МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕРАЛЫ

Методические рекомендации и варианты контрольных работ по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения.

Брест 2002

УДК 519.2.(076)

В настоящей методической разработке приведены вопросы программы и варианты двух контрольных работ по разделам «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Дифференциальные уравнения и системы», « Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы» курса «Высшая математика», изучаемым студентами технических специальностей заочной формы обучения во втором семестре, даны решения основных вариантов и некоторые методические рекомендации полезные для успешного выполнения контрольных работ.

Составители: Н.П. Зизелюк, ст. преподаватель,
И.В. Лизунова, доцент,
[illegible] [illegible]ент.

[illegible]едрой алгебры и геометрии
[illegible]верситета им. А.С.Пушкина,

[illegible]ания «Брестский государственный
[illegible]ситет» 2002

Организационно-методические указания

В контрольную работу № 3 «Интегралы и дифференциальные уравнения» включены 7 заданий: одно задание по теме 7 «Неопределенный интеграл»; три задания по теме 8 «Определенный интеграл»; три задания по теме 9 «Дифференциальные уравнения и системы».

Контрольная работы № 4 «Кратные и криволинейные интегралы» состоит из 5 заданий: четыре задания по теме 10 «Кратные интегралы», одно задание по теме 11 «Криволинейные интегралы».

В нумерации задач первое место- номер задания (задачи), второе (после точки) – номер варианта. Контрольная работа должна выполняться студентом в соответствии со своим вариантом. Номер варианта определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

Условия задач необходимо записывать полностью. В случае, если задача имеет общую формулировку, ее условия следует переписать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта. Решение всех задач приводить подробно и аккуратно, давать достаточные пояснения и делать необходимые рисунки и таблицы.

Каждую контрольную работу надо выполнять в отдельной тетради, оставляя поля.

Вопросы программы курса «Высшая математика»
2 семестр

Тема 6. Комплексные числа.

Комплексные числа (КЧ).

Различные формы записи КЧ. Геометрическое изображение КЧ. Действия над комплексными числами. Понятие комплексной функции действительного аргумента.

Тема 7. Неопределенный интеграл.

Первообразная и неопределенный интеграл.

Первообразная функции.

Неопределенный интеграл и его свойства.

Табличное интегрирование.

Основные методы интегрирования.

Интегрирование подстановкой. Интегрирование по частям.

Интегрирование простейших дробей.

Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

Основные методы интегрирования.

Интегрирование рациональных дробей.

Интегрирование тригонометрических выражений.

Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.

Тема 8. Определенный интеграл.

Определенный интеграл.

Задача о площади криволинейной трапеции. Интегральные суммы Римана и их свойства. Определенный интеграл, его геометрический и механический смыслы. Классы функций, интегрируемых по Риману.

Свойства определенного интеграла.

Основные свойства определенного интеграла. Интегралы с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Несобственные интегралы.

Несобственные интегралы первого рода. Признаки сходимости. Несобственные интегралы второго рода. Признаки сходимости. Главное значение несобственного интеграла.

Геометрические приложения определенного интеграла.

Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат. Площадь плоской фигуры в полярных координатах. Вычисление объема тела по параллельным сечениям. Вычисление объемов тел вращения.

Гладкие кривые на плоскости.

Дифференциал длины дуги. Вычисление длины дуги кривой. Кривизна плоской кривой. Радиус и круг кривизны. Эволюта и эвольвента кривой.

Физические приложения определенного интеграла.

Работа переменной силы. Масса неоднородного стержня. Статические моменты и координаты центра тяжести гладкой кривой. Центр масс плоской пластинки. Моменты инерции плоской кривой.

Тема 9. Дифференциальные уравнения и системы.

Дифференциальные уравнения (ДУ) первого порядка.

Понятие дифференциального уравнения. Физические задачи, приводящие к ДУ первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Понятие общего решения. Особое решение. Метод изоклин.

Классы ДУ первого порядка, интегрируемые в квадратурах.

ДУ с разделяющимися переменными. Однородные ДУ и уравнения приводящие к ним. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли.

ДУ высших порядков.

Понятие уравнения высшего порядка. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка. Задачи о второй космической скорости и изгибе стержня.

Однородные линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ).

Общие понятия. Линейный дифференциальный оператор, его свойства. Свойства решений однородных ЛДУ. Линейная независимость функций. Определитель Вронского. Теорема о структуре общего решения однородного ЛДУ.

Неоднородные ЛДУ.

Структура общего решения неоднородного ЛДУ. Принцип суперпозиции решений. Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных). Понижение порядка неоднородных ЛДУ. ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.

ЛДУ с постоянными коэффициентами.

Однородные ЛДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Однородные ЛДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Приложения к описанию линейных моделей.

Неоднородные ЛДУ со специальной правой частью.

ЛДУ 2-го порядка со специальной правой частью. Системы ДУ: общие понятия, фазовая плоскость, фазовые траектории. Метод исключения.

Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение. Случай, когда корни характеристического уравнения различные между собой действительные числа.

Тема 10. Кратные интегралы.

Двойной интеграл.

Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение, свойства и вычисление двойного интеграла. Двойной интеграл в полярных координатах.

Приложения двойного интеграла.

Вычисление объемов. Масса тонкой пластинки. Статические моменты и координаты центра тяжести пластинки. Момент инерции пластинки.

Тройной интеграл.

Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла. Определение и свойства тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла по правильной области.

Приложения тройного интеграла.

Тройной интеграл в цилиндрических м сферических координатах. Объем и масса тела. Статические моменты и координаты центра тяжести тела. Моменты инерции тела.

Тема 11. Криволинейные интегралы.

Криволинейные интегралы 1-го рода (КРИ-1).

Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла по дуге. Определение и свойства КРИ-1. Вычисление КРИ-1. Приложения КРИ 1.

Линейный интеграл.

Работа переменной силы. Определение, свойства и вычисление линейного интеграла. Связь линейного интеграла с криволинейным интегралом первого рода.

Независимость линейного интеграла от пути интегрирования.

Формула Грина. Независимость КРИ-2 рода от пути интегрирования. Восстановление функции по ее полному дифференциалу. Приложения КРИ-2.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА N 3

"Интегралы и дифференциальные уравнения"

Задание 1. Найти неопределенные интегралы (результаты в случаях а), б) и в) проверить дифференцированием).

1.1. а) $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int x\cdot e^{2x}dx$;

г) $\int \cos^4 3x\cdot\sin^2 3x dx$; д) $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx$;

1.2. а) $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$; б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$; в) $\int (5x-2)\cdot\ln x dx$;

г) $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cdot\cos^3 x dx$; д) $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}dx$;

1.3. а) $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx$; б) $\int \frac{(arctgx)^2 dx}{1+x^2}$; в) $\int x^2\cdot\ln x dx$;

г) $\int \cos^3 x\cdot\sin^8 x dx$; д) $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx$;

1.4. а) $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{(1-tgx)dx}{\cos^2 x}$; в) $\int (3x+1)\cdot\cos x dx$;

г) $\int \cos^4 x\cdot\sin^3 x dx$; д) $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx$;

1.5. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; в) $\int (2-x)\cdot\sin x dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$; д) $\int \frac{8-13x}{x^2+5x-1}dx$;

1.6. а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; в) $\int x\cdot\arcsin x dx$;

г) $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cdot\cos^3 2x dx$; д) $\int \frac{3-5x}{4x^2+2x-3}dx$;

1.7. а) $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx$; б) $\int x\cdot\sqrt{3-x^2}dx$; в) $\int (3x+4)\cos x dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$; д) $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx$;

1.8. а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx;$ б) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx;$ в) $\int x\cdot \sin 3x dx;$

г) $\int \sin^4 3x\cdot \cos^5 3x dx;$ д) $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4};$

1.9. а) $\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}dx;$ б) $\int \frac{\cos 3x dx}{4+\sin 3x};$ в) $\int x\cdot \sin 2x dx;$

г) $\int \sin^4 2x\cdot \cos^2 2x dx;$ д) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx;$

1.10. а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int \frac{\sin x dx}{1-\cos x};$ в) $\int x\cdot \sin(x-5)dx;$

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx;$ д) $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx;$

1.11. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}dx;$ б) $\int \frac{xdx}{2x^2-7};$ в) $\int x\cdot arctg 2x dx;$

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx;$ д) $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}dx;$

1.12. а) $\int \left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx;$ б) $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx;$ в) $\int \arccos 2x dx;$

г) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\cdot \sin^3 x dx;$ д) $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx;$

1.13. а) $\int \left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx;$ б) $\int \frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}}{x+1}dx;$ в) $\int \frac{xdx}{2x^2+x+5};$

г) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot \cos^3 dx;$ д) $\int arctg x dx;$

1.14. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+5}{x}dx;$ б) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx;$ в) $\int x\cdot tg x dx;$

г) $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\cdot \sin^3 2x dx;$ д) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx;$

1.15. а) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx;$ б) $\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}};$ в) $\int (x^2+2)e^{-x}dx;$

г) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}};$ д) $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx;$

1.16. а) $\int \frac{\sqrt{x^3} - 3x^4 + 2}{x}dx;$ б) $\int e^{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx;$ в) $\int x^2 \cdot \sin^2 xdx;$

г) $\int \sin^2 2x \cdot \cos^4 2xdx;$ д) $\int \frac{x+4}{2x^2 - 6x - 8};$

1.17. а) $\int \left(2x^3 - 3\sqrt{x^5} + \frac{4}{x}\right)dx;$ б) $\int e^{7x^2+2} \cdot xdx;$ в) $\int x^2(\cos 2x + 3)dx;$

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx;$ д) $\int \frac{x+4}{2x^2 - 7x + 1}dx;$

1.18. а) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 5}{x^2}dx;$ б) $\int e^{4\sin x} \cdot \cos xdx;$ в) $\int (x^2 + 2) \cdot e^{-x}dx;$

г) $\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \cdot \sin^3 xdx;$ д) $\int \frac{5x-2}{2x^2 - 5x + 2}dx;$

1.19. а) $\int \frac{3x^2 - \sqrt{x^3} + 7}{x^3}dx;$ б) $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)};$ в) $\int \arcsin 2xdx;$

г) $\int \sin^4 2x \cdot \cos^3 2xdx;$ д) $\int \frac{4x-1}{4x^2 - 4x + 5};$

1.20. а) $\int \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2}dx;$ б) $\int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5}dx;$ в) $\int (x^2 - 3)\cos xdx;$

г) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}dx;$ д) $\int \frac{x+1}{2x^2 + x + 1}dx;$

1.21. а) $\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4\right)dx;$ б) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{x+4}dx;$ в) $\int (x^2 + 1)e^{-x}dx;$

г) $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}dx;$ д) $\int \frac{x+1}{3x^2 - 2x - 3}dx;$

1.22. а) $\int \frac{\sqrt{x} - 2x^3 + 6}{x}dx;$ б) $\int \frac{\ln^5(x-7)}{x-7}dx;$ в) $\int (x^2 - 1)e^x dx;$

г) $\int \sin^4 3x \cdot \cos^5 3xdx;$ д) $\int \frac{4x+8}{4x^2 + 6x - 13}dx;$

1.23. а) $\int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2}dx;$ б) $\int \frac{\sqrt[5]{tg^2 3x}}{\cos^2 3x}dx;$ в) $\int x^2 \cos^2 xdx;$

г) $\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cdot \cos^3 xdx;$ д) $\int \frac{5x+1}{x^2 - 4x + 1}dx;$

1.24. а) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x}}+2\right)dx$; б) $\int\frac{\sqrt{ctg^3 5x}}{\sin^2 5x}dx$; в) $\int\ln(x-5)dx$;

г) $\int\sin^3 x\cdot\cos^8 xdx$; д) $\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}$;

1.25. а) $\int\left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\ \sqrt[5]{ctg^4 x}}$; в) $\int(x^2+x)\cos xdx$;

г) $\int\sin^4 2x\cdot\cos^5 2xdx$; д) $\int\frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$;

1.26. а) $\int\frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}\cdot\arcsin 5x}$; в) $\int(x^2+2)e^x dx$;

г) $\int\frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; д) $\int\frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx$;

1.27. а) $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx$; б) $\int\frac{x^4dx}{e^{x^5+1}}$; в) $\int(x^2-1)e^{-x}dx$;

г) $\int\sin^5 x\cdot\sqrt[5]{\cos^3 x}dx$; д) $\int\frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx$;

1.28. а) $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx$; б) $\int e^{3x^3}\cdot x^2dx$ в) $\int x\cdot\sin^2 xdx$;

г) $\int\sin^4 x\cdot\cos^7 xdx$; д) $\int\frac{2x-1}{3x^2-6x-9}dx$;

1.29. а) $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx$; б) $\int\frac{xdx}{e^{2x^2+1}}$; в) $\int\arcsin 9xdx$;

г) $\int\sin^6 3x\cdot\cos^3 3xdx$; д) $\int\frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx$;

1.30. а) $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx$; б) $\int e^{4-5x^2}\cdot xdx$; в) $\int x\cdot arctg\, 2xdx$;

г) $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$; д) $\int\frac{x-4}{3x^2+x-1}dx$.

Задание 2. Вычислить определенный интеграл

2.1. $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}dx}{4+x}$; 2.2. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$; 2.3. $\int_0^3 \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx$;

2.4. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$; 2.5. $\int_{25}^{49} \frac{\sqrt{x}dx}{x-6}$; 2.6. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$;

2.7. $\int_{-8}^0 \frac{\sqrt[3]{x^2}dx}{\sqrt[3]{x^2}+3}$; 2.8. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$; 2.9. $\int_1^2 \frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}}$;

2.10. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$; 2.11. $\int_0^4 \frac{1+x}{x+\sqrt{x}}$; 2.12. $\int_2^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

2.13. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}$; 2.14. $\int_4^{11} \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$; 2.15. $\int_5^{17} \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$;

2.16. $\int_8^9 \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$; 2.17. $\int_2^3 \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}dx$; 2.18. $\int_8^9 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-7}}$;

2.19. $\int_5^7 \frac{x^2dx}{\sqrt{x-4}}$; 2.20. $\int_{-4}^{-3} \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$; 2.21. $\int_{-1}^0 \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$;

2.22. $\int_0^{10} \frac{\sqrt{x}dx}{x+10}$; 2.23. $\int_4^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(x-1)}$; 2.24. $\int_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$;

2.25. $\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$; 2.26. $\int_3^4 \frac{x^2dx}{\sqrt{x-2}}$; 2.27. $\int_4^6 \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}dx$;

2.28. $\int_{-5}^{-4} \frac{x^3dx}{\sqrt{x+6}}$; 2.29. $\int_6^{10} \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$; 2.30. $\int_8^{24} \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$;

Задание 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной данными кривыми. Выполнить рисунок.

3.1. $3x^2-4y=0,\quad 2x-4y+1=0;$

3.2. $3x^2+4y=0,\quad 2x-4y-1=0;$

3.3. $2x+3y^2=0,\quad 2x+2y+1=0;$

3.4. $3x^2-4y=0,\quad 2x+4y-1=0;$

3.5. $3x^2+4y=0,\quad 2x+4y+1=0;$

3.6. $2x^2-3y=0,\quad 2x+2y-1=0;$

3.7. $3x^2-2y=0,\qquad 2x-2y+1=0;$

3.8. $4x+3y^2=0,\qquad 4x+2y+1=0;$

3.9. $3x^2-2y=0,\qquad 2x+2y-1=0;$

3.10. $4x-3y^2=0,\qquad 4x+2y-1=0;$

3.11. $y=3x^2+1,\qquad 3x-y+7=0;$

3.12. $y-x^2=0,\qquad x+y-3=0;$

3.13. $y+x^2=0,\qquad x-y-2=0;$

3.14. $2x^2+3y=0,\qquad x-y-3=0;$

3.15. $y^2-4-x=0,\qquad x-2=0;$

3.16. $y^2-2x=0,\qquad 2x-3=0;$

3.17. $3y+x^2=0,\qquad y+1=0;$

3.18. $y-3x+x^2=0,\qquad y+x=0;$

3.19. $y^2-9x=0,\qquad y-3x=0;$

3.20. $y-3x+x^2=0,\qquad y-x=0;$

3.21. $yx=6,\qquad x+y-7=0;$

3.22. $y^2-x-1=0,\qquad x-5=0;$

3.23. $y^2-4x=0,\qquad x-y=0;$

3.24. $y-2x+x^2=0,\qquad y-\frac{1}{4}x=0;$

3.25. $y-x+x^2=0,\qquad y=0;$

3.26. $y^2-\frac{4x}{3};\qquad x=3,\quad y=0;$

3.27. $y^2-4+x=0,\qquad x=0;$

3.28. $y-2+\frac{x^2}{2}=0,\qquad x+y=2,\quad x=0;$

3.29. $y=3x-x^2,\qquad y=-x;$

3.30. $y-x^2-4x=0,\qquad y-x-4=0;$

Задание 4. Какую работу надо затратить, чтобы сжать пружину на t см, если сила в f Ньютонов сжимает ее на T см?

