2.7** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; **2.8** $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$;

2.9 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; **2.10** $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; **2.11** $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; **2.12** $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

2.13 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; **2.14** $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; **2.15** $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; **2.16** $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

2.17 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; **2.18** $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; **2.19** $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; **2.20** $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

2.21 $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$; **2.22** $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; **2.23** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; **2.24** $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

2.25 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$; **2.26** $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; **2.27** $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; **2.28** $\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2.29 $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; **2.30** $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Задание 3. При решении задачи сделать подробный чертеж.

3.1 Дан треугольник с вершинами $A(3;-1)$, $B(-3;-1)$, $C(5;-12)$. Найти:

а) уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C;

б) уравнение высоты проведенной из вершины A на сторону BC.

3.2 Даны две вершины треугольника $M_1(-10;2)$ и $M_2(6;4)$. Его высоты пересекаются в точке $N(5;2)$. Определить координаты третьей вершины M_3.

3.3 В треугольнике ABC даны: уравнение стороны AB $5x-3y+2=0$, уравнения высот AM $4x-3y+1=0$ и BN $7x+2y-22=0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника и третьей высоты треугольника.

3.4 Составить уравнения сторон треугольника ABC, если даны одна из его вершин $B(-4;-5)$ и уравнения двух высот $5x+3y-4=0$ и $3x+8y+13=0$.

3.5 Составить уравнения сторон треугольника ABC, если даны одна из его вершин $A(1;3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.

3.6 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $A(4;-1)$ и уравнения двух биссектрис $x-1=0$ и $x-y-1=0$.

3.7 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну его вершину $B(2;6)$, а также уравнения высоты $x-7y+15=0$ и биссектрисы $7x+y+5=0$, проведенных из одной вершины.

3.8 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну его вершину $B(2;-1)$, а также уравнения высоты $3x-4y+27=0$ и биссектрисы $x+2y-5=0$, проведенных из различных вершин.

3.9 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну его вершину $C(4;-1)$, а также уравнения высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведенных из одной вершины.

3.10 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну его вершину $B(2;-7)$, а также уравнения высоты $3x+y+11=0$ и медианы $x+2y+7=0$, проведенных из различных вершин.

3.11 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну его вершину $C(4;3)$, а также уравнения биссектрисы $x+2y-5=0$ и медианы $4x+13y-10=0$, проведенных из одной вершины.

3.12 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну его вершину $A(3;-1)$, а также уравнения биссектрисы $x-4y+10=0$ и медианы $6x+10y-59=0$, проведенных из различных вершин.

3.13 В треугольнике ABC даны: уравнение стороны AB $4x+y=12$, уравнения высот AM $x+y=6$ и BN $5x-4y=12$. Составить уравнения двух других сторон треугольника и третьей высоты треугольника.

3.14 Даны уравнения высот треугольника ABC $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ и координаты его вершины $A(2;3)$. Составить уравнения всех сторон треугольника.

3.15 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $A(2;-4)$ и уравнения его биссектрис $x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$.

3.16 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $A(-4;2)$ и уравнения его медиан $3x-2y+2=0$ и $3x+5y-12=0$.

3.17 Даны середины сторон треугольника ABC: $(2;1)$, $(4;3)$ и $(-2;5)$. Составить уравнения всех сторон треугольника.

3.18 Дан треугольник с вершинами $A(2;5)$, $B(5;-1)$ и $C(8;3)$. Составить уравнения медианы, проведенной из вершины A, и прямой, проходящей через точку пересечения медиан перпендикулярно прямой $x+y+4=0$.

3.19 Дан треугольник с вершинами $A(1;-1)$, $B(-2;1)$ и $C(3;-5)$. Составить уравнения сторон треугольника и перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

3.20 Даны две вершины треугольника $A(-1;5)$ и $B(3;2)$ и точка пересечения его высот $H(5;-3)$. Составить уравнения всех сторон треугольника.

3.21 Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, зная вершину прямого угла $C(4;-1)$ и уравнение его гипотенузы $3x-y+5=0$.

3.22 Дан треугольник с вершинами $A(1;5)$, $B(-1;2)$, $C(3;2)$. Составить уравнения:

а) высот треугольника;

б) прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

3.23 Даны середины сторон треугольника ABC: $(1;2)$, $(3;4)$ и $(5;-1)$. Составить уравнения всех сторон треугольника.

3.24 Дан треугольник с вершинами $A(1;-2)$, $B(5;4)$ и $C(-2;0)$. Составить уравнения биссектрис его внешнего и внутреннего углов при вершине A.

3.25 В треугольнике ABC даны уравнения стороны AB $2x-3y+6=0$ и высот AH $2x+y-2=0$ и BK $x+3y-12=0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

3.26 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну его вершину $A(2;-4)$ и уравнения биссектрис двух его углов $x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$.

3.27 Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну его вершину $A(2;2)$ и уравнения высот $x+y-2=0$ и $9x-3y-4=0$.

3.28 В треугольнике ABC даны уравнения сторон AB $x-y=0$, AC $y=0$ и BC $x+y-2=0$. Составить уравнения медианы, проходящей через вершину B, и высоты, опущенной из вершины A.

3.29 Даны две вершины треугольника $A(-3;3)$ и $B(5;-1)$ и точка пересечения его высот $D(4;3)$. Составить уравнения всех сторон треугольника.

3.30 Даны уравнения двух высот треугольника ABC $x+y=4$, $y=2x$ и координаты его вершины $A(0;2)$. Составить уравнения всех сторон треугольника.

Задание 4. Установить какая линия определяется уравнением. Сделать чертеж.

4.1 $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$; **4.2** $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;
4.3 $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$; **4.4** $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$;
4.5 $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$; **4.6** $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$;
4.7 $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$; **4.8** $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$;
4.9 $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$; **4.10** $7x^2+28x+6y^2-12y-50=0$;
4.11 $\frac{1}{4}x^2+x+2-y=0$; **4.12** $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0$;
4.13 $x^2-y^2-6x+10=0$; **4.14** $2x^2-4x+2y-3=0$;
4.15 $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$; **4.16** $4x^2-8x+7-y=0$;
4.17 $-\frac{1}{6}x^2+2x-7-y=0$; **4.18** $-\frac{1}{4}y^2+y-x=0$;
4.19 $2y^2-12y+14-x=0$; **4.20** $-y^2+2y-1-x=0$;
4.21 $x^2+y^2-8x+2y+12=0$; **4.22** $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;
4.23 $x^2+y^2-2x+2y-14=0$; **4.24** $x^2+y^2+2x-2y-23=0$;
4.25 $4x^2+9y^2+32x-54y+109=0$; **4.26** $x^2+y^2-6x+12y-35=0$;
4.27 $x^2+6y^2-6x+12y+13=0$; **4.28** $2x^2+4x-y-8=0$;
4.29 $x^2-6x+y-7=0$; **4.30** $2y^2+4y-x-5=0$.

Задание 5. Построить кривую, заданную уравнением в полярных координатах. Найти уравнение полученной линии в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

5.1 $r=2\cos 4\varphi$; **5.2** $r=3(1+\cos\varphi)$; **5.3** $r=4\sin 4\varphi$;
5.4 $r=6\sin 4\varphi$; **5.5** $r=2(1-\sin 2\varphi)$; **5.6** $r=2-\cos 2\varphi$;
5.7 $r=\frac{3}{1-\cos 2\varphi}$; **5.8** $r=\frac{2}{2-\cos\varphi}$; **5.9** $r=\frac{1}{2-\cos 2\varphi}$;
5.10 $r=1+\cos\varphi$; **5.11** $r=2\sin 4\varphi$; **5.12** $r=5(2-\sin\varphi)$;
5.13 $r=3(2-\cos 2\varphi)$; **5.14** $r=3\sin 6\varphi$; **5.15** $r=4(1-\sin\varphi)$;
5.16 $r=4\sin 3\varphi$; **5.17** $r=3(1-\cos 2\varphi)$; **5.18** $r=3(1+\cos 2\varphi)$;

5.19 $r = 2(1-\cos\varphi)$; **5.20** $r = 3(1+\sin\varphi)$; **5.21** $r = 2\sin 3\varphi$;

5.22 $r = 3\sin 4\varphi$; **5.23** $r = 2\sin 2\varphi$; **5.24** $r = 3(1-\cos 4\varphi)$;

5.25 $r = \dfrac{2}{1+\cos\varphi}$; **5.26** $r = \dfrac{1}{2-\sin\varphi}$; **5.27** $r = 4(1+\cos 2\varphi)$;

5.28 $r = 3\cos 2\varphi$; **5.29** $r = 5(1-\sin 2\varphi)$; **5.30** $r = 2\cos 6\varphi$.

Задание 6. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:

а) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

б) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

в) уравнение прямой A_1A_2;

г) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на $A_1A_2A_3$;

д) объем пирамиды;

е) площадь грани $A_1A_2A_3$.