4.1. t = 6, f = 1, T = 2; **4.2.** t = 4, f = 2, T = 6;
4.3. t = 5, f = 5, T = 1; **4.4.** t = 3, f = 1, T = 4;
4.5. t = 8, f = 3, T = 4; **4.6.** t = 2, f = 3, T = 5;

4.7. t = 7, f = 7, T = 1;	**4.8.** t = 3, f = 4, T = 5;
4.9. t = 10, f = 7, T = 5;	**4.10.** t = 9, f = 5, T = 2;
4.11. t = 7, f = 6, T = 3;	**4.12.** t = 8, f = 4, T = 5;
4.13. t = 6, f = 8, T = 4;	**4.14.** t = 3, f = 2, T = 1;
4.15. t = 4, f = 7, T = 1;	**4.16.** t = 5, f = 10, T = 3;
4.17. t = 7, f = 3, T = 6;	**4.18.** t = 9, f = 2, T = 4;
4.19. t = 10, f = 5, T = 5;	**4.20.** t = 2, f = 2, T = 1;
4.21. t = 4, f = 5, T = 6;	**4.22.** t = 6, f = 3, T = 2;
4.23. t = 9, f = 5, T = 6;	**4.24.** t = 8, f = 2, T = 5;
4.25. t = 12, f = 6, T = 6;	**4.26.** t = 7, f = 7, T = 1;
4.27. t = 4, f = 10, T = 2;	**4.28.** t = 5, f = 4, T = 2;
4.29. t = 6, f = 5, T = 3;	**4.30.** t = 10, f = 6, T = 4.

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$.

5.1. $\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 e^{-4x}$, $y_0 = 0$, $x_0 = \frac{1}{3}$.

5.2. $(x + 3y)dx - (3x - y)dy = 0$, $y_0 = 0$, $x_0 = 1$.

5.3. $y' - y tgx = \sin 2x$, $y_0 = \frac{1}{3}$, $x_0 = 0$.

5.4. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$, $y_0 = 5$, $x_0 = -2$.

5.5. $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0$, $y_0 = 1$, $x_0 = 1$.

5.6. $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$, $y_0 = e$, $x_0 = 1$.

5.7. $y'\cos x + y\sin x = 1$, $y_0 = 2$, $x_0 = 0$.

5.8. $x(x + 2y)dy - y^2 dx = 0$, $y_0 = 1$, $x_0 = 1$.

5.9. $y' - y tgx = \frac{1}{\cos^3 x}$, $y_0 = 0$, $x_0 = 0$.

5.10. $\frac{dx}{dy} - \frac{xy}{x^2 + 1} = x$, $y_0 = 3$, $x_0 = 2\sqrt{2}$.

5.11. $2x^2 y' = x^2 + y^2$, $y_0 = 0$, $x_0 = 1$.

5.12. $y'\cos^2 x + y = tgx$, $y_0 = -1$, $x_0 = 0$.

5.13. $(1 + x^2)y' + y = arctgx$, $y_0 = 1$, $x_0 = 0$.

5.14. $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$, $y_0 = \pi$, $x_0 = 2$.

5.15. $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x,\;\; y_0=1,\;\; x_0=0.$

5.16. $y'+2y tg 2x=\sin 4x,\;\; y_0=0,\;\; x_0=0.$

5.17. $3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+9\dfrac{y}{x}+9,\;\; y_0=1,\;\; x_0=1.$

5.18. $y'+y=-e^{2x}y^2,\;\; y_0=1,\;\; x_0=0.$

5.19. $xy'-y=x^2\cos x,\;\; y_0=\dfrac{\pi}{2},\;\; x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

5.20. $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2},\;\; y_0=0,\;\; x_0=1.$

5.21. $ydx+\left(\sqrt{xy}-x\right)dy=0,\;\; y_0=1,\;\; x_0=1.$

5.22. $xy'=y(1+\ln y-\ln x),\;\; y_0=e^2,\;\; x_0=1.$

5.23. $xy'+y=-x^2y^2,\;\; y_0=1,\;\; x_0=1.$

5.24. $y'\sin x-y\cos x=1,\;\; y_0=0,\;\; x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

5.25. $\left(2\sqrt{xy}-y\right)dx+xdy=0,\;\; y_0=4e,\;\; x_0=e.$

5.26. $x^2y'=y(x+y),\;\; y_0=-1,\;\; x_0=e.$

5.27. $xy'+2y=3x^5y^2,\;\; y_0=-1,\;\; x_0=1.$

5.28. $y'+2xy=3x^2e^{-x^2},\;\; y_0=0,\;\; x_0=0.$

5.29. $(x-y)ydy-x^2dy=0,\;\; y_0=e,\;\; x_0=e.$

5.30. $(x+1)y'+y=x^3+x^2,\;\; y_0=0,\;\; x_0=0.$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

6.1 $y''-6y'+9y=x^2-x+3,\;\; y(0)=\dfrac{4}{3},\;\; y'(0)=\dfrac{1}{27}.$

6.2 $y''-y=9xe^{2x},\;\; y(0)=0,\;\; y'(0)=-5.$

6.3 $y''-3y'+2y=e^{3x}(3-4x),\;\; y(0)=0,\;\; y'(0)=0.$

6.4 $y''+4y=8\sin 2x,\;\; y(0)=0,\;\; y'(0)=0.$

6.5 $y''-4y'+4y=e^{2x},\;\; y(0)=1,\;\; y'(0)=0.$

6.6 $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x,\;\; y(0)=1,\;\; y'(0)=2.$

6.7 $y''+y'=e^{-x},\;\; y(0)=1,\;\; y'(0)=-1.$

6.8 $y''-4y'+4y=2\sin 2x,\;\; y(0)=1,\;\; y'(0)=0.$

6.9 $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

6.10 $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

6.11 $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

6.12 $y'' + 4y = 3\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

6.13 $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.

6.14 $y'' - 2y' = 2x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

6.15 $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

6.16 $y'' - 4y = 4\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

6.17 $y + y' = 3\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

6.18 $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$

6.19 $y'' - 3y' = 3e^{3x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 4$.

6.20 $y - 4y' + 5y = 5x - 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

6.21 $y'' + y' - 2y = 3\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

6.22 $y'' - 4y = (3x - 1)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -4$.

6.23 $y'' + y6\sin 2x$, $y(\pi) = -1$, $y'(\pi) = -4$.

6.24 $y'' - 5y' = 10x + 3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

6.25 $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.

6.26 $y'' - 2y' = 6x^2 - 6x - 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

6.27 $y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$.

6.28 $y'' + 16y = 7\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

6.29 $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

6.30 $y'' + 2y' + y = -2\sin x + x + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Задание 7. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений методом исключения.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 3x \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y \end{cases}$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КР№3

Задание 1. Найти неопределенные интегралы (результаты в случаях а), б), в) проверить дифференцированием)

Решение

а) $$\int\frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx = 3\int x^{-1/4}dx - 2\int x^{15/4}dx + \int x^{5/12}dx = 4x^{3/4} -$$

$$-\frac{8}{19}x^{19/4}+\frac{12}{17}x^{17/12}+C = 4\sqrt[4]{x^3}-\frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}}+\frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}}+C.$$

Проверка:

$$\left(4x^{3/4}-\frac{8}{19}x^{19/4}+\frac{12}{17}x^{17/12}+C\right)' = 4\cdot\frac{3}{4}x^{-1/4}-\frac{8}{19}\cdot\frac{19}{4}x^{15/4}+\frac{12}{17}\cdot\frac{17}{12}x^{5/12} =$$

$$= 3x^{-1/4}-2x^{15/4}+x^{5/12}.$$

Ответ: $4\sqrt[4]{x^3}-\frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}}+\frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}}+C.$

б) $\int x\cdot\sqrt{x^2+3}dx =$ [Под знак дифференциала необходимо внести функцию у = х, т.к. $x\cdot dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$]=

$$= \int\sqrt{x^2+3}d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+3}d(x^2) = \frac{1}{2}\int(x^2+3)^{1/2}\cdot d(x^2+3) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+3)^{3/2}}{3/2}+C = \frac{1}{3}(x^2+3)^{3/2}+C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3)^3}+C.$$

Проверка:

$$\left[\frac{1}{3}(x^2+3)^{3/2}+C\right]' = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(x^2+3)^{1/2}\cdot 2x+0 = (x^2+3)^{1/2}\cdot x = x\cdot\sqrt{x^2+3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3)^3}+C.$

в) $\int(2x+3)\cos 4x dx =$ [Воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$] =

$$= \begin{vmatrix} u = 2x+3, & dv = \cos 4x dx \Rightarrow \int dv = \int \cos 4x dx, \\ du = d(2x+3), & v = \frac{1}{4}\sin 4x, \\ du = 2dx, & \end{vmatrix} =$$

$$=(2x+3)\cdot\frac{\sin 4x}{4}-\int\frac{\sin 4x}{4}\cdot 2dx=\frac{(2x+3)\cdot\sin 4x}{4}-\frac{1}{2}\int\sin 4xdx=$$

$$=\frac{1}{4}(2x+3)\cdot\sin 4x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(-\cos 4x)+C=\frac{1}{4}(2x+3)\cdot\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x+C;$$

Проверка:

$$\left[\frac{1}{4}(2x+3)\cdot\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x+c\right]'=\frac{1}{4}(2\sin 4x+(2x+3)\cdot\cos 4x\cdot 4)-$$

$$-\frac{1}{8}\cdot 4\cdot\sin 4x=\frac{1}{2}\sin 4x+(2x+3)\cdot\cos 4x-\frac{1}{2}\sin 4x=(2x+3)\cdot\cos 4x.$$

Ответ: $\frac{1}{4}(2x+3)\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x+C.$

г) $$\int\frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}dx=\int\frac{\cos^2 4x\cdot\cos 4xdx}{\sqrt[5]{\sin 4x}}=\left|\begin{array}{l}\cos 4xdx=\frac{1}{4}d\sin 4x\\ \sin 4x=t\\ \cos^2 4x=1-\sin^2 4x=1-t^2\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(1-t^2)dt}{\sqrt[5]{t}}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt[5]{t}}-\frac{1}{4}\int\frac{t^2}{\sqrt[5]{t}}dt=\frac{1}{4}\int t^{-1/5}dt-\frac{1}{4}\int t^{9/5}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot t^{4/5}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{14}\cdot t^{14/5}+C=\frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^4 4x}-\frac{5}{56}\sqrt[5]{\sin^{14} 4x}+C.$$

Ответ: $\frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^4 4x}-\frac{5}{56}\sqrt[5]{\sin^{14} 4x}+C.$

д) $\int\frac{3x-6}{2-5x-x^2}$. Выделив в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной знаменателя, получим $\int\frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l}(2-5x-x^2)'=-2x-5,\\ 3x-6=(-2x+4-5+5)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\end{array}\right|=-\frac{3}{2}\int\frac{-2x+4-5+5}{2-5x-x^2}dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{-2x-5}{2-5x-x^2}dx-\frac{3}{2}\cdot 9\int\frac{dx}{2-5x-x^2}=-\frac{3}{2}\ln\left|2-5x-x^2\right|+$$

$$+\frac{27}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-2-\frac{25}{4}}=-\frac{3}{2}\ln\left|2-5x-x^2\right|+\frac{27}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left|2-5x-x^2\right|+\frac{27}{2\sqrt{33}}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}}{x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}}\right|+C=-\frac{3}{2}\ln\left|2-5x-x^2\right|+$$

$$+\frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{2x-5-\sqrt{33}}{2x-5+\sqrt{33}}\right|+C.$$

Ответ: $-\frac{3}{2}\ln\left|2-5x-x^2\right|+\frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{2x-5-\sqrt{33}}{2x-5+\sqrt{33}}\right|+C.$

Задание 2. Вычислить $\int\limits_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение

Используем формулу замены переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(t)\Big|_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha),$$

где $x=\varphi(t)$; $\varphi(a)=\alpha$; $\varphi(b)=\beta$.

$\int\limits_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}=$ [Пусть $\sqrt{1+x}=t$, тогда $1+x=t^2$; $x=t^2-1$; $dx=2tdt$; если x = 3, то t = 2; если x = 8, то t = 3] $=\int\limits_2^3\frac{(t^2-1)2tdt}{t}=\int\limits_2^3\frac{2(t^2-1)}{1}dt=$

$$=2\int\limits_2^3(t^2-1)dt=2\cdot\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=2\cdot\left(\frac{27}{3}-3-\frac{8}{3}+2\right)=2\cdot\left(\frac{19}{3}-1\right)=10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2x$.

Решение

Построим фигуру, ограниченную линиями $y = x^2$ – парабола, вершина в т. (0;0); $y = 2x$ – прямая. Найдем точки пересечения этих кривых:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0; x_1 = 0; x_2 = 2.$$

Воспользуемся формулой вычисления площади

$$S_\phi = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx,$$

где $y = f_2(x)$ - уравнение верхней, а $y = f_1(x)$ - нижней границы области.
В нашем случае:

$$S_\phi = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - (0-0) = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $S_\phi = \frac{4}{3}$ кв.ед.

Задание 4. Какую работу надо затратить, чтобы сжать пружину на t см, если сила в f Ньютонов сжимает ее на T см ? t = 5 см, f = 1 Н, T = 1 см.

Решение.

По закону Гука сила F и перемещение S пружины связаны соотношением F = kS, где k – постоянная. Выражаем S в метрах, F – в Ньютонах. При $S = T = 0.01$ м F = f = 1Н, т.е. $1 = k \cdot 0.01$, откуда k = 100

$$F = 100 \cdot S.$$

На основании формулы для вычисления работы A силы F(S) на пути от S = a до S = b.

$$A = \int_a^b F(S)ds,$$

где a = 0, b = t.
Имеем:

$$A = \int_0^{0.05} 100SdS = 100 \cdot \frac{S^2}{2}\Bigg|_0^{0.05} = 0.125 \text{ (Дж)}.$$

Ответ: 0.125 (Дж).

Задание 5. а) Найти общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка и частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$(x+y)dx + xdy = 0, \quad y(1) = 2.$$

Решение.

Определим тип уравнения. Это однородное дифференциальное уравнение (ДУ), т.к. функции при dx и dy однородные первого измерения. В этом нетрудно убедиться. Заменив x на tx, а y на ty, заметим, что уравнение не меняется. Однородные ДУ решаются с помощью подстановки $y = ux$, где $u = u(x)$ — функция от x. Тогда $dy = xdu + udx$ и уравнение принимает вид $(x+ux)dx + x(xdu+udx) = 0$. Раскрыв скобки, приведя подобные слагаемые и сократив на x, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$(1+2u)dx + xdu = 0, \quad \textit{или} \quad xdu = -(1+2u)dx.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int \frac{du}{1+2u} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+2u| = -\ln|x| + \ln C, \quad C = const,$$

откуда. $\sqrt{1+2u} = \dfrac{C}{x}$

Заменим u на $\dfrac{y}{x}$, получим

$$1 + 2\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2} \text{ или } y = \frac{C-x^2}{2x} \text{ — общее решение ДУ.}$$

Подставим начальное условие и найдем частное решение $2 = \dfrac{C-1}{2}$,

откуда C=5 и частное решение примет вид $y = \dfrac{5-x^2}{2x}$.

Ответ: $y = \dfrac{C-x^2}{2x}$; $y = \dfrac{5-x^2}{2x}$.

Задание 5. б) Найти общее решение ДУ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y' - \frac{3}{x}y = x, \quad y_0 = 0, \quad x_0 = 1.$$

Решение.

Определим тип ДУ. Это линейное ДУ 1-ого порядка относительно y, т.к. y и y' входят в это уравнение в первой степени и оно имеет вид $y' + P(x)y = Q(x)$.

Сделаем подстановку $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от переменной x. Тогда $y' = u'v + v'u$. Подставив y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + v'u - \frac{3}{x}uv = x$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{3v}{x}\right) = x. \qquad (*)$$

Функцию v найдем так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю:

$$v' - \frac{3v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} - \frac{3v}{x} = 0. \qquad (**)$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dx}{x},$$

откуда $\ln v = 3\ln x$, $v = x^3$ — частное решение уравнения (**).

Подставив теперь $v = x^3$ в уравнение (*), получим

$$x^3 u' = x,$$

или

$$du = \frac{dx}{x^2},$$

откуда

$$\int du = \int \frac{dx}{x^2}, \quad u = -\frac{1}{x} + C, \text{ где } C = const.$$

Общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$y = uv = \left(C - \frac{1}{x}\right)x^3 = Cx^3 - x^2.$$

Ответ: $y = Cx^3 - x^2$ — общее решение, $y = x^3 - x^2$ — частное решение.

Задание 6. а) Найти общее решение ДУ.

$$y'' + y = \sin x \qquad \textbf{(1)}$$

Решение.

Решим сначала однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному

$$y'' + y = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i(\alpha = 0, \beta = 1)$, поэтому общее решение однородного уравнения **(2)** имеет вид $y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Частное решение уравнения **(1)** будем искать в виде

$$\bar{y} = x^k \left(A \cos x + B \sin x\right) \qquad \textbf{(3)}$$

В правой части последнего уравнения $\beta = 1$, поэтому $\beta i = i$ и $k = 1$ (k показывает, сколько раз число i встречается среди корней характеристического уравнения), а А и В — многочлены нулевой степени.