	A_1	A_2	A_3	A_4		A_1	A_2	A_3	A_4
6.1	(-6;4;5)	(5;-7;3)	(4;2;-8)	(2;8;-3)	**6.2**	(7;-1;-2)	(1;7;8)	(3;7;9)	(-3;-5;2)
6.3	(7;4;9)	(1;-2;-3)	(-5;-3;0)	(1;-3;4)	**6.4**	(3;-2;6)	(-6;-2;3)	(1;1;-4)	(4;6;-7)
6.5	(3;4;2)	(-2;3;-5)	(4;-3;6)	(6;-5;3)	**6.6**	(5;2;7)	(7;-6;-9)	(-7;-6;3)	(1;-5;2)
6.7	(5;3;6)	(-3;-4;4)	(5;-6;8)	(4;0;-3)	**6.8**	(3;4;5)	(1;2;1)	(-2;-3;6)	(3;-6;-3)
6.9	(7;5;8)	(-4;-5;3)	(2;-3;5)	(5;1;-4)	**6.10**	(-4;-2;-3)	(2;5;7)	(6;3;-1)	(6;-4;1)
6.11	(4;3;1)	(2;7;5)	(-4;-2;4)	(2;-3;-5)	**6.12**	(-6;-3;-5)	(5;1;7)	(3;5;-1)	(4;-2;9)
6.13	(4;2;3)	(-5;-4;2)	(5;7;-4)	(6;4;-7)	**6.14**	(-7;-5;6)	(-2;5;-3)	(3;-2;4)	(1;2;2)
6.15	(1;3;1)	(-1;4;6)	(-2;-3;4)	(3;4;-4)	**6.16**	(-2;-5;-1)	(-6;-7;9)	(4;-5;1)	(2;1;4)
6.17	(2;4;1)	(-3;-2;4)	(3;5;-2)	(4;2;-3)	**6.18**	(-7;-6;-5)	(5;1;-3)	(8;-4;0)	(3;4;-7)
6.19	(5;-4;4)	(-4;-6;5)	(3;2;-7)	(6;2;-9)	**6.20**	(-5;-3;-4)	(1;4;6)	(3;2;-2)	(8;-2;4)
6.21	(3;5;3)	(-3;2;8)	(-3;-2;6)	(7;8;-2)	**6.22**	(-4;-5;-3)	(3;1;2)	(5;7;-6)	(6;-1;5)
6.23	(-4;6;3)	(3;-5;1)	(2;6;-4)	(2;4;-5)	**6.24**	(-5;-4;-3)	(7;3;-1)	(6;-2;0)	(3;2;-7)
6.25	(-8;2;7)	(3;-5;9)	(2;4;-6)	(4;6;-5)	**6.26**	(3;-5;-2)	(-4;2;3)	(1;5;7)	(-2;-4;5)
6.27	(7;4;2)	(-5;3;-9)	(1;-5;3)	(7;-9;1)	**6.28**	(-9;-7;4)	(-4;3;-1)	(5;-4;2)	(3;4;4)
6.29	(5;2;4)	(-3;5;-7)	(1;-5;8)	(9;-3;5)	**6.30**	(-4;-7;-3)	(-4;-5;7)	(2;-3;3)	(3;2;1)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

"Предел, непрерывность, производная функции одной переменной"

Задание 1. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1.1 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^{2n+1}$;

1.2 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3-2x+7}{3x^3-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}$; г) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{n-3}$;

1.3 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\,\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{\alpha\to0}\left(1+\dfrac{\alpha}{2}\right)^{\frac{4}{\alpha}}$;

1.4 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5+6x-5}{x^5+2x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$; г) $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+3\alpha)^{\frac{2\alpha+1}{3\alpha}}$;

1.5 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$;

1.6 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$;

1.7 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^5-4x^3+8}{2x^5-3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$;

1.8 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\,\mathrm{tg}\,2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$;

1.9 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+3x^2-3x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{\cos x-\cos^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$;

1.10 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^5+7x^3-4}{6x^5-3x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\,\mathrm{tg}\,2x}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$;

1.11 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{5x^2-7x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{1-2n}$;

1.12 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3+x+1}{6x^3+x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2-7x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\arcsin^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$;

1.13 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2+4x-21}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$;

1.14 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8-x^2}{1+x+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x-\sin 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$;

1.15 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-2}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2+x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$;

1.16 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+x+7}{5x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$;

1.17 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$;

1.18 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x\sin x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$;

1.19 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{3x^3+5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$;

1.20 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x^2-x+1}{5x^2+6x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x\cos x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$;

1.21 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-4x^2}{3-2x+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x-\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)^{1-2x}$;

1.22 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2-\cos x}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-5}{4x-3}\right)^{4x+1}$;

1.23 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^4+3x^2-5}{3x^4+2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+9x+10}{4x+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{1-3x}$;

1.24 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x+1}\right)^{2x-3}$;

1.25 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{6x+1}$;

1.26 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$;

1.27 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$;

1.28 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{2}{x-3}}$;

1.29 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$; г) $\lim\limits_{x\to-1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$;

1.30 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}(2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$.

Задание 2. Исследовать функцию на непрерывность и, в случае наличия, определить характер точек разрыва. Построить график функции.

2.1 $y=\begin{cases}-x+1 & при \quad x<-1,\\ x^2+1 & при \quad -1\le x\le 2,\\ 2x-3 & при \quad x>2;\end{cases}$

2.2 $y=\begin{cases}x+2 & при \quad x\le 0,\\ 1-x^3 & при \quad 0<x\le 1,\\ x-1 & при \quad x>1;\end{cases}$

2.3 $y=\begin{cases} -2x+4 & \text{при} \quad x\le -2, \\ -x^3 & \text{при} \quad -2<x\le 1, \\ x+2 & \text{при} \quad x>1; \end{cases}$

2.4 $y=\begin{cases} x & \text{при} \quad x\le 1, \\ (x-2)^2 & \text{при} \quad 1<x<3, \\ -x+6 & \text{при} \quad x\ge 3; \end{cases}$

2.5 $y=\begin{cases} 3x+4 & \text{при} \quad x\le -1, \\ x^2-2 & \text{при} \quad -1<x<2, \\ x & \text{при} \quad x\ge 2; \end{cases}$

2.6 $y=\begin{cases} x+2 & \text{при} \quad x<1, \\ x^2+2 & \text{при} \quad 1\le x\le 2, \\ -2x+5 & \text{при} \quad x>2; \end{cases}$

2.7 $y=\begin{cases} x^3 & \text{при} \quad x<-1, \\ x-1 & \text{при} \quad -1\le x\le 3, \\ -x+5 & \text{при} \quad x>3; \end{cases}$

2.8 $y=\begin{cases} x+3 & \text{при} \quad x\le 0, \\ -x^2+4 & \text{при} \quad 0<x<2, \\ x-2 & \text{при} \quad x\ge 2; \end{cases}$

2.9 $y=\begin{cases} \frac{1}{2}x^3+4 & \text{при} \quad x<-2, \\ -x+1 & \text{при} \quad -2\le x\le 1, \\ x^2-1 & \text{при} \quad x>1; \end{cases}$

2.10 $y=\begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{при} \quad x\le -2, \\ -x^2+5 & \text{при} \quad -2<x\le 1, \\ 3x & \text{при} \quad x>1; \end{cases}$

2.11 $y=\begin{cases} -x & \text{при} \quad x\le 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0<x\le 2, \\ x+1 & \text{при} \quad x>2; \end{cases}$

2.12 $y=\begin{cases} x^2+1 & \text{при} \quad x\le 1, \\ 2x & \text{при} \quad 1<x\le 3, \\ x+2 & \text{при} \quad x>3; \end{cases}$

2.13 $y=\begin{cases} x-3 & \text{при} \quad x<0, \\ x+1 & \text{при} \quad 0\le x\le 4, \\ 3+\sqrt{x} & \text{при} \quad x>4; \end{cases}$

2.14 $y=\begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{при} \quad x\le 0, \\ 0 & \text{при} \quad 0<x\le 2, \\ x-2 & \text{при} \quad x>2; \end{cases}$

2.15 $y=\begin{cases} 2x^2 & \text{при} \quad x\le 0, \\ x & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 2 & \text{при} \quad x>1; \end{cases}$

2.16 $y=\begin{cases} \sin x & \text{при} \quad x<0, \\ x & \text{при} \quad 0\le x\le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x>2; \end{cases}$

2.17 $y=\begin{cases} \cos x & \text{при} \quad x\le \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \frac{\pi}{2}<x<\pi, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при} \quad x\ge \pi; \end{cases}$

2.18 $y=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ \operatorname{tg} x & \text{при} \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ x & \text{при} \quad x\ge \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

2.19 $y=\begin{cases} 3x+1 & \text{при} \quad x<0, \\ x^2+1 & \text{при} \quad 0\le x<1, \\ 0 & \text{при} \quad x\ge 1; \end{cases}$

2.20 $y=\begin{cases} x-1 & \text{при} \quad x\le 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0<x<2, \\ 2x & \text{при} \quad x\ge 2; \end{cases}$

$$\textbf{2.21}\quad y=\begin{cases} x+1 & при \quad x\le 0,\\ x^2 & при \quad 0<x\le 2,\\ \frac{1}{2}x+3 & при \quad x>2;\end{cases}$$

$$\textbf{2.22}\quad y=\begin{cases} -2x & при \quad x\le 0,\\ \sqrt{x} & при \quad 0<x<4,\\ 3 & при \quad x\ge 4;\end{cases}$$

$$\textbf{2.23}\quad y=\begin{cases} x+1 & при \quad x<0,\\ x^2+1 & при \quad 0\le x<1,\\ 1 & при \quad x\ge 1;\end{cases}$$

$$\textbf{2.24}\quad y=\begin{cases} x^2+1 & при \quad x<0,\\ 1-x & при \quad 0\le x\le 2,\\ 2 & при \quad x>2;\end{cases}$$

$$\textbf{2.25}\quad y=\begin{cases} -x & при \quad x\le 0,\\ \operatorname{tg}x & при \quad 0<x<\frac{\pi}{4},\\ 2 & при \quad x\ge\frac{\pi}{4};\end{cases}$$

$$\textbf{2.26}\quad y=\begin{cases} -\frac{x}{2} & при \quad x\le 0,\\ \cos x & при \quad 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ x-\frac{\pi}{2} & при \quad x>\frac{\pi}{2};\end{cases}$$

$$\textbf{2.27}\quad y=\begin{cases} x^2 & при \quad x\le 0,\\ x & при \quad 0<x\le 2,\\ 1 & при \quad x>2;\end{cases}$$

$$\textbf{2.28}\quad y=\begin{cases} \sqrt{-x} & при \quad x\le 0,\\ 2 & при \quad 0<x\le 1,\\ x & при \quad x>1;\end{cases}$$

$$\textbf{2.29}\quad y=\begin{cases} -x & при \quad x\le 0,\\ \sin x & при \quad 0<x\le\pi,\\ x-2 & при \quad x>\pi;\end{cases}$$

$$\textbf{2.30}\quad y=\begin{cases} 2x & при \quad x\le 0,\\ x^2+1 & при \quad 0<x\le 1,\\ 2 & при \quad x>1.\end{cases}$$

Задание 3. Найти производные функций.