Поэтому $\bar{y} = x(A \cos x + B \sin x)$ — вид частного решения.

Найдем коэффициенты А и В

$\bar{y} = x(A \cos x + B \sin x)$

$\bar{y}' = x(A \cos x + B \sin x) + x(-A \sin x + B \cos x)$

$\bar{y}'' = 2(-A \sin x + B \cos x) + (-A \cos x - B \sin x)$

Подставив $\bar{y}$ и $\bar{y}''$ в **(1)** и приравняв коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях, получим

$-Ax \cos x - Bx \sin x - 2A \sin x + 2B \cos x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x$

при $\begin{matrix} \sin x: \\ \cos x: \end{matrix} \begin{cases} -2A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 0 \end{matrix}$

и по формуле **(3)** $\bar{y} = -\dfrac{1}{2} x \cos x$ — частное решение.

Тогда $y = y^* + \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{2} x \cos x$ — общее решение данного ДУ **(1)**.

Задание 6. б) Найти частное решение уравнения.

$$y'' - 4y' + 5y = 2xe^x \qquad \textbf{(1)},$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

Решение.

Общее решение y данного уравнения состоит из суммы общего решения y^* соответствующего однородного уравнения и частного решения $\bar{y}$ данного уравнения

$y = y^* + \bar{y}$.

Решим сначала соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \qquad (2)$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 5 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 2 \pm i$, поэтому $y^* = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ — общее решение уравнения (2).

Частное решение $\bar{y}$ будем искать в виде

$\bar{y} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n.

В нашем случае $\alpha = 1$, $n = 1$ (это следует из правой части данного уравнения), а $r = 0$, т.к. $\alpha = 1$ не встречается среди корней характеристического уравнения. Поэтому $\bar{y} = (Ax + B)e^x$ $(Q_1(x) = Ax + B)$

Найдем A и B

$$\bar{y} = (Ax + B)e^x$$

$$\bar{y}' = Ae^x + (Ax + B)e^x$$

$$\bar{y}'' = 2Ae^x + (Ax + B)e^x$$

подставив в уравнение (1) и сократив на $e^x \neq 0$, получим $(Ax + B) + 2A - 4(Ax + B) - 4A + 5(Ax + B) = 2x$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях·

При

$$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} A - 4A + 5A = 2 \\ B + 2A - 4B - 4A + 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ 2B - 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\bar{y} = (x + 1)e^x$,

$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x(x + 1)$ — общее решение данного ДУ.

Чтобы найти частное решение, вычислим C_1 и C_2, использовав начальные условия.

Т.к.

$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x(x + 1)$

и

$$y' = 2e^{2x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + e^{2x}\left(-C_1\sin x + C_2\cos x\right) + e^{x}\left(x+1\right) + e^{x},$$

то, подставив начальные условия, получим

$$\begin{cases} C_1 + 1 = 2 \\ 2C_1 + C_2 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 - 1 \end{cases}$$

Тогда $\bar{y} = e^{2x}\left(\cos x - \sin x\right) + e^{x}\left(x+1\right)$ — частное решение данного уравнения **(1)**, удовлетворяющее начальным условиям.

Задание 7. Решить систему ДУ приведением к ДУ высшего порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 4y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -3x - 4y \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Решение.

Продифференцируем первое уравнение этой системы. Получим $x'' = x' - 2y'$. Затем заменим в последнем уравнении y' его выражением из второго уравнения данной системы: $x'' = x' + 6x + 8y$. В последнем уравнении y заменим выражением $y = -\dfrac{1}{2}\left(x' - x\right)$ из первого уравнения системы. Таким образом, получим ДУ второго порядка

$$x'' = x' + 6x - 4x'4x \text{ или } x'' + 3x' - 10x = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

однородное с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $k^2 + 3k - 10 = 0$ имеет корни $k_1 = -5$, $k_2 = 2$, поэтому общее решение ДУ **(2)** имеет вид $x = C_1e^{-5t} + C_2e^{2t}$.

Сейчас y найдем из уравнения

$$y = -\frac{1}{2}\left(x' - x\right),$$

где

$$x' = -5C_1e^{-5t} + 2C_2e^{2t}.$$

Тогда

$$y = \frac{1}{2}\left(-x' + x\right) = \frac{1}{2}\left(5C_1e^{-5t} - 2C_2e^{2t} + C_1e^{-5t} + C_2e^{2t}\right) = 3C_1e^{-5t} - \frac{1}{2}C_2e^{2t}.$$

Таким образом, искомым решением являются функции

$$x = C_1e^{-5t} + C_2e^{2t}$$

$$y = 3C_1e^{-5t} - \frac{1}{2}C_2e^{2t}$$

Контрольная работа №4

"Кратные и криволинейные интегралы"

Задание 1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями D:

1.1. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ y = 1,\ x = \sqrt{4 - y^2}$.
1.2. $x \ge 0,\ y = 1,\ y = -1,\ y = \log_{1/2} x$.
1.3. $y = -x,\ 3x + y = 3,\ y = 3$.
1.4. $x + 2y - 6 = 0,\ y = x,\ y \ge 0$.
1.5. $x = \sqrt{9 - y^2},\ y = x,\ y \ge 0$.
1.6. $x = 0,\ y = 0,\ y = 1,\ (x-3)^2 + y^2 = 1$.
1.7. $x = 0,\ x = -2,\ y \ge 0,\ y = x^2 + 4$.
1.8. $y = 3 - x^2,\ y = -x$.
1.9. $x \le 0,\ y = 1,\ y = 4,\ y = -x$.
1.10. $y \ge 0,\ y \le 1,\ y = x,\ x = -\sqrt{4 - y^2}$.
1.11. $y \le 0,\ x^2 = -y,\ x = \sqrt{1 - y^2}$.
1.12. $x = -1,\ x = -2,\ y \ge 0,\ y = x^2$.
1.13. $y = \sqrt{4 - x^2},\ x \ge 0,\ x = 1,\ y = 0$.
1.14. $y = -x,\ y^2 = x + 3$.
1.15. $y \ge 0,\ x = \sqrt{y},\ y = \sqrt{8 - x^2}$.
1.16. $y = 0,\ y \ge x,\ y = -\sqrt{2 - x^2}$.
1.17. $x \le 0,\ y \ge 1,\ y \le 3,\ y = -x$.
1.18. $y \ge 0,\ x + 2y - 12 = 0,\ y = \lg x$.
1.19. $x = \sqrt{2 - y^2},\ x = y^2,\ y \ge 0$.
1.20. $y^2 = 2 - x,\ y = x$.
1.21. $x \ge 0,\ y \ge x,\ y = \sqrt{9 - x^2}$.
1.22. $y^2 = 2x,\ x^2 = 2y,\ x \le 1$.
1.23. $x \ge 0,\ y \ge 1,\ y \le 3,\ y = x$.
1.24. $y = x^2 - 2,\ y = x$.
1.25. $y = \sqrt{2 - x^2},\ y = x^2$.
1.26. $x^2 = 2 - y,\ x + y = 0$.
1.27. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le 1,\ y = \ln x$.
1.28. $x = \sqrt{8 - y^2},\ y \ge 0,\ y = x$.
1.29. $x^2 = 2y,\ 5x - 2y - 6 = 0$.
1.30. $y = \sqrt{4 - x^2},\ y = \sqrt{3x},\ x \ge 0$.

Задание 2. Вычислить массу материальной пластины, занимающей область D плоскости XOY, если поверхностная плотность ρ(x,y) и границы области D заданы уравнениями:

2.1. $\rho(x,y) = x^2 + y,\ \mathrm{D}: \mathrm{y} = \mathrm{x}^2,\ x = y^2$.
2.2. $\rho(x,y) = xy^2,\ \mathrm{D}: \mathrm{y} = \mathrm{x}^2,\ y = 2x$.
2.3. $\rho(x,y) = x + y,\ \mathrm{D}: \mathrm{y}^2 = \mathrm{x},\ y = x$.
2.4. $\rho(x,y) = x^2 \cdot y,\ \mathrm{D}: \mathrm{y} = 2 - \mathrm{x},\ y = x,\ x \ge 0$.