3.1 а) $y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$; б) $y=(\operatorname{arctg}x)^{\frac{1}{2}\ln\operatorname{arctg}x}$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=5x$;

3.2 а) $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$; б) $y=(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$; в) $x-y+\operatorname{arctg}y=0$;

3.3 а) $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$; б) $y=(\sin x)^{5e^x}$; в) $y\sin x=\cos(x-y)$;

3.4 а) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$; б) $y=(\arcsin x)^{e^x}$; в) $\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

3.5 а) $y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$; б) $y=(\ln x)^{3^x}$; в) $(e^x-1)(e^y-1)=1$;

3.6 а) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$; б) $y=x^{\arcsin x}$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=5x$;

3.7 а) $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$; б) $y=(\operatorname{ctg}3x)^{2e^x}$; в) $x^3+y^3-3axy=0$;

3.8 а) $y=\dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$; б) $y=x^{\arcsin x}$; в) $x-y+a\sin y=0$;

3.9 а) $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$; б) $y=(\operatorname{tg}x)^{4e^x}$; в) $\ln y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

3.10 а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x^{\frac{3}{4}})^2}{x^{\frac{3}{2}}}}$; б) $y=(\cos 5x)^{e^x}$; в) $x-y+e^y\operatorname{arctg}x=0$,

3.11 а) $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $y=(x\sin x)^{\sin(x\sin x)}$; в) $x\sin y-y\cos x=0$;

3.12 а) $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$; б) $y=(x-5)^{\operatorname{tg}x}$; в) $e^{xy}-x^2+y^2=0$;

3.13 а) $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; б) $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg}x}$; в) $\ln y=\arcsin\dfrac{x}{y}$;

3.14 а) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$; б) $y=x^{\sin x^3}$; в) $x+y+e^{xy}=2$;

3.15 а) $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$; б) $y=(x^2-1)^{\sin x}$; в) $y\sin x+\cos(x-y)=y$;

3.16 а) $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$; б) $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$; в) $x\sin y+y^2=y\cos x$;

3.17 а) $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$; б) $y=(\sin x)^{\frac{5}{2}x}$; в) $x+e^x\operatorname{arctg}(xy)=y$;

3.18 а) $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}$; б) $y=(x^2+1)^{\cos x}$; в) $2x^2+xy-y^3=0$;

3.19 а) $y=\dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$; б) $y=19^{x^{19}}\cdot x^{19}$; в) $\ln y=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

3.20 а) $y=\dfrac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$; б) $y=x^{3^x}\cdot 2^x$; в) $xy+\arcsin(x+y)=0$;

3.21 а) $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$; б) $y=(\sin\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$; в) $e^{x+y}-xy=0$;

3.22 а) $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$; б) $y=x^{e^{\operatorname{ctg}x}}$; в) $e^{xy}-(x+3y)=0$;

3.23 а) $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$; б) $y=x^{e^{\cos x}}$; в) $y\sin(x+y)-x=0$;

3.24 а) $y=\dfrac{3\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$; б) $y=x^{2x}\cdot 5^x$; в) $\operatorname{tg}(x+2y)+y=3x$;

3.25 а) $y=3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}$; б) $y=x^{e^{\sin x}}$; в) $\operatorname{tg}(x+y)-xy=0$;

3.26 а) $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$; б) $y=(\operatorname{tg}x)^{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}}$; в) $\ln(x+y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

3.27 а) $y=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$; б) $y=x^{e^{\operatorname{arctg}x}}$; в) $(x+y)^2=(3y-x)^3$;

3.28 а) $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$; б) $y=(x^8+1)^{\operatorname{tg}x}$; в) $\ln\dfrac{x}{y}-x+2y=0$;

3.29 а) $y=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$; б) $y=x^{29^x}\cdot 29^x$; в) $x+2y=\operatorname{arctg}(x+y)$;

3.30 а) $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$; б) $y=(\cos 2x)^{\ln\cos\frac{2x}{3}}$; в) $\sin(2x+y)+2x=3y$.

Задание 4. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

4.1 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{\operatorname{ctg}x}$;

4.2 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{\ln x}+x}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\dfrac{1}{x})^x$;

4.3 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

4.4 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$;

4.5 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

4.6 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$;

4.7 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$;

4.8 а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(x+e)\right)^{\frac{1}{x}}$;

4.9 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

4.10 а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}}$;

4.11 а) $\lim\limits_{x\to 0}((1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg} x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$;

4.12 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\dfrac{3}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$;

4.13 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{\sin x - x\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$;

4.14 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{4x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$;

4.15 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4})^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$;

4.16 а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$;

4.17 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$;

4.18 а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$;

4.19 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{2\ln x+1}}$;

4.20 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{e^x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

4.21 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^x)^{\frac{1}{x}}$;

4.22 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}(\pi x)}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^x$;

4.23 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2\cdot\sin\dfrac{a}{x})$;

4.24 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{5}{x^2-x-20}\right)$;

4.25 а) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$;

4.26 а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$;

4.27 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^3}{\sin^2 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$;

4.28 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(\operatorname{ctg} x))^{\operatorname{tg} x}$;

4.29 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^3+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

4.30 а) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} 4x\cdot(1-\cos 2x))$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-4}{x+3}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Задание 5. Найти производные y'_x и y''_{xx} функции, заданной параметрически.

5.1 $\begin{cases} x=\dfrac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y=\sin\left(\dfrac{t^3}{3}+t\right); \end{cases}$ **5.2** $\begin{cases} x=\ln(\operatorname{ctg} t), \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}; \end{cases}$ **5.3** $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=a\cos^3 t; \end{cases}$

5.4 $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3; \end{cases}$ **5.5** $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sin t; \end{cases}$ **5.6** $\begin{cases} x=t\cos t-2\sin t, \\ y=t\sin t+2\cos t; \end{cases}$

5.7 $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$ **5.8** $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin t; \end{cases}$ **5.9** $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t; \end{cases}$

5.10 $\begin{cases} x=t^3+1, \\ y=t^2+t+1; \end{cases}$ **5.11** $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=a^t; \end{cases}$ **5.12** $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\cos^3 t; \end{cases}$

5.13 $\begin{cases} x=2e^t+t, \\ y=e^{-t}; \end{cases}$ **5.14** $\begin{cases} x=\dfrac{t-1}{t}, \\ y=\ln(1+t^2); \end{cases}$ **5.15** $\begin{cases} x=t-t^4, \\ y=t^2-t^3; \end{cases}$

5.16 $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=\sin t; \end{cases}$ **5.17** $\begin{cases} x=t^3+1, \\ y=t^2; \end{cases}$ **5.18** $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t-\cos 2t; \end{cases}$

5.19 $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t; \end{cases}$ **5.20** $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2-\cos t; \end{cases}$ **5.21** $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}; \end{cases}$

5.22 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{1}{1+t^2}; \end{cases}$ 5.23 $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{1-t}; \end{cases}$ 5.24 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln(\cos t); \end{cases}$

5.25 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = \ln t; \end{cases}$ 5.26 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln(\sin t); \end{cases}$ 5.27 $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + t\cos t; \end{cases}$

5.28 $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t; \end{cases}$ 5.29 $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t}; \end{cases}$ 5.30 $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

Задание 6. Провести полное исследование функции и построить ее график.

6.1 $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; 6.2 $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 6.3 $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$;

6.4 $y = \dfrac{1}{1-x^2}$; 6.5 $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$; 6.6 $y = \ln(x^2 - 4)$;

6.7 $y = x \cdot e^{-x}$; 6.8 $y = (x+2)(x-1)^2$; 6.9 $y = x\ln x$;

6.10 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$; 6.11 $y = \dfrac{e^x}{x}$; 6.12 $y = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$;

6.13 $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; 6.14 $y = (2x+2)\ln(x+1)$; 6.15 $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$;

6.16 $y = \dfrac{\sqrt{e^x}}{x}$; 6.17 $y = \ln(x^2 + 4x + 5)$; 6.18 $y = \dfrac{x^3+16}{x}$;

6.19 $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; 6.20 $y = \dfrac{8x}{(x-2)^2}$; 6.21 $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

6.22 $y = \dfrac{3\ln x}{x}$; 6.23 $y = \dfrac{2}{x^2+x+1}$; 6.24 $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x^2}$;

6.25 $y = \dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$; 6.26 $y = \dfrac{2x^2}{2x-1}$; 6.27 $y = \dfrac{x^3-8}{2x^2}$;

6.28 $y = \dfrac{1}{x^2+2x}$; 6.29 $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$; 6.30 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$.

Решение типового варианта контрольной работы № 1

" Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии "

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами: 1) по формулам Крамера; 2) методом Гаусса; 3) матричным методом:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение: 1) По формулам Крамера решение системы ищется в виде
$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$
где Δ – основной определитель системы, а Δ_{x_i} – вспомогательные определители, получаемые из основного заменой i-го столбца столбцом свободных членов. При $\Delta \neq 0$ система имеет единственное решение. При $\Delta = 0$ решение следует искать другими методами.