2.5. $\rho(x,y)=x^3-2y,\ D: y=x^2-1,\ x\ge 0,\ y\le 0.$

2.6. $\rho(x,y)=y-x,\ D: y=x,\ y=x^2.$

2.7. $\rho(x,y)=1+y,\ D: y^2=x,\ 5y=x.$

2.8. $\rho(x,y)=x+y,\ D: y=x^2-1,\ y=-x^2+1.$

2.9. $\rho(x,y)=x(y-1),\ D: y=5x,\ y=x,\ x=3.$

2.10. $\rho(x,y)=(x-2)\cdot y,\ D: y=x,\ y=\frac{1}{2}x,\ x=2.$

2.11. $\rho(x,y)=x-y^2,\ D: y=x^2,\ y=1.$

2.12. $\rho(x,y)=x^2\cdot y,\ D: y=2x^3,\ y=0,\ x=1.$

2.13. $\rho(x,y)=x^2+y^2,\ D: x=y^2,\ x=1.$

2.14. $\rho(x,y)=x\cdot y,\ D: y=x^3,\ y=0,\ x\le 2.$

2.15. $\rho(x,y)=x+y,\ D: y=x^3,\ y=8,\ y=0,\ x=3.$

2.16. $\rho(x,y)=x\cdot(2x+y),\ D: y=1-x^2,\ y\ge 0.$

2.17. $\rho(x,y)=y\cdot(1-x),\ D: y^3=x,\ y=x.$

2.18. $\rho(x,y)=x\cdot y^3,\ D: y^2=1-x,\ x\ge 0.$

2.19. $\rho(x,y)=x\cdot(y+5),\ D: y=x+5,\ x+y+5=0,\ x\le 0.$

2.20. $\rho(x,y)=x-y,\ D: y=x^2-1,\ y=3.$

2.21. $\rho(x,y)=(x+1)\cdot y^2,\ D: y=3x^2,\ y=3.$

2.22. $\rho(x,y)=x\cdot y^2,\ D: y=x,\ y=0,\ x=1.$

2.23. $\rho(x,y)=x^3+y,\ D: x+y=1,\ x+y=2,\ x\le 1,\ x\ge 0.$

2.24. $\rho(x,y)=x\cdot y^3,\ D: y=x^3,\ y\ge 0,\ y=4x.$

2.25. $\rho(x,y)=x^3+3y,\ D: x+y=1,\ y=x^2-1,\ x\ge 0.$

2.26. $\rho(x,y)=x\cdot y,\ D: y=\sqrt{x},\ y=0,\ x+y=2.$

2.27. $\rho(x,y)=\frac{y^2}{x^2},\ D: y=x,\ xy=1,\ y=2.$

2.28. $\rho(x,y)=y\cdot(1+x^2),\ D: y=x^3,\ y=3x.$

2.29. $\rho(x,y)=y^2\cdot(1+2x),\ D: x=2-y^2,\ x=0.$

2.30. $\rho(x,y)=e^y,\ D: y=\ln x,\ y=0,\ x=2.$

Задание 3. Вычислить координаты центра масс однородной ($\rho(x,y)=1$) пластины D, ограниченной данными линиями, использовав полярные координаты. D:

3.1. $x^2+y^2-2y=0, \quad x-y\le 0.$

3.2. $x^2+y^2-2x=0, \quad x+y\le 0.$

3.3. $x^2+y^2+2y=0, \quad x-y\ge 0.$

3.4. $x^2+y^2+2x=0, \quad x+y\ge 0.$

3.5. $x^2+y^2+2x\ge 0, \quad x^2+y^2+2y\le 0, \quad x\le 0.$

3.6. $x^2+y^2-2y\ge 0, \quad x^2+y^2+2x\le 0, \quad y\ge 0.$

3.7. $x^2+y^2-2y\le 0, \quad x^2+y^2-2x\ge 0, \quad x\ge 0.$

3.8. $x^2+y^2-2x\le 0, \quad x^2+y^2+2y\ge 0, \quad y\le 0.$

3.9. $x^2+y^2-2x\ge 0, \quad x^2+y^2+2y\le 0, \quad x\ge 0.$

3.10. $x^2+y^2+8x\le 0, \quad x^2+y^2+8y\ge 0, \quad y\le 0.$

3.11. $x^2+y^2-2y\le 0, \quad x^2+y^2+2x\ge 0, \quad x\le 0.$

3.12. $x^2+y^2-6y\ge 0, \quad x^2+y^2-6x\le 0, \quad y\ge 0.$

3.13. $x^2+y^2+4y=0, \quad x^2+y^2+2y=0, \quad x\le 0.$

3.14. $x^2+y^2-2x=0, \quad x^2+y^2-x=0, \quad y\ge 0.$

3.15. $x^2+y^2+2y=0, \quad x^2+y^2+y=0, \quad x\ge 0.$

3.16. $x^2+y^2-4y=0, \quad x^2+y^2-2y=0, \quad x\ge 0.$

3.17. $x^2+y^2-2y=0, \quad x^2+y^2-y=0, \quad x\le 0.$

3.18. $x^2+y^2+2x=0, \quad x^2+y^2+x=0, \quad y\ge 0.$

3.19. $x^2+y^2-8x=0, \quad x^2+y^2-4x=0, \quad y\le 0.$

3.20. $x^2+y^2+2x=0, \quad x^2+y^2+x=0, \quad y\le 0.$

3.21. $x^2+y^2+10y=0, \quad x+y\le 0, \quad x\ge 0.$

3.22. $x^2+y^2-6y=0, \quad y-x\ge 0, \quad x\ge 0.$

3.23. $x^2+y^2+2x=0, \quad y-x\ge 0, \quad y\le 0.$

3.24. $x^2+y^2-8y=0, \quad x+y\ge 0, \quad x\le 0.$

3.25. $x^2+y^2+2x=0, \quad x+y\le 0, \quad y\ge 0.$

3.26. $x^2+y^2-2x=0, \quad y-x\le 0, \quad y\ge 0.$

3.27. $x^2+y^2-6x=0, \quad y-x\le 0, \quad x+y\ge 0.$

3.28. $x^2+y^2-2y=0, \quad y-x\ge 0, \quad x+y\ge 0.$

3.29. $x^2+y^2+4x=0, \quad x+y\le 0, \quad y-x\ge 0.$

3.30. $x^2+y^2+4x=0, \quad y-x\le 0, \quad x+y\le 0.$

Задание 4. Используя кратные интегралы вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертёж.

4.1. $z=4-x, \quad x^2+y^2=4x, \quad z=0.$

4.2. $z=4-y^2, \quad x^2+y^2=4, \quad z\ge 0.$

4.3. $z=2-x-y, \quad x^2+y^2=1, \quad z\ge 0.$

4.4. $z=y^2, \quad x+y=2, \quad x\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.5. $z=x, \quad x=\sqrt{9-y^2}, \quad x=\sqrt{25-y^2}, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.6. $z=4-x-y, \quad x^2+y^2=4, \quad z\ge 0.$

4.7. $z=x^2, \quad x-2y+2=0, \quad x+y=7, \quad z\ge 0.$

4.8. $y=\sqrt{25-x^2}, \quad x=4, \quad z=y, \quad x\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.9. $x=2\sqrt{y}, \quad y=2\sqrt{x}, \quad z=4-x, \quad z\ge 0.$

4.10. $z=x^2, \quad x+y=9, \quad 2x-y=0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.11. $z=x^2, \quad y=2x, \quad x=4, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.12. $z=\sqrt{y}, \quad y=2x, \quad y=3, \quad x\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.13. $z=y^2, \quad y=2x, \quad x=3, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.14. $y^2=2-x, \quad z=3x, \quad z\ge 0.$

4.15. $y=\sqrt{9-x^2}; \quad z=2y, \quad z\ge 0.$

4.16. $z=x^2+y^2, \quad x+y=2, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.17. $x^2+y^2=9, \quad z=5-x-y, \quad z\ge 0.$

4.18. $x=\sqrt{4-y^2}, \quad z=x, \quad z\ge 0.$

4.19. $z=x^2, \quad x+y=2, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.20. $x=\sqrt{25-y^2}, \quad z=x, \quad y=4, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.21. $x^2+y^2=9, \quad z=y^2, \quad z\ge 0.$

4.22. $z=1-x^2-y^2, \quad y\ge x, \quad x\ge 0, \quad z\ge 0.$

4.23. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = x^2 + y^2, \quad z \geq 0.$

4.24. $z = x^2, \quad y = x, \quad y = 2, \quad z \geq 0.$

4.25. $x^2 + y^2 = 4, \quad y + z = 2, \quad z \geq 0.$

4.26. $4z = y^2, \quad 2x + y = 2, \quad x - y = 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$

4.27. $z = y^2, \quad 2x + y = 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$

4.28. $x = 2y^2 + 1, \quad z = 1 - y^2, \quad x = y^2, \quad z \geq 0.$

4.29. $z = 9 - x^2, \quad y = 3 - x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$

4.30. $z = 4\sqrt{y}, \quad x + y = 4, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0.$

Задание 5. Вычислить данный криволинейный интеграл вдоль линии L. Сделать чертёж.

5.1. $\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy,$ где L - дуга параболы $y = 2x^2$ от т. O(0,0) до т. A(1,2).

5.2. $\int\limits_{LOBA} 2xydx - x^2dy,$ где L_{OBA} - ломаная OBA; O(0,0), B(2,0), A(2,1).

5.3. $\int\limits_L \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy,$ где L - дуга циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases};$ $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$

5.4. $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (x - y^2)dy,$ вдоль дуги L окружности $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$ от т. A(5,0) до т.B(0,5).

5.5. $\int\limits_L 2xydx - x^2dy,$ где L - дуга параболы $y = \frac{x^2}{4}$ от т. O(0,0) до т. A(2,1).

5.6. $\int\limits_L (x - \frac{1}{y})dy,$ где L - дуга параболы $y = x^2$ от т. A(1,1) до т. B(2,4).

5.7. $\int\limits_L \cos ydx - \sin xdy,$ где L - отрезок прямой, соединяющей т. A(2,0) и B(-2,0).

5.8. $\int\limits_L ydx - xdy,$ где L - четверть дуги окружности $\begin{cases} x = R\cdot\cos t, \\ y = R\cdot\sin t \end{cases}$ лежащая в первом квадранте и "пробегаемая" против хода часовой стрелки.

5.9. $\int\limits_L (xy - x)dx + \frac{x^2}{y}dy,$ где L - дуга параболы $y = 2\sqrt{x}$ от т. O(0,0) до т. A(1,2).

5.10. $\oint\limits_L ydx\text{-}xdy$ где L - дуга эллипса $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases},$ "пробегаемая" против хода ч.с.

5.11. $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy,$ где L - дуга параболы $y = x^2$ от т. A(1,1) до т. B(2,4).

5.12. $\int\limits_L xdy$, где L - дуга синусоиды $y = \sin x$ от т. $(\pi,0)$ до т. $(0,0)$.

5.13. $\int\limits_L y^2 dx + x^2 dy$, где L - верхняя половина эллипса $\begin{cases} x = a\cdot\cos t \\ y = b\cdot\sin t \end{cases}$, $(a>0, b>0)$,

"пробегаемая" по ходу часовой стрелки.

5.14. $\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy$, где L - дуга параболы $y = 2\sqrt{x}$ от т. O(0,0) до т. B(1,2).

5.15. $\int\limits_L xdx + xydy$, где L - дуга верхней половины окружности $x^2 + y^2 = 2x$ при

положительном направлении обхода контура.

5.16. $\int\limits_L (x-y)dx + dy$, где L - дуга верхней половины окружности $x^2 + y^2 = R^2$,

"пробегаемая" в положительном направлении.

5.17. $\int\limits_L xydx + (y-x)dy$, где L - дуга кривой $y = x^3$ от т. A(0,0) до т. B(1,1).

5.18. $\int\limits_L 4x\sin^2 ydx + y\cos 2xdy$, где L - отрезок прямой, соединяющей т.O(0,0) и B(3,6).

5.19. $\oint\limits_L ydx - xdy$ где L - дуга элемента эллипса $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, при положительном

направлении обхода контура.

5.20. $\int\limits_L (x^2 y - 3x)dx + (y^2 x + 2y)dy$, вдоль верхней половины L эллипса $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$,

$0 \le t \le \pi$.

5.21. $\int\limits_L ydx + \frac{x}{y}dy$, вдоль дуги L кривой $y = e^{-x}$ от т.A(0,1) до т.B(-1,e).

5.22. $\int\limits_L \frac{y^2+1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$, вдоль отрезка L прямой, соединяющего т.A(1,2) и B(2,4).

5.23. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + xdy$ вдоль дуги L кривой $y = \ln x$ от т.A(1,0) до т. B(e,1).

5.24. $\int\limits_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, вдоль границы L треугольника ABC, обходя её против хода

часовой стрелки, если A(1,0), B(1,1), C(0,1).

5.25. $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, вдоль дуги L параболы $y = x^2$ от т. A(-1,1) до т. B(1,1).

5.26. $\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy$, где L - отрезок прямой от т. O(0,0) до т. A(1,2).

5.27. $\int\limits_L xdy - ydx,$ где L - дуга кубической параболы $y = x^3$ от т. O(0,0) до т. A(2,8).

5.28. $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (x - y^2)dy,$ вдоль дуги L окружности $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases},$

обходя её против хода часовой стрелки от т.A(5,0) до т. B(0,5).

5.29. $\int\limits_L xdy,$ где L - дуга правой полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$ от т. A(0,-a) до т. B(0, a); a > 0.

5.30. $\int\limits_L y^2 dx + x^2 dy,$ где L - дуга верхней половины эллипса $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases},$

"пробегаемая" по ходу часовой стрелки.

Решение типового варианта КР №4

Задание №1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D ограничена линиями $y=x^2$, $y=2-x$, $x=0$, $x=1$.

Решение:

Если область D правильная относительно оси OY и определяется системой неравенств $D: a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, то двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

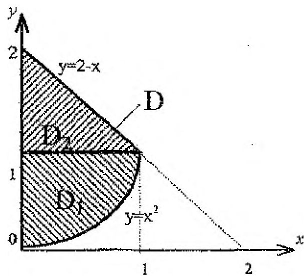
с внешним интегрированием по x.

Если область D является правильной относительно оси OX и определяется системой неравенств $D: c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, то двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

с внешним интегрированием по y.

Построим область D на плоскости XOY.



Область интегрирования является правильной относительно оси OY, следовательно, согласно формуле (1), получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$$

С другой стороны, данная область не является правильной относительно оси OX. Поэтому её надо разбить на области, являющиеся правильными по отношению к оси OX. Т.к. правый участок границы области D задан двумя линиями $y=x^2$ и $y=2-x$, то прямая $y=1$ разбивает её на две области: $D_1: 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y}$ и $D_2: 1 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2-y$, являющиеся правильными относительно оси OX. Воспользовавшись формулой (2) по каждой из полученных областей, получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx.$$

<u>*Ответ:*</u> $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx.$

Задание №2. Вычислить массу материальной пластины, занимающей область D плоскости XOY, если поверхностная плотность $\rho(x,y) = y$ и границы области D заданы уравнениями $x = (y-1)^2$, $y = x-1$.

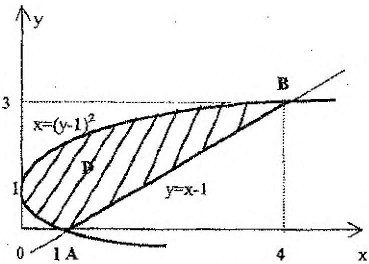
Решение:

Как известно, масса материальной пластины с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$, занимающей область D, определяется по формуле:

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy \tag{3}$$

Построим область D. Найдём координаты точек пересечения линий, ограничивающих данную область:

$$\begin{cases} x = (y-1)^2 \\ y = x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 3 \end{cases} \text{ т.е. } A(1;0), B(4;3).$$



Т.к. область D – правильная относительно оси OX, то искомая масса вычисляется по формулам (3) и (2):

$$m=\iint\limits_D y\cdot dxdy=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{(y-1)^2}^{y+1} ydx=\int\limits_0^3 y(y+1-(y-1)^2)dy=\int\limits_0^3(3y^2-y^3)dy=\left(y^3-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{4}.$$

Ответ:.27/4.

Задание №3. Вычислить координаты центра масс однородной ($\rho(x,y)=1$) пластины D, ограниченной данными линиями, использовав полярные координаты.

$$D: x^2+y^2-2x=0,\ x^2+y^2-x=0,\ y-x=0,\ y+x=0.$$

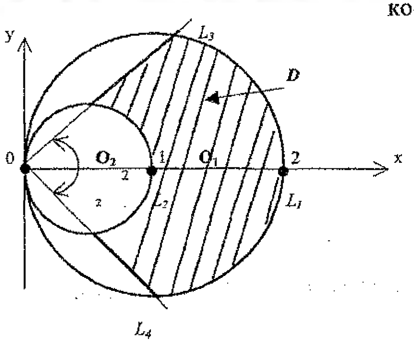
Решение:

Построим область D. Для этого определим типы линий, ограничивающих область D:

$L_1:\ x^2+y^2-2x=0 \Leftrightarrow (x^2-2x+1)-1+y^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$ – уравнение окружности с центром в т. $O_1(1;0)$ и радиусом $R_1=1$;

$L_2:\ x^2+y^2-x=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+y^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ – уравнение окружности с центром в т. $O_2(1/2;0)$ и радиусом $R_2=1/2$;

$L_3: \ y = x$ и $L_4: \ y = -x$ – уравнения биссектрис I-го и IV-го координатных углов.