Таким образом, имеем
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-2)\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 3 -$$
$$-1\cdot(-2)\cdot 2 = 3+2+4-1+6+4 = 18 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Найдем вспомогательные определители:
$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-2)\cdot 2 + 1\cdot 6\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 2 - (-1)\cdot 6\cdot 3 -$$
$$-(-2)\cdot(-2)\cdot 2 = -6+4+12-2+18-8 = 18,$$
$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 3 + (-2)\cdot(-2)\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 6\cdot 1 - (-2)\cdot 2\cdot 3 -$$
$$-1\cdot(-2)\cdot 2 = 18+4+4-6+12+4 = 36,$$
$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 6\cdot 1 + (-2)\cdot 2\cdot 2 - (-2)\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 2 -$$
$$-1\cdot 6\cdot 2 = 2-6-8+2+4-12 = -18.$$

Тогда, $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{36}{18} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-18}{18} = -1.$

2) Для решения системы методом Гаусса составляется расширенная матрица системы, с которой можно проводить следующие действия:

а) все элементы какой-либо строки умножать или делить на одно и то же число;
б) к элементам какой-либо строки прибавлять соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Суть метода состоит в том, что с помощью этих преобразований, расширенная матрица сводится к треугольному или диагональному виду. Переходя обратно, от полученной матрицы к соответствующей системе, легко находим ее решение. Достоинство этого метода в том, что с его помощью можно решить любую систему линейных уравнений.

Составим расширенную матрицу данной системы и проведем преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right).$$

При первом переходе, к элементам второй и третьей строк прибавляли соответствующие элементы первой строки, умноженные на -2 и -1, соответственно. В результате получили в первом столбце первый элемент равный 1, а под ней все нули.

При втором переходе, к элементам третьей строки прибавляли соответствующие элементы второй строки, умноженные на -1. В результате получили во втором столбце третий элемент равный нулю. Матрица приобрела треугольный вид. На этом прямой ход метода Гаусса закончен и можно перейти к системе, которая легко решается:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_2 - 4x_3 = 10, \\ 6x_3 = -6. \end{cases}$$

Но можно продолжить преобразования далее, получая нули и над элементами главной диагонали:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

При первом переходе обратного хода метода Гаусса, элементы третьей строки разделили на 6, а затем к элементам первой и второй строк прибавляли соответствующие элементы полученной третьей строки, умноженные на -1 и 4, соответственно. В результате получили в последнем столбце последний элемент равный 1, а над ним все нули.

При втором переходе обратного хода метода Гаусса, элементы второй строки разделили на 3, а затем к элементам первой строки прибавляли соответствующие элементы полученной второй строки, умноженные на 1.

В результате получили все элементы главной диагонали равными 1, а остальные элементы равные нулю. Переходя к системе, получаем решение:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

3) Решить систему матричным методом – значит решить ее как матричное уравнение с помощью обратной матрицы. Для этого система записывается в

матричной форме: $A \cdot X = B$. Умножим слева обе части данного уравнения на матрицу, обратную к A:

$$A \cdot X = B \;\Leftrightarrow\; A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \;\Leftrightarrow\; (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\Leftrightarrow$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как обратная матрица для A существует лишь при $\Delta \neq 0$, то его применять можно в тех же случаях, что и формулы Крамера.

По данной системе составим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\; B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу, обратную к A, находим по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя матрицы А.

В первом пункте был найден определитель $\Delta = 0$. Вычислим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Следовательно: $A^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -8 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -8 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \\ -8 \cdot (-2) + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-2) + (-3) \cdot 6 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Задание 2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для нахождения собственных значений матрицы составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (-2-\lambda) \cdot (-\lambda) - 1 \cdot 3 = 0.$$

Корни этого уравнения и являются собственными значениями матрицы:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -3 \text{ и } \lambda_2 = 1.$$

Собственные векторы для каждого собственного значения найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} (-2-\lambda)x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_1 - \lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

Для собственного значения $\lambda_1 = -3$ имеем

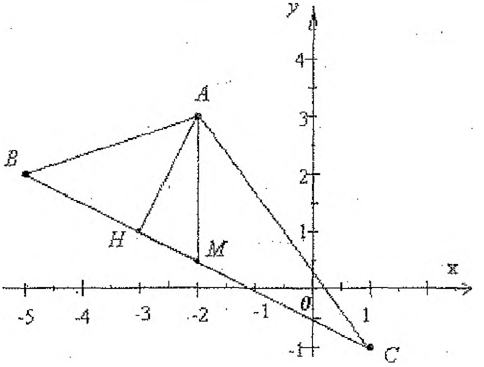
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = -t, \end{cases} \quad \forall t \in R.$$

Для собственного значения $\lambda_2 = 1$ имеем

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 3t, \end{cases} \quad \forall t \in R.$$

Ответ: Собственными векторами данной матрицы с собственным числом $\lambda_1 = -3$ являются векторы $\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$, а с собственным числом $\lambda_2 = 1$ – векторы $\begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$, где $t \in R$ $(t \neq 0)$.

Задание 3. Даны вершины $A(-2;3)$, $B(-5;2)$, $C(1;-1)$ треугольника ABC. Высота AH и медиана AM, проведенные из вершины A, отсекают на стороне BC отрезок HM. Найти: а) общие уравнения сторон треугольника ABC; б) длину отрезка HM; в) внутренний угол B. Сделать чертеж.



Решение: Сделаем чертеж.

а) Для нахождения уравнений сторон AB, AC и BC, воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки.

Для стороны AB имеем:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x+2}{-5+2} = \frac{y-3}{2-3} \Rightarrow \frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow$$

$$x + 2 = 3(y-3) \Rightarrow x - 3y + 11 = 0.$$

Для стороны AC имеем:

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow \frac{x+2}{1+2} = \frac{y-3}{-1-3} \Rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-4} \Rightarrow$$

$$-4(x+2) = 3(y-3) \Rightarrow 4x + 3y - 1 = 0.$$

Для стороны BC имеем:

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B} \Rightarrow \frac{x+5}{1+5}=\frac{y-2}{-1-2} \Rightarrow \frac{x+5}{6}=\frac{y-2}{-3} \Rightarrow$$
$$-(x+2)=2(y-3) \Rightarrow x+2y-4=0.$$

б) По условию, прямая $AH \perp BC$, следовательно, $k_{AH}=-\frac{1}{k_{BC}}$. Запишем уравнение стороны BC, как уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$x+2y-4=0 \Rightarrow 2y=-x+4 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2.$$

То есть $k_{BC}=-\frac{1}{2}$, а тогда $k_{AH}=-\frac{1}{-1/2}=2$.

Найдем уравнение прямой AH, используя формулу прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом: $y-y_A=k_{AH}(x-x_A)$ или $y-3=2(x+2)$, то есть $y=2x+7$.

Для отыскания координат точки пересечения высоты AH и стороны BC решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, \\ y=2x+7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=2x+7, \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}x=-\frac{15}{2} \Rightarrow x=-3 \Rightarrow y=1.$$

Точка H имеет координаты $(-3;1)$.

Так как AM – медиана, то точка M делит сторону BC пополам. Координаты точки M можно найти по формулам: $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}$, $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}$. Тогда:

$$x_M=\frac{-5+1}{2}=-\frac{4}{2}=-2,\ y_M=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}=0.5 \Rightarrow M(-2;0,5).$$

Для того чтобы найти длину отрезка HM, воспользуемся формулой нахождения расстояния между двумя точками:

$$|HM|=\sqrt{(x_M-x_H)^2+(y_M-y_H)^2}=\sqrt{(-2+3)^2+(0,5-1)^2}=\sqrt{1,25}\approx 1,118.$$

в) Чтобы найти внутренний угол B, воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, где φ - угол, полученный вращением против часовой стрелки прямой с угловым коэффициентом k_1 до совмещения с прямой с угловым коэффициентом k_2. Обозначим вращение против часовой стрелки и получим $\operatorname{tg}B=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{BC}k_{AB}}$.

Угловой коэффициент стороны BC уже известен: $k_{BC}=0,5$. Для нахождения k_{AB} применим формулу: $k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$, то есть $k_{AB}=\frac{2-3}{-5+2}=\frac{1}{3}$.

Итак, $\operatorname{tg} B = \dfrac{1/3 + 1/2}{1 + 1/3 \cdot (-1/2)} = \dfrac{5/6}{1 - 1/6} = 1 \quad \Rightarrow \quad \angle B = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ радиан($45°$).

Ответ: а) $x - 3y + 11 = 0$ (AB), $4x + 3y - 1 = 0$ (AC), $x + 2y - 4 = 0$ (BC);

б) $|HM| = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}118$; в) $\angle B = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ радиан($45°$).

Задание 4. Установить какая линия определяется уравнением

$$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0.$$

Сделать чертеж.

Решение: Чтобы установить тип линии второго порядка, необходимо свести ее уравнение к каноническому виду. Для этого сначала с помощью поворота осей избавляются от слагаемого, содержащего произведение xy.

Так как в данном уравнении такого слагаемого нет, то переходим к следующему шагу. Это избавление от первых степеней тех переменных, квадраты которых присутствуют в уравнении. Аналитически это делаем как выделение полного квадрата:

$$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 + 4y) + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

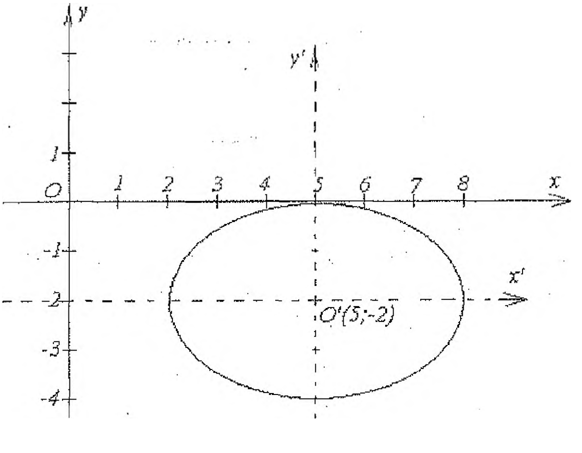
$$\Leftrightarrow \quad 4(x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2) + 9(y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2) + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left((x-5)^2 - 25\right) + 9\left((y+2)^2 - 4\right) + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x-5)^2 - 100 + 9(y+2)^2 - 36 + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Графически избавление от первых степеней проводится с помощью параллельного переноса. Для этого воспользуемся формулами преобразования координат $x' = x - 5$ и $y' = y + 2$. Новым началом координат будет точка $O'(5;-2)$. В новых координатах уравнение кривой примет вид: $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$. Таким образом, данная кривая является эллипсом, фокусы которого лежат на оси Ox', большая полуось $a = 3$ и малая полуось $b = 2$. Сделаем чертеж.



Ответ: эллипс.

Задание 5. Построить кривую, заданную уравнением в полярных координатах $r = 2 + \cos^2 \varphi$. Найти уравнение полученной линии в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

Решение: Кривую в полярных координатах строят обычно по точкам. Для этого сначала упрощают (если возможно) задание функции. Затем составляют таблицу, в которой указывают значения φ через определенный промежуток, начиная от $\varphi = 0$, и соответствующие им значения функции. Им может быть $\pi/8$ или $\pi/6$. Построив найденные точки $M_i(\varphi_i; r_i)$ и соединив их плавной линией, получают достаточно точный график искомой кривой. Чем меньше промежуток, то есть чем больше точек, тем точнее получится график.

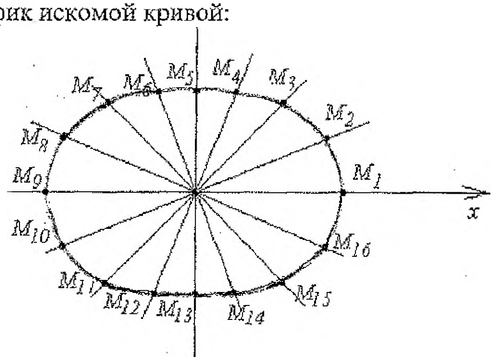
Упростим уравнение данной кривой. Так как $\cos^2 \varphi = \dfrac{1 + \cos 2\varphi}{2}$, то

$$r = \frac{5 + \cos 2\varphi}{2}.$$

Составим таблицу, в которой укажем значения φ_i через промежуток $\pi/8$, начиная от $\varphi = 0$, и соответствующие им значения функции r_i.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16
φ_i	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$
r_i	3	2,85	2,5	2,15	2	2,15	2,5	2,85	3	2,85	2,5	2,15	2	2,15	2,5	2,85

Построим график искомой кривой:



Найдем уравнение полученной линии в прямоугольной декартовой системе координат. Для этого используем формулы перехода от полярной к прямоугольной декартовой системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \Rightarrow \; r = \sqrt{x^2 + y^2}, \; \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Подставляя их в исходное уравнение, получим:

$$\sqrt{x^2+y^2}=2+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2+\frac{x^2}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}=2\left(x^2+y^2\right)+x^2.$$

Ответ: $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}=3x^2+2y^2$.

Задание 6. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(2;3;4)$, $A_2(4;7;3)$, $A_3(1;2;2)$, $A_4(-2;0;-1)$. Найти:

а) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

б) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

в) уравнение прямой A_1A_2;

г) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на $A_1A_2A_3$;

д) объем пирамиды;

е) площадь грани $A_1A_2A_3$.

Решение: а) Пусть α — угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4. Любому ребру пирамиды можно поставить в соответствие вектор. Поэтому вместо α будем искать угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$. Найдем координаты этих векторов:

$$\overline{A_1A_2}=(x_{A_2}-x_{A_1};y_{A_2}-y_{A_1};z_{A_2}-z_{A_1})=(4-2;7-3;3-4)=(2;4;-1),$$

$$\overline{A_1A_4}=(x_{A_4}-x_{A_1};y_{A_4}-y_{A_1};z_{A_4}-z_{A_1})=(-2-2;0-3;-1-4)=(-4;-3;-5).$$

Угол между векторами находится из скалярного произведения векторов:

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_4}=\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_4}\right|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_4}\right|}.$$

Найдем длины векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$, и их скалярное произведение:

$$\left|\overline{A_1A_2}\right|=\sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{4+16+1}=\sqrt{21};$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{16+9+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2},$$

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_4}=2\cdot(-4)+4\cdot(-3)+(-1)\cdot(-5)=-8-12+5=-15.$$

Тогда, $\cos\alpha=\dfrac{-15}{\sqrt{21}\cdot 5\sqrt{2}}=\dfrac{-3}{\sqrt{42}} \Rightarrow \alpha=\arccos\dfrac{-3}{\sqrt{42}}\approx 117{,}6^\circ$.

б) Уравнение плоскости, проходящей через три точки, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Так как плоскость $A_1A_2A_3$ проходит через точки A_1, A_2 и A_3, то ее уравнение будет:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 4-2 & 7-3 & 3-4 \\ 1-2 & 2-3 & 2-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}(x-2) - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}(y-3) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}(z-4) = 0 \Rightarrow$$

$$-9(x-2)+5(y-3)+2(z-4)=0 \Rightarrow -9x+18+5y-15+2z-8=0 \Rightarrow$$

$$-9x+5y+2z-5=0 \text{ или } 9x-5y-2z+5=0.$$

в) Уравнение прямой A_1A_2 составим как каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_{A_1}}{x_{A_2}-x_{A_1}} = \frac{y-y_{A_1}}{y_{A_2}-y_{A_1}} = \frac{z-z_{A_1}}{z_{A_2}-z_{A_1}} \Rightarrow \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-3}{7-3} = \frac{z-4}{3-4} \Rightarrow$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-1}.$$

г) Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на $A_1A_2A_3$, составим как уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным направляющим вектором: $\frac{x-x_{A_4}}{A} = \frac{y-y_{A_4}}{B} = \frac{z-z_{A_4}}{C}$. Так как высота перпендикулярна плоскости $A_1A_2A_3$, то нормальный вектор $\vec{n}$ этой плоскости можно взять в качестве направляющего вектора $\vec{a}$ высоты. Из общего уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ ($9x-5y-2z+5=0$) находим координаты нормали $\vec{n}=(9;-5;-2)$. Таким образом, уравнение высоты имеет вид:

$$\frac{x+2}{9} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}.$$

д) Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если тройка векторов правая, и со знаком «–», если тройка векторов левая. Так как объем пирамиды в шесть раз меньше объема параллелепипеда, построенного на трех сторонах, выходящих из одной вершины, то $V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right)\cdot \overline{A_1A_4}\right|$. Поскольку, $\overline{A_1A_2}=(2;4;-1)$, $\overline{A_1A_3}=(-1;-1;-2)$, $\overline{A_1A_4}=(-4;-3;-5)$, то

$$\left(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right)\cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 10+32-3+4-12-20=11.$$

Тогда, $V_{пир} = \frac{11}{6}(куб.ед.)$.

е) Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Так как грань $A_1A_2A_3$ является треугольником, то есть половиной параллелограмма, то ее площадь будем искать по формуле: $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right|$. Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = (2;4;-1)$ и $\overrightarrow{A_1A_3} = (-1;-1;-2)$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Тогда $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{81+25+4} = \frac{1}{2}\sqrt{110}\,(кв.ед.)$

Ответ: а) $\alpha = \arccos\frac{-3}{\sqrt{42}} \approx 117{,}6°$; б) $9x - 5y - 2z + 5 = 0$;

в) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-1}$; г) $\frac{x+2}{9} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}$; д) $V_{пир} = \frac{11}{6}\,(куб.ед.)$;

е) $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{110}\,(кв.ед.)$.

Решение типового варианта контрольной работы № 2

" Предел, непрерывность, производная функции одной переменной "

Задание 1. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 7}{3x^3 - 7x + 1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 5x + 4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos 4x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+3}\right)^{1-2x}$;

Решение: а) Предел частного равен частному пределов, если эти пределы существуют, конечны и знаменатель не равен нулю. В этом же примере в числителе и в знаменателе, при подстановке вместо x – бесконечности, получаем бесконечности. В таких случаях говорят, что имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ (бесконечность делить на бесконечность). Для раскрытия этой неопределенности целесообразно выделить элементы, порождающие эти бесконечности. Для этого и в числителе, и в знаменателе вынесем за скобку степень x с наибольшим показателем. В результате выражения в скобках будут стремиться к конечным пределам, а степени x за скобками сократятся. Решим данный пример:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2+5x-7}{3x^3-7x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(3-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^3}}{3-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1-0+0-0}{3-0+0}=\frac{1}{3}.$$

б) В данном случае также не можем применить теорему о пределе частного, так как знаменатель стремиться к нулю. В числителе и в знаменателе при подстановке $x=1$ получаем нули. В таких случаях говорят, что имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$(ноль делить на ноль). Для раскрытия этой неопределенности целесообразно выделить элементы, порождающие нули (возможно, это будут множители вида $(x-1)$). Для этого и числитель, и знаменатель разложим на множители:

$$x^2-6x+5=(x-1)(x-5),\ x^2-5x+4=(x-1)(x-4).$$

Подставляя соответствующие выражения и сокращая общий множитель $(x-1)$, стремящийся к нулю, но не равный ему, получим