Координаты центра масс $C(x_c;y_c)$ материальной пластины с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$ определяются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}, \tag{4}$$

где $m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$ – масса пластины, а величины:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \iint\limits_D y \cdot \rho(x,y)dxdy \\ M_y &= \iint\limits_D x \cdot \rho(x,y)dxdy \end{aligned}\right\} \quad - \tag{5}$$

статические моменты пластины D относительно осей OX и OY соответственно.

Перейдём к полярным координатам.

Переход в двойном интеграле от декартовых (x,y) к полярным (r,φ) координатам осуществляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)r\cdot dr\cdot d\varphi, \tag{6}$$

где $x = r\cdot\cos\varphi, \ \ y = r\cdot\sin\varphi, \ \ (0 \le \varphi \le 2\pi, \ \ r \ge 0)$.

Область D преобразуется в область D', в которой уравнению границы $L_1: \ (x-1)^2 + y^2 = 1$ соответствует уравнение $r=2\cos\varphi$, уравнению

$L_2: \ (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{2}$ – уравнение $r=\cos\ \varphi$, уравнению линии $L_3: \ y=x-\varphi=\frac{\pi}{4}$, линии $L_4: \ y=-x-\varphi=-\frac{\pi}{4}$.

Таким образом D': $\cos\varphi \le r \le 2\cos\varphi, \ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Т.к. данная пластина симметрична относительно оси OX, то

$$y_c=0, \qquad x_c=\frac{M_y}{m}$$

(см. формулы (3),(4),(5),(6)).

Здесь:

$$m=\iint_D dxdy=\iint_{D'} r\cdot drd\varphi=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}r\cdot dr=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2\Bigg|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(4\cos^2\varphi-\cos^2\varphi)d\varphi=$$

$$\frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\cdot d\varphi=\frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{3}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

Вычислим M_y:

$$M_y=\iint_{D'} r\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot drd\varphi=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\cdot d\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}r^2dr=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\ \frac{r^3}{3}\Bigg|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{7}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\varphi\cdot d\varphi=\frac{14}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{4}d\varphi=\frac{7}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{7}{6}\left((\varphi+\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\varphi)d\varphi\right)=\frac{7}{6}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right)$$

Тогда $x_c=\dfrac{\frac{7}{6}\left(\frac{3}{8}\pi+1\right)}{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\pi+1\right)}=\dfrac{7(3\pi+8)}{18(\pi+2)}$.

<u>*Ответ:*</u> $C\left(\dfrac{7(3\pi+8)}{18(\pi+2)};\ 0\right)$.

Задание №4: Используя кратные интегралы вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями:

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y=2,\quad 2z=x^2+y^2.$$

Сделать чертёж.

Решение:

Определим типы поверхностей, ограничивающих тело. Уравнение $2z=x^2+y^2$ задаёт параболоид вращения, остальные поверхности – плоскости:

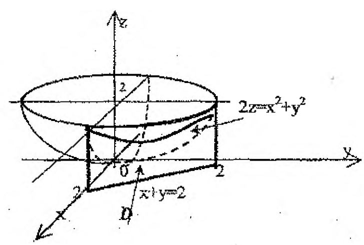
$x=0$ – плоскость YOZ,

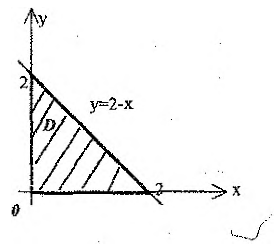
$y=0$ – плоскость XOZ,

$z=0$ – плоскость YOX,

$x+y=2$ – плоскость, параллельная оси OZ.

Изобразим данное тело.





$$D:\ 0 \le x \le 2$$
$$0 \le y \le 2 - x$$

Вычислим объём с помощью тройного интеграла.

Объём v вычисляется в соответствии с формулой:

$$v = \iiint\limits_V dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (7)$$

где v – объём области v: $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, $\psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)$ и область V – правильная относительно оси OZ.

В данной задаче V: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x$, $0 \le z \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$. Тогда:

$$v=\int_0^2 dx\int_0^{2-x} dy\int_0^{\frac{x^2+y^2}{2}} dz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x} z\Big|_0^{\frac{x^2+y^2}{2}} dy=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(x^2+y^2)dy=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2(2-x)+\frac{1}{3}(2-x)^3\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(2x^2-x^3+\frac{1}{3}(2-x)^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{12}(2-x)^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Сейчас найдём объём данного тела с помощью двойного интеграла по формуле

$$v=\iint_D f(x,y)dxdy \tag{8}$$

где $z=f(x,y)$ – уравнение поверхности, ограничивающее тело V сверху, область D – проекция тела V на плоскость XOY.

В данном случае $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, область ограничена треугольником, для которого $0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 2-x$. Следовательно, $v=\displaystyle\iint_D\frac{x^2+y^2}{2}dxdy$ или

$$v=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}\frac{x^2+y^2}{2}dy=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(2x^2-x^3+\frac{(2-x)^3}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(2-x)^4}{12}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}+\frac{16}{12}\right)=\frac{4}{3}.$$

<u>*Ответ:*</u> $\dfrac{4}{3}$.

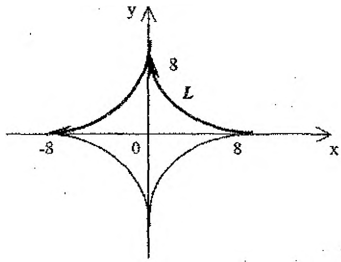
Задание №5. Вычислить криволинейный интеграл $J=\displaystyle\int_L\left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy$,

где L – верхняя дуга астроиды $\begin{cases}x=8\cos^3 t\\ y=8\sin^3 t\end{cases}$ от точки (8;0) до точки (-8;0).

Сделать чертёж.

Решение:

Выполним чертёж:



Найдём *dx*, *dy*:

$dx = d(8\cos^3 t) = 24\cos^2 t(-\sin t)dt,$
$dy = d(8\sin^3 t) = 24\sin^2 t \cos t\, dt.$

При перемещении от точки (8;0) к точке (-8;0) параметр *t* меняется от 0 до π.

$0 \le t \le \pi$. (Это можно установить, подставив, например, координаты x_1 и x_2 начальной и конечной точек дуги в уравнение астроиды).

Тогда:

$$J = \int_0^{\pi} \left(2\cos t + 8\sin^3 t\right)\cdot\left(-24\sin t\cdot\cos^2 t\right)dt - \left(2\sin t + 8\cos^3 t\right)\cdot 24\sin^2 t\cdot\cos t\cdot dt =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(-48\sin t\cdot\cos^3 t - 192\sin^4 t\cdot\cos^2 t - 48\sin^3 t\cdot\cos t - 192\sin^2 t\cdot\cos^4 t\right)dt =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(-48\sin t\cdot\cos t - 192\sin^2 t\cdot\cos^2 t\right)dt = \int_0^{\pi}\left(-24\sin 2t - 48\sin^2 2t\right)dt =$$

$$= 12\cos 2t\Big|_0^{\pi} - 24\int_0^{\pi}(1-\cos 4t)dt = -24\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\pi} = -24\pi.$$

Ответ: -24π.

Литература

1. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. – Мн.: ВШ,1984, ч. 2.3.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.- М.: Наука, 1985, ч. 1,2.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П. Рябушко). – Мн.: ВШ, ч. 2,3, 1990-1991.
4. Гусак А.А. Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения.- Мн.: ТетраСистемс, 1998.
5. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике.- Мн.: ВШ, 1968.
6. Данко П.Е., Попов А.Н., Кожевникова Г.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч. 2. – Мн.: ТетраСистемс, 1999.
7. Тузик А.И. Интегрирование функций одной и нескольких переменных. Брест. Изд-во БГТУ, 2000.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Зиселюк Николай Петрович
Лизунова Ирина Владимировна
Мороз Людмила Трофимовна

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕРАЛЫ

Методические рекомендации и варианты контрольных работ по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения.

Редактор Т.В. Строкач
Ответственный за выпуск И.В. Лизунова
Технический редактор А.Д. Никитчик

Подписано в печать 19.03.2002. Формат 60×84 1/16.
Бумага писч. Усл. п.л. 2,4 Уч. изд.л. 2,5 Тираж 150 экз
Заказ № 428.

Отпечатано на ризографе Учреждения образования « Брестский государственный технический университет.» 224017, Брест, ул. Московская, 267.