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-5x+4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to1}\frac{x-5}{x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x-5)}{\lim\limits_{x\to1}(x-4)}=\frac{1-5}{1-4}=\frac{4}{3}.$$

в) В числителе и в знаменателе при подстановке $x=0$ получаем нули. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Так как в примере присутствуют тригонометрические функции, то для раскрытия неопределенности можно применить первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. Преобразуем выражение под знаком предела, используя тригонометрические формулы:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-2\sin^2 2x)}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x}{x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\frac{\sin2x}{2x}\cdot2x\right)^2}{x\left(\frac{\sin x}{x}\cdot x\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\cdot4x^2}{x^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{8\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=$$

$$=\frac{8\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=8,\ \text{так как}\ \lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}=1\ \text{и}\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

г) Дробь в скобках стремится к единице при $x \to \infty$ (в пункте а) рассмотрен подобный случай). Таким образом, имеем неопределенность вида 1^{∞}. Неопределенности подобного вида раскрывают с помощью второго замечательного предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Выражение под знаком предела необходимо преобразовать так, чтобы оно походило на выражение во втором замечательном пределе (то есть к *единице* прибавляется *единица* делить на бесконечность в степени *такая же* бесконечность). Сначала в скобке прибавим и отнимем единицу и преобразуем выражение так, чтобы единица осталась:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+3}\right)^{1-2x} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{3x+3}-1\right)^{1-2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-3x-3}{3x+3}\right)^{1-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{3x+3}\right)^{1-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{1-2x}$$

Знаменатель стремится к бесконечности. Умножим и разделим показатель степени на знаменатель. Преобразуя выражение под знаком предела далее, получим:

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{\frac{3x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{3x+3}(1-2x)} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{\frac{-4(1-2x)}{3x+3}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4+8x}{3x+3}} = e^{\frac{8}{3}},$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+3}{-4} = \infty,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{\frac{3x+3}{-4}} = e,\ \lim_{x\to\infty}\frac{-4+8x}{3x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{4}{x}+8\right)x}{\left(3+\frac{3}{x}\right)x} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{3}$; в) 8; г) $e^{\frac{8}{3}}$.

Задание 2. Исследовать функцию на непрерывность и, в случае наличия, определить характер точек разрыва.

$$y=\begin{cases} \left\{\dfrac{1}{2}x\right\} & при \quad -4<x\le -\dfrac{3}{2} \quad и \quad \dfrac{3}{2}\le x<4, \\ -(x+\dfrac{3}{2}) & при \quad -\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{3}x & при \quad x=4, \\ \dfrac{1}{x-3} & при \quad x>4. \end{cases}$$

Построить график функции.

Решение: Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Для непрерывности функции в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) Функция $y=f(x)$ должна быть определена в некоторой окрестности точки x_0(то есть в самой точке и вблизи этой точки);

2) Функция $y=f(x)$ должна иметь одинаковые односторонние пределы

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x);$$

3) Эти односторонние пределы должны быть равны значению функции в точке $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала. Все элементарные функции непрерывны в интервалах, на которых они определены.

Говорят, что функция $f(x)$ терпит разрыв в точке x_0, если она определена в сколь угодно близких к ней точках, но в самой точке не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности. Неэлементарная функция может иметь точки разрыва как в точках, где она не определена, так и в точках, где она определена. В частности, если функция задана различными аналитическими выражениями (формулами) для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы в тех точках, где меняется ее аналитическое выражение.

Данная функция определена на интервале $(-4;+\infty)$. Ее задают четыре различных аналитических выражения. На промежутке $(4;+\infty)$ функция $\dfrac{1}{x-3}$ и на промежутке $\left(-\dfrac{3}{2};+\dfrac{3}{2}\right)$ функция $-(x+\dfrac{3}{2})$ – непрерывны. Функция $\left\{\dfrac{1}{2}x\right\}$ (дробная часть) имеет разрыв в тех точках, где ее аргумент целое число.

Таким образом, точками разрыва функции y будут точки разрыва функции $\left\{\frac{1}{2}x\right\}$ и могут быть точки соединения разных функций. Исследуем их.

Во всех точках разрыва функции $\left\{\frac{1}{2}x\right\}$ предел справа равен нулю, а слева – единице. Аргумент этой функции равен целому числу на заданном промежутке только в точках $x=-2$ и $x=2$. Рассмотрим односторонние пределы в этих точках:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0}\left\{\frac{1}{2}x\right\}=\left\{\frac{1}{2}\cdot(-2-0)\right\}=\{-1-0\}=1,$$

$$\lim_{x\to -2+0} f(x)=\lim_{x\to -2+0}\left\{\frac{1}{2}x\right\}=\left\{\frac{1}{2}\cdot(-2+0)\right\}=\{-1+0\}=0;$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left\{\frac{1}{2}x\right\}=\left\{\frac{1}{2}\cdot(2-0)\right\}=\{1-0\}=1,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\left\{\frac{1}{2}x\right\}=\left\{\frac{1}{2}\cdot(2+0)\right\}=\{1+0\}=0.$$

Таким образом, эти точки являются точками разрыва первого рода для данной функции, причем разрыв неустранимый (так как оба односторонних предела существуют, конечны и не равны между собой).

Рассмотрим точки изменения аналитических выражений функции.

Точка $x=-\frac{3}{2}$:

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to -\frac{3}{2}-0}\left\{\frac{1}{2}x\right\}=\left\{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})\right\}=\left\{-\frac{3}{4}\right\}=\left\{-1+\frac{1}{4}\right\}=0.25,$$

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to -\frac{3}{2}+0}(-(x+\frac{3}{2}))=-(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2})=0.$$

В точке $x=-\frac{3}{2}$ – неустранимый разрыв первого рода.

Точка $x=\frac{3}{2}$:

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to \frac{3}{2}-0}(-(x+\frac{3}{2}))=-(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})=-3,$$

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to \frac{3}{2}+0}\left\{\frac{1}{2}x\right\}=\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right\}=\left\{\frac{3}{4}\right\}=\left\{0+\frac{3}{4}\right\}=0.75.$$

В точке $x=\frac{3}{2}$ – неустранимый разрыв первого рода.

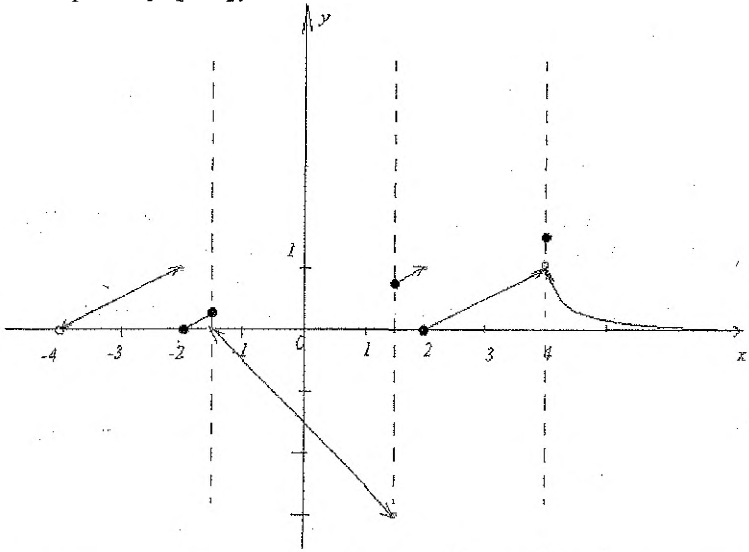
Точка $x=4$:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0}\left\{\frac{1}{2}x\right\} = \left\{\frac{1}{2}\cdot(4-0)\right\} = \{2-0\} = 1,$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0}\left(\frac{1}{x-3}\right) = \frac{1}{4-3} = 1.$$

Получили $\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4+0} f(x)$. Однако $f(4) = \frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{4}{3} \neq 1$, то есть нарушается третье условие непрерывности. В точке $x = 4$ - разрыв первого рода. Но это – устранимый разрыв. Если переопределить функцию в точке $x = 4$ придав ей значение $f(4) = 1$, то функция станет непрерывной в этой точке.

Построим график функции:



Ответ: В точках $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 2$ функция имеет неустранимый разрыв первого рода. В точке $x = 4$ функция имеет устранимый разрыв первого рода.

Задание 3. Найти производные функций:

$$\text{а) } y = \sqrt[3]{x^7 + 2x} + \ln(x^2 - x\sqrt{2}) + \frac{3}{x^5} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,arcctg\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2};$$

$$\text{б) } y = (\sin x)^{\ln x}; \quad \text{в) } y = xe^y - x + 5y - 2.$$

Решение: а) Производную будем искать, применяя таблицу производных и простейшие правила дифференцирования:

$$y'=\left(\sqrt[3]{x^7+2x}+\ln(x^2-x\sqrt{2})+\frac{3}{x^5}-\frac{1}{2\sqrt{2}}arcctg\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)'=$$

$$=\left(\left(x^7+2x\right)^{\frac{1}{3}}\right)'+\left(\ln(x^2-x\sqrt{2})\right)'+\left(3\cdot x^{-5}\right)'-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}arcctg\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)'.$$

Найдем производную каждого слагаемого отдельно:

$$\left(\left(x^7+2x\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^7+2x\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\left(x^7+2x\right)'=\frac{7x^6+2}{3\left(x^7+2x\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{7x^6+2}{3\sqrt[3]{\left(x^7+2x\right)^2}};$$

$$\left(\ln(x^2-x\sqrt{2})\right)'=\frac{1}{x^2-x\sqrt{2}}\cdot\left(x^2-x\sqrt{2}\right)'=\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}};$$

$$\left(3\cdot x^{-5}\right)'=3\cdot(-5)\cdot x^{-5-1}=-\frac{15}{x^6};$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}arcctg\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{-1}{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{(1-x^2)\left(x\sqrt{2}\right)'-(x\sqrt{2})\left(1-x^2\right)'}{(1-x^2)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+2x^2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1-x^2)+2x(x\sqrt{2})}{(1-x^2)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}x^2}{1-2x^2+x^4+2x^2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}x^2}{1+x^4}=-\frac{1+x^2}{2(1+x^4)}.$$

Таким образом, $y'=\dfrac{7x^6+2}{3\sqrt[3]{\left(x^7+2x\right)^2}}+\dfrac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}}-\dfrac{15}{x^6}+\dfrac{1+x^2}{2(1+x^4)}$.

б) Сложность дифференцирования данной функции состоит в том, что переменная дифференцирования находится и в числителе, и в знаменателе функции. Такие функции называются степенно-показательными. Ее производную можно отыскать с помощью специальной формулы, либо постараться все переменные x собрать или в показателе степени, или в основании.

I способ. Используя формулу основного логарифмического тождества, степенно-показательную функцию можем свести к сложной показательной, а затем продифференцировать:

$$y=(\sin x)^{\ln x}=\left(e^{\ln(\sin x)}\right)^{\ln x}=e^{\ln x\cdot\ln(\sin x)}\quad\Rightarrow$$

$$y'=\left(e^{\ln x\cdot\ln(\sin x)}\right)'=e^{\ln x\cdot\ln(\sin x)}\cdot(\ln x\cdot\ln(\sin x))'=$$

$$=e^{\ln x\cdot\ln(\sin x)}\cdot\left((\ln x)'\cdot\ln(\sin x)+\ln x\cdot(\ln(\sin x))'\right)=$$

$$=(\sin x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(\sin x)+\ln x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'\right)=(\sin x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\sin x)}{x}+\frac{\ln x\cdot\cos x}{\sin x}\right).$$

II способ. Отыскание производных многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать, а затем дифференцировать обе части полученного равенства:

$$y=f(x)\ \Rightarrow\ \ln y=\ln(f(x))\ \Rightarrow\ (\ln y)'=(\ln(f(x)))'\ \Rightarrow\ \frac{y'}{y}=(\ln(f(x)))'\ \Rightarrow$$

$$y'=y\cdot(\ln(f(x)))'.$$

Данный метод называется логарифмическим дифференцированием. Его удобно применять когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня) и, в частности, для отыскания производной степенно-показательной функции:

$$y=(\sin x)^{\ln x}\ \Rightarrow\ \ln y=\ln(\sin x)^{\ln x}\ \Rightarrow\ \ln y=\ln x\cdot\ln(\sin x)\ \Rightarrow$$

$$(\ln y)'=(\ln x\cdot\ln(\sin x))'\ \Rightarrow\ \frac{y'}{y}=(\ln x)'\cdot\ln(\sin x)+\ln x\cdot(\ln(\sin x))'\ \Rightarrow$$

$$y'=y\cdot\left(\frac{\ln(\sin x)}{x}+\frac{\ln x\cdot\cos x}{\sin x}\right)\ \Rightarrow\ y'=(\sin x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\sin x)}{x}+\ln x\cdot\operatorname{ctg}x\right).$$

в) Если функция задана неявным уравнением $F(x,y)=0$, которое нельзя разрешить относительно y, то для отыскания производной y' обе части равенства дифференцируют по x. При этом нужно помнить, что y – не простая переменная, а функция от x.

$$y=xe^y-x+5y-2\ \Rightarrow\ y'=\left(xe^y-x+5y-2\right)'\ \Rightarrow$$

$$y'=\left(xe^y\right)'-(x)'+(5y-2)'\ \Rightarrow\ y'=(x)'\cdot e^y+x\cdot\left(e^y\right)'-1+5y'\ \Rightarrow$$

$$y'=e^y+x\cdot e^y\cdot y'-1+5y'.$$

Разрешая полученное равенство относительно искомой производной y', получим ее в неявном виде:

$$\left(x\cdot e^y+4\right)\cdot y'=1-e^y\ \Rightarrow\ y'=\frac{1-e^y}{x\cdot e^y+4}.$$

Ответ: а) $y'=\dfrac{7x^6+2}{3\sqrt[3]{\left(x^7+2x\right)^2}}+\dfrac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}}-\dfrac{15}{x^6}+\dfrac{1+x^2}{2(1+x^4)}$;

б) $y'=(\sin x)^{\ln x}\cdot\left(\dfrac{\ln(\sin x)}{x}+\ln x\cdot\operatorname{ctg}x\right)$; в) $y'=\dfrac{1-e^y}{x\cdot e^y+4}$.

Задание 4. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x - x}{2\sin x + x};\ \text{б) } \lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение: Пусть имеем частное двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $(a;b)$, имеют конечные производные на этом промежутке, причем $g(x)\neq 0$. Тогда, если обе функции бесконечно малые или бесконечно большие при $x\to a$, то есть если частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ есть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при условии, что предел отношения производных существует.

Правило применимо и для случая $a=\infty$. Неопределенности вида:

$$\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

сводятся к неопределенностям $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ с помощью алгебраических преобразований и логарифмирования. А затем можно применять правило Лопиталя.

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x - x}{2\sin x + x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}x - x)'}{(2\sin x + x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{2\cos x + 1} = \frac{\frac{1}{1}-1}{2\cdot 1 + 1} = \frac{0}{3} = 0;$$

б) Пусть $y=(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$. Прологарифмируем обе части этого равенства:

$$\ln y = \ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln(e^x+x) \Rightarrow \ln y = \frac{\ln(e^x+x)}{x}.$$

Найдем предел получившегося выражения:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(e^x+x))'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x+x}(e^x+x)'}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x} = \frac{e^0+1}{e^0+0} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y} = e^2$.

Ответ: а) 0; б) e^2.

Задание 5. Найти производные y'_x и y''_{xx} функции $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2). \end{cases}$ заданной параметрически.

Решение: Так как функция задана параметрически, то непосредственно искать производную по x мы не можем. Поэтому дифференцирование в этом случае сводится к нахождению производных по t:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таким образом,

$$y'_t = \left(\ln(1 - t^2)\right)' = \frac{\left(1 - t^2\right)'}{1 - t^2} = \frac{-2t}{1 - t^2}, \; x'_t = (\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \quad \Rightarrow$$

$$y'_x = \frac{\dfrac{-2t}{1 - t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}} = \frac{-2t}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Для нахождения второй производной можно поступить двумя способами.

I способ. Как и в предыдущем случае, мы можем вывести общую формулу для нахождения второй производной:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{x'_t\, d(y'_t)}{dt} - \dfrac{y'_t\, d(x'_t)}{dt}}{x'^2_t} : \frac{dx}{dt} = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}.$$

В этом случае нахождение второй производной по x сводится к нахождению первых и вторых производных по t.

II способ. Но можно поступить и по другому. Производная функции y'_x в свою очередь сама является функцией заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y'_x = \dfrac{-2t}{\sqrt{1 - t^2}}. \end{cases}$$

Поэтому, чтобы найти вторую производную по x, то есть производную от первой производной, мы можем поступить с ней так же, как и с самой функцией при нахождении первой производной.

Найдем y''_{xx} вторым способом:

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\right)' = \frac{(-2t)'\sqrt{1-t^2} - (-2t)\cdot\left(\sqrt{1-t^2}\right)'}{1-t^2} = \frac{-2\sqrt{1-t^2} + 2t\cdot\frac{\left(1-t^2\right)'}{2\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2} =$$

$$= \frac{-2(1-t^2)-2t^2}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}} = \frac{-2}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}, \quad x'_t = (\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad \Rightarrow$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{-2}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = \frac{-2}{1-t^2} = \frac{2}{t^2-1}.$$

Ответ: $y'_x = \dfrac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}$, $y''_{xx} = \dfrac{2}{t^2-1}$.

Задание 6. Провести полное исследование функции и построить ее график. $f(x) = \dfrac{x^2+5x-4}{x^2-6x+5}$

Решение: Общее исследование функции и построение ее графика можно выполнять по следующей схеме:

1) Найти область определения функции;
2) Определить четность, нечетность, периодичность функции;
3) Найти точки пересечения с осями;
4) Найти точки разрыва и вертикальные асимптоты;
5) Найти наклонные асимптоты и предельные значения функции при стремлении x к граничным точкам области определения;
6) Определить интервалы возрастания и убывания функции, найти точки экстремума и вычислить значения функции в этих точках;
7) Определить интервалы выпуклости и вогнутости функции, найти точки перегиба и вычислить значения функции в этих точках;
8) Построить график функции.

Исследуем данную функцию.

1) Найдем область определения данной функции:

$$f(x) = \frac{x^2+5x-4}{x^2-6x+5} = \frac{x^2+5x-4}{(x-1)(x-5)}.$$

Так как знаменатель не должен быть равен нулю, то функция определена на всей числовой прямой за исключением точек $x=1$ и $x=5$, то есть

$$D(f) = (-\infty;1)\cup(1;5)\cup(5;\infty).$$

2) Найдем $f(-x) = \dfrac{x^2-5x-4}{x^2+6x+5}$. Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то функция ни четная, ни нечетная. А поскольку число точек разрыва конечно, то и не периодическая.

3) Найдем точки пересечения с осями.

$x=0 \Rightarrow y=f(0)=-\dfrac{4}{5}$. Точка пересечения с осью ординат – $(0;-0,8)$.

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2+5x-4}{x^2-6x+5}=0 \Rightarrow x^2+5x-4=0 \Rightarrow \left[\begin{aligned} &D=25+16=41, \\ &x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}\end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$x_1 \approx -5,7$, $x_2 \approx 0,7$. Точки пересечения с осью абсцисс – $(-5,7;0)$ и $(0,7;0)$.

4) Найдем вертикальные асимптоты. Найдем односторонние пределы в точках разрыва функции:

$$x=1:\quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+5x-4}{(x-1)(x-5)}=\left|\frac{2}{-0\cdot(-4)}=\frac{2}{+0}\right|=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+5x-4}{(x-1)(x-5)}=\left|\frac{2}{+0\cdot(-4)}=\frac{2}{-0}\right|=-\infty.$$

$$x=5:\quad \lim_{x\to 5-0} f(x)=\lim_{x\to 5-0}\frac{x^2+5x-4}{(x-1)(x-5)}=\left|\frac{31}{4\cdot(-0)}=\frac{2}{-0}\right|=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 5+0} f(x)=\lim_{x\to 5+0}\frac{x^2+5x-4}{(x-1)(x-5)}=\left|\frac{31}{4\cdot(+0)}=\frac{2}{+0}\right|=+\infty.$$

Так как все односторонние пределы равны бесконечности, то $x=1$ и $x=5$ - вертикальные асимптоты.

5) Наклонную асимптоту будем искать в виде $y=ax+b$.

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^2+5x-4}{x^2-6x+5}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5x-4}{x^3-6x^2+5x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\frac{0+0-0}{1-0+0}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+5x-4}{x^2-6x+5}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2})}{x^2(1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2})}{x^2(1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=1.$$

Получили, что $y=1$ - горизонтальная асимптота. Так как при стремлении $x\to\pm\infty$ – функция стремится к данной прямой, то нахождение ее пределов в этом случае не нужно.

6) Исследуем функцию на возрастание и убывание. Для этого найдем производную:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+5x-4}{x^2-6x+5}\right)'=\frac{(x^2+5x-4)'(x^2-6x+5)-(x^2+5x-4)(x^2-6x+5)'}{(x^2-6x+5)^2}=$$

$$=\frac{(2x+5)(x^2-6x+5)-(x^2+5x-4)(2x-6)}{(x^2-6x+5)^2}=\frac{-11x^2+18x+1}{(x^2-6x+5)^2}.$$

В точках экстремума если существует производная функции, то она равна нулю:

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{-11x^2+18x+1}{(x^2-6x+5)^2}=0 \;\Rightarrow\; 11x^2-18x-1=0 \;\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} D=324+44=4\cdot 92, \\ x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{92}}{11} \end{array}\right] \Rightarrow x_1\approx -0{,}054\;,\; x_2\approx 1{,}69\,.$$

Результаты исследования удобно сгруппировать в таблице:

	$f'(x)$	$f(x)$	
$(-\infty;-0{,}054)$	$f'(x)<0$	убывает	$\searrow$
$x\approx -0{,}054$	$f'(x)=0$	$f(x)\approx -0{,}8$	точка минимума
$(-0{,}054;1)$	$f'(x)>0$	возрастает	$\nearrow$
$x=1$	—	—	
$(1;1{,}69)$	$f'(x)>0$	возрастает	$\nearrow$
$x\approx 1{,}69$	$f'(x)=0$	$f(x)\approx -3{,}199$	точка максимума
$(1{,}69;5)$	$f'(x)<0$	убывает	$\searrow$
$x=5$	—	—	
$(5;+\infty)$	$f'(x)<0$	убывает	$\searrow$

7) Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость. Для этого найдем вторую производную:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2+5x-4}{x^2-6x+5}\right)''=\left(\frac{-11x^2+18x+1}{(x^2-6x+5)^2}\right)'=$$

$$=\frac{(-11x^2+18x+1)'(x^2-6x+5)-2(-11x^2+18x+1)(x^2-6x+5)'}{(x^2-6x+5)^3}=$$

$$=\frac{(-22x+18)(x^2-6x+5)-2(-11x^2+18x+1)(2x-6)}{(x^2-6x+5)^3}=$$

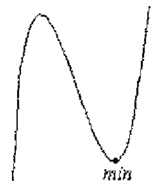
$$=2\frac{11x^3-27x^2-3x+51}{(x^2-6x+5)^3}.$$

В точках перегиба если существует вторая производная функции, то она равна нулю.

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{11x^3-27x^2-3x+51}{(x^2-6x+5)^3}=0 \;\Rightarrow\; 11x^3-27x^2-3x+51=0.$$

Рассмотрим кубическую параболу $y=11x^3-27x^2-3x+51$.

Она имеет вид:



Так как $y(-1,2)\approx-6,576<0$, а $y(-1,1)\approx13,978>0$, то один из корней x_1 принадлежит интервалу $(-1,2;-1,1)$.

Покажем, что других корней нет. Для этого найдем точку минимума:

$$y'=\left(11x^3-27x^2-3x+51\right)'=33x^2-54x-3;$$

$$y'=0 \;\Rightarrow\; 33x^2-54x-3=0 \;\Rightarrow\; \tilde{x}_{1,2}=\frac{54\pm\sqrt{2520}}{66}.$$

Минимум кубическая парабола достигает в точке $\tilde{x}_2=\dfrac{54+\sqrt{2520}}{66}\approx1,579$.

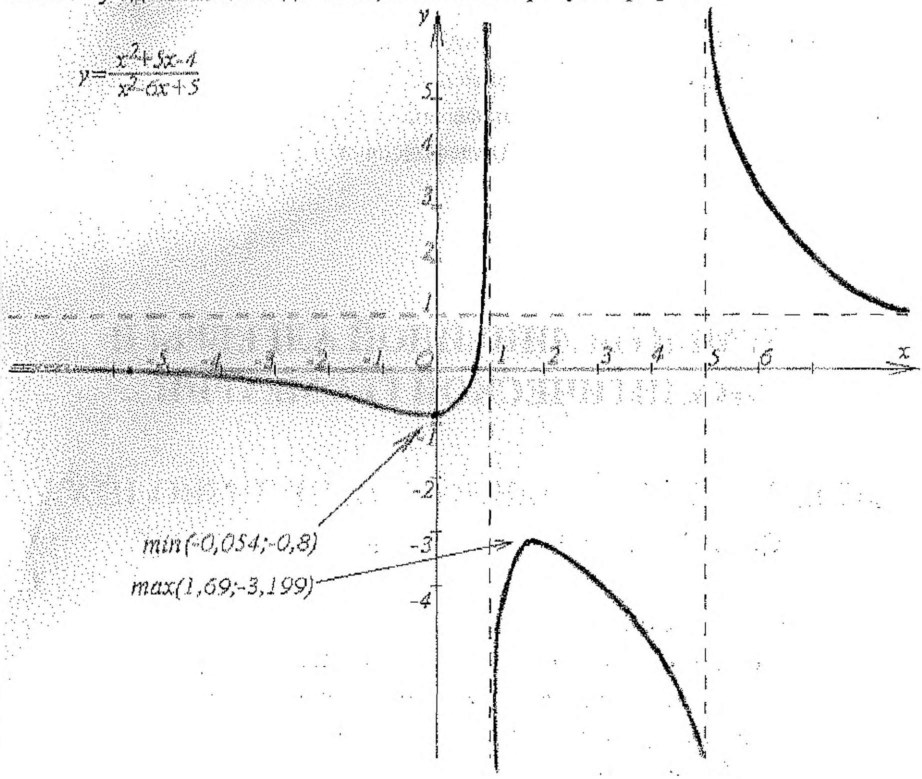
Ее значение в этой точке – $y(\tilde{x}_2)\approx y(1,579)\approx44,5>0$. Следовательно, ось абсцисс проходит ниже этой точки и кубическая парабола имеет единственный корень.

Тогда вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_1 и через точки $x=1$ и $x=5$. Результаты исследования сгруппируем в таблице:

	$f''(x)$	$f(x)$	
$(-\infty;x_1)$	$f''(x)<0$	выпукла	$\cap$
$x_1\in(-1,2;-1,1)$	$f''(x)=0$	?	точка перегиба
$(x_1;1)$	$f''(x)<0$	вогнута	$\cup$
$x=1$	—	—	
$(1;5)$	$f''(x)<0$	выпукла	$\cap$
$x=5$	—	—	
$(5;+\infty)$	$f''(x)>0$	вогнута	$\cup$

Так как мы не можем точно найти абсциссы точек перегиба, то и ординаты их не вычисляем. Наносить эти точки на график будем приблизительно.

7) На основе полученных данных построим график. Сначала на оси наносим асимптоты и найденные точки: экстремума и перегиба. Затем, используя данные исследования, схематично рисуем график:



Учебно-методическая литература по дисциплине "Высшая математика".

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1985 г., т. I.
2. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика, ч.1-2, Минск, ВШ, 1984-1988 г.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., Наука, 1985 г.
4. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича). М., Наука, 1981 г., ч. I.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П. Рябушко), Минск, ВШ, 2000, ч. 1.
6. Гусак А.А. Высшая математика, т.1. Минск, ВШ, 1988.
7. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. Минск, ВШ, 1988.

Учебное издание

Составители: Санюкевич Александр Викторович
Мороз Людмила Трофимовна
Джура Валентина Тимофеевна
Гоголинская Рената Альдефонсовна

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические рекомендации и варианты контрольных работ по разделам «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» и «Введение в математический анализ» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: А.В. Санюкевич
Редактор: Т.В. Строкач

Подписано к печати 1.09.2001 г. Формат 60x84 1/16 Бумага писч. Гарнитура Times New Roman. Усл. п.л. 2,79 Уч. изд. л. 3,0 Тираж 150 экз Заказ № 533. Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестского государственного технического университета». 224017, Брест, ул. Московская, 267.